arXiv:2603.04164v1 [math.AP] 4 Mar 2026

关于 x依赖型直线稳定过程的球上的调和函数

TADEUSZ KULCZYCKI 和 MICHA-L RYZNAR

Abstract. 在狄利克雷外部数据关于球心呈径向对称的假设下，我们得到了球内关于x依赖型直线稳定过程的调和函数的精确估计。证明的主要思路是为球内的 x依赖型直线型分数阶拉普拉斯算子构造全局屏障函数。

1. Introduction

设 $\alpha \in (0,2)$， $d \in \mathbb{N}$，且 $Z_t = (Z_t^{(1)}, \dots, Z_t^{(d)})^T$是$\mathbb{R}^d$上的直线 α-稳定过程，即 $Z_t^{(1)}, \dots, Z_t^{(d)}$ 是相互独立的一维对称α-稳定过程。我们考虑如下随机微分方程

$$dX_t = A(X_{t-})\, dZ_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

其中 $A(x) = (a_{ij}(x))$是一个 $d \times d$矩阵，并且存在常数 $\eta_1, \eta_2 > 0$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$

$$|a_{ij}(x)| \le \eta_1,$$

$$\det(A(x)) \ge \eta_2,$$

并且对于任意 $i, j \in \{1, \dots, d\}$ 函数$\mathbb{R}^d \ni x \to a_{ij}(x)$是连续的。

众所周知（见 [2]），SDE（1）具有唯一弱解 X，我们称之为该 x依赖的直线 α稳定过程，定义在$\mathbb{R}^d$上。它是纯跳过程的一个典型例子，其L´evy测度依赖于位置，并且关于$\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度是奇异的。

设$\mathbb{E}^x$、$\mathbb{P}^x$ 分别表示过程 X 从 $x \in \mathbb{R}^d$出发的期望值和概率。我们用 $\tau_D = \inf\{t \ge 0 : \ X_t \notin D\}$ 表示 X离开开集 $D \subset \mathbb{R}^d$ 的首次离开时间。

我们称函数 u 在$\mathbb{R}^d$ 上博雷尔可测且有界时，关于 X 在有界开集 $D \subset \mathbb{R}^d$ 中是调和的，如果

$$u(x) = \mathbb{E}^x(u(X_{\tau_D})) \quad \text{for every } x \in D.$$

显然，若 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是有界开集，且 $g : \ D^c \to \mathbb{R}$是有界博雷尔函数，则由下式给出的 u

$$u(x) = \begin{cases} \mathbb{E}^x(g(X_{\tau_D})), & \text{for} \quad x \in D, \\ g(x), & \text{for} \quad x \in D^c \end{cases} \tag{2}$$

关于 X 在 D 上调和。函数 g 可视为 u的狄利克雷外部数据。

T. KULCZYCKI 和 M. RYZNAR 获得了波兰国家科学中心资助项目（编号：2023/49/B/ST1/03964）的部分支持。

根据 [2], 的命题 4.1，由式 (1) 确定的马尔可夫过程 X的无穷小生成元为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(x) &= \mathcal{A}_\alpha \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left[f(x+a_i(x)w) - f(x) - w1_{\{|w|\le 1\}}\nabla f(x)a_i(x)\right] \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}},\\ &= \frac{\mathcal{A}_\alpha}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left[f(x+a_i(x)w) + f(x-a_i(x)w) - 2f(x)\right] \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}}, \qquad (3)\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A}_\alpha = \alpha 2^{\alpha-1}\pi^{-1/2}\Gamma((1+\alpha)/2)/\Gamma(1-\alpha/2)$ 且 $a_i(x) = (a_{1i}(x)\dots, a_{di}(x))$ 是 i 列 $A(x)$。我们称 $\mathcal{L}$ *the x-dependent rectilinear fractional Laplacian* 为.....。该算子通常写成如下形式

$$\mathcal{L} = -\sum_{i=1}^{d} \left(-\partial^2_{a_i(x)}\right)^{\alpha/2},$$

例如，参见 [13] 中的 (1.9)。 $-\mathcal{L}$ 是非局部椭圆算子的一个典型例子，它不是平移不变的，并且其列维测度相对于 $\mathbf{R}^d$ 上的勒贝格测度是奇异的（参见 [12] 第 115 页）。当对每个 $x \in \mathbf{R}^d$， $A(x)$ 都是单位矩阵时， $\mathcal{L}$ 称为*the rectilinear fractional Laplacian* （参见 [8]）。近年来，这类算子得到了广泛研究。众所周知，如果 $D \subset \mathbf{R}^d$ 是一个开集， $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 是有界博雷尔函数，且 $f \in C^2_b(D)$，那么对于任意 $x \in D$， $\mathcal{L}f(x)$ 都有定义。可以证明（见推论 3.2），若 D、 f 如上所述，且另外 D 有界，并且对任意 $x \in D$ 都有 $\mathcal{L}f(x) = 0$，那么 f 关于 X 在 D 上是调和的。

通常，我们用 $B(z,r)$ 表示以 $z \in \mathbf{R}^d$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的球。对于任意集合 $D \subset \mathbf{R}^d$，我们用 D^c 表示其补集。对于任意 $r > 0$，若存在径向轮廓函数 $\tilde{g}\colon [r,\infty) \to \mathbf{R}$，使得对任意 $x \in B^c(z,r)$ 都有 $g(x) = \tilde{g}(|x-z|)$，则称 $g\colon B^c(z,r) \to \mathbf{R}$ 关于 $z \in \mathbf{R}^d$ 是径向的。

本文的主要结果是下面的定理。在狄利克雷外部数据关于中心呈径向的假设下，该定理给出了与 X 有关的球内调和函数的估计。

定理 1.1。 设 $z \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, $D = B(z,r)$，且 $g\colon D^c \to \mathbb{R}$ 是一个关于 z 呈径向的有界博雷尔函数。记 $\tilde{g}$ 为 g 的径向轮廓函数。设 u 是在 D 上与 X 有关的调和函数，其由式 *(2)* 给出。对于每个固定的 $z \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ 和 $x \in D$，存在博雷尔函数 $f^x_D\colon [r,\infty) \to [0,\infty)$，使得

$$u(x) = \int_r^\infty f^x_D(y)\tilde{g}(y)\,dy.$$

此外，存在仅依赖于 α、 d、 η_1、 η_2 的常数 C_1、 $C_2 > 0$，使得对任意 $y \in (r,\infty)$，我们有

$$C_1\varphi^x_D(y) \le f^x_D(y) \le C_2\varphi^x_D(y),$$

其中

$$\varphi^x_D(y) = \frac{\delta^{\alpha/2}_D(x) r^{\alpha/2}}{(y-r)^{\alpha/2} y^{\alpha/2}(y+\delta_D(x)-r)} \qquad (4)$$

和 $\delta_D(x) = r - |x-z|$。

注释 1.2。 对于每个固定的 $z \in \mathbf{R}^d$, $r > 0$, $x \in D = B(z, r)$ 以及任意博雷尔集 $W \subset [r, \infty)$，令

$$\kappa_D^x(W) = \mathbb{P}^x(|X_{\tau_D} - z| \in W). \tag{5}$$

显然，κ_D^x 是 $[r, \infty)$上的概率测度。函数f_D^x 是 κ_D^x的密度，对任意博雷尔集 $W \subset [r, \infty)$，该密度为 $\kappa_D^x(W) = \int_W f_D^x(y)\ dy$。

据我们所知，定理 1.1 首次为与非平移不变、且其 L´evy 测度相对于 $\mathbf{R}^d$ 上的勒贝格测度奇异的非局部椭圆算子相关联的调和函数给出了尖锐的双侧估计。该结果的新颖之处在于，在对系数仅作最低限度的正则性假设、并在径向外部数据的条件下，得到了球内 x依赖的直线型分数阶拉普拉斯算子的调和函数的显式边界衰减率。尽管我们聚焦于球与调和函数，本文所建立的全局屏障函数构造具有灵活性，并提示了向其他类型的区域与方程进行推广的可能性。

算子 $\mathcal{L}$ 的调和函数正则性理论由 Bass 和 Chen 在 [1]中开创。在该工作中，他们确立了调和函数的 Hölder 连续性，并证明在此情形下哈纳克不等式不成立。

后续研究考察了更广泛的 x依赖型非局部椭圆算子类别，包括具有奇异核的算子。在这一更一般的框架下， [6, 10]中得到了弱哈纳克不等式和 Hölder 正则性结果。与此同时，此类算子的热核估计也得到了广泛研究；例如，参见 [15, 16, 18, 14, 17] 及其中的参考文献。近期， [13], 证明了 x依赖型、具有奇异核的非局部椭圆方程的解满足 Schauder 型和 Cordes–Nirenberg 型估计，重点考察了解的局部正则性。对于（平移不变的）直线型分数阶拉普拉斯算子， [8]确立了 $C^{1,1}$ 区域上的狄利克雷热核估计。

尽管已有大量相关研究，但对于具有奇异 L´évy 测度的 x 依赖型非局部椭圆算子，描述调和函数边界行为的精确双侧估计似乎仍不可得，即使在球这样的简单几何区域中也是如此。

本文其余部分的安排如下。第 2 节介绍记号，并汇集一些将在后文用到的事实。第 3 节致力于证明主要结果——定理 1.1。关键步骤是验证两个辅助函数 $f_{b,\theta}$ 和 $F_{b,\Theta}$ 分别关于球 $X(z, r)$ 中的过程 B 为超调和函数和次调和函数；这一验证推迟到第 4 节进行。最后，在附录中，我们构造了某些一维 C^2 函数，这些函数构成了 $f_{b,\theta}$ 定义的基础。

2. Preliminaries

不妨设 $\alpha \in (0, 2)$ 和 $d \in \mathbf{N}$, $d \geq 2$ 固定。

对于 $a, b \in \mathbf{R}$，我们记 $a \wedge b = \min(a, b)$、 $a \vee b = \max(a, b)$。我们记 $\mathbf{N}$ 为 $= \{1, 2, 3, \ldots\}$。

除非另有说明，我们假设所有常数均为正，且仅依赖于 $\alpha, d, \eta_1, \eta_2$。我们约定，常数在不同使用处可以取不同的值。若存在仅依赖于 $\alpha, d, \eta_1, \eta_2$ 的常数 $c_1, c_2 > 0$，使得对所有 $x \in U$ 都有 $f_1(x) \approx f_2(x)$，则记作 $x \in U$

若存在仅依赖于 $\alpha, d, \eta_1, \eta_2$ 的常数 $c > 0$，使得对所有 $x \in U$ 都有 $f_1(x) \le c f_2(x)$，则记作 $f_1(x) \lesssim f_2(x)$，表示 $x \in U\, c_1 f_1(x) \le f_2(x) \le c_2 f_1(x)$。

对于 $z \in \mathbf{R}^d$，$r > 0$，由 [22], 我们有

$$\mathbb{E}^x \tau_{B(z,r)} \approx (r^2 - |x-z|^2)^{\alpha/2}, \quad \text{for } x \in B(z,r). \tag{6}$$

由 [2], ，族$(\mathbf{P}^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ 在$\mathbf{R}^d$上定义了一个强马尔可夫过程 X。此外，对每个 $x \in \mathbf{R}^d$，测度$\mathbf{P}^x$ 解决了 $\mathcal{L}$的鞅问题。已证明过程X 具有一个带c`adl`ag路径的版本 [2]。在本文其余部分，我们考虑该版本。当 $D \subset \mathbf{R}^d$ 为有界区域时，已知对每个 $x \in D$都有$\mathbf{P}^x(\tau_D < \infty) = 1$。为验证 X的准左连续性，我们应用[11, 定理 3.20]。为此，只需验证对任意 $r > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{P}^x \left(|X_t - x| \ge r\right) = 0.$$

这是 [2, 推论4.4] 的一个结果，其内容为

$$\mathbb{P}^x \left(\sup_{0\le s\le t} |X_s - x| \ge r \right) \le C \frac{t}{1 \wedge r^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0.$$

因此，由 [11, 定理3.20], ，过程 X 是准左连续的。

令 $\{e_1, \dots, e_d\}$ 为 $\mathbf{R}^d$ 中的标准基。Z的 L´évy 测度由$\mu(U) = \mathcal{A}_\alpha \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} 1_U(we_i) |w|^{-1-\alpha}\, dw$给出，其中 $U \subset \mathbf{R}^d$是博雷尔可测的。X的跳跃测度由 $\nu(x,U) = \mu(\{v \in \mathbf{R}^d\colon\ x + A(x)v \in U\})$ 给出，其中$x \in \mathbf{R}^d$ 是起始点，且 $U \subset \mathbf{R}^d$ 是博雷尔可测的。

根据标准论证（例如参见 [3, 命题 2.3]或 [7, 第 39-40] 页），对于满足 $\operatorname{dist}(U,V) > 0$ 的任意博雷尔集 $U, V \subset \mathbf{R}^d$

$$\sum_{s\le t} 1_{\{X_{s-}\in U,\, X_s \in V\}} - \int_0^t 1_U(X_s)\nu(X_s, V)ds$$

对于每个 $x \in \mathbf{R}^d$，^{x} 是一个 $\mathbf{P}^x$ 鞅。令 $z \in \mathbf{R}^d$, $r > 0$，并令 $D = B(z,r)$。由此可知，对于任意 $t > 0$、$x \in D$，任意博雷尔集 $U \subset D$，以及满足 $\operatorname{dist}(V, D) > 0$ 的任意博雷尔集 $V \subset \mathbf{R}^d$，有

$$\mathbb{E}^x \left(\sum_{s\le t\wedge\tau_D} 1_{\{X_{s-}\in U,\, X_s\in V\}} \right) = \mathbb{E}^x \left(\int_0^{t\wedge\tau_D} 1_U(X_s)\nu(X_s, V)ds \right). \tag{7}$$

对于任意有界开集 $H \subset \mathbf{R}^d$，并令 $x \in H$ 表示格林测度 $G_H(x,\cdot)$:

$$G_H(x,U) = \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_H} 1_U(X_s)\, ds \right), \quad \text{for any Borel set } U \subset H.$$

在 (7) 中取 $U = D$ 并令 $t \to \infty$，我们得到：对于任意 $x \in D$ 和博雷尔集$V \subset \mathbf{R}^d$，使得 $\operatorname{dist}(V, D) > 0$

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in V) = \int_D \nu(y, V) G_D(x, dy). \tag{8}$$

对于任意的 $v \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$、$x \in \mathbf{R}^d$ 和 $f\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$，令

$$\mathcal{L}_v f(x) = \frac{\mathcal{A}_\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left[f(x+vw) + f(x-vw) - 2f(x) \right] \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}}. \tag{9}$$

我们有

$$\mathcal{L}_v f(x) = p.v.\mathcal{A}_\alpha \int_{\mathbb{R}} [f(x+vw) - f(x)] \, \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}}.$$

我们需要以下辅助结果。

引理 2.1. 假设 $r > 0$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是博雷尔可测、有界、径向且 $f \in C^2(B(0,r))$。

若对于任意 $x \in B(0,r)$，有 $\mathcal{L}_{e_d} f(x) \le 0$，则对于任意 $x \in B(0,r)$，有$\mathcal{L} f(x) \le 0$ （其中 $\mathcal{L}$ 由式 *(3)* 给出）。

类似地，若对于任意 $x \in B(0,r)$，有 $\mathcal{L}_{e_d} f(x) \ge 0$，则对于任意 $x \in B(0,r)$，有 $\mathcal{L} f(x) \ge 0$。

证明。假设对于任意 $x \in B(0,r)$，有 $\mathcal{L}_{e_d} f(x) \le 0$（当 $\mathcal{L}_{e_d} f(x) \ge 0$ 时，证明相同）。由于 f 是径向的，显然对于任意$v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 以及任意 $x \in B(0,r)$，有 $\mathcal{L}_{v/|v|} f(x) \le 0$。根据关于 $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 和 $x \in B(0,r)$ 的标准论证，可得 $\mathcal{L}_{v/|v|} f(x) = |v|^{-\alpha} \mathcal{L}_v f(x) \le 0$。由此可知，对于 $x \in B(0,r)$，有 $\mathcal{L} f(x) \le 0$。□

Put

$$\lambda(y) = \begin{cases} (r^2 - |y|^2)^{\alpha/2}, & \text{for} \quad y \in B(0,r), \\ 0, & \text{for} \quad y \in B^c(0,r) \end{cases} \tag{10}$$

对于 $x \in B(0,r)$，我们有 ([22])

$$\mathcal{L}_{e_d} \lambda(x) = -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha, \tag{11}$$

其中 $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha = 2^\alpha \pi^{-1/2} \Gamma((1+\alpha)/2) \Gamma(1+\alpha/2)$。

Put

$$h(y) = \begin{cases} (r^2 - |y|^2)^{\alpha/2-1}, & \text{for} \quad y \in B(0,r), \\ 0, & \text{for} \quad y \in B^c(0,r). \end{cases} \tag{12}$$

可以证明，对于任意 $x \in B(0,r)$，我们有

$$\mathcal{L}_{e_d} h(x) = 0. \tag{13}$$

事实上，对于 $v > 0$ 令 $s_v(u) = (v^2 - |u|^2)_+^{\alpha/2-1}, u \in \mathbb{R}$，则众所周知，函数 s_v 在区间 $(-v, v)$ 内是 α-调和的，因此

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} [s_v(u+w) - s_v(u)] \, \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}} = 0, \quad u \in (-v, v). \tag{14}$$

接下来，对于 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $|x| < r$ 我们有 $|x_d| < \sqrt{r^2 - |\tilde{x}|^2}$，其中 $\tilde{x} = x - x_d e_d$ 并且由 (14) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e_d} h(x) &= p.v. \, \mathcal{A}_\alpha \int_{\mathbb{R}} \left[(r^2 - |x + we_d|^2)_+^{\alpha/2-1} - (r^2 - |x|^2)_+^{\alpha/2-1} \right] \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}} \\ &= p.v. \, \mathcal{A}_\alpha \int_{\mathbb{R}} \left[(r^2 - |\tilde{x}|^2 - |x_d + w|^2)_+^{\alpha/2-1} - (r^2 - |\tilde{x}|^2 - |x_d|^2)_+^{\alpha/2-1} \right] \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}} \\ &= p.v. \, \mathcal{A}_\alpha \int_{\mathbb{R}} \left[s_{\sqrt{r^2 - |\tilde{x}|^2}}(x_d + w) - s_{\sqrt{r^2 - |\tilde{x}|^2}}(x_d) \right] \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}} = 0. \end{aligned}$$

这就推出了 (13)。

3. Proof of the main result

本节给出主要结果定理 1.1 的证明。关键步骤是定理 3.1 和命题 3.6。定理 3.1 是一种局部化的 Dynkin 公式，其形式为鞅（在 τ_U 处停止）。这一结果或许本身也具有研究价值。命题 3.6 讨论了当狄利克雷外部数据为环域的示性函数时，关于 X 的调和函数估计。证明命题 3.6 的关键思路是针对球 D 构造关于 x 依赖的直线型分数阶拉普拉斯算子的全局屏障函数 $f_{b_1,\,\theta}-u$ 和 $u-F_{b_2,\,\Theta}$。命题 3.6 证明的一部分，即命题 3.7，将推迟到第 4 节。

定理 3.1. 若 $D\subset\mathbb{R}^d$ 是开集，U 是开的且有界，$\bar{U}\subset D$ 且函数 $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 有界且为博雷尔，并且 $f\in C_b^2(D)$ 则

$$f(X_{t\wedge\tau_U})-f(X_0)-\int_0^{t\wedge\tau_U}\mathcal{L}f(X_s)\,ds$$

在 $\mathbb{P}^x$ 下对每个 $x\in U$ 是一个鞅。

证明。我们改编 [2] 中命题 4.1 的证明；主要的附加要点是处理仅为局部的正则性假设 $f\in C_b^2(D)$，这需要对论证进行仔细的局部化。固定 $x\in U$，并令 X 为 $\mathbf{P}^x$ 下 (1) 的弱解。我们对 f 应用局部 Itô 公式（参见例如 [5, 引理 3.8]），并得到

$$\begin{aligned}
&f(X_{t\wedge\tau_U})-f(X_0)\\
=\;&\int_0^{t\wedge\tau_U}\nabla f(X_{u-})dX_u+\sum_{u\le t\wedge\tau_U,|\Delta X_u|>0}f(X_u)-f(X_{u-})-\nabla f(X_{u-})\cdot\Delta X_u\\
=\;&I(t)+J(t).
\end{aligned}\tag{15}$$

我们将 $I(t)$ 分解为小跳部分和大跳部分。设 Z_t^1 与 Z_t^2为两个分别具有 Lévy 测度 $\mu_1=\mu|_{B_1}$ 与 $\mu_2=\mu-\mu_1$ 的独立过程。则我们可以假设

$$Z_t=Z_t^1+Z_t^2\text{ and }X_t=X_t^1+X_t^2,$$

其中

$$dX_t^i=A(X_{t-})\,dZ_t^i,\quad X_0=x\in\mathbb{R}^d.\tag{16}$$

由此可得

$$I(t)=\int_0^{t\wedge\tau_U}\nabla f(X_{u-})dX_u^1+\int_0^{t\wedge\tau_U}\nabla f(X_{u-})dX_u^2=I_1(t)+I_2(t).$$

注意，Z_t^2是一个复合泊松过程，其跳跃是过程 Z_t的大跳跃，因此

$$I_2(t)=\sum_{u\le t\wedge\tau_U,|\Delta Z_u|>1}\nabla f(X_{u-})\cdot\Delta X_u.$$

因此，我们可以将 (15) 改写为

$$\begin{aligned}
f(X_{t\wedge\tau_U})-f(X_0)&=I_1(t)+\sum_{u\le t\wedge\tau_U,|\Delta X_u|>0}f(X_u)-f(X_{u-})-\nabla f(X_{u-})\cdot\Delta X_u\,1_{\{|\Delta Z_u|\le1\}}\\
&=I_1(t)+J_1(t).
\end{aligned}\tag{17}$$

我们断言 $I_1(t)$ 是一个鞅。这是因为它的二次变差过程 $[I_1, I_1]_t$ 可积（参见例如 [21, 推论 3, 第 73] 页）。注意，在事件 $u \le t \wedge \tau_U$

$$|\Delta X_u| = |A(X_{u-})\Delta Z_u| \le \sup_{x\in U}|A(x)||\Delta Z_u|$$

and

$$|\nabla f(X_{u-})| \le \sup_{x\in U}|\nabla f(x)|.$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x[I_1, I_1]_t &\le \mathbb{E}^x \sum_{u\le t\wedge\tau_U, |\Delta Z_u|\le 1} \max_{v\le t\wedge\tau_U}(|\nabla f(X_{v-})|)^2|\Delta X_u|^2 \\ &\le C\mathbb{E}^x \sum_{u\le t, |\Delta Z_u|\le 1}|\Delta Z_u|^2 \\ &= Ct\int_{|x|\le 1}|x|^2\mu(dx) < \infty,\end{aligned}$$

这证明了二次变差过程的可积性。

接下来，我们注意到 $J_1(t)$可以改写为

$$J_1(t) = \sum_{u\le t\wedge\tau_U, |\Delta Z_u|>0} f(X_{u-}+A(X_{u-})\Delta Z_u) - f(X_{u-}) - \nabla f(X_{u-})\cdot A(X_{u-})\Delta Z_u\, 1_{\{|\Delta Z_u|\le 1\}}.$$

由于各坐标不可能同时发生跳跃，我们可以将 $J_1(t)$拆分为 d 部分

$$J_1(t) = \sum_{j=1}^d J_1^j(t),$$

其中

$$J_1^j(t) = \sum_{u\le t} g(u)\left[f(X_{u-} + a_j(X_{u-})\Delta Z_u^{(j)}) - f(X_{u-}) - \nabla f(X_{u-})\cdot a_j(X_{u-})\Delta Z_u^{(j)}\, 1_{\{|\Delta Z_u^{(j)}|\le 1\}}\right]$$

其中 $g(u) = 1_{\{u\le\tau_U\}}$。令 $w \in \mathbf{R}$ $u > 0$,

$$F_j(w,u) = g(u)\left[f(X_{u-} + a_j(X_{u-})w) - f(X_{u-}) - \nabla f(X_{u-})\cdot a_j(X_{u-})w1_{\{|w|\le 1\}}\right].$$

注意， $g(u)$ 是一个可预测过程。因此， $F_j(w,\ u)$ 关于博雷尔 σ-域与由过程 $Z^{(j)}$ 生成的可预测 σ- 域的乘积是联合可测的。注意

$$\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|F_j(w,u)|\frac{1}{|w|^{1+\alpha}}dw < \infty.$$

这可由以下估计得到证明

$$|F_j(w,u)| \le C\min(|w|^2, 1),$$

其中 $c = c(U,\ f)$。这是因为 $\bar{U} \subset D$ 和 $f \in C_b^2(D)$。

根据补偿公式

$$M_j(t) = F_j(\Delta Z_t^{(j)}, t) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}} F_j(w,u)\frac{\mathcal{A}_\alpha}{|w|^{1+\alpha}}dwdu$$

是一个鞅。

接下来，注意到

$$M_j(t) = J_1^j(t) - \int_0^{t\wedge\tau_U} \mathcal{L}_j f(X_u)du,$$

其中

$$\mathcal{L}_j f(x) = \mathcal{A}_\alpha \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(f(x + a_j(x)w) - f(x) - \nabla f(x)\cdot a_j(x)w1_{\{|w|\le 1\}}\right) \frac{dw}{|w|^{1+\alpha}}.$$

综上可知

$$J_1(t) - \int_0^{t\wedge\tau_U} \mathcal{L} f(X_u)du$$

是一个鞅。由于 $I_1(t)$ 是一个鞅，我们得出定理的结论。□

我们称在有界开集 $D \subset \mathbf{R}^d$ 中，关于 X 的函数 u （在 $\mathbf{R}^d$ 上博雷尔可测且有界）为超调和，如果

$$u(x) \ge \mathbb{E}^x(u(X_{\tau_D})) \quad \text{for every } x \in D \tag{18}$$

且是 次调和 如果

$$u(x) \le \mathbb{E}^x(u(X_{\tau_D})) \quad \text{for every } x \in D. \tag{19}$$

由定理 3.1 可得

推论 3.2。 假设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界开集，函数 $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$有界且为博雷尔函数，并且 $f \in C_b^2(D)$。那么我们有

(i) 若 $\mathcal{L}f(x) = 0$ 对任意 $x \in D$ 成立，则 f 关于 X 在 D上调和；***(ii)*** 若 $\mathcal{L}f(x) \ge 0$ 对任意 $x \in D$ 成立，则 f 关于 X 在 D上次调和；***(iii)*** 若 $\mathcal{L}f(x) \le 0$ 对任意 $x \in D$ 成立，则 f 关于 X 在D上超调和。

证明。 我们只证明 (i)，(ii) 和 (iii) 的证明类似，故略去。 .

对任意 $n \in \mathbf{N}$，令 $D_n = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) > 1/n\}$。当 n 充分大时，集合 D_n 非空。对这样的 n，由定理 3.1 可得

$$f(x) = \mathbb{E}^x(f(X_{\tau_{D_n}})) \quad \text{for every } x \in D_n. \tag{20}$$

回顾一下， $\tau_D < \infty$ 几乎必然。注意， $\tau_{D_n} \le \tau_D$。令 $T = \lim_{n\to\infty} \tau_{D_n}$。由过程 X 的准左连续性，我们得到 $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_{D_n}} = X_T$ 几乎必然。因此， $X_T \in D^c$ 几乎必然，所以 $T = \tau_D$ 几乎必然。由此可得 $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_{D_n}} = X_{\tau_D}$ 几乎必然。利用这一点和 (20)，我们得到

$$f(x) = \mathbb{E}^x(f(X_{\tau_D})) \quad \text{for every } x \in D,$$

因此， f 关于 X 在 D上是调和的。 □

由 (18) 和 (19)，我们得到以下最大值原理。

推论 3.3. 假设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界开集， $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 有界且为博雷尔可测。若 f 关于 X 在 D 上是次调和的，则有

$$f(x) \le \sup\{f(y) : y \in D^c\} \quad \textit{for every } x \in D,$$

若 f 关于 X 在 D 上是超调和的，则有

$$f(x) \ge \inf\{f(y) : y \in D^c\} \quad \textit{for every } x \in D.$$

现在，固定 $z \in \mathbf{R}^d$, $r > 0$ ，并令 $D = B(z, r)$。对于任意 $r > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, r/4]$ ，定义如下辅助函数类。

定义 3.4。 我们将 $\mathcal{G}(r,\varepsilon)$ 定义为所有满足以下条件的函数 θ：$[0,r^2)\to(0,\infty)$ 的集合。

(i)
$$\theta(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{r^2-v}, & \text{for} \quad v\in[0,(r-\varepsilon)^2],\\ C_0, & \text{for} \quad v\in[(r-\varepsilon+K)^2,r^2),\end{cases}$$
对于某个 $K\in(0,\ \varepsilon/4]$ 和 $C_0>0$,
(ii) $\theta\in C^2[0,r^2)$, (iii) θ 在 $[(r-\varepsilon)^2,(r-\varepsilon+K)^2)$ 上
严格递增，(iv) $\max\{\theta''(v):\ v\in[0,r^2)\}=\theta''((r-\varepsilon)^2)$。

$\mathcal{G}(r,\ \varepsilon)$ 中函数的一种构造见附录。
Fo对于任意固定的 $r>0$ 和 $\varepsilon\in(0,\ r/4]$，我们定义如下辅助函数 n.
$$\Theta(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{r^2-v}, & \text{for} \quad v\in[0,(r-\varepsilon)^2],\\ \frac{1}{r^2-v}\left[1-\left(\frac{v-(r-\varepsilon)^2}{q}\right)^3\right], & \text{for} \quad v\in((r-\varepsilon)^2,r^2),\end{cases}\tag{21}$$
其中 $q=r^2-(r-\varepsilon)^2$。不难验证 $\Theta\in C^2[0,r^2)$。

引理 3.5。 设 $\theta\in\mathcal{G}(r,\varepsilon)$。则对任意 $v\in[0,r^2)$，有
$$\theta'(v)\le\frac{3}{q^2},\quad \Theta'(v)\le\frac{3}{q^2},\quad \theta(v)\le\frac{4}{q},\quad \Theta(v)\le\frac{4}{q}.$$
证明。 我们将给出 $\theta\in\mathcal{G}(r,\varepsilon)$ 的结果； Θ 的相应界是显然的。对于 $v\in[0,(r-\varepsilon)^2]$，显然有 $\theta'(v)=(r^2-v)^{-2}\le 1/q^2$ 且$\theta(v)=(r^2-v)^{-1}\le 1/q$。对于 $v\in((r-\varepsilon)^2,r^2)$，有

$$\theta'(v)=\theta'((r-\varepsilon)^2)+\int_{(r-\varepsilon)^2}^{v}\theta''(t)\,dt\le\frac{1}{q^2}+\int_{(r-\varepsilon)^2}^{r^2}\frac{2}{q^3}\,dt=\frac{3}{q^2}$$
and
$$\theta(v)=\theta((r-\varepsilon)^2)+\int_{(r-\varepsilon)^2}^{v}\theta'(t)\,dt\le\frac{1}{q}+\int_{(r-\varepsilon)^2}^{r^2}\frac{3}{q^2}\,dt=\frac{4}{q}.$$
□

由此可知，存在绝对常数 $c_1,c_2>0$，使得对任意 $\theta\in\mathcal{G}(r,\varepsilon)$ 和 Θ，以及所有 $v\in[0,r^2)$，都有
$$\frac{c_1}{(r^2-v)\vee q}\le\theta(v)\le\frac{c_2}{(r^2-v)\vee q},\tag{22}$$
$$\frac{c_1}{(r^2-v)\vee q}\le\Theta(v)\le\frac{c_2}{(r^2-v)\vee q}.\tag{23}$$

命题 3.6。 设 $\varepsilon\in(0,\ r/4]$ 以及 $\eta\in(0,\ \varepsilon]$，并定义函数 $g:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}$为
$$g(y)=\begin{cases}1, & for \qquad |y-z|\in(r+\varepsilon,r+\varepsilon+\eta),\\ 0, & otherwise.\end{cases}\tag{24}$$
令 u 为关于 X 在球 $D=B(z,r)$ 内的调和函数，该函数由 *(2)* 给出。则存在常数 C_1,C_2，使得对任意 $x\in D$，都有
$$C_1\int_{r+\varepsilon}^{r+\varepsilon+\eta}\varphi_D^x(y)\,dy\le u(x)\le C_2\int_{r+\varepsilon}^{r+\varepsilon+\eta}\varphi_D^x(y)\,dy\tag{25}$$

其中 φ_D^x 由 *(4)* 给出。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $z = 0$，因此 $D = B(0, r)$。固定$\varepsilon \in (0, r/4]$ 和 $\eta \in (0, \varepsilon]$。

对于给定的函数 $\theta \in \mathcal{G}(r, \varepsilon)$，令

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (r^2 - |x|^2)^{\alpha/2}\theta(|x|^2), & \text{for} \quad x \in B(0, r), \\ 0, & \text{for} \quad x \in B^c(0, r). \end{cases}$$

现在，对于任意 $b > 0$ 以及任意函数 $\theta \in \mathcal{G}(r, \varepsilon)$，我们通过公式定义辅助函数$f_{b,\theta}$

$$f_{b,\theta}(x) = \frac{b\eta r^{1-\alpha/2}}{\varepsilon^{\alpha/2}} f_\theta(x) + g(x), \ x \in \mathbb{R}^d. \tag{26}$$

接下来，对于已定义的函数 Θ，令

$$F_\Theta(x) = \begin{cases} (r^2 - |x|^2)^{\alpha/2}\Theta(|x|^2), & \text{for} \quad x \in B(0, r), \\ 0, & \text{for} \quad x \in B^c(0, r). \end{cases} \tag{27}$$

类似地，对于任意 $b > 0$ ，我们通过公式定义辅助函数 $F_{b,\Theta}$ a

$$F_{b,\Theta}(x) = \frac{b\eta r^{1-\alpha/2}}{\varepsilon^{\alpha/2}} F_\Theta(x) + g(x), \ x \in \mathbb{R}^d. \tag{28}$$

显然，对于任意 $b > 0$ ，函数 $f_{b、\theta}$ $F_{b、\Theta}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上有界、博雷尔，且$f_{b、\theta}$、 $F_{b、\Theta} \in C_b^2(B(0、 r))$。

定理 1.1 的证明的关键要素是以下结果。

命题 3.7。 令 $z = 0$，固定 $r > 0$ $\varepsilon \in (0, r/4]$ 以及 $\eta \in (0, \varepsilon]$。存在一个函数 $\theta \in \mathcal{G}(r\,\varepsilon)$ （仅取决于 r、 ε 和 α），并且存在一个常数$b_1 > 0$ （仅取决于 α），使得

$$\mathcal{L} f_{b_1,\theta}(x) \le 0 \quad \textit{for any } x \in B(0, r).$$

存在一个常数 $b_2 > 0$ （仅取决于 α），使得

$$\mathcal{L} F_{b_2,\Theta}(x) \ge 0 \quad \textit{for any } x \in B(0, r).$$

命题 3.7 的证明推迟到第 4 节。由推论 3.2 可得，$f_{b_1\theta}$ 关于 X 在 $B(0, r)$ 中是超调和的，而 $F_{b_2\Theta}$ 关于 X 在 $B(0, r)$ 中是次调和的。令 $u_1 = f_{b_1\theta} - u$ 以及 $u_2 = F_{b_2\Theta} - u$。由此可知，u_1 关于 X 在 $B(0, r)$ 中是超调和的，而 u_2 关于 X在 $B(0, r)$ 中是次调和的。另请注意， $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$在 $B^c(0, r)$ 上。换言之， u_1和$-u_2$ 是关于 x依赖的直线型分数阶拉普拉斯算子、球 $B(0, r)$ 的全局屏障函数。由推论 3.3 $u_1 \ge 0$在 $B(0, r)$ 上以及 $u_2 \le 0$在$B(0, r)$ 上。因此我们得到

$$f_{b_1,\theta}(x) \ge u(x) \quad \text{for every } x \in B(0, r) \tag{29}$$

and

$$F_{b_2,\Theta}(x) \le u(x) \quad \text{for every } x \in B(0, r). \tag{30}$$

由 (4)，对于 $x \in B(0, r)$，我们有

$$\int_{r+\varepsilon}^{r+\varepsilon+\eta} \varphi_D^x(y)\, dy \approx \frac{\delta_D^{\alpha/2}(x)\eta}{\varepsilon^{\alpha/2}(\varepsilon \vee \delta_D(x))}. \tag{31}$$

注意，对于 $x \in B(0,\ r)$，我们有

$$\delta_D^{\alpha/2}(x) \approx \frac{(r^2-|x|^2)^{\alpha/2}}{r^{\alpha/2}}$$

and

$$\frac{1}{\delta_D(x)\vee\varepsilon} = \frac{r}{(r(r-|x|))\vee(r\varepsilon)} \approx \frac{r}{(r^2-|x|^2)\vee q}.$$

利用这一点以及（22）、（23），我们得到，对于 $x \in B(0,r)$

$$\frac{1}{\delta_D(x)\vee\varepsilon} \approx r\theta(|x|^2) \approx r\Theta(|x|^2).$$

由上述估计可得，对于 $x \in B(0,r)$

$$f_{b,\theta}(x) = \frac{b\eta r^{1-\alpha/2}(r^2-|x|^2)^{\alpha/2}\theta(|x|^2)}{\varepsilon^{\alpha/2}} \approx \frac{b\eta\delta_D^{\alpha/2}(x)}{\varepsilon^{\alpha/2}(\varepsilon\vee\delta_D(x))}.$$

对于$F_{b,\Theta}$，也有类似的估计。由此，结合（31）、（29）、（30）以及常数b_1、 b_2 仅依赖于 α 这一事实，我们得到存在常数 C_1, C_2，使得

$$C_1\int_{r+\varepsilon}^{r+\varepsilon+\eta}\varphi_D^x(y)\,dy \le u(x) \le C_2\int_{r+\varepsilon}^{r+\varepsilon+\eta}\varphi_D^x(y)\,dy \quad \text{for every } x\in B(0,r).$$

□

引理 3.8. 设 $z_0 \in \mathbb{R}^d$，且设 $y \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|y-z_0| < r$ 和 $0 < \eta < r < (4/5)R$，则有

$$\mu(\{w\in\mathbb{R}^d:\ R\le|y+A(y)w-z_0|\le R+\eta\}) \approx \sum_{i=1}^d |a_i(y)|^\alpha \frac{\eta}{R^{1+\alpha}}.$$

证明. 不妨设 $z_0 = 0$。固定 $i \in \{1,2,\dots,d\}$。令 $a = a_i = a_i(y)$ 和v 为实数。我们希望求解 $|y+av| = R$。这等价于以下二次方程 $|y+av|^2 = R^2$，其形式为

$$|y|^2 + 2v(y\cdot a) + |a|^2v^2 = R^2.$$

记 $\lambda^2 = |y|^2 - (a/|a|\cdot y)^2$。那么我们可以将正解写成

$$v_+(R) = \frac{1}{|a|}\left(\sqrt{R^2-\lambda^2} - (a/|a|\cdot y)\right), \tag{32}$$

而负解为

$$v_-(R) = \frac{1}{|a|}\left(-\sqrt{R^2-\lambda^2} - (a/|a|\cdot y)\right). \tag{33}$$

因此

$$\begin{aligned} v_+(R+\eta) - v_+(R) &= \frac{1}{|a|}\left(\sqrt{(R+\eta)^2-\lambda^2} - \sqrt{R^2-\lambda^2}\right) \\ &= \frac{1}{|a|}\frac{(R+\eta)^2-R^2}{\sqrt{(R+\eta)^2-\lambda^2}+\sqrt{R^2-\lambda^2}} \end{aligned}$$

注意，对于 $|y| \le r \le (4/5)R$，我们有

$$\frac{3}{5}(R+\eta) \le \sqrt{(R+\eta)^2-\lambda^2}+\sqrt{R^2-\lambda^2} \le (R+\eta)+R.$$

这意味着

$$\frac{\eta}{|a|} \le v_+(R+\eta) - v_+(R) \le 4\frac{\eta}{|a|}.$$

同理

$$\frac{\eta}{|a|} \le v_-(R) - v_-(R+\eta) \le 4\frac{\eta}{|a|}.$$

接下来，若 $R \le |y+av| \le R+\eta$，由三角不等式可得

$$\frac{R-r}{|a|} \le |v| \le \frac{R+2r}{|a|}.$$

令 $P_i = \{v\colon \ R \le |y+va_i| \le R+\eta\} = [v_-(R+\eta)\ v_-(R)] \cup [v_+(R)\ v_+(R+\eta)]$。利用上述不等式，我们得到

$$\int_{P_i} \frac{1}{|v|^{1+\alpha}} dv \approx |a_i|^\alpha \frac{\eta}{R^{1+\alpha}}$$

由此可得

$$\mu(\{w \in \mathbb{R}^d\colon R \le |y+wA(y)| \le R+\eta\}) = \mathcal{A}_\alpha \sum_{i=1}^d \int_{P_i} \frac{1}{|v|^{1+\alpha}} dv \approx \sum_{i=1}^d |a_i|^\alpha \frac{\eta}{R^{1+\alpha}}.$$

□

引理 3.9。设 $z_0 \in \mathbb{R}^d$，并设 $x \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|x-z_0| < r$ 且 $0 < \eta < r < (4/5)R$，则

$$\mathbb{P}^x(R \le |X_{\tau_{B(z_0,r)}} - z_0| \le R+\eta) \approx (r^2 - |x-z_0|^2)^{\alpha/2} \frac{\eta}{R^{1+\alpha}}.$$

证明。我们不妨假设 $z_0 = 0$。记 $D = B(0,r)$ 和 $P = \{w \in \mathbb{R}^d\colon \ R \le |w| \le R+\eta\}$. 根据 (8)，我们有

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in P) = \int_D \nu(y,P) G_D(x,dy).$$

由引理 3.8 可知，对所有 $y \in D$

$$C_2 \frac{\eta}{R^{1+\alpha}} \le \nu(y,P) \le C_1 \frac{\eta}{R^{1+\alpha}}.$$

利用这一点和 (6)，可得

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in P) \approx \int_D \frac{\eta}{R^{1+\alpha}} G_D(x,dy) = \frac{\eta}{R^{1+\alpha}} \mathbb{E}^x(\tau_D) \approx (r^2 - |x|^2)^{\alpha/2} \frac{\eta}{R^{1+\alpha}},$$

这就得到了该引理的断言。 □

下面的引理对于命题 3.12 的证明至关重要。

引理 3.10. 设 $z_0 \in \mathbb{R}^d$，并设 $x \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|x-z_0| < R$ 且 $r_x = \frac{1}{3}(R - |x-z_0|)$。存在常数 c，使得对 $y \in B(x, r_x)$ 我们有

$$\mu(\{w \in \mathbb{R}^d\colon |y - z_0 + wA(y)| \ge R\}) \ge \frac{c}{(R-|x-z_0|)^\alpha}.$$

证明. 我们可以假设 $z_0 = 0$。固定 $i \in \{1, 2, \dots, d\}$。设 $y \in B(x, r_x), a = a_i = a_i(y)$，$v$ 为实数，并令 $\lambda^2 = |y|^2 - (a/|a| \cdot y)^2$。则如同引理 3.8 的证明，我们有

$$Q_i = \{v : |y + a_i v| \geq R\} = (-\infty, v_-(R)] \cup [v_+(R), \infty),$$

其中 $v_+(R)$、$v_-(R)$分别由 (32)、(33) 给出。令

$$v(R) = |v_-(R)| \wedge |v_+(R)| = \frac{1}{|a|} \frac{R^2 - |y|^2}{\sqrt{R^2 - \lambda^2} + |(a/|a| \cdot y)|}.$$

Then

$$\int_{Q_i} \frac{1}{|v|^{1+\alpha}} dv \geq \int_{v(R)}^{\infty} \frac{1}{|v|^{1+\alpha}} dv = \frac{1}{\alpha (v(R))^\alpha} = |a|^\alpha \frac{(\sqrt{R^2 - \lambda^2} + |(a/|a| \cdot y)|)^\alpha}{\alpha (R^2 - |y|^2)^\alpha}.$$

首先考虑 $|x| > (1/2)R$ 的情形。于是有 $R - |y| \leq (4/3)(R - |x|)$，这意味着

$$R^2 - |y|^2 \leq 2R(R - |y|) \leq \frac{8}{3} R(R - |x|).$$

这与

$$(\sqrt{R^2 - \lambda^2} + |(a/|a| \cdot y)|)^\alpha \geq |(a/|a| \cdot y)|^\alpha$$

以及 $|y| > (1/3)R$ 得出

$$\int_{Q_i} \frac{1}{|v|^{1+\alpha}} dv \geq \left(\frac{3}{8}\right)^\alpha \frac{|y|^\alpha |(a \cdot y/|y|)|^\alpha}{\alpha R^\alpha (R - |x|)^\alpha} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha \frac{|(a \cdot y/|y|)|^\alpha}{\alpha (R - |x|)^\alpha}. \tag{34}$$

在 $|x| \leq (1/2)R$ 的情形下，有 $R \leq 2(R - |x|)$，因此

$$\int_{Q_i} \frac{1}{|v|^{1+\alpha}} dv \geq |a|^\alpha \frac{(\sqrt{R^2 - \lambda^2} + |(a/|a| \cdot y)|)^\alpha}{\alpha (R^2 - |y|^2)^\alpha} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \frac{|a|^\alpha}{\alpha (R - |x|)^\alpha}. \tag{35}$$

由 (34) 和 (35) 可得

$$\mu(\{w \in \mathbb{R}^d : |y + A(y)w| \geq R\}) = \mathcal{A}_\alpha \sum_{i=1}^d \int_{Q_i} \frac{1}{|v|^{1+\alpha}} dv \geq \frac{c}{(R - |x|)^\alpha},$$

其中 $c = \frac{\mathcal{A}_\alpha}{\alpha} \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha \min_{y \in \mathbb{R}^d,\ |z|=1} \sum_{i=1}^d |(a_i(y) \cdot z)|^\alpha > 0$。注意，$c$的正性及其仅依赖于 α，d，η_1，η_2，可由关于矩阵族 $A(y)$ $y \in \mathbb{R}^d$ 的假设推出。□

推论 3.11. 取定 $z \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$，并令 $D = B(z, r)$。对于 $x \in D$，令 $r_x = \frac{1}{3} \operatorname{dist}(x, D^c)$ 以及 $B_x = B(x, r_x)$。存在一个常数 p，使得对于任意 $x \in D$，均有

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_{B_x}} \in D^c) \geq p.$$

证明。设 $x \in D$。根据 (8)，我们有

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_{B_x}} \in D^c) = \int_{B_x} \nu(y, D^c) G_{B_x}(x, dy). \tag{36}$$

由引理 3.10 可得，对于 $y \in B_x$，我们有

$$\begin{aligned}\nu(y, D^c) &= \mu(\{w \in \mathbb{R}^d : y + A(y)w \in D^c\}) \\ &= \mu(\{w \in \mathbb{R}^d : |y + wA(y) - z| \geq r\}) \\ &\geq \frac{c}{(r - |x - z|)^\alpha}.\end{aligned}$$

利用这一点、(36) 和 (6)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x(X_{\tau_{B_x}} \in D^c) &\geq \frac{c}{(r - |x - z|)^\alpha} \int_{B_x} G_{B_x}(x, dy) \\ &= \frac{c\mathbb{E}^x(\tau_{B_x})}{(\mathrm{dist}(x, D^c))^\alpha} \\ &\approx \frac{r_x^\alpha}{(\mathrm{dist}(x, D^c))^\alpha},\end{aligned}$$

由此即得该断言。 □

命题 3.12. 设 $z \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ 并令 $D = B(z, r)$。则对任意 $x \in D$，我们有

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in \partial D) = 0.$$

本命题的证明所采用的论证，类似于 [4] 中引理 6 以及 [19] 中引理 2.10 的证明中所用的论证。为方便读者，我们重述这些论证。

证明。对 $x \in D$，令 $r_x = \frac{1}{3}\mathrm{dist}(x, D^c)$，并令 $B_x = B(x, r_x)$。由强马尔可夫性，对 $x \in D$ 我们得到

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in \partial D) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_{B_x}} \in \partial D) + \mathbb{E}^x\left(P^{X_{\tau_{B_x}}}(X_{\tau_D} \in \partial D)], \, X_{\tau_{B_x}} \in D\right). \tag{37}$$

我们分别将 (37) 右侧的两项记为 $p_0(x)$ 和 $r_0(x)$。利用 (37)，我们可以归纳证明，对于 $k = 0, 1, \ldots$ 以及 $x \in D$，有

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in \partial D) = p_0(x) + p_1(x) + \ldots + p_k(x) + r_k(x), \tag{38}$$

其中

$$p_{k+1}(x) = \mathbb{E}^x\left(p_k(X_{\tau_{B_x}}), \, X_{\tau_{B_x}} \in D\right), \tag{39}$$

and

$$r_{k+1}(x) = \mathbb{E}^x\left(r_k(X_{\tau_{B_x}}), \, X_{\tau_{B_x}} \in D\right).$$

由推论 3.11

$$\sup_{x \in D} r_{k+1}(x) \leq (1 - p) \sup_{x \in D} r_k(x) \leq (1 - p)^{k+1} \to 0, \quad \text{as } k \to \infty.$$

∞由 (38) 可得 $\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in \partial D) = \sum$ $p_k(x)$。利用 (8) 可得 $p_0(x) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_{B_x}} \in$ $_{k=0}\partial D) = 0$。由 (39) 可得 $p_k(x) = 0$对所有 $x \in D$ 及所有 k均成立，由此完成证明。 □

现在我们可以证明主要结果了。

定理 *1.1* 的证明。 固定 $x \in D = B(z, r)$。我们将证明存在常数C_1, C_2，使得对于任意博雷尔集 $W \subset [r, \infty)$，我们都有

$$C_1 \int_W \varphi_D^x(y)\, dy \le \mathbb{P}^x(|X_{\tau_D} - z| \in W) \le C_2 \int_W \varphi_D^x(y)\, dy. \tag{40}$$

由命题 3.12 可知，$\mathbf{P}^x(|X_{\tau_D} - z| \in \{r\}) = 0$，因此 (40) 对 $W = \{r\}$ 成立。对于任意 $r_1 > r$，由 (8) 可知，$\mathbf{P}^x(|X_{\tau_D} - z| \in \{r_1\}) = 0$，因此 (40) 对 $W = \{r_1\}$ 成立。由命题 3.6 可知，对于任意 $\varepsilon \in (0,\ r/4]$ 以及 $\eta \in (0,\ \varepsilon]$，(40) 对$W = (r + \varepsilon,\ r + \varepsilon + \eta)$ 成立。因此，(40) 对任意 $W = [a, b]$ 成立，其中$[a, b] \subset [r, 5r/4]$。

由引理 3.9 可知，对于满足 $[a, b] \subset (5r/4,\ 2r]$ 或$[a, b] \subset [nr, (n + 1)r]$（其中 $n = 2,\ 3,$ .....）的任意 $W = [a, b]$，(40) 成立。

因此，(40) 对任意 $W = [a, b] \subset [r, \infty)$ 都成立。

根据标准的单调类论证，(40) 对所有博雷尔集 $W \subset [r, \infty)$ 都成立。特别地，$\mathbf{P}^x(|X_{\tau_D} - z| \in \cdot)$ 关于 $[r, \infty)$ 上的勒贝格测度绝对连续。因此，根据拉东-尼科迪姆定理，存在一个博雷尔密度 $f_D^x\colon [r, \infty) \to [0, \infty)$，使得对任意博雷尔集 $W \subset [r, \infty)$，有

$$\mathbb{P}^x(|X_{\tau_D} - z| \in W) = \int_W f_D^x(y)\, dy. \tag{41}$$

此外，由 (40) 可得

$$C_1 \varphi_D^x(y) \le f_D^x(y) \le C_2 \varphi_D^x(y)$$

对几乎处处的 $y \in [r, \infty)$ 成立。将 f_D^x 在一个零测集上重新定义后，我们可以假设上述不等式对所有 $y \in [r, \infty)$ 都成立。

我们有

$$u(x) = \mathbb{E}^x(g(X_{\tau_D})).$$

令 κ_D^x 为由 (5) 定义的测度。由于 g 关于 z 是径向的，我们可以写作 $g(X_{\tau_D}) = \tilde{g}(|X_{\tau_D} - z|)$，因此 $u(x) = \int_r^\infty \tilde{g}(y)\, d\kappa_D^x(y)$。结合 (41)，得到 $u(x) = \int_r^\infty \tilde{g}(y) f_D^x(y)\, dy$。□

4. Comparison inequalities for $\mathcal{L}_{e_d}$

本小节的目标是证明命题 3.7。我们将证明归结为以下两个命题。

命题 4.1. 令 $z = 0$，取定 $r > 0$, $\varepsilon \in (0, r/4]$ 和 $\eta \in (0, \varepsilon]$。存在一个函数 $\theta \in \mathcal{G}(r, \varepsilon)$（仅依赖于 r, ε 和 α），并且存在一个常数$b_1 > 0$（仅依赖于 α），使得

$$b_1 \mathcal{L}_{e_d} f_\theta(x) \le -\frac{\varepsilon^{\alpha/2}}{\eta r^{1-\alpha/2}} \mathcal{L}_{e_d} g(x) \quad \text{for any } x \in B(0, r).$$

命题 4.2. 令 $z = 0$，取定 $r > 0$, $\varepsilon \in (0, r/4]$ 和 $\eta \in (0, \varepsilon]$。存在一个常数 $b_2 > 0$（仅依赖于 α），使得

$$b_2 \mathcal{L}_{e_d} F_\Theta(x) \ge -\frac{\varepsilon^{\alpha/2}}{\eta r^{1-\alpha/2}} \mathcal{L}_{e_d} g(x) \quad \text{for any } x \in B(0, r).$$

假设命题 4.1 和命题 4.2 成立，我们便得到命题 3.7。

命题 3.7 的证明。由命题 4.1，存在 $\theta \in \mathcal{G}(r,\varepsilon)$ 和 $b_1 > 0$，使得对于任意 $x \in B(0,r)$，$\mathcal{L}_{e_d} f_{b_1,\theta}(x) \le 0$，其中 $f_{b,\theta}$ 定义于式 (26) 中。由引理 2.1，$\mathcal{L} f_{b_1,\theta}(x) \le 0$ 对于任意 $x \in B(0,r)$ 均成立。类似地，由命题 4.2，存在 $b_2 > 0$，使得对于任意 $x \in B(0,r)$，$\mathcal{L}_{e_d} F_{b_2,\Theta}(x) \ge 0$，其中 $F_{b,\Theta}$ 定义于式 (28) 中。由引理 2.1 $\mathcal{L} F_{b_2,\Theta}(x) \ge 0$ 对于任意 $x \in B(0,r)$ 均成立。□

本小节余下部分将用于证明命题 4.1、4.2。

除非另有说明，我们假设本小节中的所有常数均为正，且只依赖于 α。本小节中，当存在只依赖于 α 的常数 $c_1, c_2 > 0$，使得对所有 $x \in U$ 均有 $c_1 f_1(x) \le f_2(x) \le c_2 f_1(x)$ 时，我们记 $f_1(x) \approx f_2(x)$ 为 $x \in U$。类似地，当存在只依赖于 α 的常数 $c > 0$，使得对所有 $x \in U$ 均有 $f_1(x) \le c f_2(x)$ 时，我们记 $f_1(x) \lesssim f_2(x)$ 为 $x \in U$。

令 $z = 0$。取定 $r > 0, \varepsilon \in (0, r/4]$ 和 $\eta \in (0, \varepsilon]$。对于任意 $\theta \in \mathcal{G}(r,\varepsilon)$，将由 (21) 给出的 Θ 和 $y \in \mathbb{R}^d$ 记作

$$\varphi(y) = \begin{cases} \theta(|y|^2), & \text{for} \quad y \in B(0,r), \\ 0 & \text{for} \quad y \in B^c(0,r). \end{cases}$$

$$\Phi(y) = \begin{cases} \Theta(|y|^2), & \text{for} \quad y \in B(0,r), \\ 0 & \text{for} \quad y \in B^c(0,r). \end{cases}$$

对任意 $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$，令 $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{d-1}, 0) \in \mathbb{R}^d$。不失一般性，我们可以假设 $x_d \ge 0$。对任意 $x \in B(0,r)$，定义 $S_1(x)$、$S_2(x)$、$S_3(x)$、$S_4(x)$ 如下：

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sqrt{[(r-\varepsilon)^2 - |\tilde{x}|^2] \vee 0}, \\ S_2(x) &= \sqrt{r^2 - |\tilde{x}|^2}, \\ S_3(x) &= \sqrt{(r+\varepsilon)^2 - |\tilde{x}|^2}, \\ S_4(x) &= \sqrt{(r+\varepsilon+\eta)^2 - |\tilde{x}|^2}. \end{aligned}$$

类似地，对任意 $x \in B(0,r)$ 和 $N \ge 4$，定义 $S_*(x)$、$S_{**}(x)$、$S_{***}(x)$ 如下：

$$\begin{aligned} S_*(x) &= \sqrt{[(r-\varepsilon+\varepsilon/N)^2 - |\tilde{x}|^2] \vee 0}, \\ S_{**}(x) &= \sqrt{[(r-3\varepsilon/4)^2 - |\tilde{x}|^2] \vee 0}, \\ S_{***}(x) &= \sqrt{[(r-\varepsilon/2)^2 - |\tilde{x}|^2] \vee 0}. \end{aligned}$$

显然，我们有以下关系：

$$S_1(x) \le S_*(x) \le S_{**}(x) \le S_{***}(x) \le S_2(x) \le S_3(x) \le S_4(x).$$

回忆一下，$q = r^2 - (r-\varepsilon)^2$。对于 $x \in B(0,r)$，我们有以下估计：

$$S_2(x) - S_1(x) \le \frac{q}{S_2(x)}. \tag{42}$$

事实上，对于 $|\tilde{x}| \le r - \varepsilon$，我们有 $S_2^2(x) - S_1^2(x) = q$，因此

$$S_2(x) - S_1(x) = \frac{S_2^2(x) - S_1^2(x)}{S_2(x) + S_1(x)} = \frac{q}{S_2(x) + S_1(x)} \le \frac{q}{S_2(x)}$$

并且若 $|\tilde{x}| \ge r - \varepsilon$，则 $S_1(x) = 0$ 且 $S_2^2(x) \le q$，这就证明了此情形下的 (42)。

类似地，对于 $x \in B(0,r)$，我们得到

$$\begin{aligned} S_4(x) - S_3(x) &= \sqrt{(r+\varepsilon+\eta)^2 - |\tilde{x}|^2} - \sqrt{(r+\varepsilon)^2 - |\tilde{x}|^2} \\ &= \frac{\eta(2r+2\varepsilon+\eta)}{\sqrt{(r+\varepsilon+\eta)^2 - |\tilde{x}|^2} + \sqrt{(r+\varepsilon)^2 - |\tilde{x}|^2}} \\ &\approx \frac{\eta\sqrt{r}}{\sqrt{r+\varepsilon-|\tilde{x}|}} \approx \frac{\eta r}{S_3(x)}. \end{aligned} \tag{43}$$

$$S_3(x) - x_d = \sqrt{(r+\varepsilon)^2 - |\tilde{x}|^2} - x_d = \frac{(r+\varepsilon-|x|)(r+\varepsilon+|x|)}{\sqrt{(r+\varepsilon)^2 - |\tilde{x}|^2} + x_d}. \tag{44}$$

现在我们给出涉及函数 λ、φ 和 Φ 的若干估计，这些估计将在下文中使用。回顾一下，我们假设 $x_d \geq 0$。

设 $0 < a \leq b$，那么由幂函数 $(0, \infty) \ni v \to v^{\alpha/2}$ 的凹性可得

$$b^{\alpha/2} - a^{\alpha/2} \leq (\alpha/2)a^{\alpha/2-1}(b-a).$$

Ap应用上述初等不等式，并假设 $x_d + |t| < S_2(x)$，可得

$$\begin{aligned} |\lambda(x+te_d) - \lambda(x-te_d)| &= |(S_2^2(x) - (x_d+t)^2))^{\alpha/2} - (S_2^2(x) - (x_d-t)^2)^{\alpha/2}| \\ &\leq \frac{\alpha}{2}(S_2^2(x) - (|x_d|+|t|)^2)^{\alpha/2-1}|(x_d+t)^2 - (x_d-t)^2| \\ &= 2\alpha(S_2^2(x) - (|x_d|+|t|)^2)^{\alpha/2-1}|t||x_d| \\ &\leq 2\alpha(S_2^2(x) - (|x_d|+|t|)^2)^{\alpha/2-1}|t|S_2(x). \end{aligned} \tag{45}$$

现在我们转而给出涉及函数 φ 的估计。假设 $\theta \in \mathcal{G}(r, \varepsilon)$。当 $x_d + |t| < S_2(x)$ 时，我们有

$$\frac{d}{dt}\varphi(x+te_d) = \frac{d}{dt}\theta(|x+te_d|^2) = \theta'(|\tilde{x}|^2 + (t+x_d)^2)2(t+x_d) \tag{46}$$

and

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x+te_d) = \theta''(|\tilde{x}|^2 + (t+x_d)^2)4(t+x_d)^2 + 2\theta'(|\tilde{x}|^2 + (t+x_d)^2). \tag{47}$$

因此，若 $x_d + |t| \leq S_2(x)$，由 (46) 和引理 3.5 可得

$$\left|\frac{d}{dt}\varphi(x+te_d)\right| \leq \frac{3}{q^2}2|x_d+t| \leq \frac{6S_2(x)}{q^2}.$$

因此，对某个 $|\xi| \leq S_2(x) - x_d$，我们得到

$$|\varphi(x+te_d) - \varphi(x)| = |t|\left|\left[\frac{d}{dt}\varphi(x+te_d)\right]_{t=\xi}\right| \leq 6|t|\frac{S_2(x)}{q^2}. \tag{48}$$

类似地，利用上述估计、定义 3.4 中的条件 (iv)、引理 3.5 以及 (47)，我们得到

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x+te_d) \leq \frac{2}{q^3}4(x_d+t)^2 + \frac{6}{q^2} \leq 8\frac{S_2^2(x)}{q^3} + \frac{6}{q^2}.$$

根据上述估计，对于某个 $|\xi| \leq S_2(x) - x_d$，我们得到

$$\varphi(x+te_d) + \varphi(x-te_d) - 2\varphi(x) = t^2\left[\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x+te_d)\right]_{t=\xi} \leq t^2\left(\frac{8S_2^2(x)}{q^3} + \frac{6}{q^2}\right). \tag{49}$$

通过类似的论证，对于 $s \in (-S_2(x)\ S_2(x))$，我们有

$$|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)| = |s-x_d|\left|\left[\frac{d}{dt}\Phi(x+te_d)\right]_{t=\xi}\right| \le 6|s-x_d|\frac{S_2(x)}{q^2}. \tag{50}$$

接下来，我们陈述若干辅助引理，它们将用于推导$\mathcal{L}_{e_d}f_\theta$ 和 $\mathcal{L}_{e_d}F_\Theta$的估计。

引理 4.3. 假设 $|x| \in [r-\varepsilon, r)$，$|\tilde{x}| \le r-2\varepsilon$、$x_d \ge 0$和 $\theta \in \mathcal{G}(r,\ \varepsilon)$。设$S_1 = S_1(x)$ 和 $S_2 = S_2(x)$。则我们有 $S_1 \ge \frac{1}{2}(S_2-S_1) \ge \frac{1}{3}(S_2-S_1) \ge \frac{1}{4}\varepsilon$，并且存在常数 κ_1使得

$$\int_{S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1)}^{S_1-\frac{1}{3}(S_2-S_1)} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)(\varphi(\tilde{x}+S_1e_d)-\varphi(\tilde{x}+se_d))}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds \ge \kappa_1\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}.$$

证明。 利用 $|\tilde{x}| \le r-2\varepsilon$，我们得到

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(r-\varepsilon)^2-|\tilde{x}|^2}{r^2-|\tilde{x}|^2} \ge \frac{(r-\varepsilon)^2-(r-2\varepsilon)^2}{r^2-(r-2\varepsilon)^2} = \frac{(2r-3\varepsilon)}{2(2r-2\varepsilon)} \ge \frac{5}{12},$$

由于 $r \ge 4\varepsilon$。由此可得

$$S_1 \ge \frac{1}{2}(S_2-S_1) \ge \frac{q}{4S_2} \ge \frac{q}{4r} = \frac{(2r-\varepsilon)\varepsilon}{4r} \ge \frac{3}{8}\varepsilon.$$

对于 $s \in (0, S_1)$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{x}+S_1e_d)-\varphi(\tilde{x}+se_d) &= \frac{1}{r^2-|\tilde{x}|^2-S_1^2}-\frac{1}{r^2-|\tilde{x}|^2-s^2}\\ &= \frac{S_1^2-s^2}{q(S_2^2-s^2)}.\end{aligned}$$

因此，对于 $s \in (0, S_1)$，我们有

$$\lambda(\tilde{x}+se_d)(\varphi(\tilde{x}+S_1e_d)-\varphi(\tilde{x}+se_d)) = \frac{S_1^2-s^2}{q(S_2^2-s^2)^{1-\alpha/2}}. \tag{51}$$

由于 $S_1 \ge \frac{1}{2}(S_2-S_1)$，对于 $s \in \left(S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1)\,S_1\right)$我们有

$$\begin{aligned}S_2^2-s^2 &\le S_2^2-\left(S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1)\right)^2\\ &= S_2^2-S_1^2-\left(\frac{1}{2}(S_2-S_1)\right)^2+S_1(S_2-S_1)\\ &\le S_2^2-S_1^2+S_1(S_2-S_1)\\ &< 2q.\end{aligned}$$

因此，对于 $s \in \left(S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1)\ S_1\right)$我们有

$$\lambda(\tilde{x}+se_d)(\varphi(\tilde{x}+S_1e_d)-\varphi(\tilde{x}+se_d)) \ge \frac{S_1^2-s^2}{q(2q)^{1-\alpha/2}}. \tag{52}$$

由（42），对于 $s \in \left(S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1)\ S_1\right)$，我们得到

$$|s-x_d| \le S_2-\left(S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1)\right) = \frac{3}{2}(S_2-S_1) \le \frac{3}{2}\frac{q}{S_2}. \tag{53}$$

由（52）和（53），我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{S_1-\frac{1}{3}(S_2-S_1)}^{S_1-\frac{1}{3}(S_2-S_1)} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)(\varphi(\tilde{x}+S_1e_d)-\varphi(\tilde{x}+se_d))}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds \\
\geq\ & \left(\frac{3q}{2S_2}\right)^{-1-\alpha}\frac{S_1}{q(2q)^{1-\alpha/2}}\int_{S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1)}^{S_1-\frac{1}{3}(S_2-S_1)}(S_1-s)\,ds \\
=\ & \frac{8^{\alpha/2}}{3^{1+\alpha}}S_2^{\alpha}\frac{S_1S_2}{q^{3+\alpha/2}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\right)(S_2-S_1)^2 \\
=\ & \frac{8^{\alpha/2}}{3^{1+\alpha}}\frac{5}{72}S_2^{\alpha}\frac{S_1S_2}{q^{3+\alpha/2}}\frac{q^2}{(S_2+S_1)^2} \\
\geq\ & \frac{8^{\alpha/2-1}}{3^{3+\alpha}}\frac{S_2^{\alpha}}{q^{1+\alpha/2}},
\end{aligned}$$

因为 $S_1/S_2 \geq \sqrt{5/12}$ 蕴含 $S_2S_1(S_2+S_1)^{-2} \geq 1/5$。 □

引理 4.4. 假设 $|x| \in [r-\varepsilon, r-3\varepsilon/4]$, $x_d \geq 0$, $\theta \in \mathcal{G}(r,\varepsilon)$。令 $S_1 = S_1(x)$和 $S_2 = S_2(x)$。则存在一个常数 κ_2，使得对于任意 $\rho \in (0, 1/4]$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{|t|\leq\rho\varepsilon}\frac{(\lambda(x+te_d)(\varphi(x+te_d)-\varphi(x))+\lambda(x-te_d)(\varphi(x-te_d)-\varphi(x)))}{|t|^{1+\alpha}}\,dt \\
\leq\ & \kappa_2\rho^{2-\alpha}\frac{S_2^{\alpha}}{q^{1+\alpha/2}}.
\end{aligned}$$

证明。在整个证明中，我们假设 $\rho \in (0, 1/4]$ 且 $t \in (-\rho\varepsilon, \rho\varepsilon)$。由于$|x| \leq r - 3\varepsilon/4$，我们有 $x_d \leq S_{**} = S_{**}(x) = \sqrt{(r-3\varepsilon/4)^2 - |\tilde{x}|^2}$。因此，对于$|t| \leq \rho\varepsilon \leq \varepsilon/4$，我们得到

$$x_d + |t| \leq S_{**} + \varepsilon/4 = S_2 + S_{**} - S_2 + \varepsilon/4 < S_2,$$

因为

$$S_2 - S_{**} = \frac{S_2^2 - S_{**}^2}{S_2 + S_{**}} \geq \frac{r^2-(r-3\varepsilon/4)^2}{2r} > \varepsilon/4.$$

此外，我们有

$$\frac{4}{3}S_2^2 = \frac{4}{3}(r^2-|\tilde{x}|^2) \geq \frac{4}{3}\left(r^2-(r-3\varepsilon/4)^2\right) \geq q. \tag{54}$$

我们需要适当地估计

$$\begin{aligned}
&(\lambda(x+te_d)(\varphi(x+te_d)-\varphi(x))+\lambda(x-te_d)(\varphi(x-te_d)-\varphi(x))) &(55)\\
=\ & \lambda(x-te_d)\left(\varphi(x+te_d)+\varphi(x-te_d)-2\varphi(x)\right) &(56)\\
+\ & \left(\lambda(x+te_d)-\lambda(x-te_d)\right)\left(\varphi(x+te_d)-\varphi(x)\right). &(57)
\end{aligned}$$

首先考虑（56）。应用（49），由（54）可得,

$$\varphi(x+te_d)+\varphi(x-te_d)-2\varphi(x) \leq 16\frac{S_2^2}{q^3}t^2. \tag{58}$$

我们还有

$$|x+te_d|^2 \geq |x|^2 - 2|t|x_d \geq (r-\varepsilon)^2 - 2\rho\varepsilon r \geq (r-2\varepsilon)^2,$$

so

$$\lambda(x+te_d) \leq \lambda((r-2\varepsilon)e_d) \leq (4\varepsilon r)^{\alpha/2} \leq 4(\varepsilon r)^{\alpha/2} \leq 4q^{\alpha/2}.$$

由此及(58)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{|t|\le\rho\varepsilon}\frac{\lambda(x-te_d)\left(\varphi(x+te_d)+\varphi(x-te_d)-2\varphi(x)\right)}{|t|^{1+\alpha}}\,dt &\le 64q^{\alpha/2}\frac{S_2^2}{q^3}\int_{|t|\le\rho\varepsilon}\frac{t^2dt}{|t|^{1+\alpha}}\\ &= \frac{128}{2-\alpha}\rho^{2-\alpha}\varepsilon^{2-\alpha}q^{\alpha/2}\frac{S_2^2}{q^3}\\ &\le \frac{128}{2-\alpha}\rho^{2-\alpha}\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \quad (59)\end{aligned}$$

这里我们使用了 $\varepsilon^{2-\alpha}S_2^2=(\varepsilon S_2)^{2-\alpha}S_2^\alpha\le(r\varepsilon)^{2-\alpha}S_2^\alpha\le q^{2-\alpha}S_2^\alpha$。

接下来，我们考虑 (57)。我们有

$$\begin{aligned}|\tilde{x}|^2+(x_d+|t|)^2 &= |x|^2+2x_d|t|+t^2\\ &\le (r-3\varepsilon/4)^2+2r\varepsilon/4+(\varepsilon/4)^2\\ &< (r-\varepsilon/4)^2.\end{aligned}$$

这意味着

$$(S_2^2-(x_d+|t|)^2\ge r^2-(r-\varepsilon/4)^2\ge q/4,$$

结合 (45)，可得以下估计

$$|\lambda(x+te_d)-\lambda(x-te_d)| \le 8\alpha q^{\alpha/2-1}|t|S_2.$$

由此及 (48) 得

$$|\lambda(x+te_d)-\lambda(x-te_d)|\,|\varphi(x+te_d)-\varphi(x)| \le 48\alpha|t|^2\frac{S_2^2}{q^{3-\alpha/2}}.$$

通过与推导式（59）相同的论证，我们得到

$$\int_{|t|\le\rho\varepsilon}\frac{(\lambda(x+te_d)-\lambda(x-te_d))\left(\varphi(x+te_d)-\varphi(x-te_d)\right)}{|t|^{1+\alpha}}\,dt\le\alpha\frac{96}{2-\alpha}\rho^{2-\alpha}\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}},$$

结合（55–57）和（59），即可得到该引理的断言。 □

引理4.5。 假设 $|x|\in[r-\varepsilon,r-3\varepsilon/4]$, $x_d\ge0$, $\theta\in\mathcal{G}(r,\varepsilon)$。令 $S_1=S_1(x)$和 $S_2=S_2(x)$。对于任意 $t>0$，令$W_{x,t}=[x_d-t,x_d+t]$。那么存在一个常数κ_3，使得对于任意 $\rho\in(0,\ 1/4]$，都有

$$\int_{(S_1,S_2)\setminus W_{x,\rho\varepsilon}}\frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)(\varphi(\tilde{x}+se_d)-\varphi(x))}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\le\frac{\kappa_3}{\rho^{1+\alpha}}\frac{rS_2^\alpha(\|\theta\|_\infty-1/q)}{\varepsilon^{1+\alpha}}.$$

证明。 对于 $s\in(S_1,S_2)$，显然有 $\lambda(\tilde{x}+se_d)=(S_2^2-s^2)^{\alpha/2}\le S_2^\alpha$以及 $\varphi(\tilde{x}+se_d)-\varphi(x)\le\|\theta\|_\infty-1/q$。对于 $s\in(S_1,S_2)\setminus W_{x,\rho\varepsilon}$，我们也有 $|s-x_d|^{-1-\alpha}\le\rho^{-1-\alpha}\varepsilon^{-1-\alpha}$。最后注意到，对于 $|x|\in[r-\varepsilon,r-3\varepsilon/4]$，有 $q\le\frac{4}{3}S_2^2\le\frac{4}{3}S_2r$，见（54）。上述估计和（42）给出了该引理的断言。 □

引理 4.6. 设 $x\in B(0,r-\varepsilon)$，并设 $S_2=S_2(x)$， $S_{**}=S_{**}(x)$。我们假设$N\ge4$ 使得 $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{r\,r\vee1()^2}$， $\theta\in\mathcal{G}(r,\varepsilon)$，且 θ 的定义中的 K满足$K<\varepsilon/N$以及 $\|\theta\|_\infty<\theta((r-\varepsilon)^2)+1/N^{4+\alpha}$。在上述关于 θ和N 的假设下，对 $s\in(S_{**},S_2)$ 我们有

$$\theta(|\tilde{x}+se_d|^2)=\|\theta\|_\infty<\frac{1}{r^2-|\tilde{x}|^2-S_{**}^2}.$$

证明。 由于 $r \geq 4\varepsilon$，我们得到 $(r \vee 1)^2 \geq 16\varepsilon^2 > 8\varepsilon^2$，因此 $1 > 8\varepsilon^2/(r \vee 1)^2$。这与假设 $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{r\, r\vee 1()^2}$ 蕴含

$$\frac{1}{8r\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{r(r \vee 1)^2} > \frac{1}{N}.$$

我们还有

$$\frac{1}{r^2-(r-3\varepsilon/4)^2} - \frac{1}{r^2-(r-\varepsilon)^2} = \frac{\frac{r\varepsilon}{2} - \frac{7\varepsilon^2}{16}}{(2r\varepsilon-\varepsilon^2)\left(\frac{3r\varepsilon}{2} - \frac{9\varepsilon^2}{16}\right)} \geq \frac{1}{8r\varepsilon} > \frac{1}{N} > \frac{1}{N^{4+\alpha}}. \tag{60}$$

注意，对于 $x \in B(0, r-\varepsilon)$ 和 $s \in (S_{**}, S_2)$，我们有

$$|\tilde{x} + se_d|^2 \geq |\tilde{x}|^2 + S_{**}^2 = \left(r - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \geq (r - \varepsilon + K)^2.$$

由此可得 $\theta(|\tilde{x} + se_d|^2) = \|\theta\|_\infty$。根据这一点，利用假设 $\|\theta\|_\infty < \theta((r-\varepsilon)^2) + 1/N^{4+\alpha}$ 和 (60)，我们得到

$$\theta(|\tilde{x} + se_d|^2) < \theta((r-\varepsilon)^2) + 1/N^{4+\alpha} < \frac{1}{r^2-(r-3\varepsilon/4)^2} = \frac{1}{r^2 - |\tilde{x}|^2 - S_{**}^2}.$$

□

引理 4.7。 假设 $|x| \in [r-\varepsilon, r)$， $x_d \geq 0$。令 $S_1 = S_1(x)$、 $S_2 = S_2(x)$ 和 $p(x) = S_2 - x_d$。那么存在一个常数 κ_4，使得

$$\int_{|t|\leq p(x)} \frac{|\lambda(x+te_d) - \lambda(x-te_d)||\Phi(x+te_d) - \Phi(x)|}{|t|^{1+\alpha}}\, dt \quad \leq \quad \kappa_4 \frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}.$$

证明。 对于 $|t| \leq p(x)$，我们有 $x_d + |t| \leq S_2$，因此由 (50) 得到

$$|\Phi(x+te_d) - \Phi(x)| \leq 6|t|\frac{S_2}{q^2}. \tag{61}$$

如果 $|t| \leq p(x)/2$，则 $S_2^2 - (x_d + |t|)^2 \geq \frac{1}{2}(S_2^2 - x_d^2)$，因此由 (45) 我们得到

$$|\lambda(x+te_d) - \lambda(x-te_d)| \leq c(S_2^2 - x_d^2)^{\alpha/2-1}|t|S_2.$$

结合上述估计，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{|t|\leq p(x)/2} \frac{|\lambda(x+te_d) - \lambda(x-te_d)||\Phi(x+te_d) - \Phi(x)|}{|t|^{1+\alpha}}\, dt \\
\leq\ & c(S_2^2 - x_d^2)^{\alpha/2-1}\frac{S_2^2}{q^2}\int_{|t|\leq p(x)/2} |t|^{1-\alpha}\, dt \\
.\ \leq\ & c(S_2^2 - x_d^2)^{\alpha/2-1}\frac{S_2^2}{q^2}(S_2^2 - x_d^2)^{2-\alpha}S_2^{\alpha-2} \\
\leq\ & c(S_2^2 - S_1^2)^{1-\alpha/2}\frac{S_2^\alpha}{q^2} \leq c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}.
\end{aligned} \tag{62}$$

此外，由（45）和（61）可得

$$\begin{aligned}
&\int_{p(x)/2\le|t|\le p(x)} \frac{|\lambda(x+te_d)-\lambda(x-te_d)||\Phi(x+te_d)-\Phi(x)|}{|t|^{1+\alpha}}\,dt \\
\le\ & c\frac{S_2^2}{q^2}(p(x))^{1-\alpha}S_2^{\alpha/2-1}\int_{p(x)/2\le t\le p(x)}(S_2-(x_d+t))^{\alpha/2-1}\,dt \\
\le\ & c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \qquad (63)
\end{aligned}$$

在上述不等式链中，我们使用了 $(S_2-(x_d+p(x)/2))=p(x)/2$ 以及 $p(x)\le S_2-S_1\le \frac{q}{S_2}$。结合 (62) 和 (63) 即得证明。□

引理 4.8。假设 $|x|\in[r-\varepsilon,r)$，$x_d\ge 0$。令 $S_1=S_1(x)$，$S_2=S_2(x)$，$p(x)=S_2-x_d$ 以及 $W_x=(-p(x)+x_d,\ p(x)+x_d)$。存在一个常数 κ_5 使得

$$\int_{(-S_2,S_2)\setminus W_x}\frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)|}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\le\kappa_5\frac{S_2^\alpha\vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}}.$$

证明。对于 $s\in(-S_2,S_2)$，由引理 3.5 可得

$$|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)|\le\frac{4}{q}.$$

接下来，我们注意到，对于 $s\in(-S_2,S_2)\setminus W_x=(-S_2,2x_d-S_2)$，有

$$x_d-s\le S_2-s\le 2(x_d-s).$$

因此，对于 $s\in(-S_2,S_2)\setminus W_x$，由 (50) 可知

$$\begin{aligned}
\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)| &\le 6|s-x_d|\frac{S_2}{q^2}(S_2^2-s^2)^{\alpha/2} \\
&\le c\frac{S_2^{1+\alpha/2}}{q^2}(x_d-s)^{1+\alpha/2} \qquad (64)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)| &\le \frac{4}{q}(S_2^2-s^2)^{\alpha/2} \\
&\le c\frac{S_2^{\alpha/2}}{q}(x_d-s)^{\alpha/2}. \qquad (65)
\end{aligned}$$

现在我们作出假设 $S_2\ge 2x_d$。于是，由 (65) 可得

$$\begin{aligned}
\int_{-S_2}^{2x_d-S_2}\frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)|}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds &\le c\frac{S_2^\alpha}{q}\int_{S_2-2x_d}^{S_2}(s+x_d)^{-\alpha-1}\,ds \\
&\le c\frac{S_2^\alpha}{q}\frac{2x_d}{(S_2-x_d)^{1+\alpha}} \\
&\le c\frac{1}{q}\le c\frac{S_2^\alpha\vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}},
\end{aligned}$$

这就完成了情形 $S_2\ge 2x_d$ 下的证明。

现在我们假设 $S_2 \le 2x_d$。在这种情形下，由 (65)，我们观察到

$$\begin{aligned}\int_{-S_2}^{0} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)|}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds &\le c\frac{S_2^\alpha}{q}\int_0^{S_2}(s+x_d)^{-\alpha-1}\,ds\\ &\le c\frac{S_2^\alpha}{q}\frac{S_2}{x_d^{1+\alpha}}\\ &\le c\frac{1}{q}\le c\frac{S_2^\alpha \vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}}. \end{aligned} \tag{66}$$

接下来，由 (64) 可推得

$$\begin{aligned}\int_{(S_1,S_2)\setminus W_x} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)|}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds &\le c\frac{S_2^{1+\alpha/2}}{q^2}\int_{S_1}^{x_d}(x_d-s)^{-\alpha/2}\,ds\\ &\le c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}., \end{aligned} \tag{67}$$

这是以下估计的推论

$$\int_{S_1}^{x_d}(x_d-s)^{-\alpha/2}\,ds = c(x_d-S_1)^{1-\alpha/2} \le c\frac{(S_2^2-S_1^2)^{1-\alpha/2}}{S_2^{1-\alpha/2}} \le c\left(\frac{q}{S_2}\right)^{1-\alpha/2}.$$

当 $S_1>0$ 和 $x_d \ge {}^{S_1+S_2}_{2}$时，~~由 (65)~~ 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{S_1} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)|}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds &\le c\frac{S_2^{\alpha/2}}{q}\int_0^{S_1}(x_d-s)^{-\alpha/2-1}\,ds\\ &\le c\frac{S_2^\alpha}{q}(S_2^2-S_1^2)^{-\alpha/2}\\ &\le c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \end{aligned} \tag{68}$$

最后一步用到了如下事实：当 $S_1>0$时，$S_2^2-S_1^2=q$。结合估计 (67) 和 (68)，在 $x_d \ge {}^{S_1+S_2}_{2}$的情况下，我们有

$$\int_{(0,S_2)\setminus W_x} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)|}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds \le c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \tag{69}$$

现在考虑 $S_2/2 \le x_d < {}^{S_1+S_2}_{2}$的情况。~~由 (65)~~ 可得

$$\begin{aligned}\int_{(0,S_2)\setminus W_x} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)|\Phi(\tilde{x}+se_d)-\Phi(x)|}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds &\le c\frac{S_2^{\alpha/2}}{q}\int_0^{2x_d-S_2}(x_d-s)^{-\alpha/2-1}\,ds\\ &= c\frac{S_2^{\alpha/2}}{q}((S_2-x_d)^{-\alpha/2}-x_d^{-\alpha/2})\\ &\le c\frac{S_2^{\alpha/2}}{q(S_2-x_d)^{\alpha/2}}\\ &\le c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \end{aligned}$$

由于在此情形下 $S_1>0$，因此 $S_2^2-S_1^2=q$。最后一个不等式结合（66）和（69）完成了该引理的证明。□

现在我们建立关于 $\mathcal{L}_{e_d}g$ 的双边估计。回顾 $z=0$，因此对于 $x\in D=B(0,\ r)$，我们有 $\delta_D(x)=r-|x|$。

引理 4.9. 设 $|x|<r$ 与 $S_2=S_2(x)$。则我们有

$$\frac{\varepsilon^{\alpha/2}}{\eta r^{1-\alpha/2}}\mathcal{L}_{e_d}g(x)\approx\frac{S_2^\alpha\vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}}\left(\frac{\varepsilon}{\delta_D(x)}\wedge 1\right)^{1+\alpha}.$$

证明. 在整个证明中，$S_3=S_3(x)$ 且 $S_4=S_4(x)$。注意到

$$\mathcal{L}_{e_d}g(x)=\mathcal{A}_\alpha\int_{S_3}^{S_4}\left(\frac{1}{|s-x_d|^{1+\alpha}}+\frac{1}{|s+x_d|^{1+\alpha}}\right)ds.$$

我们首先考虑 $|x|<r-\varepsilon$。由于

$$\int_{S_3}^{S_4}\frac{1}{|s+x_d|^{1+\alpha}}\,ds\le\int_{S_3}^{S_4}\frac{1}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds$$

我们有

$$\mathcal{L}_{e_d}g(x)\approx\int_{S_3-x_d}^{S_4-x_d}\frac{1}{|t|^{1+\alpha}}\,dt.$$

接下来，由 (44)，我们得到

$$S_3-x_d\approx\frac{\delta_D(x)\sqrt{r}}{\sqrt{r-|\tilde{x}|}}.$$

利用这一点和 (43)，我们得到 $S_4-x_d=S_3-x_d+S_4-S_3\approx S_3-x_d$。因此 e

$$\mathcal{L}_{e_d}g(x)\approx\frac{S_4-S_3}{(S_3-x_d)^{1+\alpha}}\approx\frac{\eta(r-|\tilde{x}|)^{\alpha/2}}{r^{\alpha/2}\delta_D^{1+\alpha}(x)}.\tag{70}$$

接下来我们考虑 $r-\varepsilon\le|x|<r$。我们有 $r+\varepsilon-|x|\approx\varepsilon$ 以及 $0\le x_d\le\sqrt{(r+\varepsilon)^2-|\tilde{x}|^2}$。因此由 (44) 可得

$$S_3-x_d\approx\frac{\varepsilon\sqrt{r}}{\sqrt{r+\varepsilon-|\tilde{x}|}}.$$

由 (43) 我们还有

$$S_4-S_3\approx\frac{\eta\sqrt{r}}{\sqrt{r+\varepsilon-|\tilde{x}|}}\le\frac{\varepsilon\sqrt{r}}{\sqrt{r+\varepsilon-|\tilde{x}|}},$$

因此对于 $s\in(S_3,\ S_4)$，我们有

$$|s-x_d|=s-S_3+S_3-x_d\approx\frac{\varepsilon\sqrt{r}}{\sqrt{r+\varepsilon-|\tilde{x}|}}.$$

因此

$$\mathcal{L}_{e_d}g(x)\approx\int_{S_3}^{S_4}\frac{1}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\approx\frac{\eta(r+\varepsilon-|\tilde{x}|)^{\alpha/2}}{r^{\alpha/2}\varepsilon^{1+\alpha}}.\tag{71}$$

显然，(70) 和 (71) 给出了该引理的断言。 □

现在我们可以证明本小节的两个主要命题中的第一个了。

命题 *4.1* 的证明。回想一下， $r>0$、 $\varepsilon\in(0,r/4]$ 和 $\eta\in(0,\varepsilon]$ 是固定的。

令 κ_1、 κ_2、 κ_3 分别为引理 4.3、4.4 和 4.5 中的常数。回忆一下， $\mathcal{A}_\alpha$ 在 (3) 中定义，而 $\mathcal{A}_\alpha$ 在 (11) 中定义。

固定满足以下条件的 $N\in\mathbb{R}$。

$$N\geq\frac{r(r\vee1)^2}{\varepsilon},\tag{72}$$

$$N\geq\left(\frac{2\kappa_2+16\kappa_3}{\kappa_1}\right)^{1/(2-\alpha)},\tag{73}$$

$$N\geq\left(\frac{\mathcal{A}_\alpha(2\kappa_2+16\kappa_3)}{\tilde{\mathcal{A}}_\alpha}\right)^{1/(2-\alpha)}.\tag{74}$$

注意，(72) 意味着 $N\geq r/\varepsilon\geq4$。

令 $\theta\in\mathcal{G}(r,\varepsilon)$ 为满足上述条件 (106)、(107) 的函数，其存在性已在引理 5.1 中得到证明。

我们将考虑 3 种情形：

情形 1。 $|x|\in(0,r-\varepsilon)$。**情形 2**。 $|x|\in[r-\varepsilon,r-\varepsilon+\varepsilon/N]$。**情形 3**。 $|x|\in(r-\varepsilon+\varepsilon/N,r)$。

在证明过程中，我们省略 x，记号 $S_1(x)$ $S_*(x)$ $S_{**}(x)$ $S_{***}(x)$ $S_2(x)$。

首先，我们考虑 **情形 1**。对于 $y\in\mathbb{R}^d$，令

$$u(y)=f_\theta(y)-h(y),$$

其中 h 由 (12) 给出。由 (13)，对于任意 $y\in B(0,r)$，有 $\mathcal{L}_{e_d}f_\theta(y)=\mathcal{L}_{e_d}u(y)$。注意，对于任意 $y\in B(0,r)$，有

$$u(y)=(r^2-|y|^2)^{\alpha/2}\left(\varphi(y)-\frac{1}{r^2-|y|^2}\right).\tag{75}$$

还需注意， $u(y)=0$ 对于 $y\in B(0,r-\varepsilon)$ 成立。在情形 1 中，我们有 $x\in B(0,r-\varepsilon)$，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e_d}f_\theta(x)&=\mathcal{L}_{e_d}u(x)\\&=\mathcal{A}_\alpha\int_{S_1}^{S_2}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds+\mathcal{A}_\alpha\int_{-S_2}^{-S_1}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\\&=\mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

记 $g(v)=(r^2-v)^{-1}$。由于 $g''(v)$ 在 $(0,r^2)$ 上递增，且由定义 3.4 中的 (iv)，可得 $\varphi(\tilde{x}+se_d)-\frac{1}{r^2-|\tilde{x}+se_d|^2}\leq0$ 对于 $s\in(S_1,S_2)$ 成立。~~利用这一点~~、(75) 和引理 4.6，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&\leq\mathcal{A}_\alpha\int_{S_{**}}^{S_{***}}\frac{(r^2-|\tilde{x}+se_d|^2)^{\alpha/2}}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\left(\varphi(\tilde{x}+se_d)-\frac{1}{r^2-|\tilde{x}+se_d|^2}\right)ds\\&\leq\mathcal{A}_\alpha\int_{S_{**}}^{S_{***}}\frac{(S_2^2-s^2)^{\alpha/2}}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\left(\frac{1}{S_2^2-S_{**}^2}-\frac{1}{S_2^2-s^2}\right)ds.\end{aligned}\tag{76}$$

由于对于任意 $s\in(S_{**},S_{***})$，我们处于情形 1，因此有 $S_2^2-s^2\approx r\varepsilon\approx q$。于是对于任意 $s\in(S_{**},S_{***})$，我们得到

$$\frac{1}{S_2^2-S_{**}^2}-\frac{1}{S_2^2-s^2}=-\frac{s^2-S_{**}^2}{(S_2^2-s^2)(r^2-|\tilde{x}|^2-S_{**}^2)}\approx-\frac{s^2-S_{**}^2}{q^2}.$$

利用这一点和 (76)，我们得到

$$\mathrm{I} \lesssim \frac{-q^{\alpha/2}}{q^2} \int_{S_{**}}^{S_{***}} \frac{(s-S_{**})(s+S_{**})}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\, ds. \tag{77}$$

由于我们处于情形 **1**，显然有 $S_{**} \approx \sqrt{r}\sqrt{r-|\tilde{x}|} \approx \overline{S_2} \approx S_{***}$，

$$S_{***} - S_{**} = \frac{S_{***}^2 - S_{**}^2}{S_{***}+S_{**}} \approx \frac{r\varepsilon}{S_2} \approx \frac{q}{S_2}.$$

对于任意 $s \in (S_{**}, S_{***})$，我们也有

$$|s-x_d| = s - x_d \le S_{***} - x_d \le \frac{\delta_D(x) 2r}{S_{***}} \approx \frac{\delta_D(x) r}{S_2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\lesssim -q^{\alpha/2-2} \frac{S_2}{\left(\frac{\delta_D(x)r}{S_2}\right)^{1+\alpha}} \int_{S_{**}}^{S_{***}} (s-S_{**})\, ds \\
&= -\frac{1}{2} q^{\alpha/2-2} \frac{S_2^{2+\alpha}}{(\delta_D(x)r)^{1+\alpha}} (S_{***}-S_{**})^2 \\
&\approx -\left(\frac{\varepsilon}{\delta_D(x)}\right)^{1+\alpha} \frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}.
\end{aligned}$$

显然有 $\mathrm{II} \le 0$，因此

$$\mathcal{L}_{e_d} f_\theta(x) \lesssim -\left(\frac{\varepsilon}{\delta_D(x)}\right)^{1+\alpha} \frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \tag{78}$$

现在，我们考虑 **情形 2**。我们固定满足 $|x| \in [r-\varepsilon, r-\varepsilon+\varepsilon/N]$ 的 $x \in \mathbf{R}^d$，并对 $y \in \mathbf{R}^d$ 定义

$$u(y) = f_\theta(y) - \lambda(y)\varphi(x) = \lambda(y)\varphi(y) - \lambda(y)\varphi(x).$$

注意到

$$\mathcal{L}_{e_d} f_\theta(x) = -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha \varphi(x) + \mathcal{L}_{e_d} u(x).$$

由于 $u(x) = 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{e_d} u(x) \\
&= \frac{\mathcal{A}_\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left[u(x+e_d t) + u(x-e_d t)\right] \frac{dt}{|t|^{1+\alpha}} \\
&= \mathcal{A}_\alpha \int_{|t|\ge\varepsilon/N} u(x+e_d t)\, \frac{dt}{|t|^{1+\alpha}} + \frac{\mathcal{A}_\alpha}{2} \int_{|t|<\varepsilon/N} \left[u(x+e_d t) + u(x-e_d t)\right] \frac{dt}{|t|^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

令 $W_{x,\varepsilon/N}=\{s\in\mathrm{R}:\ s\in[x_d-\varepsilon/N,x_d+\varepsilon/N]\}$。由此可得，在情形 2 中我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e_d}f_\theta(x) &= -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\varphi(x)+\mathcal{A}_\alpha\int_{(-S_1,S_1)\setminus W_{x,\varepsilon/N}}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\\ &+ \mathcal{A}_\alpha\int_{(S_1,S_2)\setminus W_{x,\varepsilon/N}}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\\ &+ \mathcal{A}_\alpha\int_{(-S_2,-S_1)\setminus W_{x,\varepsilon/N}}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\\ &+ \frac{\mathcal{A}_\alpha}{2}\int_{|t|<\varepsilon/N}\left[u(x+e_dt)+u(x-e_dt)\right]\frac{dt}{|t|^{1+\alpha}}\\ &= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}.\end{aligned}$$

由引理4.5和(107)，我们得到

$$\mathrm{III}=\mathcal{A}_\alpha\int_{(S_1,S_2)\setminus W_{x,\varepsilon/N}}\frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)(\varphi(\tilde{x}+se_d)-\varphi(x))}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\le\frac{\kappa_3\mathcal{A}_\alpha}{N^2}\frac{r}{N}\frac{S_2^\alpha}{\varepsilon^{1+\alpha}}.\tag{79}$$

由(72)

$$\frac{r}{N}\le\frac{\varepsilon}{r}\frac{1}{r}\le\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{\alpha/2}\frac{1}{r}.$$

因此，(79)的上界为

$$\frac{\kappa_3\mathcal{A}_\alpha}{N^2}\frac{S_2^\alpha}{(r\varepsilon)^{1+\alpha/2}}\le 4\frac{\kappa_3\mathcal{A}_\alpha}{N^2}\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}.$$

由同样的论证，IV可用同一表达式从上估计。因此我们得到

$$\mathrm{III}+\mathrm{IV}\le 8\frac{\kappa_3\mathcal{A}_\alpha}{N^2}\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}.\tag{80}$$

由引理 4.4，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{V} &= \frac{\mathcal{A}_\alpha}{2}\int_{|t|\le\varepsilon/N}\Big(\lambda(x+te_d)(\varphi(x+te_d)-\varphi(x))\\ &\qquad +\lambda(x-te_d)(\varphi(x-te_d)-\varphi(x))\Big)\frac{dt}{|t|^{1+\alpha}}\\ &\le \frac{\mathcal{A}_\alpha\kappa_2}{2N^{2-\alpha}}\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}.\end{aligned}\tag{81}$$

现在，考虑情形 2 的两个子情形：子情形 2A。 $|x|\in[r-\varepsilon,r-\varepsilon+\varepsilon/N]$和 $|\tilde{x}|\le r-2\varepsilon$。子情形 2B。 $|x|\in[r-\varepsilon,r-\varepsilon+\varepsilon/N]$ 和 $|\tilde{x}|>r-2\varepsilon$。

首先考虑子情形 2A。显然，我们有

$$\mathrm{I}\le 0.\tag{82}$$

注意到 $x_d\ge S_1$，因此对于任意 $s\in(-S_1,\ S_1)$，我们有

$$\begin{aligned}u(\tilde{x}+se_d) &= \lambda(\tilde{x}+se_d)\left(\varphi(\tilde{x}+se_d)-\varphi(\tilde{x}+x_de_d)\right) &(83)\\ &\le \lambda(\tilde{x}+se_d)\left(\varphi(\tilde{x}+se_d)-\varphi(\tilde{x}+S_1e_d)\right)<0. &(84)\end{aligned}$$

由于 $N\ge 4$、 $x_d\ge S_1$ 和 $\frac{1}{3}(S_2-S_1)\ge\frac{\varepsilon}{4}$（见引理 4.3），我们得到

$$\left[x_d-\frac{\varepsilon}{N},x_d+\frac{\varepsilon}{N}\right]\cap\left[S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1),S_1-\frac{1}{3}(S_2-S_1)\right]=\emptyset.$$

利用这一点、式（83）、（84）和引理 4.3，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &\leq -\mathcal{A}_\alpha \int_{S_1-\frac{1}{3}(S_2-S_1)}^{S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1),} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)(\varphi(\tilde{x}+S_1e_d)-\varphi(\tilde{x}+se_d))}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds \\ &\leq -\mathcal{A}_\alpha\kappa_1\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \end{aligned} \tag{85}$$

最后，由 (80)、(81)、(82) 和 (85)，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e_d}f_\theta(x) &= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V} \\ &\leq \mathcal{A}_\alpha\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}\left(-\kappa_1+\frac{8\kappa_3}{N^2}+\frac{\kappa_2}{2N^{2-\alpha}}\right) \\ &\leq \mathcal{A}_\alpha\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}\left(-\kappa_1+\frac{8\kappa_3+\kappa_2}{N^{2-\alpha}}\right) \end{aligned} \tag{86}$$

现在我们考虑子情形 2B。在情形 2 中我们有 $|x|\geq r-\varepsilon$，因此 $\varphi(x)\geq\varphi((r-\varepsilon)^2e_d)=1/q$，由此得到

$$\mathrm{I}\leq -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\frac{1}{q}. \tag{87}$$

用与 (83-84) 中相同的论证，我们得到

$$\mathrm{II}\leq 0. \tag{88}$$

注意，在子情形 2B 中我们有 $r-|\tilde{x}|\leq 2\varepsilon$，因此 $S_2^2\leq 2q$。利用这一点以及 (87)、(88)、(80) 和 (81)，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e_d}f_\theta(x) &= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V} \\ &\leq \frac{1}{q}\left(-\tilde{\mathcal{A}}_\alpha+8\frac{S_2^\alpha}{q^{\alpha/2}}\frac{\kappa_3\mathcal{A}_\alpha}{N^2}+\frac{S_2^\alpha}{q^{\alpha/2}}\frac{\kappa_2\mathcal{A}_\alpha}{2N^{2-\alpha}}\right) \\ &\leq \frac{1}{q}\left(-\tilde{\mathcal{A}}_\alpha+\frac{8\kappa_3\mathcal{A}_\alpha+\kappa_2\mathcal{A}_\alpha}{N^{2-\alpha}}\right). \end{aligned} \tag{89}$$

现在，我们考虑 **情形 3**。我们固定满足 $|x|\in(r-\varepsilon+\varepsilon/N,r)$ 的 $x\in\mathbf{R}^d$，并对 $y\in\mathbf{R}^d$ 定义

$$u(y)=f_\theta(y)-\lambda(y)\|\theta\|_\infty=f_\theta(y)-\lambda(y)\varphi(x)$$

注意，对于 $y\in B(0,r)\setminus B(0,r-\varepsilon+\varepsilon/N)$，我们有 $\varphi(y)=\theta(|y|^2)=\|\theta\|_\infty$, so

$$u(y)=\lambda(y)\varphi(y)-\lambda(y)\|\theta\|_\infty=0.$$

因此

$$\mathcal{L}_{e_d}f_\theta(x)=-\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\|\theta\|_\infty+\mathcal{L}_{e_d}u(x)$$

and

$$\mathcal{L}_{e_d}u(x)=\mathcal{A}_\alpha\int_{\mathbb{R}}\frac{u(x+e_dt)}{|t|^{1+\alpha}}\,dt=\mathcal{A}_\alpha\int_{\mathbb{R}}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds.$$

由此可知，在情形 3 中，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e_d}f_\theta(x) &= -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\|\theta\|_\infty+\mathcal{A}_\alpha\int_{(-S_*,S_*)}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds \\ &= \mathrm{I}+\mathrm{II}. \end{aligned}$$

现在，考虑情形 3 的两个子情形：子情形 3A。 $|x| \in (r-\varepsilon+\varepsilon/N,\ r)$ 和 $|\tilde{x}| \le r-2\varepsilon$。子情形 3B。 $|x| \in (r-\varepsilon+\varepsilon/N,\ r)$ 和 $|\tilde{x}| > r-2\varepsilon$。

首先考虑子情形 3A。显然，我们有

$$\mathrm{I} \le 0. \tag{90}$$

注意，对于任意 $s \in (-S_*, S_*)$，我们有

$$u(\tilde{x}+se_d) = \lambda(\tilde{x}+se_d)\left(\varphi(\tilde{x}+se_d) - \|\theta\|_\infty\right) \le 0. \tag{91}$$

对于任意 $s \in (-S_1, S_1)$，我们也有

$$u(\tilde{x}+se_d) \le \lambda(\tilde{x}+se_d)\left(\varphi(\tilde{x}+se_d) - \varphi(\tilde{x}+S_1e_d)\right) < 0. \tag{92}$$

利用 (90)、(91)、(92) 和引理 4.3，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e_d} f_\theta(x) &\le -\mathcal{A}_\alpha \int_{S_1-\frac{1}{3}(S_2-S_1)}^{S_1-\frac{1}{2}(S_2-S_1),} \frac{\lambda(\tilde{x}+se_d)(\varphi(\tilde{x}+S_1e_d)-\varphi(\tilde{x}+se_d))}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds \\ &\le -\mathcal{A}_\alpha\kappa_1 \frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \end{aligned} \tag{93}$$

现在考虑子情形 3B。我们有 $\|\theta\|_\infty > \varphi((r-\varepsilon)e_d) = 1/q$，由此得到 $\tilde{\mathrm{I}} \le -\mathcal{A}_\alpha/q$。按照 (91) 中相同的论证，我们得到 $\mathrm{II} \le 0$。因此，在子情形 3B 中，我们有

$$\mathcal{L}_{e_d} f_\theta(x) \le -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha \frac{1}{q}. \tag{94}$$

最后，我们注意到，对于 $|x| < r$

$$\frac{S_2^\alpha \vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}} = \begin{cases} S_2^\alpha q^{-1-\alpha/2}, & \text{for} \quad |\tilde{x}| < r-\varepsilon, \\ q^{-1}, & \text{for} \quad |\tilde{x}| \ge r-\varepsilon. \end{cases} \tag{95}$$

接下来，由 (73)、(74)、(95) 以及估计 (78)、(86)、(89)、(93)、(94)，我们得到

$$\mathcal{L}_{e_d} f_\theta(x) \lesssim -\left(\frac{\varepsilon}{\delta_D(x)} \wedge 1\right)^{1+\alpha} \frac{S_2^\alpha \vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}},\ |x| < r. \tag{96}$$

结合引理 4.9，我们完成证明。 □

现在我们开始证明本小节中的第二个主要命题。

命题 *4.2* 的证明。我们将考虑 2 种情形：

情形 1。 $|x| \in (0,\ r-\varepsilon)$。

情形 2。 $|x| \in [r-\varepsilon, r)$。

首先，我们考虑 **情形 1**。对于 $y \in \mathbb{R}^d$，令

$$u(y) = F_\Theta(y) - h(y),$$

其中， h 由 (12) 给出， F_Θ 由 (27) 定义。由 (21)，对于 $v \in ((r-\varepsilon)^2, r^2)$，有

$$\frac{1}{r^2-v} - \Theta(v) = \left(\frac{v-(r-\varepsilon)^2}{q}\right)^3 \frac{1}{r^2-v}.$$

因此，对于 $|y| \in (r-\varepsilon, r)$，有

$$\begin{aligned} u(y) &= (r^2-|y|^2)^{\alpha/2}\left(\Phi(y)-\frac{1}{r^2-|y|^2}\right) \\ &= -(r^2-|y|^2)^{\alpha/2}\left(\frac{|y|^2-(r-\varepsilon)^2}{q}\right)^3\frac{1}{r^2-|y|^2}. \end{aligned} \tag{97}$$

因此，对于 $s \in (S_1, S_2)$，我们有

$$\begin{aligned} u(\tilde{x}+se_d) &= -(r^2-|\tilde{x}|^2-s^2)^{\alpha/2-1}\left(\frac{|\tilde{x}|^2+s^2-(r-\varepsilon)^2}{q}\right)^3 \\ &= -(S_2^2-s^2)^{\alpha/2-1}\left(\frac{s^2-S_1^2}{q}\right)^3 \end{aligned} \tag{98}$$

由 (13)，对任意 $y \in B(0,r)$，我们有 $\mathcal{L}_{e_d}F_\Theta(y) = \mathcal{L}_{e_d}u(y)$。

N另请注意， $u(y) = 0$ 对于 $y \in B(0, r-\varepsilon)$。在情形 1 中，我们有 $x \in B(0, r-\varepsilon)$ s o

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e_d}F_\Theta(x) &= \mathcal{L}_{e_d}u(x) \\ &= \mathcal{A}_\alpha\int_{S_1}^{S_2}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds + \mathcal{A}_\alpha\int_{-S_2}^{-S_1}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds \\ &= \mathrm{I}+\mathrm{II}. \end{aligned}$$

回顾我们已假设 $x_d \geq 0$。估计 I 即可。应用 (98)，我们有

$$\begin{aligned} |\mathrm{I}| &= \mathcal{A}_\alpha\int_{S_1}^{S_2}(S_2^2-s^2)^{\alpha/2-1}\left(\frac{s^2-S_1^2}{q}\right)^3\frac{1}{(s-x_d)^{1+\alpha}}\,ds \\ &\leq \mathcal{A}_\alpha\int_{S_1}^{S_2}(S_2^2-s^2)^{\alpha/2-1}\left(\frac{s^2-S_1^2}{q}\right)^3\frac{1}{(s-S_1)^{1+\alpha}}\,ds \\ &\leq \mathcal{A}_\alpha\int_{S_1}^{S_2}(q-(s^2-S_1^2))^{\alpha/2-1}\left(\frac{s^2-S_1^2}{q}\right)^3\frac{2^{1+\alpha}sS_2^\alpha}{(s^2-S_1^2)^{1+\alpha}}\,ds \\ &\leq c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \end{aligned}$$

最后一个不等式由初等计算得到。

接下来，我们进一步假设 $|x| \leq r-2\varepsilon$。在这种情况下，我们有

$$S_1 - x_d = \frac{S_1^2-x_d^2}{S_1+x_d} \geq \frac{1}{8}\frac{\delta_D(x)\varepsilon r}{S_2\varepsilon} \geq c\frac{\delta_D(x)q}{S_2\varepsilon}.$$

因此

$$\begin{aligned} |\mathrm{I}| &= \mathcal{A}_\alpha\int_{S_1}^{S_2}(S_2^2-s^2)^{\alpha/2-1}\left(\frac{s^2-S_1^2}{q}\right)^3\frac{1}{(s-x_d)^{1+\alpha}}\,ds \\ &\leq 4\mathcal{A}_\alpha\frac{1}{S_2(S_1-x_d)^{1+\alpha}}\int_{S_1}^{S_2}s(S_2^2-s^2)^{\alpha/2-1}\,ds \\ &\leq c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}\left(\frac{\varepsilon}{\delta_D(x)}\right)^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

结合这两个估计，我们得到在情形 1 中

$$|\mathrm{I}| \le c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}\left(1 \wedge \frac{\varepsilon}{\delta_D(x)}\right)^{1+\alpha}$$

从而得到

$$\mathcal{L}_{e_d}F_\Theta(x) \ge -c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}\left(1 \wedge \frac{\varepsilon}{\delta_D(x)}\right)^{1+\alpha}.$$

由此及引理 4.9 可得情形 1 中命题的断言。

现在，我们考虑 **情形 2**，即 $|x| \in [r-\varepsilon, r)$，并对 $y \in \mathrm{R}^d$ 定义

$$u(y) = F_\Theta(y) - \lambda(y)\Phi(x) = \lambda(y)\Phi(y) - \lambda(y)\Phi(x).$$

注意到

$$\mathcal{L}_{e_d}F_\Theta(x) = -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\Phi(x) + \mathcal{L}_{e_d}u(x).$$

令 $p(x) = S_2 - x_d$。由于 $u(x) = 0$，我们得到 $\mathcal{L}_{e_d}u(x)$ 等于

$$\mathcal{A}_\alpha\int_{|t|\ge p(x)} u(x+e_dt)\,\frac{dt}{|t|^{1+\alpha}} + \frac{\mathcal{A}_\alpha}{2}\int_{|t|<p(x)}\left[u(x+e_dt)+u(x-e_dt)\right]\,\frac{dt}{|t|^{1+\alpha}}.$$

设 $W_x = \{s \in \mathrm{R}:\ s \in [x_d - p(x)\ \ x_d + p(x)]\}$。由此可得，在情形 2 中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e_d}F_\Theta(x) &= -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\varphi(x) + \mathcal{A}_\alpha\int_{(-S_2,S_2)\setminus W_x}\frac{u(\tilde{x}+se_d)}{|s-x_d|^{1+\alpha}}\,ds\\ &+ \frac{\mathcal{A}_\alpha}{2}\int_{|t|<p(x)}\left[u(x+e_dt)+u(x-e_dt)\right]\,\frac{dt}{|t|^{1+\alpha}}\\ &= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.\end{aligned}$$

对于 $t \in (-p(x)\ \ p(x))$，我们有

$$\begin{aligned}&u(x+e_dt)+u(x-e_dt)\\ =\ &(\lambda(x+te_d)(\Phi(x+te_d)-\Phi(x)) + \lambda(x-te_d)(\Phi(x-te_d)-\Phi(x)))\\ =\ &\lambda(x-te_d)\left(\Phi(x+te_d)+\Phi(x-te_d)-2\Phi(x)\right)\\ +\ &\left(\lambda(x+te_d)-\lambda(x-te_d)\right)\left(\Phi(x+te_d)-\Phi(x)\right)\\ \ge\ &\left(\lambda(x+te_d)-\lambda(x-te_d)\right)\left(\Phi(x+te_d)-\Phi(x)\right) \qquad (99)\end{aligned}$$

因为项 $\lambda(x-te_d)\,(\Phi(x+te_d)\ +\Phi(x-te_d)\ -2\Phi(x))$ 由函数 $t \to \Phi(x+te_d)$ 对于 $t \in (-p(x)\ \ p(x))$ 的凸性可知为非负。

由 (99) 和引理 4.7，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &= \mathcal{A}_\alpha\int_{|t|<p(x)}\left[u(x+e_dt)+u(x-e_dt)\right]\,\frac{dt}{|t|^{1+\alpha}}\\ &\ge \mathcal{A}_\alpha\int_{|t|<p(x)}\left(\lambda(x+te_d)-\lambda(x-te_d)\right)\left(\Phi(x+te_d)-\Phi(x)\right)\,\frac{dt}{|t|^{1+\alpha}}\\ &\ge -c\frac{S_2^\alpha}{q^{1+\alpha/2}}. \qquad (100)\end{aligned}$$

由引理 4.8

$$\mathrm{II} \ \ge\ -c\frac{S_2^\alpha \vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}}. \qquad (101)$$

并由引理 3.5

$$\mathrm{I} \;\geq\; -c\frac{1}{q} \geq -c\frac{S_2^\alpha \vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}}. \tag{102}$$

然后结合 (100)、(101) 和 (102)，我们得到

$$\mathcal{L}_{e_d} F_\Theta(x) \geq -c\frac{S_2^\alpha \vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}} = -c\frac{S_2^\alpha \vee q^{\alpha/2}}{q^{1+\alpha/2}} \left(\frac{\varepsilon}{\delta_D(x)} \wedge 1\right)^{1+\alpha}.$$

由此及引理 4.9，得到情形 2 中该命题的断言。 □

5. 附录

在附录中，我们给出 $\mathcal{G}(r,\ \varepsilon)$ 中一个函数的显式构造。

固定 $r > 0$ 和 $\varepsilon \in (0,\ r/4]$。回想一下，$q = r^2 - (r-\varepsilon)^2$。令 K_1、K_2 为常数，使得 $K_1 q \in (0,\ r\varepsilon/8)$，$K_2 \in (0,\ r\varepsilon/8)$。

Put

$$\begin{aligned} T_0 &= (r-\varepsilon)^2, \\ T_1 &= (r-\varepsilon)^2 + K_1 q, \\ T_2 &= (r-\varepsilon)^2 + K_1 q + K_2. \end{aligned}$$

我们定义函数 θ 如下：

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{r^2-x}, & \text{for} \quad x \in [0, T_0], \\ \theta(T_0) + \theta'_-(T_0)(x-T_0) + \frac{1}{2}\theta''_-(T_0)(x-T_0)^2 - \frac{1}{3q^4K_1}(x-T_0)^3, & \text{for} \quad x \in (T_0, T_1], \\ \theta(T_1) + \theta'_-(T_1)(x-T_1) + \frac{\theta'_-(T_1)}{2K_2^3}\left(-2K_2(x-T_1)^3 + (x-T_1)^4\right), & \text{for} \quad x \in (T_1, T_2], \\ \theta(T_2), & \text{for} \quad x \in [T_2, r^2), \end{cases} \tag{103}$$

其中，$\theta'_-(T_i)$、$\theta''_-(T_i)$分别表示 θ 在点 T_i处的一阶和二阶左导数。

在 T_0 处，θ、θ'_- 和 θ''_-的值如下。

$$\begin{aligned} \theta(T_0) &= 1/q, \\ \theta'_-(T_0) &= 1/q^2, \\ \theta''_-(T_0) &= 2/q^3. \end{aligned}$$

在（T_0，T_1] 上，我们有以下关于 θ、θ' 和 θ'' 的表达式。

$$\begin{aligned} \theta(T_1) &= \frac{1}{q}\left(1 + K_1 + \frac{2K_1^2}{3}\right), \\ \theta'(x) &= \theta'_-(T_0) + \theta''_-(T_0)(x-T_0) - \frac{1}{q^4K_1}(x-T_0)^2, \quad \text{for } x \in (T_0, T_1), \\ \theta'_-(T_1) &= \frac{1}{q^2}(1+K_1), \\ \theta''(x) &= \theta''_-(T_0) - \frac{2}{q^4K_1}(x-T_0), \quad \text{for } x \in (T_0, T_1), \\ \theta''_-(T_1) &= 0. \end{aligned}$$

最后，在（T_1，T_2] 上，我们有

$$\begin{aligned}\theta(T_2) &= \theta(T_1)+\frac{K_2\theta'_-(T_1)}{2}=\frac{1}{q}\left(1+K_1+\frac{2K_1^2}{3}\right)+\frac{K_2}{2q^2}\left(1+K_1\right), \qquad (104)\\ \theta'(x) &= \theta'_-(T_1)+\frac{\theta'_-(T_1)}{2K_2^3}\left(-6K_2(x-T_1)^2+4(x-T_1)^3\right), \quad \text{for } x\in(T_1,T_2),\\ \theta'_-(T_2) &= 0, \qquad (105)\\ \theta''(x) &= \frac{\theta'_-(T_1)}{2K_2^3}\left(-12K_2(x-T_1)+12(x-T_1)^2\right), \quad \text{for } x\in(T_1,T_2),\\ \theta''_-(T_2) &= 0.\end{aligned}$$

因此 $\theta\in C^2[0,r^2)$，所以定义 3.4 中的条件 (ii) 成立。

令 $K>0$ 为满足 $(r-\varepsilon)^2+qK_1+K_2=(r-\varepsilon+K)^2$的常数。我们有

$$\begin{aligned}K &= \sqrt{(r-\varepsilon)^2+(qK_1+K_2)}-(r-\varepsilon)\\ &= \frac{qK_1+K_2}{\sqrt{(r-\varepsilon)^2+(qK_1+K_2)}+(r-\varepsilon)}\\ &\le \frac{r\varepsilon/4}{2(r-\varepsilon)}\\ &< \frac{\varepsilon}{4},\end{aligned}$$

这里用到了我们的假设：$qK_1\le\varepsilon/8$, $K_2\le\varepsilon/8$, $\varepsilon\le r/4$。由 (103) 以及上述关于 K的界，定义 3.4 中的条件 (i) 成立。

直接计算可得，$\theta'>0$ 在 (T_0,T_1) 和 (T_1,T_2) 上成立，因此条件 (iii) 成立。此外，容易验证 $\max\{\theta''(x):\ x\in[0,r^2)\}=\theta''((r-\varepsilon)^2)$，所以条件 (iv) 成立。因此，$\theta\in\mathcal{G}(r,\varepsilon)$。

引理 5.1. 固定 $r>0$ 与 $\varepsilon\in(0,r/4]$。对任意 $N>0$，存在常数K_1、K_2满足 $K_1q\in(0,r\varepsilon/8)$，$K_2\in(0,r\varepsilon/8)$ 以及由*(103)*定义的函数 $\theta\in\mathcal{G}(r,\varepsilon)$，使得

$$K=K_1q+K_2\le\frac{\varepsilon}{N}. \qquad (106)$$

$$\|\theta\|_\infty-\frac{1}{q}\le\frac{1}{N^{4+\alpha}}. \qquad (107)$$

证明. 事实上，由(104)，我们有

$$\|\theta\|_\infty-\frac{1}{q}=\theta(T_2)-\theta(T_0)=\frac{1}{q}\left(K_1+\frac{2K_1^2}{3}\right)+\frac{K_2}{2q^2}\left(1+K_1\right).$$

因此，对任意 $N>0$，存在充分小的 K_1,K_2，使得 $K_1q\in(0,r\varepsilon/8)$、$K_2\in(0,r\varepsilon/8)$以及(106)、(107)成立。□

References

[1] R. Bass, Z.-Q. Chen, 一类奇异类稳定过程的调和函数正则性,《数学杂志》266 (2010), 489-503.[2] R. Bass, Z.-Q. Chen, 稳定过程驱动的方程组, Probab. TheoryRelated Fields 134, no. 2 (2006), 175-214.[3] R. Bass, D. Levin, 跳跃过程的哈纳克不等式, Potential Anal. 17 (2002), 375- 388.

[4] K. Bogdan, 分数阶拉普拉斯算子的边界哈纳克原理, Studia Math. 123 (1997), no. 1, 43-80.[5]K. Bogdan, D. Kutek, K. Pietruska-Pa-luba, 半鞅的布雷格曼变差, arXiv:2412.18345[6] J. Chaker, M. Kassmann, 具有奇异各向异性核的非局部算子, Comm. Partial Differential Equations 45 no. 1 (2020), 1-31.[7] Z.-Q. Chen, T. Kumagai, d-集上的类稳定过程热核估计, Stochastic Process. Appl. 108 (2003), 27-62.[8] Z.-Q. Chen, E. Hu, G. Zhao 直线稳定过程的狄利克雷热核估计, J. Funct. Anal. 288 (2025), no. 6, Paper No. 110812, 69 pp.[9] K. L. Chung, 从马尔可夫过程到布朗运动的讲义, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 249 Springer-Verlag, 纽约—柏林, (1982) viii+239 pp.[10] B. Dyda, M. Kassmann, 椭圆型非局部算子的正则性估计, Analysis & PDE 13 (2020), no. 2, 317-370.[11] E. B. Dynkin, 马尔可夫过程，第 I 、 II 卷 , Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 121, 122 Springer-Verlag, 柏林—哥廷根—海德堡；Academic Press, Inc., Publishers, 纽约 (1965), 第 I 卷：xii+365 页；第 II 卷：viii+274 页.[12] X. Fern´andez-Real, X. Ros-Oton, 积分-微分椭圆方程, Progr. Math., 350 Birkh¨auser/Springer, Cham, (2024), xvi+395 页.[13] X. Fern´andez-Real, X. Ros-Oton, 奇异核非局部椭圆方程的 Schauder 估计和科尔德斯-尼伦伯格估计, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 129 (2024), no. 3, Paper No. 12629, 47 pp.[14] M. Kassmann, K.-Y. Kim, T. Kumagai, 具有奇异核的非局部算子的热核界, J. Math. Pures Appl. 164 (2022), 1-26.[15] P. Kim, R. Song, Z. Vondra˘cek, 非对称跳跃过程的热核：超越稳定情形, Potential Anal. 49(1) (2018), 37-90.[16] V. Knopowa, A. Kulik, R. Schilling, 一般类稳定马尔可夫过程的构造与热核估计, Dissertationes Math. 569 (2021), 86 pp.[17] T. Kulczycki, A. Kulik, M. Ryznar, 非齐次奇异 Lévy 噪声驱动随机微分方程的漂移约化方法, Bernoulli Vol. 30, Issue 4, (2024), 3089-3118. ´ T. Kulczycki, A. Kulik, M. Ryznar, 关于非齐次奇异 Lévy 噪声驱动随机微分方程的弱解, Trans. Amer. Math. Soc. 375 (2022), 4567-4618.[18] T. Kulczycki, B. Siudeja, 相对论稳定过程费曼-卡茨半群的内在超收缩性, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 11, 5025-5057.[20] M. M´etivier, 半鞅。《随机过程教程》, Walter de Gruyter, 柏林 (1982).[21] P. E. Protter, 随机积分与微分方程，Stochastic Modelling and Applied Probability 第 21 卷。 Springer-Verlag, 柏林, 2005. 第二版。版本 2.1，修订第三次印刷.[22] M. Ryznar, 关于对称稳定过程离开球的平均时间, Probab. Math. Statist., 线上发表 (2025).

Faculty of Pure and Applied Mathematics, Wrocław University of Science and Technology, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland.电子邮箱地址: tadeusz.kulczycki@pwr.edu.pl电子邮箱地址: michal.ryznar@pwr.edu.pl