关于 q-纳拉亚纳多项式的一些说明（q=−1）

Johann Cigler

摘要

我们得到 q −纳拉亚纳多项式在 $1q$ =−时的一些性质，并将其与 $1.q$ =时的相应性质进行比较。

1. 引言

Let

(1) $$C_n(t;q)=\sum_{k=0}^{n-1} q^{k^2+k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}\frac{t^k}{[k+1]}=\sum_{k=0}^{n-\wedge 1} N_{n,k}(q)t^k$$

对于 >0 n 且 $_0(\ ;\ )\ 1Ctq=$，设其为 q −纳拉亚纳多项式。众所周知（例如参见 [4]），, $(\ )_{n\ k}N\ q$ 可以解释为半长度为 n 且含有 k 个谷的迪克路径集合的主指标生成函数，并且

(2) $$C_n(1;q)=\sum_{k=0}^{n-1} q^{k^2+k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}\frac{1}{[k+1]}=\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

给出了卡特兰数的 q − q 类比 $_n=\ \begin{matrix}1\\+1\end{matrix}\begin{pmatrix}2\\ \end{pmatrix}$。 $\underline{nC\ nn}$

这里 $_q n\ n\ k\ k\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}$ 表示一个 q − 二项式系数。

当 $1q$ =−时，恒等式 (1) 化简为

(3) $$c_n(t)=C_n(t;-1)=\sum_{k=0}^{n} v(n,k)t^k$$

with

(4) $$v(n,k)=N_{n,k}(-1)=\begin{pmatrix}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\\ \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\\ \left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor\end{pmatrix}$$

并且恒等式 (2) 变为

(5) $$c_n(1)=C_n(1;-1)=\sum_{k=0}^{n} v(n,k)=\begin{pmatrix}n\\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\end{pmatrix}.$$

在 [1] 中已经证明，(,)v nk 可以解释为半长度为 n、具有 k 个谷的对称戴克路径的数目。在本注记中，我们得到多项式 ( )$_nc$ t 的若干代数性质，并将它们与著名的 Narayana 多项式的相应性质进行比较

$$C_n(t) = C(t;1) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} \frac{t^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} N_{n,k} t^k. \tag{6}$$

数列 ( )$_nc$ t 的前几项为

$$\left(c_n(t)\right)_{n\geq 0} = \left(1,1,1+t,1+t+t^2,1+2t+2t^2+t^3,1+2t+4t^2+2t^3+t^4,\cdots\right).$$

前几个 Narayana 多项式为

$$\left(C_n(t)\right)_{n\geq 0} = \left(1,1,1+t,1+3t+t^2,1+6t+6t^2+t^3,1+10t+20t^2+10t^3+t^4,\cdots\right).$$

众所周知，Narayana 多项式的汉克尔行列式满足

$$\det\left(C_{i+j}(t)\right)_{i,j=0}^{n-1} = \det\left(C_{i+j+1}(t)\right)_{i,j=0}^{n-1} = t^{\binom{n}{2}}. \tag{7}$$

对于数列 ($_n$) $_0$( )$_nc$ t $_\geq$ ，我们证明

$$\det\left(c_{i+j}(t)\right)_{i,j=0}^{n-1} = t^{\binom{n}{2}}, \quad \det\left(c_{i+j+1}(t)\right)_{i,j=0}^{n-1} = (-t)^{\binom{n}{2}}. \tag{8}$$

这唯一确定了数列 ( )。$_nc$ t

2. 多项式 ()$_nc$ t 的基本性质

多项式 ( )$_nc$ t 对 $1n\geq$ 满足如下递推关系。

$$\begin{aligned} c_{2n}(t) &= (1+t)c_{2n-1}(t), \\ c_{2n+1}(t) &= (1+t)c_{2n}(t) - tC_n\left(t^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

这些恒等式可通过比较系数轻易验证。

对于第二个恒等式，注意 (2 1,2)(+ = 2 ,2 + 2 ,2 −1)()v n k v n k v n k 且.(2 1,2 1)(+ + = 2 ,2 +1 + 2 ,2 −)().$_{nk}$$v$ n k v n k v n k N

当 =−1 t 时，我们得到

$$c_{2n}(-1) = 0, \quad c_{2n+1}(-1) = C_n. \tag{10}$$

Since $v(2n+1,2k) = \binom{n}{k}^2$ and $v(2n+1,2k+1) = \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$ we get

(11) $$c_{2n+1}(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 t^{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}t^{2k+1}.$$

这些多项式

(12) $$W_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 t^k$$

称为 B 型 Narayana 多项式。由于

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}t^k = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}\frac{t^k}{k+1} = nC_n(t)$ we get

定理 1

多项式 $c_{2n+1}(t)$ 明确表示为

(13) $$c_{2n+1}(t)=W_n\left(t^2\right)+ntC_n\left(t^2\right).$$

3. 生成函数

生成函数

(14) $$C(t,z)=\sum_{n\geq 0}C_n(t)z^n$$

Narayana 多项式的生成函数满足（参见 [4]）

(15) $$C(t,z)=1-z(t-1)C(t,z)+tzC(t,z)^2$$

或等价地

(16) $$\frac{1}{C(t,z)}=1+(t-1)z-tzC(t,z).$$

由此得到著名公式

(17) $$C(t,z)=\sum_{n\geq 0}C_n(t)z^n=\frac{1+z(t-1)-\sqrt{(1+z(t-1))^2-4tz}}{2tz}.$$

对于移位序列的生成函数

(18) $$G(t,z)=\sum_{n\geq 0}C_{n+1}(t)z^n=\frac{C(t,z)-1}{z}$$

由（15）可得

(19) $$G(t,z)=\frac{1}{1-(1+t)z-tz^2G(t,z)}$$

或等价地

(20) $$G(t,z)=1+(1+t)zG(t,z)+tz^2G(t,z)^2$$

由此可得

(21) $$G(t,z)=\frac{1-(1+t)z-\sqrt{(1-(1+t)z)^2-4tz^2}}{2tz^2}.$$

Let

(22) $$c(t,z)=\sum_{n\geq 0}c_n(t)z^n$$

为多项式 ( ) 的生成函数。$_nc\quad t$

递推关系 (9) 表明

(23) $$(1-(1+t)z)c(t,z)=1-ztC\left(t^2,z^2\right).$$

另一方面，计算结果表明

$$\frac{1}{c(t,z)}=1-(1+t)z+tzc(-t,-z)$$

由此得到

(24) $$(1-(1+t)z)c(t,z)=1-tzc\left(-t,-z\right)c(t,z).$$

比较 (23) 和 (24) 得到

定理 2

(25) $$c(t,z)c(-t,-z)=\sum_{n\geq 0}C_n\left(t^2\right)z^{2n}=C\left(t^2,z^2\right).$$

证明

根据（23），恒等式（25）可写成 $^{1}\quad\left(^{2}\ ^{2}\right)1\quad\left(^{2}\ ^{2}\right)\quad\left(^{2}\ ^{2}\right),,,$

$$\frac{}{1-\ 1+}\quad\frac{}{1+\ 1-}=\quad()()\ tzC\ t\ z\ tzC\ t\ z\ C\ t\ z\ t\ z\ tz$$

or equivalently $\left(1-tzC\left(t^2,z^2\right)\right)^2=C\left(t^2,z^2\right)\left((1-tz)^2-z^2\right).$

展开此公式得 $\left(^{2}\ ^{2}\right)=1+\left(1-\ ^{2}\right)^{2}\ \left(^{2}\ ^{2}\right)+\ ^{2\ 2}\ \left(^{2}\ ^{2}\right)^2,,,C\ t\ z\ t\ zC\ t\ z\ z\ t\ C\ t\ z$

这由（15）可知成立。

同理可得移位多项式的生成函数

(26) $$g(t,z)=\sum_{n\geq 0}c_{n+1}(t)z^n$$

恒等式

(27) $$g(t,z)=1+(1+t)zg(t,z)-tz^2G\left(t^2,z^2\right).$$

定理 3

(28) $$g(t,z)g(t,-z)=G\left(t^2,z^2\right).$$

证明

恒等式（27）可以写成 $1-\ 1+\ \ =1-\ \ ^2\ \ \left(\ ^2,\ ^2\ \ \right)(\ )(\ ,\ )$。$t\ z\ g\ t\ z\ tz\ G\ t\ z$ 因此，恒等式 (28) 可写为 $\left(1-\ \ ^2\ \ \left(\ ^2\ \ ^2\right)\right)^2=\left(1-\ 1+\ \ ^2\ \ ^2\right)\ \ \left(\ ^2\ \ ^2\right),(\ ),tzG\ \ t\ \ z\ \ t\ \ z\ \ G\ \ t\ \ z$ 并可展开为

$\left(\ ^2\ \ ^2\right)=1+\left(1+\ ^2\right)\ ^2\ \ \left(\ ^2\ \ ^2\right)+\ ^2\ ^4\ \ \left(\ ^2\ \ ^2\right),,,,G\ t\ z\ t\ z\ G\ t\ z\ t\ zG\ t\ z$ 这是由 (20) 得出的。

例如，对于 $=\pm1\ t$，我们得到 $=\sum_{\geq0}\left(\begin{bmatrix}+1\\+1\\2\end{bmatrix}\right)$ $(1,)\ _{n\ n}\ n\ g\ z\ zn$ 以及 $^2(-1,\ \ =)(1,)$。$g\ z\ C\ z$

---

4. 汉克尔行列式

设 $(\ \ \ )\ _0(\ )\ _n a\ n_{\geq}$ 是一个实数序列，满足 $(0)\ =1\ a$，并在 $\mathbb{R}[\ \ ]\ x$上定义线性泛函 L，使得 $(\ \ )(\ )$。$_nL\ x\ a\ n=$ 那么，以下结果是众所周知的（例如参见 [2],[3]）

如果 $\sum(\ )\ _n an\ \ z_{0n\geq}$ 具有连分数展开

(29) $$\sum_{n\geq0}a(n)z^n=\cfrac{1}{1-s_0z-\cfrac{t_0z^2}{1-s_1z-\cfrac{t_1z^2}{1-\ddots}}}$$

其中所有 $_n\ \ 0t\ \ \neq$ 那么汉克尔行列式 $=\ \ (\ \ +\ \ )^{-1}_{=0}$,det $(\ )\ _{n\ n\ ij}\ d\ a\ i\ j$ 满足

(30) $$d_n=\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{j-1}t_k.$$

由（27）和（28）可知 $=\sum\ \ _{+1}\ \ \ \ (\ ,\ )(\ )\ _{n\ n}g\ t$
$z\ c\ t\ z$满足$_{0n\geq}$

(31) $$g(t,z)=\frac{1}{1-(1+t)z+tz^2g(t,-z)}=\cfrac{1}{1-(1+t)z+\cfrac{tz^2}{1+(1+t)z+\cfrac{tz^2}{\ddots}}}.$$

这里有 $(\ =\ -1\ ^n\ 1+\ \ )\ ()_n s\ t$以及 。$_nt\ t=-$

这表明它们的汉克尔行列式为

(32) $$\det\left(c_{i+j+1}(t)\right)_{i,j=0}^{n-1}=(-t)^{\binom{n}{2}}.$$

最后考虑生成函数（，）。$c\ t\ z$ 根据（24），我们得到

$$c(t,z)=\frac{1}{1-(1+t)z+tzc(-t,-z)}=\frac{1}{1-(1+t)z+tz\left(1-zg(-t,-z)\right)}$$

$$=\frac{1}{1-z-tz^2g(-t,-z)}.$$

与（31）比较可得$(1\quad)$（$=\ -1^{\ n}\quad -\quad$），$_n s\ t$其中$_0\ 1s\ =$ 且。$_n t\ t=$

这意味着

(33) $$\det\left(c_{i+j}(t)\right)_{i,j=0}^{n-1}=t^{\binom{n}{2}}.$$

参考文献

[1] Johann Cigler，对称戴克路径与 q-纳拉亚纳数，arXiv:2601.08366[2] Christian Krattenthaler，高级行列式计算，洛塔林组合研讨会 42（1999），B42q[3] Qiongqiong Pan 和 Jiang Zeng，论卡塔兰-斯蒂尔切斯矩阵的全正性。电子组合学杂志 23(4)，2016，P4.33[4] T. Kyle Petersen，欧拉数，Birkhäuser 2015