arXiv:2603.04167v1 [math.AG] 4 Mar 2026

UNIVERSITÉ BOURGOGNE EUROPE

ECOLE DOCTORALE CARNOT - PASTEUR

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

UNIVERSITÉ FRANCO ITALIENNE | UNIVERSITÀ ITALO FRANCESE

勃艮第数学研究所，混合研究单位 5584（法国国家科学研究中心）

&

“费德里戈·恩里克斯”数学系

数学科学博士论文

相对 $\mathbb{A}^n$-可缩性：光滑概形与奇异动机球

Krishna Kumar MADHAVANVIJAYALAKSHMI开放研究者
与贡献者身份识别码：0009-0003-6022-2908 HAL开放档案：1666289

答辩委员会

Frank NEUMANN 教授	意大利帕维亚大学（主席）
Maria YAKERSON 博士	法国索邦大学（雅克·阿达马数学研究所—巴黎河谷研究组）（考官）
Adrien DUBOULOZ 教授	法国勃艮第—欧洲大学与普瓦捷大学（博士生导师）
Paul Arne ØSTVÆR 教授	挪威奥斯陆大学与意大利米兰大学（博士论文导师）

评审委员会

Jean FASEL 教授	法国格勒诺布尔阿尔卑斯大学
Anand SAWANT 教授	印度塔塔基础研究所

答辩时间：2025年12月17日 **地点：**米兰学年 2024-2025

博士论文 © 2025年 Krishna Kumar Madhavan Vijayalakshmi，采用知识共享署名 4.0 国际许可协议授权。如需查看此许可协议，请访问 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

路线图

摘要 **v**

前言 ix
什么是动机同伦论？.xi 文稿蓝图.xv 面向非专家.xix

致谢 x **xi**

常用记号 xxiii

1 概述 1
1.1 引言.1
1.1.1 无穷远处的拓扑.2 1.2 光滑仿射概形的 $\mathbb{A}^1$-可缩性.5 1.2.1 奇异仿射簇.6

2 动机同伦理论 1 **1**
2.1 $\mathbb{A}$-同伦范畴.11 2.1.1 不稳定构造.15 2.1.2 动机局部化函子.20 2.1.3 $\mathbb{A}^1$-模型结构.22 2.1.4 $\mathbb{A}^1$-可缩性.23 2.1.5 $\mathbb{A}^1$-连通性.24 2.1.6 $\mathbb{A}^1$-刚性概形.26 2.1.7 $\mathbb{A}^1$-链连通性.27 2.1.8 函子性.29 2.1.9 $\mathbb{A}^1$-可缩性下的基变换 33
2.1.10 光滑概形的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性 . . . . . 35 2.2 Milnor-Witt K-理论.40

3 仿射代数几何 43
3.1 快速概述.44 3.2 仿射空间的刻画.46 3.2.1 AMS 定理与嵌入问题 46

3.2.2 线性化问题.48 3.2.3 $\mathbb{C}^\times$-actions on the Koras-Russell 三维簇.49 3.2.4 代数几何中的消去.52 3.2.5 Asanuma 稳定结构定理.53

4 光滑概形的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性 57

4.1 Étale 概形的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性.57 4.2 光滑曲线的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性.59 4.2.1 $\mathbb{A}^1$ 域上的可缩性.59 4.2.2 相对维数 1.60 4.2.3 非正规基底上的一些反例 . . . . . 63 4.3 光滑曲面的相对 $\mathbb{A}^1$- 可缩性 .66 4.3.1 $\mathbb{A}^1$ 域上的可缩性 .67 4.3.2 扩张至完美域.68 4.3.3 $\mathbb{A}^2_k$ 上的非平凡 k-形式.70 4.3.4 相对维数 2.71 4.4 高维中的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性.74 4.4.1 通过 $\mathbb{A}^n$-纤维空间构造 $\mathbb{A}^1$-可缩概形族：几何证明.

5 Koras-Russell 原型与奇异动机球 81

5.1 Koras-Russell 三维簇族.81 5.1.1 扩张到完美域.82 5.1.2 $\mathcal{K}$ 的不稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩性.83 5.1.3 $\mathbb{A}^1$ j 的弱等价.84 5.1.4 $\mathbb{A}^1$ i 的弱等价.84 5.1.5 在完美域上构造 $\mathfrak{S}$ 的策略.86 5.1.6 $\mathbb{A}^1$-布劳威尔度.90 5.1.7 $\mathcal{K}$ 的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性.93 5.2 广义 Koras-Russell 原型 .94 5.3 奇异动机球 .98 5.3.1 动机同伦论中的球面 .98 5.3.2 低维动机球.101 5.3.3 高维奇异球面的存在.101 5.3.4 动机球的基变换. 106

A 全面了解范畴！ 109

A.1 格罗滕迪克拓扑.109 A.1.1 拓扑空间上的层.109 A.1.2 概形上的层.111 A.1.3 尼西涅维奇位点.112 A.2 模型范畴.113

A.2.1 模型范畴的同伦范畴.115 A.2.2 Quillen函子与Quillen伴随.117

A.2.3 组合模型结构.119 A.2.4 单纯预层上的同伦论.122 A.2.5 单纯预层范畴.124

B $\mathbb{A}^1$-代数拓扑 133

B.0.1 $\mathbb{A}^1$-导出范畴.134 B.0.2 Milnor-Witt层.137 B.0.3 K_*^{MW}中的剩余态射.141 B.0.4 Rost-Schmid复形与Chow-Witt理论 145

C 杂项 149

C.1 概形理论与无穷远处的动机拓扑.149 C.2 无穷远处的动机拓扑.151

参考文献 157

封面致谢 169

摘要

代数几何中一个新兴问题是：在光滑仿射概形中，如何在 $\mathbb{A}^1$-可缩性的意义下刻画仿射n-空间 $\mathbb{A}^n$：该性质使动机空间在动机同伦理论中与域的谱 k 同伦等价。近期研究表明，这种刻画在某些域上的$n < 3$ 维情形成立。在本工作中，我们利用 Zariski 局部平凡性和相对典范层的平凡性，将这一观察推广到相对维数为 $n < 3$的“合理”任意基概形。从 $n \geq 3$维起，光滑“奇异”仿射概形的存在性已得到确立；这类概形 $\mathbb{A}^1$-可缩，却不同构于仿射 n-空间。一个经过深入研究的例子是 Koras-Russell 三维簇 $\mathcal{K}$ 及其高维广义原型$\mathcal{X}_n$；迄今为止，它们的 $\mathbb{A}^1$-可缩性已在零特征域上得到证明。沿着这一方向，我们将 $\mathcal{K}$和 $\mathcal{X}_n$ 在任意维数下相对于诺特基概形的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性加以推广。

此外，利用这些原型，我们在动机同伦论中研究“奇异球面”的存在性——即 n 维的光滑概形，它们与 $\mathbb{A}^1$同伦，但不同构于$\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$。这一结果可以看作对奇异仿射概形研究的“紧”类比。我们的主要结果表明，在所有维数$n \geq 4$中，拟仿射簇 $\mathcal{X}_n\backslash\{\bullet\}$ 为无限完美域上的奇异动机球提供了一个模型。其新颖之处在于，这些构成了首个维数为 n、不同构于$\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$的光滑动机球实例族。

总结

代数几何中一个新兴问题是：如何在具有 $\mathbb{A}^1$ 可缩性的光滑仿射概形中刻画仿射空间 $\mathbb{A}^n$：这种性质使动机空间在动机同伦意义下与某个域 Spec k同伦等价。近期研究表明，在某些域上，这一刻画在维数 $n < 3$时成立。在我们的研究中，我们将这一观察拓

展到一大类“合理”的底方案上，考虑相对维数 $n < 3$，并利用扎里斯基局部平凡性和相对典范层的平凡性。从维数 $n \geq 3$开始，“奇异”仿射空间的存在性——也就是说，存在 $\mathbb{A}^1$-可缩但不同构于仿射空间 $\mathbb{A}^n$的光滑仿射概形——已得到证实。一类得到深入研究的对象是 Koras-Russell 的 3 维簇 $\mathcal{K}$ 及其在更高维数中的广义原型 $\mathcal{X}_n$；迄今为止，它们的 $\mathbb{A}^1$-可缩性已在零特征域上得到证明。沿着这一方向，我们通过证明 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{X}_n$ 在任意维数的诺特底概形上的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性，推广了这些结果。

此外，利用这些原型，我们研究了动机同伦中的“奇异球面”——维数为 n、$\mathbb{A}^1$-同伦等价于 $\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$–但彼此不同构的光滑概形。这一结果可以视为对奇异仿射空间研究的“紧”类比。我们的主要结果表明，在维数 $n \geq 4$ 中，$\mathcal{X}_n\backslash\{\bullet\}$准仿射簇为无限完美域上的奇异动机球面提供了一个模型。这里的新颖之处在于，这些簇构成了第一族维数为 n、不同构于 $\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$–的光滑动机球面实例。

摘要

代数几何中的一个新兴问题，是在 $\mathbb{A}^1$-压缩意义下，于正则仿射概形中刻画 n维仿射空间 $\mathbb{A}^n$：这一性质使动机空间在动机同伦论中与谱 k 域同伦等价。近期研究表明，在特定域上，这一刻画在维数 $n < 3$ 中成立。在我们的工作中，我们借助扎里斯基局部平凡性以及相对典范层的平凡性，将这一观察推广到任意底概形上的“合理”概形，并处理相对维数 $n < 3$。从维数 $n \geq 3$ 起，已有研究证明“奇异”正则仿射概形的存在；换言之，这些概形是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，但不同构于 n维仿射空间。一个得到充分研究的族由 Koras-Russell 三维簇 $\mathcal{K}$ 及其在更高维中的广义原型 $\mathcal{X}_n$ 构成；迄今为止，其 $\mathbb{A}^1$-可缩性仅在零特征域上得到证明。在这一方向上，我们将 $\mathcal{K}$ 和$\mathcal{X}_n$ 的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性推广到任意维数的诺特底概形上。

此外，我们利用这些原型研究“异域球”的存在性——即 n维光滑概形，它们与 $\mathbb{A}^1$同伦等价，但在动机同伦论中不同构于 $\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$。这一结果可视为

对奇异仿射概形研究的“紧致”对应版本。我们的主要结果表明，在所有维数 $n \geq 4$下，拟仿射簇 $\mathcal{X}_n \backslash \{\bullet\}$ 为无限完全域上的奇异动机球面提供了一种模型。它们构成了已知的第一族维数为 n、不同构于 $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$的光滑动机球面实例。

数学就是我们对自然语言进行逆向工程。《纳瓦尔宝典》，作者
Eric Jorgenson

前言

我们的研究属于代数几何领域：这是数学多个基础领域独特融合的产物。在接下来的段落中，我们将描绘这项研究在数学领域中的位置。

拓扑学 研究几何在连续变形下的性质。它并不关心空间是稠密还是稀疏、弯曲还是拉伸（但会关注孔洞）。几何学以定量的方式看待空间，而拓扑学则采取非定量、连续的视角：拓扑学赋予空间一种邻近性 的概念，却不定量说明它们究竟有多近。由此，拓扑学推广了度量空间的概念，进而推广了其元素之间距离的概念。数学理论中最重要的挑战之一，是按照给定的类型对空间进行分类。按照微分（同胚）对空间分类往往会受到限制，而拓扑学通过其同伦概念提供了一种更宽松的处理方式。同伦是一种不变量，它依据空间之间能否通过连续映射相互到达，将空间划分为不同的族：两个连续映射 f， g： $X \to Y$ 在拓扑空间之间若存在一族连续映射 同伦的 ，则称它们同伦，其中这族映射为 $H(x,\ i)$ （同伦函数）

$$H(x,i) : X \times [0,1] \to Y \qquad \text{such that}$$
$$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x), \quad \forall\, x \in X$$

代数是将这些连续数据离散化的艺术。代数拓扑由此发展出各种框架，以便系统地将对拓扑学的挑战转化为代数的语言——无论是交换的、同调的、同伦的、微分的，还是范畴的。

$$\text{Geometry} \xrightarrow{\text{deformation}} \text{Topology} \xrightarrow{\text{discretize}} \text{Algebra}$$

$$\frac{\text{Quantitative data}}{\text{bend, squeeze, stretch}} \longmapsto \text{Continuous data} \longmapsto \text{Discrete data}$$

代数拓扑学为处理几何学和拓扑学中的问题提供了基础，这得益于其众多的代数不变量。这种转换借助范畴以及范畴之间的函子这一概念得以实现。函子是某种内在映射，可在范畴之间保持不变量的性质；代数拓扑函子将一个空间与一个代数不变量（群、环、模等）相关联。

代数拓扑学的基本构件大致可分为以下几类：

$$\text{Spheres} \quad S^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\vec{x}|| = 1\} \qquad \text{(Geometrical object)}$$
$$\text{Simplices} \quad \Delta^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \Sigma x_i = 1, x_i \geq 0\} \quad \text{(Combinatorial object).}$$

每个“良好”的拓扑空间本质上都是由这些块粘合而成的。分析“从球面出发”的映射会产生同伦论，而分析“从单形出发”的映射则会产生（上）同调论：这两者是最基本的代数拓扑不变量。这个 n-单形（复数形为单形）同胚于另一个重要对象，称为 n-球，其定义为 $D^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : ||\vec{x}|| \leq 1\}$。在同伦论的视角下，以下事实体现了这类球的有用性：每个 n-球都与一个点同伦等价 $\{\bullet\}$（尽管前者是n-维的，而后者是 0 维的！）。这一关键性质意味着，几乎所有已知的代数不变量在考虑到同伦之后，在球上都会变得平凡。这一性质使其成为在任意范畴中选择参数化同伦的理想对象，因为这些同伦本身不会添加任何额外数据！与球同伦等价的空间称为可缩空间。在代数拓扑理论的视角下，球可以被看作球面的对比对象（例如，前者的（上）同调论总是平凡的，而后者则从不平凡）。因此，在任何同伦论的框架内，深入理解这些对象都是基础性的。代数拓扑拥有丰富的工具来研究给定的空间：

> 胞腔逼近、塞弗特–范坎彭型与梅耶–维托里斯型工具、切除、覆盖空间、霍普夫–布劳威尔度映射、障碍理论与波斯尼科夫塔、歌剧集、局部化正合序列、泛系数、库内公式、庞加莱对偶、谱序列、示性类、赫维茨定理、。 ..

借助范畴框架，这一系列浩繁的工具被推广到了数学的相邻领域。其中一些工具在“良好”的函子变换下表现良好，因此人们能够将代数拓扑中的工具引入代数几何这一领域——这是一个新兴领域，代数拓扑与几何学在此以深刻的方式交汇。在这里，多项式方程定义几何对象。代数几何的基本构件是仿射簇，更大的拟射影簇和概形则由此构建而成。每个概形都是由仿射簇局部粘合而成的（在所谓的扎里斯基拓扑中）。这一构想的核心是希尔伯特零点定理（德语意为“零点定理”），它构建了代数与几何之间的对应词典

$$\begin{aligned} \text{Algebra} &\longleftrightarrow \text{Geometry} \\ \{\text{Radical ideals of } \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\} &\longleftrightarrow \{\text{Zero sets in } \mathbb{C}^n\} \\ J &\longmapsto \mathcal{Z}(J), \\ \sqrt{\mathcal{I}(\mathrm{W})} &\longleftarrow\!\shortmid \mathrm{W} \end{aligned}$$

粗略地说，它表明，对于理想 $J \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$，有 $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = \sqrt{J}$，其中 $\sqrt{J}$ 是 J的根理想。这个结果也适用于所有代数闭域 k！

仿射代数几何

交换代数是代数中一个经典的分支，研究满足交换律的代数对象（如群、环、模）$a*b=b*a$（具有精确的数学含义）。它提供了理解全局几何对象所需的局部代数工具。交换代数中最有用的工具之一是对对象进行局部化；事实上，这一做法可以推广到给定范畴中的映射。它允许我们在任意范畴中“形式地”对一类映射取逆，从而构造出一个包含额外映射的新范畴。例如，同伦论就是以这种方式构造的。零点定理与局部化的结合，几乎可以将交换代数中的所有工具局部地迁移到代数几何领域。这类系统化过程构成了代数几何一个重要分支——仿射代数几何——的基础。仿射代数几何中的一些未解决问题，涉及深入理解描述尽可能简单的环：含有 n个变量的多项式环 $k[x_1,\ldots,x_n]$。

什么是动机同伦论?

动机同伦论是一套精密的代数几何工具体系，它运用上述所有领域的工具。其基本思想是建立一套代数几何的同伦论。在代数拓扑中，人们研究拓扑空间之间的连续映射及其同伦类。动机同伦论为代数簇与概形建立了类似的框架。与代数拓扑不同，代数几何的框架是相对的——人们并非孤立地研究一个概形，而是研究一个概形上的概形，也就是概形态射。

闪回

故事始于 Grothendieck 在动机（源自法语用法：*motifs*）方面的革命性思想。20世纪60年代，人们注意到，针对代数簇的各种上同调理论（德拉姆、étale、晶体、.....）似乎捕捉到了同一底层几何信息中彼此重叠却又各不相同的方面。他设想了一种动机的万有理论——以抽象对象编码簇的本质上同调数据，而每一种具体的上同调理论都源自这些动机的一种实现。他还猜想存在一种适当的上同调理论（如今称为动机上同调），其他所有已知理论都应通过它分解。因而，从哲学角度而言，动机旨在捕捉代数簇的上同调本质。他最初的计划雄心非凡，但在技术上极具挑战性（[Gro68]）。他设想动机范畴应当是阿贝尔范畴，并能提供一种万有上同调理论，但几十年来，要严格构造这一范畴始终难以实现。Beilinson

和 Lichtenbaum 于20世纪80年代中期通过某些“动机复形”猜想动机上同调的存在（见 [Bei85；BMS87] 及其中的参考文献）。迄今，仍有数位数学家为此投入巨大精力，在逐步拼合这一动机难题的各个部分方面也已取得长足进展。

高阶 Chow 群： Bloch [Blo86] 提出了高阶 Chow 群理论，这是经典 Chow 群的一种推广，也是对域上拟射影簇的 Borel-Moore 动机同调的首个整系数（而非有理系数）定义（另见 [Lev94]）。后来，Voevodsky 的工作表明，高阶 Chow 群其实是伪装起来的动机上同调 $H^{p,\,q}$（[Voe02b]）：对于任意域上的光滑概形 X 以及整数 $p,\ q \in \mathbb{Z}$存在自然的群同构

$$H^{p,q}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{CH}^q(X, 2q-p).$$

同伦革命： 另一项至关重要的平行发展，是 Quillen 引入了模型范畴 [Qui67]，为在远超拓扑学的各种背景下开展同伦论提供了公理化框架。这后来被证明对动机同伦论的基础至关重要。另一方面，在20世纪70至80年代，代数 KK 理论在 Atiyah、Bass、Milnor、Serre、Quillen 等人的推动下迅速发展，人们逐渐认识到它与动机现象有着深刻联系，但其确切关系仍然神秘莫测（另见对 Serre 猜想如何自然促成 KK 理论[Lam06]诞生的精彩解释）。

.....的诞生 $\mathbb{A}^1$-同伦论：突破最终到来了：Morel 和 Voevodsky 意识到，通过在同伦语境而非同调语境中开展工作，他们可以绕过动机理论中的一些难题。他们的关键洞见是构造一种同伦论，使仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 扮演单位$[0,1]$ 区间在经典同伦论中的角色。他们定义了概形的动机同伦范畴，即$\mathbb{A}^1$-同伦范畴 [MV99]，并证明它具有闭模型范畴的结构。他们还展示了如何在这一框架中将动机上同调构造为一个可表函子。他们的方法涉及多种精妙技术，包括选择格罗滕迪克拓扑（Nisnevich）、借助单纯层理论（从而编码同伦数据），以及运用局部化技术（Bousfield）系统地反演 $\mathbb{A}^1$-同伦等价。

动机空间与动机谱： 与经典同伦论类似，动机同伦论有非稳定和稳定两个版本。对于域 k，非稳定动机理论 $\mathcal{H}(k)$ 具有若干实现函子，使我们能够在代数拓扑与动机几何之间传递信息。转向 S^1-谱并将 Tate 圆 $\mathbb{P}^1$求逆后，便得到动机谱$\mathrm{Spt}(k)$ 以及相应的稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦论 $\mathrm{SH}(k)$。将 $\mathbb{P}^1$ 求逆意味着，空间在与 弱等价作 smash 积后$\mathbb{P}^1$。此外，将 $\mathbb{P}^1$ 求逆对于在 $\mathrm{SH}(k)$ 中获得非平凡的转移至关重要（参见

[DLØRV07，第三部分，§2，注记 2。8]）。 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴的优势在于，若干代数理论在此处变得可表：

1. 代数 KK 理论可表（参见 [GS09；SØ09]）：若 k 是有限克鲁尔维数的诺特环，则存在一个自然同构于 $\mathrm{SH}(k)$

$$\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}\mathbb{P}^{\infty}_{+}[\beta^{-1}] \xrightarrow{\simeq} \mathbf{KGL},$$

其中 $\mathbb{P}^{\infty}$ 是无穷射影空间， β 是某个博特元，且 **KGL**是 Voevodsky 的代数 KK 理论 [Voe98]。

2. 周群可表：设 k 是一个完美域。对于每个 $n \geq 0$以及每个光滑的 k概形 X，存在一个典范双射

$$\mathrm{CH}^n(X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}(k)}(X_+, \mathbf{K}(\mathbb{Z}(n), 2n).$$

这里，$\mathbf{K}(\mathbb{Z}(n)\ 2n)$ 是动机埃伦伯格–麦克莱恩空间

3. 动机上同调可表（[MVW06，第 14]章）：对于每个 $X \in \mathrm{Sm}_k$ 和整数 p， $q \in \mathbb{Z}$，存在一个同构

$$H^{p,q}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}(k)}(\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}X_+, \Sigma^{p,q}\mathbf{HZ})$$

其中**HZ** 是动机埃伦伯格–麦克莱恩谱。

4. 向量丛在光滑仿射概形上是可表的（[Mor12；Sch17；AHW17]）：如果 k 在一个具有完美剩余域的戴德金环上光滑，那么对于任意光滑仿射 k-概形 X，存在一个带基点的双射

$$\mathcal{V}_r(X) \xrightarrow{\simeq} [X, \mathrm{Gr}_r]_{\mathbb{A}^1}.$$

这里， $\mathcal{V}_r$ 表示秩为 r 的代数向量丛集合，而 Gr_r 是秩为 r的格拉斯曼流形。

动机同伦论的一些非凡应用

米尔诺猜想：米尔诺猜想 [Mil70，问题 4。3] 是一个断言，声称 Milnor K-理论与域 k （见第B.0.2节）。完整的解答归功于 Orlov-Vishik-Voevodsky [OVV07；Voe00；Sus97]，其使用了动机同伦论：

$$\mu : K^{\mathrm{M}}_*(F)/2 \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{I}^n(F)/\mathcal{I}^{n+1}(F)$$

Bloch–Kato猜想：多位数学家在1980年至2000年间付出的共同努力，最终证明了Bloch–Kato猜想。在图示的一侧，我们看到一系列相关猜想，它们最初由Beilinson和Lichtenbaum分别提出，后来统一为如今所称的*Beilinson–Lichtenbaum*猜想。该猜想预言，对于算术域上的光滑概形 X，在某些范围内，动机上同调与étale上同调相一致：

$$H^{p,q}(X, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\simeq} H^p_{\acute{e}t}(X, \mu_n^{\otimes q}) \quad \text{for} \quad p \leq q.$$

20世纪90年代前后，Voevodsky与其他几位数学家认识到，要证明Beilinson–Lichtenbaum猜想，就必须通过同伦方法系统地发展动机上同调。在另一侧，Bloch和Kato [BK86]提出了将Milnor K-理论与伽罗瓦上同调通过Bloch–Kato映射（又称范数剩余同态）联系起来的猜想。同样，这些猜想由一系列命题组成，而非单一命题；它们逐步得到证明，不同情形所需的动机工具也各不相同。后来，这些猜想进一步推广并统一为所谓的*Bloch–Kato*猜想。随着动机上同调可由动机Eilenberg–MacLane空间表示，该猜想也被改写为动机上同调的形式。在Milnor猜想得到证明的基础上，多位数学家通力合作，最终证明了Bloch–Kato猜想的完整一般形式；最后的突破来自Voevodsky [Voe11]：它描述了Milnor K-理论与伽罗瓦上同调之间的关系：对于任意域 k 和整数 n 以及 $l \neq$ 特征 k，都有一个同构

$$K_r^{\mathrm{M}}(F)/n \xrightarrow{\simeq} H^r_{\acute{e}t}(F, \mu_n^{\otimes r}) \quad \text{for all} \quad n, r \geq 0$$

情形 $n = 2$是米尔诺猜想，而 $r = 2$ 是Merkurjev–Suslin定理。Bloch–Kato猜想的证明在很大程度上依赖于20世纪90年代至21世纪初发展起来的动机同伦论基础设施，尤其是：动机Adams谱序列、动机Steenrod运算（[Voe03c]）等。Bloch–Kato猜想的完整证明自动蕴含原始的Beilinson和Lichtenbaum猜想 [Voe03a] 以及相关的Quillen–Lichtenbaum猜想。Bloch–Kato同构也称为范数剩余同构。回过头看，这些猜想与其说是动机同伦论的应用，不如说是推动动机同伦论诞生的因素。这些成果表明，动机同伦论并非只是抽象的理论工具，也能解决算术和代数几何中具体而长期悬而未决的问题。以下介绍一些较新的应用。

- Voevodsky 在SH(k) 中的切片塔构造（参见 [Voe02c] 和 [Voe02a]），以及对若干相关猜想的验证（例如参见 [Voe03b；Lev08；Spi12；Lev13；BEØ24] 及其中的参考文献）

- Grothendieck 的六函子形式体系在SH(k) 中的构造 [Ayo07],

- 正如复配边谱**MU** 是复定向上同调理论中的泛对象，SH(k) 的存在导出了代数配边谱Ω^n，它由**MGL**表示，是余维为 X 的光滑概形 n ([LM07]) 上的泛定向上同调理论：

$$\Omega^n(X) \xrightarrow{\simeq} [\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} X_+, \Sigma^{2n,n}\mathbf{MGL}]_{\mathbb{A}^1}$$

- Morel 对动机稳定 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ 球谱的计算 [Mor12], 随后 Asok-Morel 对动机不稳定 $\pi_1^{\mathbb{A}^1}$ 群的首次计算（[AM11]）

以及更高动机同伦群的计算，并将其应用于 Asok-Fasel 的向量丛研究（[AF14a; AF14b]）。

Vista: 本讲稿源于传统领域（交换代数、代数拓扑）与现代领域（仿射代数几何、动机同伦论）中各种理念的交融，汇聚而成的研究工具。许多数学思想的萌芽都在这些领域的汇合中孕育而生，使得过去一个世纪以来，双向的交流卓有成效。作者的雄心壮志，是希望在接下来的约十页篇幅中，让读者相信这样一个美妙的真理。

本讲稿的蓝图

本讲稿主要分为五章，下面将逐一概述。

第1章将从无穷远处的拓扑入手，作一番浅显的介绍。这套工具专为研究开流形（非紧且无边界）而设计，我们也会回顾相关的一般知识及其研究动机。理想的总体目标是为光滑仿射概形发展这套工具（参见 C.2节）。第 1.2 节将简要涉及低维奇异仿射簇理论。接下来，第2章将带我们进入动机同伦论的精彩世界。本章为构建本讲稿其余部分奠定基础。具体而言，我们将通过单纯 Nisnevich 层建立 $\mathbb{A}^1$-同伦论的基本语言，并在第 2.1.1 节构造不稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴，在其中引入路径连通性、可缩性等代数几何与拓扑学的类比概念。重要的表述包括函子性（第 2.1.8 节）以及相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性的概念（第2.1.10节）。仿射代数几何中的对应理论将在第3章讨论；我们将详细研究从各种相关表述出发对仿射 n-空间的刻画，从而获得多角度的认识。这几章所奠定的基础，使我们能够在第4章中发展低维光滑概形的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性理论。我们将按维数逐一展开。第 4.1 节讨论域上的 étale（即零维）概形的 $\mathbb{A}^1$-可缩性理论，以及该理论向任意基概形的扩张。在这里，我们得到如下结果（定义 4.1.2）：

定理。 设 X 是任意基底 S 上有限表示的 ***étale*** 概形。那么典范态射 $f\colon X \to S$ 在 Spc_S 中是相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价，当且仅当 f 在 Sm_S 中是同构。

我们还证明，任何分离的 étale 概形必然是 $\mathbb{A}^1$-刚性的（定义4.1.3）。在第4.2节，我们转向维数 1，其中仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 的唯一性在任意域上得以确立（定义4.2.2），从而

使我们得以将这一刻画推广到（正规）基概形上的相对情形，见第4.2.2节。此处的主要定理如下（定义4.2.5）

定理。 对于有限表示的光滑分离态射 $f\colon X \to S$，其在诺特正规概形 S上的相对维数为1，以下条件等价：

1. $f\colon X \to S$ 是Spc$_S$中的相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价，
2. $f\colon X \to S$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-纤维空间，
3. $f\colon X \to S$ 是扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛。

这具有以下重要应用：

a) （正规）基概形上的仿射直线的刻画（定义 4.2.6）：

推论。 有限表示且相对维数为1 的光滑分离概形 $f\colon X \to S$ 在诺特正规概形 S 上同构于 $\mathbb{A}^1_S$，当且仅当以下条件全部成立：

1. X 是 $\mathcal{H}(S)$中的一条光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲线，
2. f 的相对微分典范层$\Omega_{X/S}$ 是平凡的，并且
3. f 有一个截面。

b) Zariski 消去问题的相对版本（定义 4.2.9）：

推论。 设 $f\colon X \to S$ 是诺特正规概形 S 上的光滑分离概形，有限表示且相对维数为1，并且对某个 $n \geq 1$有 $X \times_S \mathbb{A}^n_S \cong \mathbb{A}^{n+1}_S$。那么 X与 $\mathbb{A}^1_S$是 S-同构的。

这里，基概形的正规性至关重要，因为我们在第4.2.3节中给出了大量反例。我们系统地推进到维数 2，在那里讨论特征零域上的仿射平面的唯一性，这一结果最近已由 Choudhury-Roy 证明（定义4.3.1），并在定义定义4.3.4中将其推广到完美域上。由于这一刻画在不完全域上尚未解决，我们对涉及$\mathbb{A}^2_k$ 的非平凡形式作了一些推测，详见第4.3.3节。所有这些将使我们能够证明以下主要结果（定义4.3.11）：

定理。设 X 是一个相对维数为2 的光滑概形，其定义在一个剩余域为特征零域的戴德金概形 D上。此外，设典范态射 $f\colon X \to S$是仿射的。那么以下条件等价：

1. f 是Spc$_S$中的相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价，
2. f 是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^2$-丛。

这有以下几项重要应用：

a) 相对维数 2 下仿射平面的刻画（定义 4.3.13）：

推论。 若一个光滑仿射概形 $f\colon X \to D$ 定义在具有特征零剩余域的仿射戴德金概形 D 上，则它同构于 $\mathbb{A}^2_D$ 当且仅当以下两项均成立：

1. X 是 $\mathcal{H}(D)$ 中的光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲面，并且
2. 微分的相对典范层 ω_f 是平凡的。

b) 扎里斯基消去问题的相对版本（定义4.3.14）：

推论。 设 D 是一个剩余域为特征零的仿射戴德金概形。那么，对于戴德金概形 D 上相对维数为 2 的光滑仿射概形 $f\colon X \to D$，同构 $X \times_D \mathbb{A}^1_D \cong \mathbb{A}^3_D$ 蕴含 $X \cong \mathbb{A}^2_D$。

由于在正特征域上已有成熟的反例（定义 4.3.15 及其中的其他例子），这为我们描绘了相对维数 2 的完整图景。基于这些刻画，我们接着探讨高维情形（≥ 4），见 第 4.4 节；我们的主要动机是拓展相关技术，以构造大量相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的光滑仿射概形。高维光滑（仿射）概形的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性已在第4.4.1节中得到广泛研究；我们的动机是举例说明，文献中已有深入研究的某类光滑仿射二次曲面，提供了大量相对$\mathbb{A}^1$-可缩光滑概形的实例。这一事实在定义4.4.3中明确阐述：

定理。 设 $f\colon X \to S$ 是正则概形 S 上的分离 $\mathbb{A}^n$-纤维空间，对所有$n \geq 0$均成立。那么 X 在 S上是相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的。

在 第5章中，我们研究三维簇的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性，从而完整呈现了我们对相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性的探索。我们在 $\mathcal{K}$ 完美域上研究 Koras-Russell 三维簇族，见第 5.1.1 节，并确立其在完美域上的不稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩性（定义 5.1.7）：

命题。 对于任意完美域 k，典范态射 $f\colon \mathcal{K} \to \text{谱}\, k$ 是$\mathbb{A}^1$中的一个弱等价Spc_k。

上述命题结合 Morel-Voevodsky 的粘合技术（定义2.1.47），将使我们也能推导出相对基概形上 Koras-Russell 三维簇的 $\mathbb{A}^1$-可缩性：

定理。 以下是定义 *5.1.8* 和 定义 *5.1.9*：

1. 第一类 *Koras-Russell* 三维簇 $f\colon \mathcal{K} \to \text{谱}\, \mathbb{Z}$ 在 $\mathrm{Spc}_{\mathbb{Z}}$ 中是相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的。特别地，$\mathcal{K}$ 是 $\mathrm{Spc}_{\mathbb{Z}}$ 中的一个 $\mathbb{A}^1$-可缩概形，但不同构于 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Z}}$。

2. 设 S 是任意具有完美剩余域的诺特概形。第一类 *Koras-Russell* 三维簇 $f: \mathcal{K} \to S$ 在 Spc_S 中是相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的。

通过观察到所有这些技术仅涉及纤维分析，我们进而在第5.2节中将这些技术应用于其高维类似物。在此，我们研究广义 *Koras-Russell* 簇，并增强其在完美域上的不稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩性（定义 5.2.1）

定理。 设 k 为任意完美域。则广义 *Koras-Russell* 簇的典范映射 $\mathcal{X}_m(n,\psi) \to$ 谱 k 是 Spc_k 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。

这将使我们能够将其推广到一般基概形（定义 5.2.2）：

推论。 设 S 为具有完美剩余域的任意诺特概形。则广义 *Koras-Russell* 簇的典范态射 $\varphi: \mathcal{X}_m(n,\psi) \to S$ 是 Spc_S 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。 –

所有这些结果将导向一项主要应用：高维奇异动机球面的存在。我们接着对维数为 ≤ 3 的奇异动机球面在第 5.3.2 节中进行综述，并建立维数为 ≥ 4 的奇异球面在第 5.3.3节中的存在。特别地，我们证明 Koras-Russell 原型的补集是充分连通的（定义 5.3.7）：

引理。 令 k 为任意无限完美域。那么严格拟仿射簇 $\mathcal{X}_m \backslash \{\bullet\}$ 是$\mathbb{A}^1$-链连通的。

主要借助一个动机切除式结果，我们随后证明这些簇实际上是奇异动机球面的例子（定义 5.3.8）：

定理。 令 k 为一个无限完美域。那么对于每个 $m \geq 0$，维数为 $m+3$ 的严格拟仿射簇 $\mathcal{X}_m \backslash \{\bullet\}$ 与 $\mathbb{A}_k^{m+3} \backslash \{0\}$是 $\mathbb{A}^1$-同伦的，但作为一个 k-概形，它不同构于 $\mathbb{A}_k^{m+3} \backslash \{0\}$ 。

至此，脚本的主体内容已告结束。作者付出了大量努力，力求使脚本尽可能自成一体。为此目的，文中提供了丰富的背景知识和辅助性思路，见第A章、第B章以及第C.2.0节。

从简明的非专业视角看脚本

代数几何中类似于“点”的空间称为 $\mathbb{A}^1$-可缩对象，本脚本围绕这些对象展开。仿射空间 $\mathbb{A}^n_k$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩概形的原始例子，因此我们不禁要问：一个光滑仿射概形 X 若 $\mathbb{A}^1$-同伦于 $\mathbb{A}^n_k$ 动机同伦范畴中的对象，是否就自动意味着它们作为概形也同构？我们将回顾这一问题在基域上的情形，并将其相对地推广到一般的基概形上。我们将看到，有些情形下这一结论确实成立，也有些情形并非如此；后者性质的空间称为奇异的。脚本第一部分将在第4章讨论这一方面。与此相对，后续内容还将研究奇异性的“紧”类比。光滑概形$\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$ 是动机几何中的球面。这不禁让人思考：在 $\mathbb{A}^1$-同伦意义下，是否只有这些球面？也就是说，一个光滑概形 X若 $\mathbb{A}^1$-同伦于 $\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$动机同伦范畴中的对象，是否就自动意味着它们作为概形同构？这正是第5章的全部核心内容；我们将在其中揭示这一预期并不成立。

致谢

致所有让我平安着陆的美好之人……

我对 Vijayalakshmi B. 与 Dr. Madhavan N. 审慎的养育深怀亏欠，他们不竭的爱与细致的教养助我跨越人生中的种种障碍；也感谢 Kishore Kumar M.V.，他源源不断的创造力与坚定不移的意志力时刻令我们感到骄傲。

若没有我两位可爱导师 Paul Arne Østvær 与 Adrien Dubouloz 始终充满活力且专业的指导，这项研究以及由此而成的文稿便不会存在。我深深感谢 Paul Arne 引领我进入动机几何，并在这段旅程中给予我诸多学术建议——尤其是关于撰写简洁数学论文的洞见，以及数次充满活力的健身房互动！若说这次联合博士学位得以顺利完成、少有奔波，那要归功于 Adrien 的热情款待，以及他在行政难题上的悉心安排——我非常享受我们在咖啡室里的数学讨论与轻松交谈，并将在未来的岁月中珍藏这些回忆！

我谨向 Aravind Asok 和 Marc Hoyois 致以谢意，感谢他们在数学活动中与我进行了许多富有见地的讨论。

我仍然感谢 Frédéric Déglise 和 Jean Fasel 在会议期间以及我旅居法国时与我进行的各种学术交流。

我谨向 Matthias Wendt 致谢，感谢我访问伍珀塔尔代数与拓扑高级研讨班期间与他进行的许多富有成果的讨论。

我仍然感谢 Tariq Syed 给我的无数学术建议，以及我们无数次数学聚会期间愉快的交流。

感谢 Parnashree Ghosh、Anand Sawant 和 Biman Roy 在卢米尼 CIRM 与我进行富有成果且友好的讨论。

我衷心感谢米兰大学和勃艮第数学研究所提供的研究经费，以及法意大学 / 意法大学通过 *C²- 379*：*Vinci 2024*计划 提供的交流资助。我感谢各位秘书和专业人员及时的介入与持续的努力，尤其是米兰的 Stefania 和 Vanessa，以及第戎的 Anissa、Bibiane、Emeline、Francis、Magali 和 Laura。尽管存在语言障碍，你们仍务实地协力推动这项联合指导博士项目顺利进行——我对你们所有人都深怀敬意！

如今在米兰度过了将近 4 年，这座城市已深深融入我的心中。我很感激来自米兰的几位多才多艺的数学家，尤其是 Fabrizio Andreatta、Federico Binda、Bert Geemen、Amnon Neemon 和 Paolo Stellari；这些年来，他们的交流从不同方面给予了我帮助。我由衷感谢我的同届伙伴 Andrea、Alessandra、Filippo、Kaixing、Mariano 和 Silvia，在这美好的 3 年里一直体贴关照我。我要感谢 Martina 在联合培养手续方面给予的无数帮助和迅速回应——没有你，这些事情一定会困难得多！衷心感谢我的学术兄长 Federico，感谢我们进行了许多有益的讨论，也感谢你陪我前往欧洲各地参加各种数学活动！我诚挚感谢 Giulia 曾在关键时刻帮我处理一项重要的行政流程！在米兰遇到的许多热心朋友中，我很高兴结识了 Dhrumith、Marco Manoj 和 Lorenzo；他们的关爱与及时相助对我意义非凡。

我在第戎 IMB 的这段时光令人愉快，让我有机会结识几位有趣的数学家和亲切的人。我由衷感谢 Mattia Cavicchi、Daniele Faenzi、Lucy Moser-Jauslin、Jan Nagel 和 Julia Schneider 组织读书研讨会，也感谢他们与我进行了无数轻松愉快的交流。我遇到的许多友善之人充分体现了这里的社群氛围，他们包括 Arnaud、Deniz、Dimitrios、Edwin、Federica、Felipe、Ivan、Keyao、Leila、Lyalya、Maya、Mehdi、Oscar、Ouneïs、Pietro、Thibaut 和 Victor（FR+BR）——感谢大家让 IMB 每一天都像家一样温暖！我很高兴能与体贴的室友兼数学家 Théo 共享公寓空间；他帮助我安顿日常作息，还协助处理了各种繁琐多变的行政事务。还有友善的邻居 Helal-Sandhya，也让我倍感温暖。在数学圈之外，我还结识了许多开朗的人，其中 Jeswin 和 Sajana 让生活变得更加丰富多彩，我很开心能认识他们！

我想向 Ritheesh 致以诚挚的谢意，感谢他在我需要时一直陪伴在我身边。在过去五年的人生浪潮中，若没有几位远方亲友给予我坚定而持续的支持，这段令人兴奋的旅程便不可能实现，尤其要感谢 Asohamithran、Durairaj 和 Vassavi。谢谢你们，我们做到了！

我由衷感谢所有在这段旅程中花时间支持我的人。我相信，他们足够慷慨，能够设想并认可，他们的付出至今已对我的人生产生了切实的影响。

最后，但最重要的是，感谢自然与科学，它们慷慨地为每个人提供了焕发活力与保持思维敏捷的源泉。

KRISHNA KUMAR M.V. 第戎与米兰（2022—2025）

有用的记号

R_X – 与空间 XK(X, n) 相关的可表函子 – X 在 nSm$_S$ 次数上的艾伦伯格-麦克莱恩空间 – 在 Sm S 上的光滑分离概形范畴$_S$sPsh(Sm$_S$) – 在 Sm 上的单纯预层范畴$_S$sShv(Sm$_S$) – 在 Sm 上的单纯层范畴$_{\mathbb{A}^1}$Psh$_S$(Sm $\mathbb{A}^1$) – 在 Sm 上的$_S$-不变预层范畴$_{Nis}$Shv$_S$(Sm$_S$) – 在 Sm 上的 Nisnevich 层范畴$_S$ Spc S– 在S上的动机空间范畴 $\mathbb{A}^1$SH(S) – 在$\mathcal{H}$上的稳定S-同伦范畴 $\mathbb{A}^1$(S) – 在$\mathbb{R}^n$ 上的非稳定 n-同伦范畴$\mathbb{C}^n$ n– $\mathbb{S}^n$ 维欧几里得空间 n– $\mathbb{A}^n_S$ 维复（解析）空间 n– S维球面S^1 – 基概形 $\mathbb{G}_m$ 上的$\mathbb{S}^p$维仿射空间^q p – 单纯圆周 $_q\mathbb{P}^n_S$ – Tate 圆 n, S– 权为R和 R的混合动机球面$\mathcal{D}R$– R维射影空间，定义在 κ 上sML($s \in S$) – 交换环 $\bar{\kappa}$ 的 Makar-Limanov 不变量X X(X) – X的 Derksen 不变量$\pi_n^{\mathbb{A}^1}$ n($\mathbb{A}^1$) – 点 E 处的剩余域 π $E \to B$(ΣX) – 代数簇 X 的对数 Kodaira 维数π_1^∞Pic(f) – f 的皮卡群 ω_f f– 第 k 个 k- 同伦层 Th(k) – 与向量丛 k 相关的 Thom 空间: K^{M} K– 空间 K^{MW} 的单纯形悬挂 K– 无穷远基本群 Ω– 与 相关的相对 Kähler微分层– 的相对典范层 GW() – 域 上的格罗滕迪克-维特环W() – 上的 Witt 环– Milnor -理论– Milnor-Witt -理论

献给那些让我变得更强大的挑战.....

只要能收支相抵，总能看见隧道尽头的光。

作者。

1 概述

1.1 引言

欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 是流形理论中最基本的研究对象之一。它们是开（非紧、无边界）的光滑 n 维流形，且可缩，即与一点同伦等价，因此它们的同调和同伦论都是平凡的。因此，自然会从这一性质出发来刻画这个对象，具体问题如下：

问题 1.1.1. 在维数 n 中，欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 是否是唯一的开可缩光滑流形？

换一种说法，这个问题声称："每个同伦于 $\mathbb{R}^n$ 的开光滑 n-流形都同胚于 $\mathbb{R}^n$。"这句话应当让人联想到拓扑学中与之极为相似的著名猜想：庞加莱猜想。其推广版本断言："在指定范畴 $\mathcal{C}$ 中，每个同伦于 $\mathbb{S}^n$ 的闭光滑 n-流形也同胚于 $\mathbb{S}^n$ 中的 $\mathcal{C}$。"拓扑情形$\mathcal{C} = \mathrm{Top}$ 已被证明在所有维数下均成立：Smale（$n \geq 5$）、Freedman（$n = 4$）和 Perelman（$n = 3$）分别解决了相关情形，其他情形也早已广为人知。另一方面，光滑情形 $\mathcal{C} = \mathrm{Diff}$ 尚未完全解决：对于 $n \leq 2$，结论是众所周知的；情形 $n = 3$较为特殊，因为拓扑版本与光滑版本重合；情形 $n = 4$ 则似乎极其困难，至今已悬而未决数十年（参见 [Sco05]）。由于米尔诺的怪球面（[Mil56]）的存在，光滑版本在某些高维情形下不成立——这种球面与 $\mathbb{S}^n$ 同胚，但不同胚于带有标准微分结构的 $\mathbb{S}^n$ 。

鉴于这一令人振奋的研究计划，定义 1.1.1 广为人知的名称是开放庞加莱猜想。借助

无穷远处拓扑的工具，我们将在接下来的章节中回顾这一内容。本章旨在介绍这一问题在拓扑学背景下的背景与解答，并引出其代数几何对应概念。在第 1.1.1 节中，我们简要回顾拓扑学中的相关表述，介绍无穷远处的同调与同伦。随后，我们在第 1.1.1 节中引入定义1.2 （定义1.2.1）所对应的代数几何类比。这一研究计划也是促使作者深入钻研代数几何的关键动因之一，而这份讲义可视为其副产品之一。

1.1.1 无穷远处的拓扑

无穷远处的拓扑研究空间在“边界处”或远离任意一个不动点的区域中的表现。它通过考察人们向任意远处移动时发生的情况，来研究非紧空间的整体结构。对此的系统研究是通过构造所谓的空间“端”来进行的。$\mathbf{A}^n$ 端 （单纯或链）复形的端是一个子复形，具有特定类型的无限行为，能够刻画拓扑学中的非紧性和代数中的无限生成。端理论最早可追溯至 20 世纪 30 年代的 Freudenthal [Fre30],，他最初是在研究拓扑群时提出这一理论的。

端空间理论最初应用于 σ-紧空间，即一种空间 X，它具有一个紧子空间递增序列 $\{K_n\}$，且每个 K_n 都包含在 K_{n+1} 的内部，使得

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

并且 X 的紧子集 K_n 按包含关系构成偏序。其思想是通过考察这些空间向 X外延伸的“端”，来研究这类空间的同伦论。首先想到的例子是欧几里得空间。例如， $\mathbb{R}$ 有两个向外延伸的端，即 $+\infty$ 和 $-\infty$；而 $\mathbb{R}^2$ 只有一个向外延伸的端，即 ∞。更准确地说，考虑如下空间系统

$$\mathcal{E}(X) := \{\text{Closure}(X \backslash K) : K \subset X \text{ compact}\}.$$

这在空间范畴中构成一个逆系统（亦称 pro对象），因此是一个前有限空间。 X 的端集合是这个空间系统的一个连通分支，即

$$e(X) := \lim_{K} \pi_0 \left(\mathcal{E}(X) \right)$$

赋予逆极限拓扑。

注 1.1.2. 对于那些没有边界的空间，其端可以解释为一种“理想边界”，用以描述无穷远的不同可能概念。常见的例子包括点集拓扑中的一点紧化、几何拓扑中的渐近行为、双曲几何中的无穷远边界，等等。

下面给出端空间的一个更精细的定义。

定义 1. 空间 W 的端空间 $e(W)$ 是由路径构成的空间

$$\omega : \big([0,\infty],\{\infty\}\big) \to (W^{\infty},\{\infty\})$$

赋予紧开拓扑，使得 $\omega^{-1}(\infty) = \{\infty\}$。这里，$W^{\infty} := W \cup \{\infty\}$ 是 W的一点紧化。

对于拓扑空间 W，其端空间 $e(W)$ 可视为描述 W 在无穷远处行为的同伦论模型。

例 1.1.3. 以下是一些基本例子：

- 如果 K 是紧的，那么 $e(K) = \emptyset$。
- 实数直线在无穷远处有两个分支，分别对应两个不同的连通开邻域（$-\infty, -k$）和（k, ∞），对于 $k \in \mathbb{R}$。因此，e（$\mathbb{R}$）$\cong \mathbb{S}^0 = \{\pm\infty\}$。所以，端空间不一定是连通的。
- 对于所有 $n \geq 2$，$\mathbb{R}^n$ 只有一个端，因为对于任意紧子集 $K \subset \mathbb{R}^n$，$\mathbb{R}^n \backslash K$ 都只有一个无界分支，因此 e（$\mathbb{R}^n$）$\cong \mathbb{S}^{n-1}$。

无穷远同调

研究端空间理论的一个合适框架是真同伦理论：若映射 $f : V \to W$ 是一个真同伦等价，则 f是一个真[1] 映射，并且它在真范畴中诱导出同伦等价。f 的真性等价于通过 f^{∞}：$V^{\infty} \to W^{\infty}$将 f 延拓至无穷远处。正如普通同调理论足以研究紧空间一样，局部有限同调在研究非紧空间时也发挥着关键作用。回顾一下，奇异同调群 $H_*(W)$定义为与奇异链复形 $S_*(W)$相关联的同调论，即 $H_*(W) := H_*(S_*(W))$。用局部有限链复形 $S_*^{lf}(W)$替换奇异链复形，便定义了局部有限同调群 $H_*^{lf}(W) := H_*(S_*^{lf}(W))$。根据这些链复形的定义，可以立即验证，若 K 是任意紧空间，则 $H_*(K) = H_*^{lf}(K)$（[HR96，例3.4]）。这些复形为我们提供了如下定义：

定义 2. 空间 W 在 ∞ 处的奇异同调定义为 $H_*^{\infty}(W) := H_*(S_*^{\infty}(W)$，其中

$$S^{\infty}(W) := Cone(i : S_*(W) \to S_*^{lf}(W))_{*+1}$$

包含 i：$S_*(W) \to S_*^{lf}(W)$ 将一个 r-单形 σ：$\Delta^r \to W$视为局部有限奇异链所得到（*[HR96，定义 3。8]*）。

[1]紧空间的逆像是紧的

如此定义的同调群由以下长正合列联系起来：

$$\cdots \to H_r^{\infty}(W) \to H_r(W) \xrightarrow{i_*} H_r^{lf}(W) \to H_{r-1}^{\infty}(W) \to \dots$$

例 1.1.4. 下面给出一些初步的例子：

- 设 K 是任意紧空间。则 $S_*(K) = S_*^{lf}(K)$，因此群 $H_*^{\infty}(K)$ 是平凡的。

- 利用庞加莱-勒夫谢茨型论证，可以发现，任意光滑开可缩 n-流形的无穷远同调与维数为 $n-1$的球面的同调相同。对于$n \geq 1$，令 $W = \mathbb{R}^n \times K$。于是有 $H_*(W) = H_*(K)$ 以及 $H_*^{lf}(W) = H_{*-n}(K)$。因此，

$$H_*^{\infty}(W) = H_*(K \times S^{n-1}) = H_*(K) \oplus H_{*-n+1}(K).$$

因此，空间 W 的无穷远同调 $H_*^{\infty}(W)$ 是一个正则同伦不变量，它由同调 $H_*(W)$ 与局部有限同调 $H_*^{lf}(W)$ 之差给出；而 W的紧致性则由 $H_*^{\infty}(W)$ 的消失决定。

无穷远处同伦

与上文类似，同伦群也有一套平行理论。如同端空间的情形，设 X 是一个 σ-紧拓扑空间，其紧子空间 $K_n \subset X$ 按包含偏序；若 $K \subset K'$，我们只需考虑包含 $X\backslash K' \subset X\backslash K$。一个无穷远基点（记为 $\star$）由开子集 $U \subset X$ 给出，使得对任意紧集 K，存在紧集K'，满足 $K \subset K'$ 且 $U\backslash K'$ 非空且单连通。

定义 3. 以下是无穷远基本群的一个定义（*[DL01，第 2]*）：

- 设 X 为任意具有无穷远基点 $\star$的拓扑空间。则我们将无穷远基本群（关于 X，以 $\star$ 为基点）定义为如下给出的相对同伦群的逆极限：

$$\pi_1^{\infty}(X, \star) = \varprojlim \pi_1(X\backslash K, U\backslash K)$$

其中逆极限取遍 K 的紧子集 X 的共尾族，满足 $U\backslash K$ 单连通；这些子集按包含关系排序，并使用基本群上的自然诱导映射。

- 我们称 X 是无穷远处单连通的，如果 $\pi_1^{\infty}(X, \star)$ 是平凡的。

或者，如果对于每个紧 $K \subsetneq X$，都存在 $K \subsetneq K' \subsetneq X$，使得基本群上的诱导映射

$$\pi_1(X\backslash K') \xrightarrow{0} \pi_1(X\backslash K)$$

是平凡的映射。

例 1.1.5. 以下是一些基本例子：

- 如果 K 是紧的，那么群 $\pi_1^\infty(K)$ 是平凡的。
- 对于所有 $n \geq 0$，都有 $\pi_1^\infty(\mathbb{R}^n) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$。因此，$\mathbb{R}^n$ 在无穷远处单连通，当且仅当 $n \geq 3$。

现在我们可以明确给出定义的解答1.1.1。证明是此前多项数学工作的集大成之作（见第 1.2.1节；关于历史贡献，见 [AØ21，§1。1]），最终的突破来自 Siebenmann [Sie68]。结合 Perelman 和 Freedman 在低维庞加莱猜想方面的惊人成果（[Mil97；Car14]），Siebenmann 的结果为我们给出了欧几里得空间的以下刻画：

定理 1.1.6。以下版本见 *[AØ21，定理 2]*。

1. 对于 $n \leq 2$，$\mathbb{R}^n$ 是唯一的开可缩 n-流形，
2. 对于 $n \geq 3$，$\mathbb{R}^n$ 是唯一无穷远处单连通的开可缩 n-流形。

如上所示，对于三维及以上维数，无穷远处单连通这一假设是必不可少的。这是由于某些奇异流形的存在；按照定义，它们是不可与 $\mathbb{R}^n$ 同胚的光滑可缩流形。我们将在稍后的1.2.1中重新讨论这种情况。

注 1.1.7。就端空间而言，若空间 X 满足以下条件，我们称其无穷远处单连通：$e(X)$作为一个空间既单连通又连通。事实上，除了研究 π_1^∞，还可以在真同伦理论的背景下研究“无穷远处的同伦型”。对此感兴趣的读者可参阅 *[HR96，第 9]*章。

是时候将这个故事带入代数几何的领域了！

1.2 光滑仿射概形的 $\mathbb{A}^1$-可缩性

与拓扑情形类似，可以看到，仿射空间 $\mathbb{A}_k^n$ 是代数几何中最基本的研究对象之一。它们是光滑、仿射且$\mathbb{A}^1$-可缩的——等价于基域 k。后一性质意味着，对于 $\mathbb{A}_k^n$，许多已知的代数几何理论都变得平凡。因此，以下问题势所必然：

问题 1.2.1. $\mathbb{A}^n$ 是维数为 n的唯一光滑仿射 $\mathbb{A}^1$-可缩概形吗？

或者，对于基域 k，如果一个维数为 $n \geq 0$ 的$\mathbb{A}^1$-同伦于 $\mathbb{A}_k^n$的光滑仿射概形，那么它是否也同构于 $\mathbb{A}_k^n$，作为一个 k-概形？我们将从定义1.2.1的历史回顾开始。

1.2.1 奇异仿射簇

研究实流形和复流形在拓扑可缩性意义下的性质，是一个影响深远的概念，与邻近领域之间存在诸多联系。代数几何的精妙之处在于，在必要时可以忽略代数结构，从而将其与底层的拓扑结构进行比较。这些比较通过某些实现函子得以实现。因此，我们可能得到一些具有拓扑可缩性、但在 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴中并不可缩的空间。作为与拓扑情形的联系，一个 $\mathbb{A}^1$-可缩但不同构于 $\mathbb{A}^n_k$ 的概形，将被称为 奇异。前面各节中的拓扑情形所积累的经验，促使我们按维数逐步考察定义 1.2.1。任何一维光滑复可缩流形都同构于 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$（使用定义 1.1.6 以及 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$）。困难在下一步便已经出现。

奇异复曲面

复空间 $\mathbb{C}^2$ 是一个可缩复流形。但显然，这并非唯一的一个。第一个反例由 C.P. Ramanujam 于 1971 年在其里程碑式论文中构造 [Ram71]，以回应 M.P. Murthy 关于维数 2 中 Zariski 消去问题的提问。他希望光滑仿射有理复代数簇 S 拓扑可缩这一假设能自动推出 S 同构于 $\mathbb{C}^2$。但令他（也令我们）大为惊讶的是，他自己构造了一个反例，如今以其名字命名为 *Ramanujam* 曲面 。他构造反例的策略可概述如下:

例 1.2.2. 取复射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$。考虑一条具有尖点（或拐点） q 的三次曲线，以及另一条非退化圆锥曲线 Q，使得它们在点 $p \in \mathbb{P}^2$ 处的交数为 *5*（$m_p(C \cap Q) = 5$），并在另一点 $r \in \mathbb{P}^2$ 处横截相交（$m_r(C \cap Q) = 1$）。这样的 Q 可通过避开$p = q$ 的情形，或通过推导 C的光滑点集上的群律而得到。现在，考虑在点 r处进行膨胀$X := Bl_r(\mathbb{P}^2)$

$$\pi : X \to \mathbb{P}^2 \quad \textit{such that}$$
$$\pi^{-1}(C) = \widehat{C} \quad \textit{and} \quad \pi^{-1}(Q) = \widehat{Q}$$

其中，$\widehat{C}$ 和 $\widehat{Q}$ 分别是 C 和 Q 的严格变换。*Ramanujam* 曲面定义为令

$$\mathcal{R} := X \backslash \{\widehat{C} \cup \widehat{Q}\}$$

接着他证明，X 是单连通的，且其同调类平凡 $H_1(X) = 0$，并且 $\pi_1(X)$ 是一个阿贝尔群。因此，由赫维茨定理可得$\pi_1(X) \cong H_1(X) = 0$，从而 X 是拓扑可缩的。然而，他在 *[Ram71, §3]*中证明了 $\pi_1^{\infty}(X) \neq 0$，而复仿射空间 $\mathbb{C}^n$ 在无穷远处都是单连通的。由于 π_1^{∞}是一个同胚不变量，这尤其意味着 $X \ncong \mathbb{C}^2$。

但在同一篇论文中，他证明，在更强的假设下，$\mathbb{C}^2$ 可以被唯一确定：

定理。设 X 是一个可缩且无穷远处单连通的非奇异复代数曲面。那么，X 作为代数簇同构于仿射平面。

沿着这一引人入胜的构造，若干 Ramanujam 曲面的类比对象得到了研究，并从那时起逐渐确立。1988年，Gurjar-Miyanishi [GM88]对所有对数 Kodaira 维数至少为 1 的无环仿射曲面进行了分类。在此之后，Tom Dieck-Petrie 研究了这类光滑仿射曲面的一个族，该族如今以其名字命名为 *tom Dieck-Petrie* 曲面，定义如下：

例 1.2.3。对于满足 m、l 互素的整数 $m > l \geq 2$，tom Dieck-Petrie 曲面$\nu_{m,l}$ 是由以下方程定义的复曲面：

$$\nu_{m,l} := \left\{ \frac{(xz+1)^m - (yz+1)^l - z}{z} = 0 \right\} \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$$

现在让我们详细说明ν_m、$_l$的一些有趣性质。光滑仿射曲面 ν_m、$_l$ 在拓扑上是可缩的 [DP90，定理 A]，但不同构于$\mathbb{C}^2$。这是因为前者的对数 Kodaira $\bar{\kappa}$(ν_m、$_l$) $= 1$，而后者具有 $-\infty$。因此，我们还要指出，ν_k、$_l$ 不可能是 $\mathbb{A}^1$-链连通的（定义 15）。事实上，根据 [AM11], 的分类理论，任何 $\mathbb{A}^1$-链连通的簇必然是 $\mathbb{A}^1$-单有理的[2]（参见定义 24），因而具有对数 Kodaira 维数$-\infty$。

证明拓扑可缩性的另一种优雅工具，是运用 仿射修改 的理论。在他们的经典论文中，Kaliman-Zaidenberg 确立了在这些修改下拓扑得以保持的条件。根据 [KZ99，例 3.1], 可知，$\nu_{m,l}$ 是沿着因子 $\mathcal{C} := \{x^l - y^m = 0\} \subset \mathbb{A}^2$ 对 $\mathbb{A}^2$ 进行仿射修正得到的，中心为 (1,1) $\subset D$；这里，$\mathcal{C}$ 是拓扑可缩的尖点曲线（甚至是 $\mathbb{A}^1$-可缩的！）。因此，根据 [KZ99，推论 3.1], 可知，$\nu_{m,l}$ 是拓扑可缩的。实质上，利用仿射修正技术和高阶 Chow 群的计算，[DPØ19，定理 3.2]还表明，$\nu_{k,l}$ 实际上是稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩的——这种现象指一个代数簇（X, x）经过有限次悬挂后变为 $\mathbb{A}^1$-可缩

$$(X, x) \wedge (\mathbb{P}^1, \infty) \wedge \cdots \wedge (\mathbb{P}^1, \infty) \sim_{\mathbb{A}^1} *.$$

由于 $\nu_{m,\ l}$ 并非 $\mathbb{A}^1$-链连通，根据上述讨论也可以得知，仿射修改一般不保持 $\mathbb{A}^1$-链连通性（参见 [DPØ19，例 2.32]）。

[2]在文献中，这也称为对数单连通

Ramanujam 对仿射平面的刻画无法推广到高维，也就是说，在所有维数 $n \geq 3$ 上，都存在拓扑可缩、甚至无穷远处单连通，但不同构于 $\mathbb{C}^n$的光滑复仿射簇。事实上，根据 Ramanujam-Dimca 的一个定理（[Zai00，定理 3.2]），我们有如下结论：

定理。 设 X 是一个可缩的光滑仿射代数簇。若 $dim_{\mathbb{C}}X = n \geq 3$，则 X 与 $\mathbb{R}^{2n}$ 微分同胚。

证明涉及 h-上同 bordism 以及 Lefschetz超平面截面定理。粗略地说，在维数 $d \geq 3$ 时，只需将一个这样的拓扑可缩曲面与所需数量的仿射空间 $\mathbb{A}^n$ 作乘积，就能得到这样的奇异仿射簇。

注 1.2.4。 我们将看到，由于 $\mathbb{A}^1$-同伦理论刻画，$\mathbb{A}^2_k$ （定义 *4.3.1*），这类奇异曲面可通过 $\mathbb{A}^1$-可缩性来识别。特别是，这将表明存在拓扑可缩但并非 $\mathbb{A}^1$-可缩的曲面，从而说明 $\mathbb{A}^1$-可缩性比拓扑可缩性强得多（至少对于可嵌入 $\mathbb{C}$ 的域而言）。

奇异实三维簇

回顾定义 1.1.6 可知，从维数 3 开始，单连通性是必要条件。下面这个开创性的例子独具一格。J.H.C. Whitehead 于 1934年提出了以下论证 [Whi34]，试图证明闭三维流形的庞加莱猜想：从一个同伦等价开始 $f\colon M \to S^3$。去掉一个点后，我们得到一个开可缩流形 $M\backslash\{\bullet\}$ 以及一个连续映射 $\widetilde{f}\colon M\backslash\{\bullet\} \to \mathbb{R}^3$。现在，他实质上认为，“一个与 $\mathbb{R}^3$ 同伦的开可缩三维流形同胚于 $\mathbb{R}^3$”，因此这个同胚态射 f 可以通过连续性延伸至无穷远处，从而诱导出一个同胚$f\colon M \to S^3$。不久之后，他自己的反例 [Whi35],推翻了这一证明；在该反例中，他构造了一个不同胚于 $\mathbb{R}^3$的开可缩三维流形。这个流形以他的名字命名，称为 *Whitehead* 流形 $\mathcal{W}$（图 1.1）。

继这一奇异三维流形之后，高维类似物得以建立，若干数学家利用高维庞加莱猜想的解决以及手术理论所提供的工具，对其相关消去问题进行了深入研究（参见[Gli60; Maz61; Poe60; McM62; Sta62; CK65]）。随后观察到一个关键性质：欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 在任意紧子集的补集中仍保持单连通，但 Whitehead 流形并非如此，无穷远处的拓扑的效用由此开始!

诸如*Whitehead* 流形 $\mathcal{W}$ 的空间构成了研究与 $\mathbb{A}^n$ 的刻画相关的障碍理论，以及进一步构造无穷远处的动机不变量（第C.2节），以区分奇异仿射

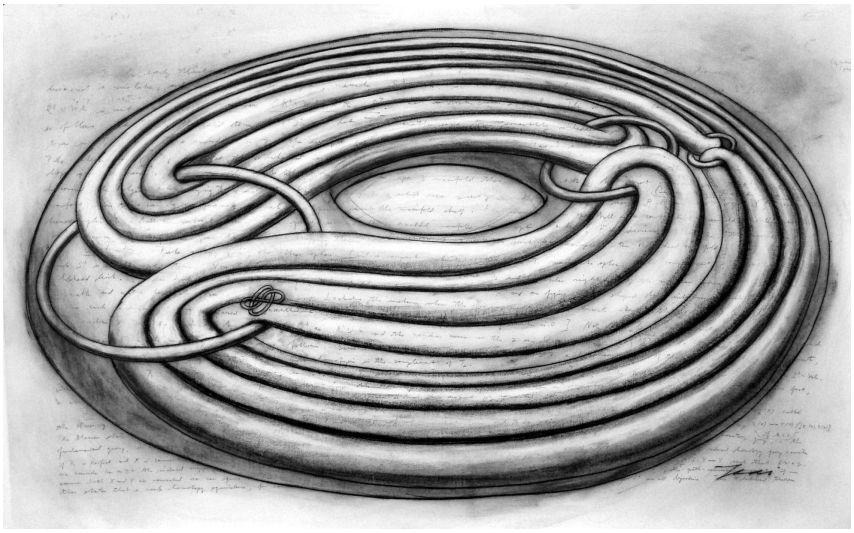


图 1.1：怀特海德连续统， [Tsa07]

$\mathbb{A}^1$可缩簇。在第5章中，我们将介绍另一类在美学上声名狼藉的奇异仿射三维簇 $\mathcal{K}$，它们在代数几何中扮演着与 Whitehead 流形类似的角色。

继续前进……

定义 1.2.1 在某种程度上，可以视为本讲稿的起点。与拓扑学中的目标相一致，这一刻画被称为动机开庞加莱猜想。如上所述，奇异簇的存在使得我们无法像定义 1.2.1 中的定义 1.1.6那样获得完整的解。这个方向上一个令人憧憬的目标，是建立无穷远处的动机同伦（[AØ21，问题 5.4。4], 另见第 C.2节）。总而言之，本讲稿的目标可以简明地表述如下：

- 研究域上低维情形中的定义 1.2.1 ，并将这一刻画推广到相对维数不超过 2 的更一般基概形。在下文中，我们还将回顾维数 ≥ 4 的情形，并说明如何运用仿射代数几何中的一个定理，来充分利用相对 $\mathbb{A}^1$可缩概形（第4.4节）。

- 研究奇异仿射簇理论，并将 $\mathbb{A}^1$-可缩性推广到完美域和诺特基概形上的 Koras-Russell 三维簇（第5.1节）及其广义版本（第5.2节）。随后，我们研究这一问题的紧致类比对象，并证明在所有维数上都存在奇异动机球（第5.3节）≥ 4。

人可以被夺走一切，唯独有一样东西除外：人类最后的自由——在任何既定处境中选择自己态度的自由。维克多·弗兰克尔《活出意义来》

2 动机同伦论

章节总结

本章奠定（不稳定）动机同伦论的基础。在第 2.1.1 节中，我们先介绍构造此类范畴所需的动机和单纯 Nisnevich 层框架，随后构造不稳定的 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 $\mathcal{H}(S)$。我们在第 2.1.2 节描述关键的动机局部化函子 $\mathbb{L}_{mot}$，并说明它如何保留另外两种局部化，即 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$ 和 $\mathbb{L}_{Nis}$。第 2.1.3 节讨论 $\mathbb{A}^1$- 模型结构。接下来，我们在第 2.1.4 节定义本讲义的核心术语 —— $\mathbb{A}^1$-可缩性，以及若干重要的相关概念，例如 $\mathbb{A}^1$-连通性（第 2.1.5 节）、 $\mathbb{A}^1$-刚性（第 2.1.6 节）和 $\mathbb{A}^1$-链连通性（第 2.1.7 节）。由此引出函子性的基本概念（第 2.1.8 节），它在动机同伦论中发挥着关键作用。随后，我们在空间为 $\mathbb{A}^1$-可缩的情形下应用函子性，并得到供后续应用使用的初步结果。第 2.1.10 节及其后续内容在第4章中将发挥关键作用，因为它们为相对于基概形进行研究提供了框架。最后，我们在第 2.2 节介绍 Milnor-Witt K-理论所需的背景知识，该理论将在第5章中得到应用。

2.1 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴

本节首先介绍不稳定$\mathbb{A}^1$-同伦论（又称动机同伦论）的构造基础。该理论与基概形 S 上有限型光滑分离概形的范畴相关。描述动机空间的同伦论时，有两种方法：传统方法是采用模型范畴的语言（参见第 A.2 节），由

Quillen [Qui67] 奠定；另一种则是相对现代的 $(\infty, 1)$-范畴语言（例如，[Lur09]）。就本文而言，我们将灵活运用这两种方法，但主要采用前一种。后一种运用 ∞-机制的方法，将在能使论述脉络更易处理之处加以采用。不过，读者不必过于担心这一点，因为借助连接这两个领域的现代桥梁，我们所作的所有阐述都可以用这两种语言很好地说明（其中一座桥梁见： [Rob15，§2]）。关于背景知识的介绍，参见 [Bra18；Dég21]。

RUNNING CONVENTION 在本章中，除非另有说明：S 表示一个具有有限克鲁尔维数的局部诺特基概形， k 表示一个域，其单位为 $k^\times$，Sch_S =表示有限型分离概形，Sm_S =表示 S上的有限型光滑分离概形。

为什么要基于单纯预层，而不是直接基于概形?

$\mathbb{A}^1$-同伦范畴建立在 Sm_S 上的单纯预层范畴 $\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$ 之上。自然会让人思考，为什么不直接在 Sm_S 上定义它。原因在于，尽管范畴 Sm_S 是完备的（即具有所有极限），却远非余完备（即缺少余极限）；众所周知，余极限对于在任何范畴上构建同伦论都不可或缺。一个方便的解决办法是向 Sm_S「形式地添加」所需的余极限。用范畴论的语言来说，这等价于取 Sm_S 上的预层范畴。这可通过米田嵌入实现，该嵌入由以下全忠实函子定义：

$$\begin{aligned} Y : \mathrm{Sm}_S &\hookrightarrow \mathrm{Fun}((\mathrm{Sm}_S)^{op}, \mathcal{S}et) =: \mathrm{Psh}(\mathrm{Sm}_S) \\ X &\mapsto \Big(U \mapsto R_U := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_S}(U, X) \Big) \end{aligned}$$

这里， R_U 是可表预层函子[1] 在 U上。其优点在于，我们现在可以利用为预层范畴构建的模型范畴框架（更多内容请参见第A.2.4节）。任何预层都可以通过赋予「离散」单纯结构而视为单纯预层。总而言之，我们有一系列函子

$$\mathrm{Sm}_S \overset{Y}{\hookrightarrow} \mathrm{Psh}(\mathrm{Sm}_S) \overset{D}{\to} \mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$$

其中 D 表示预层范畴上的「离散」单纯结构。然而，这种方法还存在另一个问题。设 U, $V \subset X$ 是概形 X 的一个开（扎里斯基）子概形，且满足 $X = U \cup V$。接下来考虑以下平方

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X \end{array} \quad \overset{Y}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{ccc} R_{U\cap V} & \longrightarrow & R_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_V & \longrightarrow & R_X \end{array}$$

[1]也称为逆变Hom 函子

第一个平方（左侧）是 Sm_S 中的一个推出，其中 $U \cap V$ 是概形的纤维积。然而，通过取可表预层得到的对应平方（右侧），除非 $X = U$ 或 $X = V$，否则不会在 $\mathrm{Psh}(\mathrm{Sm}_S)$ 中保持为推出。换句话说，若先验地将空间定义为预层，那么作为预层的并 $U \cup_{\mathrm{Psh}} V$ 与范畴论并 X 并不相同。回顾经典拓扑学，满足这一类似性质的平方称为*Mayer–Vietoris* 方块。类比而言，这个问题可视为概形的*Mayer–Vietoris* 性质失效。解决这一问题的一种合适方法是如下修改这些平方。

定义 4。 A^n 初等特异方块（简称 *EDS*）在 Sm_S 中是形如以下形式的平方

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{\ j\ } & X \end{array}$$

其中 p 是一个 *étale* 态射， j 是一个 *Zariski* 开浸入，并且其拉回

$$p^{-1}(X \backslash U) \xrightarrow{\cong} X \backslash U$$

是一个同构（这里的 $X \backslash U$ 带有支集为闭子集 $X \backslash U$的约化概形结构）。

例 2.1.1。 一类重要的 *EDS* 由形如 $X = U \cup V$的 *Zariski* 开覆盖给出。这里取 $p = j_V$为一个开嵌入，而条件 $p^{-1}(X \backslash U) \to X \to U$ 为同构，等价于条件 $U \cup V = X$。

容易看出，EDS 是 Sm_S中的一个推前。换言之， X 可由图表 $U \leftarrow p^{-1}(U) \to V$的余极限恢复。这保证了这类平方具有 Mayer–Vietoris 型性质。现在回顾一下，概形的开覆盖通过映射族推广了开覆盖的概念，而这一概念是通过格罗滕迪克拓扑来表述的（见第A.1节）。要构造一个同样包含类似 Mayer–Vietoris 型性质的合适空间范畴，其策略是寻找一个由这些 EDS 生成的格罗滕迪克拓扑，并将它们视为其中的“开覆盖”。幸运的是，这样的拓扑确实存在；更妙的是，它在动机同伦论中非常方便使用（参见第 A.1.3节）

Nisnevich拓扑

该*Nisnevich*拓扑以 Yeo A. Nisnevich 命名，最初发表于 [Nis89]，作为完全分裂拓扑，又称 cd 拓扑，其最初的动机是为收敛到各种代数K-理论群的谱序列构造某种下降。就我们的目的而言，只需要了解这一拓扑的定义及其若干性质。以下是 Nisnevich 拓扑的若干等价定义之一（参见第 A.1.3节），由 [MV99第3节给出。1]。

定义 5。若且唯若对每个点 $x \in X$，都存在某个指数 I、一个 $i \in I$ 以及一个点 $y \in U_i$，使得$p_i(y_i) = x_i$，且相应剩余域之间的诱导映射 $\kappa(x) \to \kappa(y)$ 是同构，则有限族 *étale* 态射 $\{p_i : U_i \to X\}_{i\in I}$ 是一组Nisnevich 覆盖。Sm_S 上的Nisnevich拓扑是由这些 *Nisnevich* 覆盖生成的格罗滕迪克拓扑。

任意扎里斯基覆盖都是 Nisnevich 覆盖。另一方面，étale 覆盖是 Nisnevich 覆盖，当且仅当它对所有域 k上的点都是满射 k，如下例所示（[AE17，例 3。41]）。

例 2.1.2. 设 k 是特征不等于 *2* 的域，且 $a \in k^\times$。考虑由 $j : \mathbb{A}^1\backslash\{a\} \to \mathbb{A}^1$ 给出的 $\mathbb{A}^1$ 的覆盖，以及由 $x \mapsto x^2$定义的 *étale* 映射 $p : \mathbb{A}^1\backslash\{0\} \to \mathbb{A}^1$。那么，当且仅当 $a = b^2$对某个 $b \in k$成立时，这个 *étale* 覆盖才是 *Nisnevich* 覆盖。

定义 4 中的 EDS 与 Nisnevich 覆盖密切相关，如下所述（[AE17，例 3。45]）。

例 2.1.3. 定义 2.1.2 中的 *Nisnevich* 覆盖不是 *EDS*。不过，去掉 a 的一个平方根后，从 $\mathbb{A}^1\backslash\{0\}$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{A}^1\backslash\{0,b\} \\ & & \downarrow p \\ \mathbb{A}^1\backslash\{a\} & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

该平方成为一个 *EDS*。因此，有时也将 *EDS* 称为 Nisnevich区别方。

下面给出关于预层是 Nisnevich拓扑 中的层的定义（[Voe98，定义 2。2]）。

定义 6。反变函子 $\mathcal{F} : \mathrm{Sm}_S^{op} \to \mathrm{Set}$ 称为 Nisnevich拓扑 中的层，如果满足以下两个条件：

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = *$（将始对象映射为终对象），
2. 对于定义 4 中的任意 *EDS*，Set 的平方

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{j} & \mathcal{F}(p^{-1}(U)) \end{array}$$

是笛卡尔的，也就是说，$\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(U) \times_{\mathcal{F}(p^{-1}(U))} \mathcal{F}(V)$。

满足定义 6 条件的预层称为满足*Brown- Gersten*性质 或*BG*性质 ([MV99，第 99]页），这可视为 Nisnevich拓扑下类似的切除性质。选择这一术语，是因为 [BG06] 中的作者在扎里斯基位点研究了这一性质。下文表明，如果我们期望在 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴中得到 Mayer-Vietoris型结果，那么 Nisnevich拓扑确实是正确的选择。

引理 2.1.4. 任何 *EDS* 都是范畴 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Sm}_S)$中的余笛卡尔方块。特别地，典范态射

$$V/(U \times_X V) \to X/U$$

是 *Nisnevich* 层的一个同构。

证明。 参见 [MV99，引理 1。6]。 □

2.1.1 不稳定构造

口号： $\mathbb{A}^1$-同伦论是满足 Nisnevich 下降和 $\mathbb{A}^1$-不变性的 Sm_S 上的单纯预层的同伦论。

本节将介绍构造动机空间范畴 Spc_S 以及最终构造不稳定动机同伦范畴所需的基本工具 $\mathcal{H}(S)$。为便于阐述，我们将采用模型范畴的语言。在动机空间上众多常用的模型结构中，$\mathbb{A}^1$-局部投射模型结构在函子性方面尤为适用，因此我们将使用这一模型结构。关于单纯预层上现有模型结构的各种有趣介绍，读者可参阅 [Bla01；Dug01b；DRØ03；DHI04；Isa05]。

Bousfield 局部化

采用局部投射模型结构的优点是，每个概形作为预层和层都是局部投射纤维且余纤维的。然而，范畴 Sm_S 全忠实地嵌入单纯预层的局部投射同伦范畴；因此，若要在 $\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$ 中对光滑概形作出明确的识别，就需要进一步扩大（局部投射）弱等价类。这是通过称为 *Bousfield* 局部化的过程实现的，可以将其视为交换代数中环的一种类似局部化（背景介绍见第 A.2.2节）。为了构造空间范畴，我们需要进行两次这样的局部化：Nisnevich 局部化，以及下文所述的 $\mathbb{A}^1$-局部化。

Nisnevich 下降

考虑赋予 Nis- nevich 拓扑的单纯预层范畴 $\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$。设 $U_\bullet$ 是 $\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$ 中的一个对象，且 U_n 是一个预层

集合$\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$中的集合，对于每个 n。假设映射 $U \to V$是一个 Nisnevich 覆盖，则定义与 $\check{C}U \to V$ 相关联的 Čech 复形 $U \to V$，定义如下：$\check{C}U_n := U \times_V \cdots \times_V U$[2]。于是，相对于该 Čech 覆盖的 $\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$的 Bousfield 局部化存在，称为 *Nisnevich* 局部化。

定理 2.1.5. *([AE17，定理 3.33])* 关于*ˇCech* 覆盖类的 $\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$ 的 *Bousfield* 局部化 $\check{C}U_\bullet \to V$存在。我们将此局部化函子记为$\mathbb{L}_{Nis}\,\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$。

我们称单纯预层 $X \in \mathbf{sPsh}(\mathbf{Sm}_S)$满足*Nisnevich* 下降，如果对于每个ˇCech 覆盖$\check{C}U_\bullet \to X$，都有

$$\mathrm{hocolim}_n U_n \xrightarrow{\simeq} X$$

是单纯预层之间的弱等价。更一般地，人们会考虑相对于任意格罗滕迪克拓扑 τ 中比ˇCech 覆盖更一般的覆盖的下降，它们称为超覆盖。回顾一下，覆盖 $U_\bullet \to X$ 称为超覆盖，若每个 U_n 都是可表预层的余积，诱导映射 $U_0 \to X_0$ 是一个τ-覆盖，并且每个 $U^{\Delta^n} \to U^{\partial\Delta^n}$在0次都是一个 τ-覆盖。

$\mathbb{A}^1$—局部化：将 $\mathbb{A}^1$变为可逆

此时，还不清楚应如何在这个范畴中定义可缩概形。为了在 $\mathbf{sPsh}(\mathbf{Sm}_S)$ 上构造一种能够捕捉 $\mathbf{Sm}_S$ 底层结构的同伦论，我们需要扩充弱等价，使其更具内在性，并由 $\mathbf{Sm}_S$ 自身的对象参数化。为解决这个问题，我们依据另一类自然的态射来扩充范畴 $\mathbf{sPsh}(\mathbf{Sm}_S)$。回顾一下，在拓扑学中，同伦是由一个区间 $[0,1]$ 参数化的。由于 $[0,1]$不是代数簇，我们用仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 来替代它。令 I 表示 $\mathbf{sPsh}(\mathbf{Sm}_S)$ 中的映射类 $\{\mathbb{A}^1 \times U \to U \mid U \in \mathbf{Sm}_S\}$。或者，也可以选取[3]一个子集 $J \subseteq I$，使得 $X \in \mathbf{Sm}_S$ 遍历 $\mathbf{Sm}_S$ 每个同构类的一个代表；我们还需要将这些态射类变为可逆。这个过程称为 $\mathbb{A}^1$-局部化。换句话说，所有投影映射

$$\{\mathrm{pr}_2 : \mathbb{A}^1 \times U \to U \mid U \in \mathrm{Sm}_S\}$$

现在本应已在将要构造的 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴中被求逆。

定义 7。 设 $\mathcal{F} \in \mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$。那么，如果诱导态射满足 $\mathcal{F}$ $\mathbb{A}^1$-不变性，我们就称其满足该性质。

$$\mathrm{pr}^* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1)$$

自然投影 $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ 是一个双射。这样的预层称为 $\mathbb{A}^1$-不变预层，我们用$\mathrm{Psh}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S) \subset \mathrm{Psh}(\mathrm{Sm}_S)$表示 $\mathbb{A}^1$-不变预层构成的子范畴。

[2] U 的自积，在 V上取 $(n+1)$ 次[3]这之所以可能，是因为 $\mathbf{Sm}_S$ 本质上是小的

例 2.1.6. 值得注意的是，并非所有预层（甚至可表预层！）都是 $\mathbb{A}^1$-不变的。仿射概形 $\mathbb{G}_m$ 表示单位层，并且是 $\mathbb{A}^1$-不变的（参见定义*2.1.26*）。另一方面，仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 表示全局截面层，但它并非 $\mathbb{A}^1$-不变（参见定义*2.1.27*）。

注 2.1.7。 注意，由于 $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{A}^1_k \times U \to U$ 有一个截面，因此它总是分裂单射。因此，只要 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变量，条件是 pr^* 为满射。此外，注意到 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变量，当且仅当诱导的截面 $i_0^* = i_1^* : \mathcal{F}(\mathbb{A}^1_k \times U) \to \mathcal{F}(U)$ 对所有 $U \in \mathrm{Sm}_k$ *([MVW06，引理 2。16])* 中的对象都一致。

命题 2.1.8。 *([AE17，命题 3。55])* 关于态射类 $\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$ 的 ***Bousfield*** 局部化 J 存在。我们将这个 $\mathbb{A}^1$-局部化范畴记为 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}\,\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)$。

$\mathbb{A}^1$-局部化函子 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} : \mathrm{Psh}(\mathrm{Sm}_S) \to \mathrm{Psh}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S)$ 是包含函子 $\iota : \mathrm{Psh}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S) \hookrightarrow \mathrm{Psh}(\mathrm{Sm}_S)$ 的左伴随。

设定这两种局部化之后，我们终于可以定义动机同伦范畴了。

定义 8. 对于基概形 S，动机 S-空间范畴记作 Spc_S，它是 Sm_S 上的单纯预层范畴。$\mathbb{A}^1$-同伦范畴记作 $\mathcal{H}(S)$，它是对 Spc_S 施加 ***Nisnevich*** 下降和 $\mathbb{A}^1$-局部化后得到的同伦范畴

$$\mathcal{H}(S) := \mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Sm}_S) \cap \mathrm{Psh}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S) \subset \mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S) =: \mathrm{Spc}_S$$

还有其他一些可能值得关注的变体。例如，只施加 Nisnevich 下降，可以构造 Nisnevich 局部同伦范畴，记作 $\mathcal{H}(S)_{Nis}$；类似地，只施加 $\mathbb{A}^1$- 不变性，则得到 $\mathbb{A}^1$-局部同伦论 $\mathcal{H}(S)_{\mathbb{A}^1}$。在本文中，我们只关注同时施加这两种局部化后的同伦范畴，因此只讨论 $\mathcal{H}(S)$。

带基点的动机空间

类似地，通过考虑带基点的动机空间版本，可以建立带基点的 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴的平行理论。例如，

- 仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 以 1 为基点，
- 乘法概形 $\mathbb{G}_m$ 以 1 为基点，
- 射影直线以 ∞ 为基点（事实上，这里基点并不重要，因为对于任意 $x \in \mathbb{P}^1$，$(\mathbb{P}^1, \infty) \simeq (\mathbb{P}^1, x)$），
- 任意动机空间 X 都由零对象 $*$ 赋予基点，因此我们有 $X_+ := X \sqcup *$。

相应的带基点动机空间记为 $\mathrm{Spc}_{S,\bullet}$ 而 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴记为 $\mathcal{H}(S)_\bullet$。存在一个伴随

$$(-)_+ : \mathcal{H}(S) \rightleftharpoons \mathcal{H}(S)_\bullet : \mathcal{U}$$

其中，$\mathcal{U}$ 是遗忘基点的右伴随。与拓扑学中的做法一样，可以在 $\mathcal{H}(S)_\bullet$ 中进行若干种运算。例如，若 $Y \to X$ 是带基点动机空间之间的一个映射，则 $\mathcal{H}(S)_\bullet$ 中的余纤维可计算为

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Y/X \end{array}$$

其中，余纤维 Y/X 以 Y 的像为基点。类似地，利用 Spc_S 中的零对象 $*$，我们有 $\mathcal{H}(S)_\bullet$ 中的悬挂

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

对任意动机空间 X 均成立。此外，若 $X \vee Y$ 表示动机空间的余积，则 $\mathcal{H}(S)_\bullet$ 中的楔积由下式给出

$$X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

稳定 $\mathbb{A}^1$ 同伦论 $\mathrm{SH}(S)$ 随后通过形式地求逆动机球 $\mathbb{P}^1$ (见第 5.3.1 节)

$$\mathrm{SH}(S) := \mathcal{H}(S)_\bullet[(\mathbb{P}^1)^{-1}]$$

这给出了以下函子：

$$\mathcal{H}(S)_\bullet \underset{\Omega^\infty}{\overset{\Sigma^\infty}{\rightleftharpoons}} \mathrm{SH}(S)$$

关于稳定理论的更多背景，可参阅 [Ada74；Voe98；Jar00；Hov01；DRØ03；DLØRV07]。

$\mathbb{L}_{Nis} \rightleftharpoons \mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$ 互相摧毁

虽然 $\mathcal{H}$（S）的定义在形式上是直接的，但当人们试图从头进行某些计算时，会遇到实际困难。局部化函子 $\mathbb{L}_{Nis}$ 可能会破坏 $\mathbb{A}^1$-不变性，并且 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$ 未必保持（Nisnevich）层的性质。考虑以下实例（[MV99，第3节，例2.7]）：

例 2.1.9. 设 $U_0 = \mathbb{A}^1\backslash\{0\}$ 与 $U_1 = \mathbb{A}^1\backslash\{1\}$，并设 $U_{01} = U_0 \cap U_1$。由于U_0 与 U_1 均为 $\mathbb{A}^1$-不变的（参见定义2.1.26），因此 U_{01} 也是 $\mathbb{A}^1$-不变的。现在，对于 j 的一个闭嵌入选取：$U_{01} \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ （对某个 n），定义余积

$$F := (U_0 \times \mathbb{A}^n) \bigsqcup_{U_{01}} (U_1 \times \mathbb{A}^n)$$

它是一个（非光滑）概形 $F \in \mathrm{Sch}_S$。这里，态射 $U_{01} \to U_i \times \mathbb{A}^n$ 是 j 与开嵌入 $U_{01} \to U_i$ 的乘积，其中 $i = 0,1$。现在，设 X 是任意一个连通概形。考虑层

$$R_F(X) := \mathrm{Hom}(X, F) = \mathrm{Hom}_{Sch_S}(X, U_0 \times \mathbb{A}^n) \bigsqcup_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_S}(X, U_{01})} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_S}(X, U_1 \times \mathbb{A}^n).$$

由于 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$ 保持推出，我们有

$$\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} R_F \simeq \mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}(U_0 \times \mathbb{A}^n) \sqcup_{\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}(U_{01})} \mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}(U_1 \times \mathbb{A}^n).$$

$\mathbb{A}^1$-局部化将 $\mathbb{A}^n$s 收缩；此外，由于 U_0、U_1 和 U_{01} 的 $\mathbb{A}^1$-不变性，我们得到

$$\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}(U_i) = U_i \ ; \mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}(U_{01}) = U_{01}$$

对于 $i = 0,1$，最终我们得到它的（相关） $\mathbb{A}^1$-不变层如下

$$\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} R_F \simeq U_0 \sqcup_{U_{01}} U_1.$$

我们断言 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} R_F$ 不可能是一个层。假设它是一个层；那么它应当与其层化一致。但由于层化是左伴随，它保持推出，因此我们有

$$\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} R_F \simeq U_0 \sqcup_{\mathbb{A}^1} U_1 \simeq \mathbb{A}^1$$

这与以下事实矛盾： $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} R_F$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变量，因为 $\mathbb{A}^1$ 并非如此（参见定义2.1.27）！因此，我们得出结论： $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} R_F$ 不能是层。

$\mathbb{A}^1$-奇异函子

从计算角度来看， $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$ 函子的一个实用替代品是动机奇异链函子$\mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}$。类比拓扑学（参见定义A.2.10），它由以下代数 n-单形得到：

$$\Delta^n_{\mathbb{A}^1} := \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_n] / \left(\sum_{i=0}^{n} t_i - 1 \right).$$

空间 $\Delta^n_{\mathbb{A}^1}$ 作为一个光滑仿射 k-概形而存在，它（非典范地）同构于 $\mathbb{A}^n_k$。该空间的主要用途之一是构造（Suslin-Voevodsky） $\mathbb{A}^1$-奇异链函子

$$\mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}(X) := \left(U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_k}(\Delta^*_{\mathbb{A}^1} \times U, X) \right).$$

可以证明，这给出了一个余单纯概形 $\Delta^\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta, \mathrm{Sm}_S)$。以下是该函子的若干明显优点：

引理 2.1.10。 对于任意 $F \in \mathrm{Psh}(\mathrm{Sm}_S)$，预层 $\mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}(F)$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变量。

证明。 这是 [MV99，第3节，推论 3。5]。 □

命题 2.1.11。 若 $F \in \mathrm{Psh}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S)$，则 $F \to \mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}(F)$ 是预层的等价。

证明。 参见 [MV99，P。 87]。 □

命题 2.1.12。 典范态射 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} \to \mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}$ 是函子的等价。

证明。 这是 [MV99，推论 3。8]。 □

推论 2.1.13。 函子 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$ 保持有限积。

证明。 这由定义 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} \simeq \mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}$ 中2.1.12的辨识得到。注意，由于 Δ^{op} 是筛的（例如，参见 [Lur09，注记 5.4.4。8]），以Δ^{op} 为指数的余极限与乘积交换。因此，$\mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}$ 保持有限积，$\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$也同样如此。 □

下面的例子展示了定义2.1.13 的实际应用。

例 2.1.14。 对于所有 n 以及所有 $X \in \mathrm{Sm}_S$，典范投影 $X \times \mathbb{A}^n \to X$是 $\mathcal{H}(S)$中的同构。对于 $n = 1$，这是显然的。对于 $n \geq 2$，这是定义 2.1.13的直接应用。

2.1.2 动机局部化函子

回想一下，$\mathbb{L}_{Nis}$ 和 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$ 的幂可能会彼此抵消。要在保留二者幂的同时满足范畴约束，一个巧妙的方法是将它们无限次迭代。由此得到的函子称为动机局部化函子，记作 $\mathbb{L}_{mot}$。用范畴论的术语来说，$\mathbb{L}_{mot}$ 是包含函子 $\iota : \mathcal{H}(S) \subset \mathrm{Spc}_S$的左伴随。其显式定义如下：

$$\mathbb{L}_{mot} := \mathrm{colim}(\mathbb{L}_{Nis} \to \mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}\mathbb{L}_{Nis} \to \mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}\mathbb{L}_{Nis}\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} \to \ldots..) = (\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1} \circ \mathbb{L}_{Nis})^{\circ\mathbb{N}}$$

因此在此语境中如此描述，我们有

$$\mathcal{H}(S) := \mathbb{L}_{mot}(\mathrm{Spc}_S).$$

$\mathbb{L}_{mot}$ 如何同时保持两种局部化?

对任意单纯预层 $\mathcal{F}$，$\mathbb{L}_{mot}(\mathcal{F})$ 是一个同时满足 Nisnevich 下降与 $\mathbb{A}^1$-不变性的层。事实上，注意 $\mathbb{L}_{mot}$ 的下列表示作为余终性的推论是等价的（参见定义 54）：

$$\operatorname{colim}(\mathbb{L}_{Nis}\circ\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}\to(\mathbb{L}_{Nis}\circ\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1})^2\to\ldots..)$$
$$\operatorname{colim}(\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}\circ\mathbb{L}_{Nis}\to(\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}\circ\mathbb{L}_{Nis})^2\to\ldots..)$$

前者是在 $\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Sm}_S)$ 中计算的余极限；该范畴对滤过余极限封闭，因此所得对象仍是一个 (Nisnevich) 层。后者是在 $\mathrm{Psh}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S)$ 中计算的余极限；该范畴同样对滤过余极限封闭，因此它保持 $\mathbb{A}^1$-不变性。这两个范畴$\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Sm}_S)$与 $\mathrm{Psh}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sm}_S)$ 对滤过余极限封闭，是因为它们是 可达子范畴，属于 Spc^S ([Lur09，例 5.2.4.7])。

命题 2.1.15. 以下是 $\mathbb{L}_{mot}$ 的若干基本预备性质：

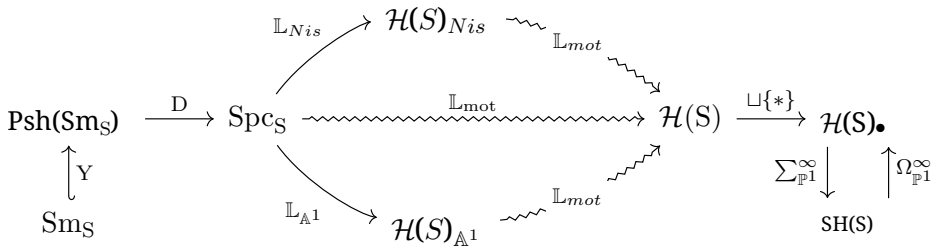
1. 函子 $\mathbb{L}_{mot}$ 保持余极限。
2. 函子 $\mathbb{L}_{mot}$ 保持有限积。
3. 函子 $\mathbb{L}_{mot}$ 是局部笛卡尔的。

证明。 (1) 源于 $\mathbb{L}_{mot}$ 是左伴随这一事实。(2) 源于这样的观察： $\mathbb{L}_{Nis}$ 和 $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}$ 都保持有限积。 $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}$ 可表示为右伴随函子的筛余极限。现在，根据 $\mathbb{L}_{mot}$的表示，它由滤过余极限构造而成，而众所周知，滤过余极限保持有限积。(3) 源于以下事实：$\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}$ 和 $\mathbb{L}_{Nis}$ 都是局部笛卡尔的，且 $\mathbb{L}_{Nis}$ 是左正合的（ [Hoy17，推论 3.5 和 3.9]）。 □

注 2.1.16。 需要注意的是，在 *[AØ21; BH21; Rön25],* 等文献中，通常将单纯预层范畴称为动机空间，并将局部化后的范畴 $\mathbb{L}_{mot}(\mathrm{sPsh}(\mathrm{Sm}_S)) =: \mathcal{H}(S)$ 称为 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴。另一方面，在 *[AE17]*等文献中， $\mathbb{A}^1$-局部化范畴被称为空间范畴；相比之下，它与 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 $\mathcal{H}(S)$相同。本文采用前一种处理方式。

鸟瞰图

以上信息可总结如下：



2.1.3 $\mathbb{A}^n$-模型结构

现在简要介绍 $\mathcal{H}(S)$的模型结构选择。有关模型范畴背景的详细说明，请参阅第A.2节。就本论文的范围而言，我们将使用 $\mathbb{A}^1$-局部投射模型结构（例如，参见 [BK72；Bla01；AE17]）。我们将使用为单纯预层构造的模型结构，在 $\mathcal{H}(S)$上定义一个模型结构，并假设第A.2.4节中的内容成立。

定义9。 以下定义构成了在Sm_S上识别$\mathbb{A}^n$-局部模型结构的基本工具：

1. 动机空间 $Z \in \mathrm{Spc}_S$ 称为 $\mathbb{A}^1$-局部 的，如果它是局部投射纤维，且诱导映射

$$\mathrm{pr}^* : \mathrm{Hom}(U, Z) \to \mathrm{Hom}(U \times \mathbb{A}^1, Z)$$

相对于典范投影$\mathrm{pr} : U \times \mathbb{A}^1 \to U$是单纯集合的弱等价。因此，*Nisnevich* 层是 $\mathbb{A}^1$-局部的，当且仅当它是 $\mathbb{A}^1$-不变量。

2. 动机空间态射 $f : X \to Y$称为 $\mathbb{A}^1$-局部弱等价，如果

$$(Qf)^* : \mathrm{Hom}(QY, Z) \to \mathrm{Hom}(QX, Z)$$

对于任意 $\mathbb{A}^1$-局部空间 Z，都是单纯集合的弱等价。这里 Q 是局部投射余纤维替换函子（参见定义36）

以下结果精确地给出了 $\mathbb{A}^1$-模型结构在 $\mathcal{H}(S)$上的形式。这里陈述的版本源自 Blander（[Bla01]），见（[Sev06，定理 6.2.7]）：

定理2.1.17. 动机同伦范畴 $\mathcal{H}(S)$ 相对于以下映射类

- $\mathcal{W}eq$ 作为 $\mathbb{A}^1$-局部弱等价，
- $\mathcal{F}ib$ 作为逐对象纤维化

- $\mathcal{C}$作为 $\mathbb{A}^1$-局部投射余纤维化

构成一个单纯适当胞腔模型范畴。这称为 $\mathbb{A}^1$-局部投射模型结构 在 $\mathcal{H}(S)$上。

以下事实有助于识别 $\mathbb{A}^1$-局部空间（[AE17，注 3.58]）：动机空间 $Z \in \mathrm{Spc}S$ 是 $\mathbb{A}^1$-局部的，当且仅当它满足以下条件：

- 取值于 Kan复形（因此在 Spc$S$ 中是纤维的）
- 满足 Nisnevich超下降（因此在 $\mathcal{H}(S)_{Nis}$ 中是纤维的）
- 若对于所有 $U \in \mathrm{Sm}_S$， $Z(U) \to Z(U \times \mathbb{A}^1)$ 是单纯集合之间的弱等价（因此在 $\mathcal{H}(S)_{\mathbb{A}^1}$ 中是纤维的）。

因此，值得注意的是， $\mathbb{A}^1$-局部空间恰好是 $\mathcal{H}(S)$这一 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴中的纤维对象。

2.1.4 $\mathbb{A}^1$-可缩性

在 $\mathbb{A}^1$-同伦论中，一个重要概念是可缩概形。这个概念是表述第4 章和第 5章主要结果的核心。现在我们来看看其定义和一些基本例子。稍后在第2.1.10节中，我们将更详细地讨论这一概念，并将其与本讲义的内容联系起来。

定义 10。 设 $\mathcal{X}$ 是任意概形 S上的动机空间。若结构态射 $f : \mathcal{X} \to S$ 是动机空间范畴 $\mathrm{Spc}S$ 中的一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价（或者等价地， f 在 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 $\mathcal{H}(S)$中是一个同构，也就是说， $\mathbb{L}_{mot}(f)$ 在 $\mathcal{H}(S)$中是一个同构），则称 $\mathcal{X}$ 是$\mathbb{A}^1$-可缩的。

例2.1.18。 自然界中有大量 $\mathbb{A}^1$-可缩空间的例子：

1. 仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 按其构造本身就是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。事实上，任意仿射空间$\mathbb{A}^n$ 都由朴素的 $\mathbb{A}^1$-同伦给出 $\mathbb{A}^1$-可缩性

$$\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n \quad (t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (tx_1, \ldots, tx_n)$$

2. 奇异尖点曲线 $C_{r,\ s} := \{x^r - y^s = 0\}$，对于互素整数 r， s，都是$\mathbb{A}^1$-可缩的 *[AD07，例2.1]*。事实上，正规化映射

$$\mathbb{A}^1 \to C_{r,s} \quad \textit{defined as} \quad w \mapsto (w^s, w^r)$$

是动机空间的一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，

3. 事实上，任意向量丛都是一个 $\mathbb{A}^1$-同伦等价 *[MV99，例 2。2]*。更一般地，具有 $\mathbb{A}^1$-可缩纤维的任意扎里斯基局部平凡丛和 *Nisnevich* 局部平凡丛都可视为 $\mathbb{A}^1$-可缩的。事实上，在第 4章中，我们将看到$\mathbb{A}^1$-可缩性涵盖了相对维数不超过 2 的所有扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^n$-丛。

随着内容的展开，我们还会遇到其他几个例子!

现在我们将回顾代数几何中类似的连通性和道路连通性概念。

2.1.5 $\mathbb{A}^1$-连通性

回顾一下，在拓扑学中，如果一个空间不能写成两个非空适当开子集的并，就称其为连通。这可由道路分支的集合 π_0来刻画，它计数空间中不同连通分支的数量。类似地，概形也有相应的概念，且该概念在连通分支下保持不变。

定义 11。 设 X 为一个 k-概形。概形 X的 $\mathbb{A}^1$-连通分支层是与预层相关联的 *Nisnevich* 层

$$\mathrm{Sm}_k \ni U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(U, X) =: [U, X]_{\mathbb{A}^1}$$

对所有 $U \in \mathrm{Sm}_k$ 均成立，并记为 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$。若一个概形 X 满足$\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X) \to$ 谱 k 是层同构，则称其为 $\mathbb{A}^1$-连通。类似地，若 X 不是 $\mathbb{A}^1$-连通的，则称其为 $\mathbb{A}^1$-不连通 。

换言之， $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ 可视为 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴中截面预层 $X(U)$ 的层化。注意，对任意空间 X， $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ 只是一个（Nisnevich）集合层，与经典拓扑学中的情形相同。

注 2.1.19。 对于单纯预层 X，也可以定义单纯连通分支层，记作 $\pi_0^s(X)$，它由下式层化得到

$$U \mapsto [U, X]_{\mathcal{H}o_s}$$

其中 $\mathcal{H}o_s$ 是单纯同伦范畴（*[AM11，定义 2.1。1]*）。上述两个层通过动机局部化函子 $\mathbb{L}_{mot}$ 关联如下:

$$\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X) \simeq \pi_0^s(\mathbb{L}_{\mathbb{A}^1}(X))$$

有时会用此作为 $\mathbb{A}^1$-连通分支层的另一种定义。

下面的结果表明了 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ 的自然性，之后在讨论 $\mathbb{A}^1$-可缩性时会用到这一点。

例 2.1.20. 每个 $\mathbb{A}^1$-连通光滑概形 X 上方的局部亨泽尔概形 S（例如域的谱）都存在一个 S-点（*[MV99], 注 2.5*）。特别是，存在一个 S-点是单纯层的一种内在性质，它在 $\mathbb{A}^1$-不变于$\mathbb{A}^1$-弱等价下。

以下结果称为不稳定 *0*-连通性定理，对这些层而言至关重要:

定理2.1.21. 若 $\mathcal{F}$ 是一个空间，则典范映射 $\mathcal{F} \to \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})$ 在 *Nisnevich* 层化后是满态射。特别地，若 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是空间之间的 $\mathbb{A}^1$-弱等价，且 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{A}^1$-连通的，则 $\mathcal{G}$ 也 $\mathbb{A}^1$-连通。

证明。 这是 [MV99，§2，推论 3。22]。 □

$\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ 的$\mathbb{A}^1$-不变性

由定义回顾 7 可知，预层是 $\mathbb{A}^1$-不变的，如果典范投影的诱导映射是双射。按构造，我们有 预层 的 $\mathbb{A}^1$-连通分支 $U \mapsto [U,X]_{\mathbb{A}^1}$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变的。这在经典情形下同样成立。事实上，我们有由区间 $I=[0,1]$参数化的道路分支集合（它可经由 $\pi_0:=Y\mapsto[Y,X]$视为预层，对于局部可缩空间X， Y）可被证明是 I-不变的。由于预层 π_0 是离散的，这意味着其层化保持 I-不变（见 [MV99，第 87 页，例 2]）。动机设定中的类似问题是著名的 $\mathbb{A}^1$-不变性猜想（Morel）：

猜想。 $\mathbb{A}^1$-连通分支 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ 的层是 $\mathbb{A}^1$-不变量。

该猜想在某些情形下确实成立（参见 [CR24a，注记 2.5]），但已证明它在一般情况下不成立（[Ayo23], [BHS15，§4]）。然而，我们有如下关于 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ 的万有性质。

引理 2.1.22. 设 $\mathcal{X}$ 为任意空间， $\mathcal{F}$ 为任意 $\mathbb{A}^1$-不变量层。则任意态射$\mathcal{X}\to\mathcal{F}$ 都唯一地经由 $\mathcal{X}\to\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})$ 分解。

证明。 这归功于 [BHS15，引理 2.8]。 □

更高阶 $\mathbb{A}^1$-同伦层

最后请注意，在 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ 之后，也可以通过从单纯动机球面取映射来定义更高阶的 $\mathbb{A}^1$-同伦层，如下所示。

定义 12。 设$(\mathfrak{X},x)$ 为任意带基点空间。那么， i阶 $\mathbb{A}^1$-同伦层是Sm_k 上的 *Nisnevich* 层，它与以下预层相关联：

$$\mathrm{Sm}_k \ni U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(S^i \wedge U_+, (\mathfrak{X},x))$$

对于 $U\in\mathrm{Sm}_k$。记作 $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathfrak{X},x)$。

与拓扑学中的情形类似，可以证明 $\pi_1^{\mathbb{A}^1}$ 是 Nisnevich 群层，而 $\pi_i^{\mathbb{A}^1}$ 对于所有 $i\geq 2$ ([Mor12]，都是 Nisnevich 阿贝尔群层。回顾一下，Whitehead定理指出，CW复形之间的任意弱等价也是同伦等价。下面是由 $\mathbb{A}^1$给出的它的 - 类比版本，见 [MV99，第3节，命题 2。14]:

命题 2.1.23. 假设 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 是 $\mathbb{A}^1$-连通带基点空间。那么，态射 $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，当且仅当对于任意选择的基点$x\in\mathfrak{X}$ （满足 $y:=f(x)$，诱导态射

$$\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathfrak{X},x)\to\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathfrak{Y},y)$$

是 *Nisnevich*层的同构。

例2.1.24。 高阶 $\mathbb{A}^1$-同伦层 $\pi_i^{\mathbb{A}^1}$ *(*对于 $i\geq 1$*)* 是 $\mathbb{A}^1$-不变层的原初例子（参见定义 *B.0.2*）。

2.1.6 $\mathbb{A}^1$-刚性概形

在本节中，我们研究某些特殊类型的动机空间，它们可以被理解为“离散的”概形，并且其高阶 $\mathbb{A}^1$-同伦是平凡的。

定义 13。 概形 $f : X \to$ 谱 k 称为 $\mathbb{A}^1$-刚性的，如果对于任意光滑概形$U \in \mathrm{Sm}_k$，诱导态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_k}(U, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_k}(U \times_k \mathbb{A}^1_k, X)$$

典范投影 $U \times \mathbb{A}^1 \to U$ 是双射。

因此，概形若视为空间时是 $\mathbb{A}^1$-局部的，且视为预层时是 $\mathbb{A}^1$-不变的$\mathbb{A}^1$。在（合理的）域扩张下，$\mathbb{A}^1$-刚性概形仍然是 $\mathbb{A}^1$-不变的（[AM11，引理 2.1.11]）：

引理 2.1.25。 光滑的 k-概形 X 是 $\mathbb{A}^1$-刚性的 当且仅当对于每个有限生成可分扩张 L/k，映射

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, L, X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, L \times_k \mathbb{A}^1_k, X)$$

由典范投影 $\mathbb{A}^1_k \times$ 谱 $L \to$ 谱 L 诱导的双射。

$\mathbb{A}^1$-刚性概形的例子

域上的任意零维概形 k 都是 $\mathbb{A}^1$-刚性的（关于这一结果的推广，参见定义 4.1.3）。阿贝尔簇、正亏格的光滑射影曲线，以及任意 $\mathbb{A}^1$-刚性簇的光滑子簇和乘积，都是 $\mathbb{A}^1$-刚性概形的例子（另见 [AM11； AØ21； CR24a]）。下面描述一些常见情形。

例 2.1.26。 概形 $\mathbb{G}_m$ 在任意约化交换环 R上都是 $\mathbb{A}^1$-刚性的。

证明。 为简便起见，我们证明域 $R = k$上的情形，并注意到，对于任意这样的 R，证明本质上相同。注意，作为预层 $\mathbb{G}_m = k[Y, Y^{-1}]$诱导出函子 $\mathbb{G}_m(U) = \mathcal{O}_U^\times$，即单位层。由于它是扎里斯基预层，只需在仿射概形上局部验证该性质（定义13）。事实上，设$X =$ 谱 A 是任意一个仿射概形，其中 A 是任意有限生成的 k-代数，则有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_k}(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_k}(X \times_k \mathbb{A}^1_k, \mathbb{G}_m).$$

由于 A 是约化的，我们有 $\mathbb{G}_m(X) = \mathcal{O}_X^\times \cong A^\times$。另一方面，由于$X \times_k \mathbb{A}^1_k \cong$ 谱 $A \times_k$ 谱$(k[x]) \cong$ 谱$(A \otimes_k k[x]) \cong$ 谱 $A[x]$，我们有$\mathbb{G}_m(A[x]) \cong A^\times$，从而完成证明。 □

例2.1.27. 射影直线 $\mathbb{P}^1$ 并非 $\mathbb{A}^1$-刚性的。甚至可以在最简单的空间 $X =$ 谱 k上检验这一点。这是因为每个嵌入 谱 $k \hookrightarrow \mathbb{P}^1_k$ 都同构于

一个常值嵌入，但显然存在非常值嵌入 $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$，因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_k}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{P}^1_k) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_k}(\mathrm{Spec}\, k \times_k \mathbb{A}^1_k, \mathbb{P}^1_k)$$

不是满射（定义 2.1.7）。同理， $\mathbb{A}^1$ 也不能是 $\mathbb{A}^1$-刚性的。

考虑函子 $\mathrm{h} : \mathrm{Sm}_k \to \mathcal{H}(k)$，它由图表 2.1.2 中相应函子的复合得到。于是，h 将 $\mathbb{A}^1$-刚性概形的全子范畴全忠实地嵌入 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴（[AM11，引理 2.1。9]）。由此可得以下结论：

引理 2.1.28。设 $X, Y \in \mathrm{Sm}_k$ 是两个 $\mathbb{A}^1$-刚性概形，则有如下结论：

1. 对任意 $U \in \mathrm{Sm}_k$，典范映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}_k}(U, X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(U, X) := [U, X]_{\mathbb{A}^1} \\ f &\mapsto [f] \end{aligned}$$

是一个双射，

2. 典范映射 $X \to \pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ 是（*Nisnevich*）层的同构。因此， X 是 $\mathbb{A}^1$-连通的，当且仅当 $X \cong$ 谱 k，

3. $\mathrm{h}(X) \simeq_{\mathbb{A}^1} \mathrm{h}(Y) \iff X \cong Y$，也就是说，两个 $\mathbb{A}^1$-刚性概形 $\mathbb{A}^1$-弱等价，当且仅当它们作为 k-概形同构。

局部性质

$\mathbb{A}^1$-刚性概形体现了经典拓扑学与代数几何之间存在的若干鲜明二分之一。经典地，每个光滑流形都有一个由光滑可缩邻域构成的局部基，因此，局部系统是由连通空间组成的集合。相比之下，每个局部有限型概形都有一个由 $\mathbb{G}_m$s ([CR24a，引理 2.3]) 的乘积构成的基；特别地，它们是 $\mathbb{A}^1$-刚性簇的乘积，因此一般而言并非 $\mathbb{A}^1$-连通的，除非它是平凡的（定义2.1.28 (2)）。尽管如此，它们仍然很重要，因为它们构成了 $\mathbb{A}^1$-模型结构的基本构件：

引理 2.1.29. 有限型光滑概形是 $\mathbb{A}^1$-局部纤维概形，当且仅当它是 $\mathbb{A}^1$-刚性的。

证明. [AØ21，引理 4.1。8]。 □

2.1.7 $\mathbb{A}^1$-链连通性

现在我们聚焦于代数几何中道路连通性这一类似概念。回顾拓扑学，空间 X 是道路连通的，如果任意给定的两个点 x， y 都可以通过一个映射 γ： $[0,1] \to X$ 连接起来，使得 $\gamma(0) = x$， $\gamma(1) = y$。Asok-Morel（$\mathbb{A}^1$-同伦中相应的概念（由 Asok-Morel（[AM11]）建立）是“通过仿射直线的像（链）连接起来”。

定义 14。 给定 $X \in \mathrm{Sm}_k$ 以及 L/k 的一个有限生成可分扩张和点 x_0、$x_1 \in X(L)$，x_0 与 x_1 之间的一个初等 $\mathbb{A}^1$ 等价 是一个态射f：$\mathbb{A}^1 \to X$，满足 $f(0) = x_0$ 且 $f(1) = x_1$。如果两个点 x、$y \in X(L)$ 关于由初等 $\mathbb{A}^1$-等价生成的等价关系等价，则称它们是 $\mathbb{A}^1$-等价的。

定义 15. 一个 k-概形 X 是 $\mathbb{A}^1$-链连通，如果对任意有限生成可分域扩张 L/k，$X(L)$ 非空，并且对所有有理点 x，$y \in X(L)$，存在一个整数 N以及一列点 $x = x_0, \ldots\ldots, x_{N-1}, x_N = y \in X(L)$ 以及初等 $\mathbb{A}^1$-弱等价 $f_1, \ldots\ldots, f_N$：$\mathbb{A}^1_L \to X$ 使得 $f_i(0) = x_{i-1}$ 与$f_i(1) = x_i$ 对 $1 \le i \le N$：任意两点可由来自 $\mathbb{A}^1$ 的一链映射的像连通。

或者，称簇 X 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的，如果 L-点 $X(L)/\sim$ 的 $\mathbb{A}^1$-等价类的集合恰好由一个元素组成。

定义 16. 设 $X \in \mathrm{Sm}_k$。则 X的 $\mathbb{A}^1$-链连通分支层定义为

$$\pi_0^{ch}(X) := \pi_0^s(\mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}(X)).$$

我们称 X 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的，如果 $\pi_0^{ch}(X) \simeq$ 谱 k。

关于 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ 与 π_0^{ch}之间的各种关系已有研究（例如参见[AM11；BHS15]）。我们将列举几种与本文讨论范围相关的关系。

引理 2.1.30. 对于 $X \in \mathrm{Sm}_k$，映射 ϕ：$\pi_0^{ch}(X) \to \pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ 是 *Nisnevich* 层的满态射。

在拓扑学中，任何道路连通空间也是连通的。但反过来并不成立（例如，拓扑学家的正弦曲线）。以下事实也展现了概形与之惊人相似的一面：

命题 2.1.31. 若 $X \in \mathrm{Sm}_k$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的，则它是 $\mathbb{A}^1$-连通的。

证明。 [AØ21，命题 4.2。4]。 □

Asok 和 Morel 还猜想（[AM11，猜想 2.2。8]）对于 k 上的光滑概形，上述映射 ϕ 是一个同构，也就是说，它也是单态射。他们还指出，只要 $\mathrm{Sing}_*^{\mathbb{A}^1}(X)$ 是 $\mathbb{A}^1$-局部空间 X，这一结论就应当成立；并证明这对光滑真簇确实成立（[AM11，推论 2.4。4]）。然而，[BHS15，§4。1] 的工作现已证明，这一结论一般而言并不成立。这说明，$\mathbb{A}^1$-链连通确实比 $\mathbb{A}^1$-连通更强。

定义 17. 我们称一个 n维光滑 k簇 X 被 仿射空间覆盖，如果 X 存在一个由有限个 $\mathbb{A}^n_k$ 的副本构成的开仿射覆盖，使得 [4] 任意两个 $\mathbb{A}^n_k$ 副本的交都含有一个点。

[4]若 k 是无限域，则这是自动成立的

例 2.1.32. 以下是一些 $\mathbb{A}^1$-链连通簇的（反）例：

- 任何在定义 17意义下由仿射空间覆盖的簇都是 $\mathbb{A}^1$-链连通的。这些簇包括维数为 ≤ 2 的有理光滑完备簇、光滑完备托里克簇，以及定义在 k 上的连通约化群所对应的广义旗簇。

- *Koras-Russell* 三维簇（[DPØ19，例 2.28]）和广义 *Koras-Russell* 簇都是 $\mathbb{A}^1$-链连通的（参见定义 5.3.7）。

- 定义 *1.2.2* 中的 *Ramanujam* 曲面，以及定义 1.2.2 中的 *tom Dieck-Petrie* 曲面 1.2.3都不是 $\mathbb{A}^1$-链连通的。

将 $\mathbb{A}^1$-链连通分支的层推广后，[BHS15] 中的作者以如下意义构造了 通用 $\mathbb{A}^1$-不变量层：设$\mathcal{S}(-) := \pi_0^{ch}(-)$，则对任意 Nisnevich 层 $\mathcal{F}$，典范态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{S}(\mathcal{F})$是满射，因此考虑

$$\mathcal{F} \to \mathcal{S}(\mathcal{F}) \to \mathcal{S}^2(\mathcal{F}) \to \cdots \to \mathcal{S}^n(\mathcal{F}) \to \dots$$

其中 $\mathcal{S}^{n+1}(\mathcal{F})$ 归纳定义为 $\mathcal{S}(\mathcal{S}^n(\mathcal{F}))$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。通用$\mathbb{A}^1$-不变量层定义为

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) := \lim_n \mathcal{S}^n(\mathcal{F})$$

接着，他们证明 [BHS15, §2]：对于任意层 $\mathcal{F}$， $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 都是 $\mathbb{A}^1$-不变量；对于任意 $\mathbb{A}^1$-不变量层 $\mathcal{G}$，任意态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 都可唯一地经由 $\mathcal{F} \to \mathcal{L}(\mathcal{F})$ 分解。此外，如果 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变量，那么典范映射 $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})$ 是一个同构。

2.1.8 函子性

对于任意范畴，确立其相对于态射的函子性是一项重要工具。动机同伦论中的函子性已得到充分确立，有助于从范畴论的角度处理某些问题。关于函子性的全面概述，推荐以下资料： [MV99，§3],[Ayo07；CD19]。其他近期综述可参阅 [Hoy17；ELSØ22；Bac24；Rön25]。与本文讲义所述内容一致，我们将仅讨论基变换函子性，并将其应用于空间为 $\mathbb{A}^1$-可缩

基变换函子

设 $f\colon T \to S$ 是基概形之间的态射[5]。那么沿 f 的拉回定义了一个函子

$$\begin{aligned} f^\bullet : \mathrm{Sm}_S &\longrightarrow \mathrm{Sm}_T \\ U &\longmapsto U_T := U \times_S T. \end{aligned}$$

通过与 $f^\bullet$ 前复合，我们在动机空间层面得到另一个保余极限的函子，定义如下：

$$\begin{aligned} f_* : \mathrm{Spc}_T &\longrightarrow \mathrm{Spc}_S \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathcal{F} \circ f^\bullet := U \mapsto \mathcal{F}(U_T). \end{aligned}$$

通过左Kan扩张（参见第 A.2.5 节），我们看到 f_* 存在一个左伴随 $f^*\colon \mathrm{Spc}_S \to \mathrm{Spc}_T$，定义在动机空间层面

$$f^* \dashv f_*$$

它是一个严格对称幺半范畴并且保极限。由于每个（带基点的）动机空间都是可表动机空间的余极限（参见定义 A.2.16），我们可以用下式刻画 f^*

$$f^*(X_+) = (X \times_S T)_+ \tag{2.1}$$

对所有 $X \in \mathrm{Sm}_S$。

光滑基变换

此外，$f\colon T \to S$ 是基概形之间的光滑态射，因此与 f 复合定义了函子 $f_\bullet\colon \mathrm{Sm}_T \to \mathrm{Sm}_S$。与此函子前复合定义了另一个函子 $f^\bigstar\colon \mathrm{Spc}_S \to \mathrm{Spc}_T$，它自身通过（富）Kan扩张存在一个左伴随 $f_\sharp\colon \mathrm{Spc}_T \to \mathrm{Spc}_S$，即

$$f_\sharp \dashv f^\bigstar \dashv f_*$$

同样，利用任意动机空间都是可表空间之余极限这一事实，$f_\sharp$ 可由以下公式刻画

$$f_\sharp(X \xrightarrow{g} T)_+ = (X \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S)$$

对于每个 $X \in \mathrm{Spc}_T$。换言之，$f_\sharp$ 只是由遗忘函子$\mathcal{U}\colon \mathrm{Sm}_S \to \mathrm{Sm}_T$诱导的。另一方面，若 $g\colon Z \to S$ 是一个态射，则典范的S-态射 $Z \times_S T$ 定义了一个映射 $B(Z) \to f_* f^\bigstar B(Z)$，它关于 Z 和$B \in \mathrm{Spc}_T$是自然的，因此给出一个自然变换 $\mathrm{Id}_{\mathrm{Spc}_S} \to f_* \circ f^\bigstar$。下面的引理指出，当 f 是光滑态射时，这两个函子一致：

[5]我们所说的基概形，是指有限克鲁尔维数的诺特分离概形

引理 2.1.33. 若 $f: X \to Y$ 是基概形之间的光滑态射，则其伴随

$$f^* \to f^\bigstar$$

自然变换 $\mathrm{Id}_{\mathrm{Spc}_S} \to f_* \circ f^\bigstar$ 是一个自然变换。

引理 2.1.34. 若 $f: X \to Y$ 是基概形之间的态射，则 f^* 保持有限对象和可对偶对象。此外，若 f 是光滑的，则 $f_\sharp$ 保持有限对象。

证明。 [Rön25，引理 3.11]。 □

约定回顾：对于 S-概形之间的态射 $f: X \to Y$，一些作者（不严谨地使用术语）会说 f 是 $\mathcal{H}(S)$ 中的一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，或者说f 是一个动机空间的同构。我们在以下意义上作了明确区分：我们将采用这样的说法，即 f 是 Spc_S 中的一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，或者等价地说， f 是 $\mathcal{H}(S)$中的一个同构。

下面这个关键事实给出了简洁的基变换函子性，关联起动机空间范畴与相应的 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴。我们将用 Lf^*（分别用 RF_*）表示在 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴层面上的左（分别为右）导出奎伦函子（参见第A.2.2节）。

命题 2.1.35。 *[DMVØ]*设 $f: T \to S$ 是一个概形态射，设 Spc_S 和Spc_T 是分别赋予局部射影模型结构的动机空间范畴，并设 $\mathcal{H}(S)$ 和 $\mathcal{H}(T)$ 是它们分别关于 $\mathbb{A}^1$-局部投射模型结构的局部化。则有以下结论：

1. 伴随对 (f^*, f_*) 诱导出 *Quillen*伴随

$$\mathrm{Spc}_S \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spc}_T \quad \textit{and} \quad \mathcal{H}(S) \underset{Lf^*}{\overset{Rf_*}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}(T).$$

2. 若 $f: T \to S$ 是光滑的，则伴随对 $(f_\sharp, f^\bigstar)$ 诱导出 *Quillen*伴随

$$\mathrm{Spc}_T \underset{f_\sharp}{\overset{f^\bigstar}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spc}_S \quad \textit{and} \quad \mathcal{H}(T) \underset{Rf_\sharp}{\overset{Lf^\bigstar}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}(S).$$

证明。(f^*, f_*)（当 f光滑时，分别为$(f_\sharp, f^\bigstar)$）在相应模型范畴之间诱导 Quillen 伴随，这是使用投射模型结构的结果，并可由 [Lur09, 命题 A.2.8.7]推出。事实上，第一个断言可由以下观察得出：若 $U_\bullet \to X$ 是光滑 S-概形 X的 Nisnevich 超覆盖，则 $(U_T)_\bullet \to X_T$ 是X_T 的 Nisnevich 超覆盖；并且对于每个光滑 S-概形 X，$(X \times_S \mathbb{A}^1_S) \cong X_T \times_T \mathbb{A}^1_T$。由此根据 [Lur09, 命题 A.3.7.9] 可知，Quillen 伴随

$$\mathrm{Spc}_S \underset{\mathrm{id} \circ f^*}{\overset{f_* \circ \mathrm{id}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spc}_T$$

诱导一个 Quillen 伴随

$$\mathcal{H}(S) \underset{\mathrm{id}\circ f_*\circ\mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id}\circ f^*\circ\mathrm{id}}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}(T)$$

第二个断言基于相同的理由成立，只需注意，当 $f\colon T \to S$ 光滑时，光滑 T-概形 X 的 Nisnevich 超覆盖 $U_\bullet \to X$，通过与 u 复合，被视为光滑 S-概形的 X，仍是 Nisnevich 超覆盖；并且对于每个光滑 T-概形 X，作为 S 上的概形，$X \times_T \mathbb{A}^1_T \cong X \times_S \mathbb{A}^1_S$。 □

现在我们给出基变换函子性的若干推论，它们将在第4章中发挥关键作用。

推论2.1.36。 *[DMVØ]*设 $f : T \to S$ 是一个概形态射。则有以下结论：

1. 对于光滑 S-概形之间的每个态射 $u : Y \to X$，若它在 Spc_S 中是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，则态射 $u_T : Y_T \to X_T$ 在Spc_T 中是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价。 *2.* 若 $f : T \to S$ 光滑，则光滑 T-概形之间的每个态射 $u : Y \to X$，若它在 Spc_T 中是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，也是在 Spc_S 中的一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价。

证明。 对于第一个断言，我们考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spc}_S & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Spc}_T \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathcal{H}(S) & \xrightarrow{Lf^*} & \mathcal{H}(T) \end{array}$$

函子 $f^*\colon \mathrm{Spc}_S \to \mathrm{Spc}_T$ 分别将与光滑 S-概形 X 和 Y 相关联的预层映射到与光滑 T-概形 X_T 和 Y_T 相关联的预层，并将与 $u : Y \to X$ 相关联的自然变换映射到与 $u_T : Y_T \to X_T$ 相关联的自然变换。另一方面，根据 Spc_S 上的投射模型结构的构造，与 X 和 Y 相关联的预层是 Spc_S 中的余纤维对象，因此根据左Bousfield局部化的定义，它们也是 $\mathcal{H}(S)$ 中的余纤维对象。因此，$u\colon Y \to X$ 是 Spc_S 中余纤维对象之间的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。由于 f^* 是一个左Quillen函子（即利用伴随 $f^* \dashv f_*$），由Brown引理（参见定义A.2.27）可知，$u : Y \to X$ 在 $u_T : Y_T \to X_T$ 下的像是 Spc_T 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。第二个断言可用相同的推理，由交换图得出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spc}_T & \xrightarrow{f_\sharp} & \mathrm{Spc}_S \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathcal{H}(T) & \xrightarrow{Lf_\sharp} & \mathcal{H}(S) \end{array}$$

并且，由于 $f_\sharp$ 将与光滑 T-概形 X和 Y 相关联的预层映射到与 X 和 Y 相关联的预层（将其视为通过与 $f:T\to S$复合而得到的光滑 S-概形）。

□

以下结果表明，相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价在光滑基变换下具有良好性质。

推论 *2.1.37.* *[DMVØ]* 设 $f:Y\to X$ 和 $g:Z\to Y$ 是概形 S 上光滑概形之间的光滑态射。若 $g:Z\to Y$ 是 $\mathcal{S}pc_Y$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价，且 $f:Y\to X$ 是 $\mathcal{S}pc_X$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价，则 $h=f\circ g:Z\to X$ 是 $\mathcal{S}pc_X$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。

证明。 由于 $f:\ Y\to X$ 是光滑态射，定义 2.1.36(2) 蕴含$g:\ Z\to Y$ 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在Spc$_X$ 中成立；由模型范畴中弱等价的“二取三”公理（参见定义 34 [2。]）。

□

注记 2.1.38. 在定义 *2.1.37* 的情形下，蕴含关系“f 和 g 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价于 $\mathrm{Spc}_X\Rightarrow g$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价于 Spc_Y”一般并不成立，参见定义 *2.1.45*和定义 *4.2.13*。

2.1.9 基变换与 $\mathbb{A}^1$-可缩性

现在我们将这些结果应用于空间为 $\mathbb{A}^1$-可缩的情形；我们在第 4 章和第5章中都需要这一结果。

命题 2.1.39. *[DMVØ]* 设 $u:X\to S$ 是一个光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩 S-概形。那么对于任意概形态射 $f:T\to S$，诱导映射 $u_T:X_T\to T$ 是一个光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩 T-概形，其中我们将概形论拉回记作$X_T:=X\times_S T$。

证明。 这是定义 2.1.36 (1) 的直接应用。 □

该命题有若干有趣的推论，如 [DMVØ] 中所述：

推论 2.1.40。 设 X 是域 k 上一个光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩概形。那么对于每个域扩张 $k\subset L$ （可分或不可分）， $X_L:=X\times_{\mathrm{Spec}(k)}$ 谱 (L) 是一个 $\mathbb{A}^1$- 可缩 L- 概形。

证明。 当 L/k 是有限可分域扩张时的证明见[Sev06，命题 6.2。15]. 但实际上，由于定义 2.1.39，这一结论可推广到任意域扩张。

□

推论 2.1.41. 设 $f:X\to S$ 为一个光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩 S-概形。则对 S 的每一个点 s （无论是否为闭点），其剩余域为 $\kappa(s)$， f 在点 s 上的概形论纤维 $X_s:=X\times_S$ 谱 $\kappa(s)$ 是一个光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩 $\kappa(s)$-概形。

推论 2.1.42. 设 $i : Z \hookrightarrow S$ 为概形的闭浸入。若 $f : X \to S$ 是光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩 S-概形，则 $\mathrm{pr}_2 : X \times_S Z \to Z$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-可缩 Z-概形。

下面这个补充定义 2.1.40 的例子说明了这样一个事实： $\mathbb{A}^1$可缩性不一定会沿任意态射下降 f： $T \to S$:

例 2.1.43. 设 k 是特征为 $p > 0$ 的非完美域，其完美化为 k^{perf}，并设 g: 谱 $k^{\mathrm{perf}} \to$ →谱 k 为相应的基变换态射。设 f: $X \to$ 谱 k是仿射直线 $\mathbb{A}^1_k$的一个非平凡 k-形式。由于仿射直线不存在非平凡可分形式 *[Rus70]*, ，可知由 g 对 X 作基变换所得的 $X_{k^{\mathrm{perf}}}$ 同构于$\mathbb{A}^1_{k^{\mathrm{perf}}}$，因此 $X_{k^{\mathrm{perf}}}$是一个 $\mathbb{A}^1$-可缩的 k^{perf}-概形。另一方面， X不是一个 $\mathbb{A}^1$-可缩的 k-概形。事实上， X是 $\mathbb{A}^1_k$的一个非平凡 k-形式，由*[Rus70*，引理 *1. 1]* 可知，或者 $X(k) = \emptyset$，或者 X 同构于射影直线 $\mathbb{P}^1_k$ 去掉一个闭点 x 所得的补集，该点的剩余域 $\kappa(x)$是 k的纯不可分扩张。第一种情况下，根据定义 *2.1.20* 可知 X 在 k 上不可缩；第二种情况下，则由 *[Ach17*，定理 *4.1]* 可知，这种非平凡形式 X 具有非平凡的皮卡群（参见定义 *2.1.52*）。

注 2.1.44。 *[MV25*，注 *3*。*17]* 若 u： $X \to S$ 是一个光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩概形，属于 Spc_S，那么它相对于任意态射 f： $T \to S$ 的基变换，可由通常的概形论拉回得到。因此，这关键地意味着以下图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sm}_S & \xrightarrow{f^\bullet} & \mathrm{Sm}_T \\
\downarrow{\scriptstyle Y} & & \downarrow{\scriptstyle Y} \\
\mathrm{Spc}_S & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Spc}_T \\
{\scriptstyle \mathbb{L}_{mot,S}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{L}_{mot,T}} \\
\mathcal{H}(S) & \xrightarrow[Lf^*]{} & \mathcal{H}(T)
\end{array}$$

可交换。回顾第 2.1.8 节中的记号。这里， $Lf^* : \mathrm{Spc}_S \to \mathrm{Spc}_T$ 是相应 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴上的诱导导出拉回函子，而 $\mathbb{L}_{mot,T}$ （分别地，$\mathbb{L}_{mot,S}$）是定义在 Spc_T （分别地，Spc_S）上的相应动机局部化函子。换言之，对于光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩概形 $u : X \to S$，导出拉回可以还原为概形论拉回，反之亦然：

$$\begin{aligned}
Lf^*(\mathbb{L}_{mot,S}(X)) &\simeq Lf^*(\mathrm{Id}_S) \quad (X \textit{ is } \mathbb{A}^1\textit{-contractible}) \\
&\simeq \mathrm{Id}_T \quad (\textit{functoriality of } Lf^*) \\
&\simeq \mathbb{L}_{mot,T}(T) \\
&\simeq \mathbb{L}_{mot,T}(X_T) \quad (Definition\ 2.1.39) \\
Lf^*(\mathbb{L}_{mot,S}((X)) &\simeq \mathbb{L}_{mot,T}(f^*(X)) \quad (Eq.\ (2.1))
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.10 光滑概形的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性

现在我们将明确阐释“相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性”这一短语的含义；在接下来的章节中，我们会广泛使用这一短语。

定义 18。 对于任意 k-概形 $X, Y \in \mathrm{Sm}_k$，若一个态射 $f: X \to Y$在动机Y-空间 Spc_Y的范畴中是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，我们就称其为相对地 $\mathbb{A}^1$-可缩；等价地，X 是 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴中一个 $\mathbb{A}^1$-可缩概形，记作 $\mathcal{H}(Y)$。

为强调这种相对性，我们将称态射 f 为动机空间之间的相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价 。“相对地” $\mathbb{A}^1$-可缩是一个微妙的概念，而以下示例说明了在一般情形下为何需要作出这种区分。还应注意，这个示例并非病态情形，事实上，它是一个基础性的实例：

示例 2.1.45。 *[MV25，示例 3。15]* 考虑一个 -概形之间的光滑态射

$$\begin{aligned} g : Z := \mathbb{A}^2_k &\to \mathbb{A}^1_k =: Y \\ (x, y) &\mapsto x^2y^2 + y \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2_k & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{A}^1_k \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \text{谱}(k) & \end{array} \tag{2.3}$$

我们知道，Y和 Z 都是在 X上 $\mathbb{A}^1$-可缩的。因此，g 是 Spc_k 中的一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价。但 g 不可能是 $Spc^{\mathbb{A}^1_k}$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。假设它是，那么根据定义 *2.1.41*，f 在 $\mathbb{A}^1_k$ 的每个点上的纤维，都将是相应剩余域上的 $\mathbb{A}^1$-可缩概形。但请注意，f 在 *0* 上的纤维是不交并，由一份 $\mathbb{A}^1_k$ 和一份$\mathbb{G}_{mk}$组成。后一个分支甚至不是 Spc_k 中的 $\mathbb{A}^1$-连通对象（定义 *2.1.26*），因此该纤维不可能是 $\mathbb{A}^1$-连通的，从而也不可能是$\mathbb{A}^1$-可缩的（见定义 *2.1.54*）。因此，我们得出结论：g 不可能是相对$\mathbb{A}^1$-弱等价。

回到定义 2.1.36 (1)，不禁会提出如下问题：对于一个态射 $f: Y \to X$，在光滑 S-概形之间，在什么假设下存在一个（适当的）态射 $u: T \to S$，使得只要基变换 f_T: $Y_T \to X_T$of f 是 $\mathbb{A}^1$-weak equivalence in Spc_T，那么 $f: Y \to X$ 就是 $\mathbb{A}^1$-weak equivalencein Spc_S。定义 2.1.43 说明，g 的忠实平坦性便是一个不充分条件。或者，我们可以提出如下问题：

问题 2.1.46. 对于概形的光滑态射 $f: X \to S$，f 在 s 的点上的所有纤维在相应剩余域上均为 $\mathbb{A}^1$-可缩，这一性质是否蕴含 X 是一个 $\mathbb{A}^1$-可缩的 S-概形？

我们注意到，由于函子族 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 $\mathrm{SH}(S)$中的函子族 $i_s^!: \mathrm{SH}(S) \to \mathrm{SH}(\kappa(s)),\ s \in S$ 具有保守性（例如参见 [DFJK21, B20]），所需的这一性质（定义 2.1.46）在稳定的$\mathbb{A}^1$-同伦范畴中成立。一条近期评论

由 [ABEH25，命题 2。1]指出，令我们颇感惊讶的是，这一性质在非稳定情形下也成立！事实上，定义 2.1.46所述问题的解可由粘合定理([MV99，定理 2。21])推出；对于任何至少与 Nisnevich拓扑一样精细的格罗滕迪克拓扑，这一结论仍然成立。

定理2.1.47. 设 S 是任意有限克鲁尔维数的局部诺特概形。那么，对于任意动机空间 $\mathcal{F}$，平方

$$\begin{array}{ccc} j_\# j^*\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & i_* i^*(\mathcal{F}) \end{array}$$

是 $\mathcal{H}(S)$ 中的同伦余笛卡尔平方。这里，$j\colon U \hookrightarrow S$ 与一个开子概形 $U \subset S$的开浸入相关联。

证明。 这是 [MV99，定理2。21]。 □

以下是定义2.1.47的一个重要推论。

命题 2.1.48. *[DMVØ]* 对于概形 $f\colon X \to S$ 光滑地态射于一个诺特概形S 且具有有限 *Krull* 维数，下列性质等价：

1. 态射 $f\colon X \to S$ 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在$\mathrm{Spc}S$中。
2. 对于 S 中每个剩余域为 $\kappa(s)$的点 s， f 在 s 上的概形论纤维是一个光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩 $\kappa(s)$概形。

证明。由于我们的假设与 [ABEH25，命题 2.1], 中的假设略有不同，下面我们将概述论证。(1) $\Longrightarrow$ (2) 的蕴含由定义 2.1.41 得出。现在证明其逆向：给定一个光滑概形 $f\colon X \to S$，它态射于一个具有有限 Krull 维数的概形 S，我们要证明，若对于每个点 $s \in S$， $f_s\colon X_s \to \mathrm{Spec}\,\kappa(s)$ 在 $\mathrm{Spc}^{\kappa(s)}$ 中都是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，则 $f\colon X \to S$ 是一个相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在 $\mathrm{Spc}S$ 中。我们对 $\dim S$ 作归纳。$\dim S = 0$ 的情形归结为以下观察：光滑态射

$$X \longrightarrow S, \qquad S = \mathrm{Spec}\,R$$

其中 R 阿廷局部，当且仅当它是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价

$$X \times_S S_{\mathrm{red}} \longrightarrow S_{\mathrm{red}}$$

是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价（参见定义 2.1.49）。假设该断言对所有维数为 $\leq d$ 的概形都成立，并令维数 $S = d+1$。由于 $f\colon X \to S$ 在 $\mathbb{A}^1$-弱等价这一性质在 $\mathrm{Spc}S$ 中关于 Nisnevich 超覆盖在底空间上是局部的， S 因此只需在 S 是以下对象的谱的情形下验证该断言：

一个维数为 R 的局部环 d；我们还可以进一步假设它是亨泽尔的（这是由 [BH21，命题 A.3] 得出的）。

设 $j:U\to S$ 是开浸入，$i:\{s\}\to S$ 是其补集对应的闭浸入。开浸入 j 给出伴随对 $(j^*\dashv j_*)$，由 $j^*:\mathcal{H}(S)\to\mathcal{H}(U)$ 给出，其右伴随为 $j_*:\mathcal{H}(U)\to\mathcal{H}(S)$。此外，由于 j 是开浸入（因此是光滑态射），它还给出另一个伴随对 $(j_\sharp\dashv j^*)$，由 j^* 给出，其左伴随为 $j_\sharp:\mathcal{H}(U)\to\mathcal{H}(S)$。类似地，闭浸入 i 给出伴随对 $(i^*\dashv i_*)$，由 $i^*:\mathcal{H}(S)\to\mathcal{H}(\kappa(s))$ 给出，其右伴随为 $i_*:\mathcal{H}(\kappa(s))\to\mathcal{H}(S)$。

回顾第 2.1.8 节，我们有 $j_\sharp j^*X=j_\sharp(X_U)$，其中 $X\times_S U\xrightarrow{\mathrm{pr}_2}U\xrightarrow{j}S$ 通过复合映射 $\mathrm{pr}_2:X\times_S U\to U$ 与开浸入 $j:U\to S$，被视为一个光滑的 S-概形。我们有一个典范映射 $\widetilde{\mathrm{pr}_1}:j_\sharp j^*X\to X$，它对应于浸入 $\mathrm{pr}_1:X\times_S U\to X$；还有另一个典范映射 $\widetilde{\mathrm{pr}_2}:j_\sharp j^*X\to j_\sharp U$，它对应于投影 $\mathrm{pr}_2:X\times_S U\to U$。另一方面，沿 $i:\{s\}\to S$ 的基变换在 $\mathcal{H}(S)$ 中诱导出一个典范态射 $\psi:X\to i_*i^*X$，并且我们平凡地有一个典范映射 $\psi:j_\sharp U\to i_*i^*X$。这些映射组成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} j_\sharp j^*X & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{pr}_1}} & X \\ {\scriptstyle\widetilde{\mathrm{pr}_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ j_\sharp U & \xrightarrow[\widetilde{\psi}]{} & i_*i^*X \end{array} \tag{2.4}$$

在 $\mathcal{H}(S)$ 中。由于 $U:=X\backslash\{s\}$ 的维数严格小于 d，根据归纳假设，限制映射 $f_U:X_U\to U$ 是 $\mathcal{H}(U)$ 中的 $\mathbb{A}^1$- 弱等价，因此

$$\begin{array}{ccccc} X_s & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X & \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} & X_U \\ {\scriptstyle f_s}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_U} \\ \operatorname{Spec}\kappa(s) & \longrightarrow & S & \xleftarrow[j]{} & U \end{array}$$

我们得到 $j_\sharp(f_U):j_\sharp(j^*X)=j_\sharp X_U\to j_\sharp U$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。因此，预层之间自然诱导的映射

$$X\xrightarrow{\simeq}j_\sharp U\cup_{j_\sharp X_U}X \tag{2.5}$$

是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在 Spc_S 中。另一方面，[MV99，定理 2。21] 的证明表明，等式 (2.4) 是同伦余笛卡尔的，因此预层之间自然诱导的映射

$$j_\sharp U\cup_{j_\sharp X_U}X\xrightarrow{\simeq}i_*i^*X \tag{2.6}$$

是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在Spc_S。结合公式（2.5）和公式（2.6），可知诱导映射

$$X\xrightarrow{\simeq}i_*i^*(X) \tag{2.7}$$

是 Spc$S$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。但于是我们有 $i_*i^*(X) = i_*(X_s)$，并且根据假设，$f_s: X_s \to$ 谱$(\kappa(s))$ 是 Spc$^{\kappa(s)}$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价，这进而意味着，由于函子性，动机空间 $i_*(X_s)$ 在 Spc$S$ 中是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。由公式（2.7）的$\mathbb{A}^1$-弱等价，可得结论：$f: X \to S$ 是 Spc$S$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。 □

注 2.1.49. 假设 S 是一个基概形，并令 $i: S_{\mathrm{red}} \hookrightarrow S$ 为约化（由幂零理想定义的闭浸入，其开补集为空）。那么沿着 $i^*: H(S) \longrightarrow H(S_{\mathrm{red}})$ 的拉回 i 是不稳定动机同伦范畴之间的等价，这归因于 *Morel-Voevodsky* 局部化定理 *[MV99，定理 3.2。21]*。

注 2.1.50. 细心的读者或许已经注意到一个微妙之处：我们的Spc$S$ 的模型结构（投射版本）不同于 *[MV99]*中使用的模型结构（单射版本）。这确实是个好发现，但也请注意，这两种模型结构实际上导出相同的 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴，这主要是因为两种结构中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价类相同（也可以参考 *[Isa05，定理 2，2]* 或 *[Dug01b，命题 81]*）。

$\mathbb{A}^1$-可缩性的形式推论

例 2.1.51。 如果基域 k 可嵌入 $\mathbb{C}$，那么任意 $\mathbb{A}^1$-可缩概形在拓扑上都是可缩的（*[AD07，引理 2。5]*）。

例 2.1.52。 A^n $\mathbb{A}^1$-可缩概形的皮卡群是平凡的。事实上，仿射 $\mathbb{A}^1$-可缩概形上的每个向量丛都必定是平凡的（*[AD07，推论 6。2]*）。

例 2.1.53。 任何非平凡的 $\mathbb{A}^1$-刚性概形（例如 $\mathbb{G}_m$）都不可能是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，这一事实归因于 $\mathbb{A}^1$-连通分支层的非平凡性。

例 2.1.54。 任意光滑 k维数为 X 的簇 n 是 $\mathbb{A}^1$-可缩，当且仅当X 是 $\mathbb{A}^1$-连通的，且 $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(X, x)$ 对所有 $0 \leq i \leq n$均为平凡的。这是定义 2.1.23的自然推论。因此，这样的 X 存在一个 S-点（参见定义 2.1.20）。

例 2.1.55。 任意 $\mathbb{A}^1$-可缩光滑仿射概形 X 的整系数动机上同调与基域相同，即 $\mathrm{H}^{*,*}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^{*,*}(\operatorname{Spec} k, \mathbb{Z})$。特别地，考虑 *Bloch* 的高阶 *Chow* 群，这些概形的所有周群均为零$\mathrm{CH}^*(X) \simeq \operatorname{Spec} k$ *([AD07，推论 6。1])*。

同伦纯性

纯性同构是 $\mathbb{A}^1$-同伦论中进行计算不可或缺的工具，并将其与代数 K-理论和动机上同调联系起来。它是微分拓扑学中管状邻域定理的类比，由 Morel-Voevodsky [MV99，定理 2.23]。

定理 2.1.56。设 S 是任意有限克鲁尔维数的诺特概形。设 $i\colon Z \hookrightarrow X$是 S上的光滑概形之间的闭嵌入。那么在$\mathcal{H}_\bullet(k)$ 中存在如下形式的典范同构

$$\frac{X}{X\backslash i(Z)} \simeq \mathrm{Th}(N_Z X)$$

其中 $\mathrm{Th}(-)$ 是与 X中 Z 的法丛 $N_Z X$ 相关联的 *Thom*空间。

简单说明一下：假设概形 X 有一个开覆盖 $\{U\}$，使得法丛平凡化，那么我们有

$$U/(U\backslash(U\cap Z)) \simeq (U\cap Z)_+ \wedge (\mathbb{A}^n/\mathbb{A}^n\backslash\{0\})$$

下面的引理将在第5章中派上用场。

引理 2.1.57。 设 $Z \subset X$ 是光滑概形 X的任意闭光滑子概形。设$f : X \to X'$ 是一个态射，使得 X' 和 $Z' := f^{-1}(Z)$ 都是光滑概形，且诱导映射 $\phi{:}N_{Z'}X' \to f^* N_Z X$是一个同构。设 ϕ'是由ϕ定义的 *Thom*空间。那么这个平方

$$\begin{array}{ccc} X'/(X'\backslash Z') & \longrightarrow & X/(X\backslash Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(N_{Z'}X') & \xrightarrow{\phi'} & \mathrm{Th}(N_Z X) \end{array}$$

可交换。

证明。这归功于 [Voe03a，引理 2。1]。 □

动机切除

下述定理描述了光滑概形的切除风格结果的一个类似版本，适用于 $\mathbb{A}^1$-同伦群；我们将在第5章中用到它。

定理 2.1.58。设 k 是一个无限域。假设 X 是 $\mathbb{A}^1$-连通的，且 $j\colon U \to X$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-连通概形的开浸入，其闭补集处处具有余维 $d \geq 2$。固定一个基点 $x \in U(k)$。此外，若 X 是 $\mathbb{A}^1$-m-连通的，其中$m \geq d-3$，则典范态射

$$j_* : \pi_i^{\mathbb{A}^1}(U, x) \to \pi_i^{\mathbb{A}^1}(X, x)$$

对于 $0 \leq i \leq d-2$ 是同构，对于 $i = d-1$是满态射。

证明。这归功于 [AD09，定理 4。1]。 □

2.2 Milnor-Witt K-理论

本节旨在简要介绍 Milnor-Witt$K$-理论的基础，仅概述其基本特征。希望深入了解的读者可参阅第 B.0.2 节，其中有更全面的背景介绍。回顾一下，*Milnor Witt* K-理论本质上是 Milnor 的 K-理论 $K_*^{\mathrm{M}}(F)$的一种扩张，巧妙地融合了 Milnor K-理论与 Grothendieck-Witt 环的生成元与关系。它在 0 次度上与 Grothendieck 环（第 B.0.2节）同构，在负次数上与 Witt 环（第B.0.2节）同构。

定义 19。 设 F 为任意域，其单位为 $F^\times$。Milnor-Witt K-理论或 Milnor-Witt 环记为 $K_*^{\mathrm{MW}}(F)$，是由次数为 *+1*的形式符号 $[a]$ （其中 $a \in F^\times$ ）以及一个次数为 *-1* 的符号 η （称为 Hopf 元素）自由生成的 $\mathbb{Z}$-分次结合单位环，并满足以下关系：

1. $[a][1-a]=0$，对于任意 $a \neq 0,\ 1$ （*Steinberg* 关系）*2.* $[ab]=[a]+[b]+\eta[a][b]$，对于任意 a、$b \in F^\times$*3.* $\eta[a]=[a]\eta$，对于任意 $a \in F^\times$*4.* $\eta(\eta[-1]+2)=0$

对于单位 $a_i \in F^\times$，符号 $[a_1,\cdots,a_n]$ 通常表示 $[a_1]\cdot$的乘积 $\cdots\cdot[a_n]$（对于 $i=1$，.....，n），而 $\eta[a]$ 表示乘积 $\eta\cdot[a]$。对于 $a \in F^\times$，类$\langle a\rangle:=1+\eta[a]$。根据构造，这一对应

$$F \mapsto K_*^{\mathrm{MW}}(F)$$

是函子性的。回顾 B.0.2 节，Milnor-Witt K-理论与 Milnor K-理论（[Mil70]）的关系是通过消去 η 得到的，也就是说，$K_*^{\mathrm{MW}}/(\eta) = K_*^{\mathrm{M}}(F)$。按照约定，在此映射下，$n$ 元组乘积 $[a_1,\ldots,a_n]$ 的像记作 $\{a_1,\ldots,a_n\}$。我们需要描述 $GW(F)$ 的以下元素；特别地，这表明 Milnor-Witt K-理论对于 $\epsilon:=-\langle-1\rangle$ 是 ϵ-交换的。对于所有 $n \geq 0$ （另见定义 B.0.13），我们有

$$n_\epsilon := \sum_{i=1}^{n}\langle(-1)^{i-1}\rangle \quad \text{and} \quad (-n)_\epsilon := \epsilon n_\epsilon.$$

剩余同态

简而言之，存在一个（余链）复形的同态，称为 剩余同态，其系数取自 Milnor-Witt 层。设 F 是一个域，且$v: F \to \mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ 是一个离散赋值，其剩余域为 $\kappa(v)$，赋值环为$\mathcal{O}_v$，并选取一个一致化参数 $\pi=\pi_v$，它属于 v (参见第 B.0.3 节，了解更多背景)。

定理 2.2.1。 存在唯一的分次阿贝尔群同态

$$\partial_v^\pi : K_*^{\mathrm{MW}}(F) \to K_{*-1}^{\mathrm{MW}}(\kappa(v))$$

次数为 *-1*，满足 ∂_v^π 与乘以 η 的运算可交换，且

1. $\partial_v^\pi([\pi, u_1, \dots, u_n]) = [\bar{u_1}, \dots, \bar{u_n}]$
2. $\partial_v^\pi([u_1, \dots, u_n]) = 0$

我们称这样的 ∂_v^π 为剩余同态。事实证明，同态∂_v^π取决于所选的赋值 π。这就是 [Mor12] 引入扭曲 *Milnor Witt* K理论的原因。按照第B.0.3节所述进行某些修改后，我们现在可以方便地将由*Milnor-Witt* K理论扭曲得到的 L 定义为

$$K_n^{\mathrm{MW}}(F, L) := K_n^{\mathrm{MW}}(F) \otimes_{\mathbb{Z}[F^\times]} \mathbb{Z}[L^\times]$$

扭曲同态

$$\partial_v : K_*^{\mathrm{MW}}(F, L) \to K_{*-1}^{\mathrm{MW}}(\kappa(v), (\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)^* \otimes L)$$

定义为 $\partial_v(\alpha \otimes l) = \partial_v^\pi(\alpha) \otimes \pi^* \otimes l$，对于 $l \in L$ 该定义良好，且与局部参数的选择无关 π （参见定义B.0.21）。这里， L 是任意线丛，而$(\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)^*$表示相对切空间，按定义，它是相对余切空间 $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$ （视为 $\kappa(v)$-向量空间）。

动机布劳威尔度

Milnor-Witt K理论中的一个重要不变量是霍普夫–布劳威尔映射的动机版本。它描述了动机球 $\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$ 的非平凡 $\mathbb{A}^1$同伦层（对于 $n \geq 2$），这是 $\mathbb{A}^1$-赫维茨定理的一个推论。

定理 2.2.2。 *[Mor12，定理 6。40] 对于 $n \geq 2$，我们有严格 $\mathbb{A}^1$-不变量层的一个典范同构*

$$\pi_{n-1}^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^n\backslash\{0\}) \cong \pi_n^{\mathbb{A}^1}((\mathbb{P}^1)^{\wedge n}) \cong K_n^{\mathrm{MW}}$$

这一定理的优势在于，它帮助我们理解对于任意 $n \geq 2$的端态射环 $[\mathbb{A}^n\backslash\{0\}, \mathbb{A}^n\backslash\{0\}]_{\mathbb{A}^1}$。

推论 2.2.3。 *[Mor12，推论 6。43] 设 $(n, i) \in \mathbb{N}^2$ 和 $(m, j) \in \mathbb{N}^2$ 为整数对。对于 $n \geq 2$，我们有一个典范同构：*

$$Hom_{\mathcal{H}_\bullet(k)}(S^m \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge j}, S^n \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge i}) = \begin{cases} 0 & \text{if } m < n. \\ K_{i-j}^{\mathrm{MW}}(k) & \text{if } m = n \text{ and } i > 0 \\ 0 & \text{if } m = n,\ j > 0 \text{ and } i = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{if } m = n \text{ and } j = i = 0 \end{cases}$$

综合以上结果，可得

$$[\mathbb{A}^n\backslash\{0\}, \mathbb{A}^n\backslash\{0\}]_{\mathbb{A}^1} = K_0^{\mathrm{MW}}(k).$$

若 $f\colon\ \mathbb{A}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{A}^n\backslash\{0\}$ 是 Spc_k 中的态射，则 $[f]$ 在 $K_0^{\mathrm{MW}}(k) \cong \mathrm{GW}(k)$ 中的类称为的动机布劳威尔度。要计算这个度，我们可以使用以下上同调技术。

引理 2.2.4。设 $f\colon\ \mathbb{A}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{A}^n\backslash\{0\}$ 是 $\mathcal{H}(k)$中的一个态射。那么 f 是同构当且仅当

$$f^* : H^{n-1}(\mathbb{A}^n\backslash\{0\}, K_n^{\mathrm{MW}}) \to H^{n-1}(\mathbb{A}^n\backslash\{0\}, K_n^{\mathrm{MW}})$$

是 *Milnor-Witt* K理论群的一个同构。换句话说， f 的度为 *1*。

证明。请参阅 [DF18，引理 2。2]。 □

与怪物搏斗的人，应当小心别在过程中变成怪物。而当你凝视深渊足够久时，深渊也会回望你。

弗里德里希·尼采《善恶的彼岸》

3 仿射代数几何

章节摘要

本章旨在从仿射代数几何的视角，探讨本文的主要结果。我们将综述一些基础性的开放问题，并在后文将其与动机同伦论联系起来。本章首先在第 3.1 节概述相关问题，随后在 n 个变量的多项式环 $k[x_1,\dots,x_n]$，或等价地，仿射 n空间$\mathbb{A}^n_k :=$ 谱 $k[x_1,\dots,x_n]$ 的刻画问题（第 3.2 节）。其中尤为重要的是线性化问题（第 3.2.2 节）及其与动机同伦论的联系，我们将通过一个启发性的简单示例（第 3.2.3 节）加以说明。其完整版本将在第5 章中严谨讨论。本节最后将在代数几何背景下介绍著名的“扎里斯基消去问题”（第 3.2.4 节）。本章仅聚焦于仿射代数几何的背景知识，并穿插一些引导性评论，为后续章节作铺垫。读者也可视需要略读本章，并在遇到相关的后向引用时再回头查阅。

仿射纤维空间与局部平凡性

具有同构于仿射空间的纤维的有限表示平坦态射，在仿射代数几何（简称“AAG”）中得到了深入研究，这与 Zariski 消去问题和多尔加切夫-韦伊斯费勒问题有关（概述见例如 [Kra96] 及其中的参考文献）。以下定义的主要用途是，从动机观点来看，这类态射为相对 $\mathbb{A}^1$-可缩概形提供了丰富的来源。

定义 20. 概形 S 上的一个 $\mathbb{A}^n$-纤维空间 是一个有限表示光滑态射 $f : X \to S$，其在所有点 $s \in S$ 上的纤维

$$X_s := X \times_S \operatorname{Spec}(\kappa(s)) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}^n_{\kappa(s)}$$

同构于相应剩余域 κ上的仿射空间 $\mathbb{A}^n$ （s）。

定义 21。 *An* $\mathbb{A}^n$-纤维空间 f： $X \to S$如上所述，若对于扎里斯基（分别为 *Nisnevich*、*étale*）拓扑中的每个 $s \in S$，都存在其在 S 中的一个扎里斯基（分别为 *Nisnevich*、*étale*）邻域 U，使得 $U \times_S X \cong U \times \mathbb{A}^n$ 作为U上的概形，则称其为<形 *id='8'*>局部平凡 $\mathbb{A}^n$-丛。

备注 3.0.1。 上述 $\mathbb{A}^n$-纤维空间的概念对应于有时称为“$\mathbb{A}^n$-纤维化”的概念，这一术语是一些作者在 *AAG* 中经典使用的“仿射纤维化”（参见例如 *[Asa87*；*Sat83*； *BD94*；*DF10]*）。在这一背景下，另一些作者也将 $\mathbb{A}^n$-纤维化（*[KM78*； *KW85]*）定义为只要求一般闭纤维同构于 $\mathbb{A}^n$，且其他纤维是几何整的。用 *Asanuma* 的语言来说，所有闭纤维都同构于 $\mathbb{A}^n_R$ 的态射称为 R-代数，其上的 n-变量称为伪多项式。我们提出的术语旨在澄清这一概念，并明确将其与拓扑学或模型范畴意义上的纤维化区分开来。

3.1 快速概述

1. **Dolgaˇcev-Veˇisfeˇiler 猜想：** 该猜想的一般形式可以表述如下：

   问题。 设 S 为任意正则局部环的谱，并设 f： $X \to S$ 为一个$\mathbb{A}^n$-纤维空间。那么， f 是否必然在扎里斯基拓扑下具有局部平凡的 $\mathbb{A}^n$-丛结构？

   预期该问题的答案为肯定，我们可以证明以下特殊情形有正解：

   问题。 每个 $\mathbb{A}^n$-纤维空间 $X \to \mathbb{A}^m$ 是否都同构于平凡纤维空间$\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$?

   事实上，由于 Bass-Connell-Wright（[BCW76]）的结果，我们知道每个 $\mathbb{A}^n$-丛在一个 仿射 簇上都同构于一个向量丛。由于底空间是一个仿射空间，利用 Quillen-Suslin 定理 [Qui76],可知，仿射空间 $\mathbb{A}^m$ 上的任意向量丛都是平凡的。

   这一猜想最初发表于 [VD74 的猜想 1], 中，该文还阐述了其他若干推论，以及与代数群理论和 k-形式的仿射空间之间的联系。当 $n = m = 1$时，该猜想已在同一篇论文中得到证明（见 [同上，命题 3。7]）。

当 $n = 1$时，$m \geq 0$ 这一情形在 [KW85] 中得到肯定解答；而当 $n = 2$时，$m = 1$ 这一情形在 [KZ01]中得到肯定解答。关于 $n = m = 2$ 的情形，[DF10；BP22]进行了研究。关于这一猜想的更多背景，读者可参阅 [Gup22, §4]。在本文中，我们将在第 4.2.2 节和第 4.3.4 节，运用动机同伦论的语言，对低维相对情形下这一问题作出解答。

2. 自同构问题：该问题要求完整描述多项式环 $k^{[n]}$ 的自同构环；等价地，也就是确定群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n_k)$，该群称为仿射 Cremona 群。我们对维数 1 的情形已有完整的认识：$\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1_k) \cong (k, +) \rtimes (k^\times, \times)$；维数 2 的情形则由融合积给出，参见定义 3.2.6。一般情形下，该问题似乎极其困难，目前仅在维数 ≥ 3 的情形中有部分结果。一个相关且值得研究的问题是：对于簇 X，在什么条件下，$\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ 能推出 $X \cong \mathbb{A}^n$？例如，若满足 X 为仿射这一条件，则群 $\mathrm{Aut}(X)$ 具有归纳群的结构，从而可以如下刻画 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ [Kra17，定理 1.1]:

定理。 如果 X 是连通仿射簇，那么归纳群$\widetilde{\ }$之间的每个同构 $\mathrm{Aut}(X)$ 与$\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ 都是由簇的一个同构 $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ 诱导的。

关于更一般的情形及更有趣的刻画，参见 [KRS21]及其中的参考文献。

3. **嵌入问题：** 对于一个域 k 和整数 $n \geq m \geq 0$，的每个嵌入是否必然等价于坐标的标准嵌入？我们在第 3.2.1节中全面介绍这一问题。

4. **线性化猜想：** 该猜想研究每个 $\mathbb{G}_m$-作用在 $\mathbb{A}^n$上是否都等价于线性作用。第3.2.2节将给出精确表述及背景介绍。

5. **扎里斯基消去问题：** ZCP询问是否“可消去”，我们将在第 3.2.4节进一步讨论这一问题。

6. **雅可比猜想：** 对于 $n \geq 0$，若 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是一个多项式映射，且 $\det f \in \mathbb{C}^\times$，那么 f 是否可逆？通俗地说，

如果 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是一个多项式映射，且其导数在每个点处都非奇异，那么 f 是双射。

这一看似简单的陈述却有着深远影响，并与 AAG 中的大多数问题相关。它被列为本

世纪（[Sma98，问题 16]）。该猜想源于 Keller 在维数 2 [Kel39] 中提出的，此后一直悬而未决。有关背景和参考文献，参见 [Jel92；Rud95；Ess97]。

3.2 仿射空间的刻画

固定一个域 k。回想一下，所谓仿射 n-空间，其基域为 k，是指由 k 上 n 维多项式环的 Zariski谱给出的 n 维仿射簇，即

$$\mathbb{A}^n_k := \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n].$$

如上所述，人们过去并且现在仍在尝试以代数几何的方式刻画这一对象。本节展示过去数十年大量工作所取得的一些关键方向与结果。这也将使我们有机会初步说明，我们的结构结果如何与动机同伦论相协调，从而纳入整体框架。

3.2.1 AMS 定理与嵌入问题

这一方向的故事始于 Segre 对下述引理的一份据称的证明 [Seg56]，其目的是证明二维雅可比猜想（见[Ess04，§1]）。该引理随后由 [AM75]与 [Suz74],独立证明，现以 *Abhyankar-Moh-Suzuki* 定理著称，或简称为 AMS 定理：

引理 3.2.1. 设 $f(t)$ $g(t) \in \mathbb{C}[t]$ 为非常数多项式，且满足 $\mathbb{C}[f,g] = \mathbb{C}[t]$，那么 $\deg f \mid \deg g$ （或）$\deg g \mid \deg f$。

这个看似无害的陈述在 AAG 的世界中有着深远的几何后果，其中包括曲面的嵌入问题 [AM75, §1。6]。鉴于它对后一个问题的应用，人们一致将以下定理称为 AMS 定理：

定理 3.2.2. 对于任意特征零的代数闭域 k，每个嵌入$f\colon \mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \mathbb{A}^2_k$ 都等价于[1] 标准嵌入。换言之， f 是$\mathbb{A}^2_k$中的一个坐标。

回顾一下，标准嵌入指的是 $t \mapsto (t,0)$。在上述情形中，我们称嵌入 f 是可直化的；否则称其为不可直化。可直化嵌入的一个简单例子如下：

[1]若存在一个多项式自同构$F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 使得 $F \circ g = f$，则两个嵌入 $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ 等价

例 3.2.3。 映射 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ 由 $t\mapsto(t,t^2)$ 给出，是可直化的。它可通过自同构 $F\in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ 来直化，该自同构由 $F(X,Y)\mapsto(X,Y-X^2)$给出。注意， F确实是一个自同构，其逆由$(X,Y)\mapsto(X,Y+X^2)$给出。

在正特征域上，存在大量嵌入曲面的不可直化嵌入。在文献中，这些也称为非平凡直线，其存在性早在 20 世纪 50 年代就由 [Seg56] 首次证明，后来又由 [Nag72] 进行了广泛研究。下面给出一个不可直化嵌入的简单例子:

例 3.2.4. 设 k 为任意特征为 $p>0$的域。考虑两个多项式

$$f(t)=t^{p^2}\qquad g(t)=t^{p(p+1)}+t.$$

注意，我们有 $k[f(t)\ g(t)]=k[t]$，但 f 和 g 的次数互不整除。鉴于定义 3.2.1 与定义 3.2.2 等价，这意味着该嵌入

$$\mathbb{A}^1_k\to\mathbb{A}^2_k,\quad \textit{defined as}\quad t\mapsto(t^{p^2},t^{p(p+1)}+t)$$

是不可直化的。

注 3.2.5. 鉴于仿射簇与其坐标环之间的对应关系，嵌入问题也称为满射问题 。事实上，满态射问题提出如下问题：固定一个特征零域 k，设 $\phi\colon k[X,Y]\twoheadrightarrow k[X]$ 是一个 k-代数的满态射，其核为 $F=ker(\phi)$，那么 $k[F]^{[1]}\cong k[X,Y]$ 是否成立?

嵌入问题的推广

推广定义3.2.2的方法主要有两种。

1. 对于任意特征零的域 k，每个嵌入 $\mathbb{A}^1_k\hookrightarrow\mathbb{A}^n_k$ 是否都可直化? 当 $k=\mathbb{C}$时，由于 [Jel87；CML08], 我们现在知道，在维数 $n\geq 4$下答案确实为是。然而，在实数域上 $k=\mathbb{R}$，Shastri [Sha92] 构造了一个嵌入，现称为*Shastri*嵌入，将三叶结（最简单的非平凡结）嵌入到 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ 中，并证明它不可直化（参见[Gup22，第 1582]）。

2. 这一问题的另一种推广现称为*Abhyankar- Sathaye* 猜想，其代数表述是：对于 $f\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ 满足 $\mathbb{C}[X]/(f)\simeq\mathbb{C}^{[n-1]}$，$f$是否为一个坐标? 也就是说，$\mathbb{C}[X]=\mathbb{C}[f,f_2,\dots,f_n]$，对于某个$f_i\in\mathbb{C}[X]$。用几何术语来说，这涉及 $\mathbb{A}^{n-1}_k\hookrightarrow\mathbb{A}^n_k$的可直化性。对于所有 $n\geq 3$，这一猜想仍未解决。关于已知特殊情形的最新综述和总体概述，读者可参阅 [Gup22，§5]及其中的参考文献。

在极为广泛的一般性下，人们不禁要提出如下问题，而该问题先验地似乎极具挑战性:

问题。 对于 $2 \leq m \leq n-1$，每个嵌入是否都是 $\mathbb{A}^m \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ 可直化的?

这个问题与满态射陈述相对应，在若干情形下已得到解决。感兴趣的读者可在以下文献中找到相关参考 [DG15，§2]。

3.2.2 线性化问题

线性化问题（LP）旨在通过某些代数（约化）群作用来理解 $\mathbb{A}^n$。自古以来，通过（代数）群作用来研究一个空间（代数簇）一直被证明是一种极为有效的工具。通常采用的主要群类包括幺幂群（例如向量群 $\mathbb{G}_a^n$，对应 $n \geq 1$）、约化群（例如代数环面 $\mathbb{G}_m^n$，对应 $n \geq 1$），以及仿射空间自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ 的子群。作为在各种拓扑可缩簇中刻画 $\mathbb{A}_k^n$ 这一探索的一部分，线性化问题在 AAG 中具有极其重要的意义。该问题可以表述如下:

问题。 固定一个约化（代数）群 G。对于每个作用 $G \curvearrowright \mathbb{A}^n$，我们能否找到合适的多项式坐标变换，使其等价于一个线性作用?

回顾一下，对于任意乘法代数群 G 及其单位群$G^\times$，以及一个 G-簇 X，群作用 $h : G \times X \to X$ 称为线性的，若它共轭于 GL_n 在 X上的一个作用。换言之，存在一个自同构$\phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$，使得对任意 $\lambda \in G^\times$，都有 $\phi \circ h(\lambda) \circ \phi^{-1}$ 是线性的。

在维数 1 和 2 的情形

维数 1 和 2 中的线性化问题已得到肯定解决，这主要归功于我们对 $n \leq 2$上的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ 的完备理解。回顾一下，多项式映射 $\psi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ 是同构，当且仅当它是双射。换言之，若 $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$由一组正则函数给出，那么上述说法等价于多项式组 $\{\psi_j\}$ 生成多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$。特别地，线性化问题在维数 1 时最为简单，因为群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1)$ 可由仿射群通过$x \mapsto ax + b$完全确定，其中 $a \in k^\times$，因而对于仿射线性群 $\mathbb{G}_a$，$\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1) \cong \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$。因此，特别是每个 $\mathbb{G}_m$-作用在 $\mathbb{A}^1$ 上都可线性化。曲面的情形已然复杂起来：维数 2 中的结论主要得益于 [Kul53; GD75] 的工作所给出的 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ 的优美刻画，我们将在下文介绍。

定理 3.2.6。 对于任意基域 k，群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ 是融合积 $\mathcal{A}_2 *_{\mathcal{B}_2} \mathcal{J}_2$。这里， $\mathcal{A}_2$ 和 $\mathcal{J}_2$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ 的子群，分别表示仿射变换和三角变换，而 $\mathcal{B}_2$ 表示它们的交集。

特别是，这在维数 2 的情形下肯定地回答了线性化问题。

推论。 $\mathbb{A}^2\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ 的每个代数子群，都与 $\mathcal{A}_2$ 或$\mathcal{J}_2$的某个子群共轭。特别地，$\mathbb{A}^2$ $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ 的每个约化子群，都与 GL_2的某个子群共轭。

推论。 $\mathbb{A}^2$ 上的每个局部幂零导子都等价于由$f(x)\frac{\partial}{\partial y}$给出的导子，其中 $f(x)$是一个多项式。换言之，$\mathbb{A}^2$上的每个 $\mathbb{G}_a$-作用都等价于形如 $t\cdot(x,y)\mapsto(x,y+tf(x))$的作用。

注记 3.2.7. 由 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ 中的 $\mathcal{A}_n$ 和 $\mathcal{J}_n$ 唯一生成的子群称为驯性自同构群。理解 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ 的困难在于，我们不知道它的所有子群是否都是驯性的。此外，这种利用融合积的刻画无法推广到高维。对于 $n\geq 4$，*Asanuma*（$\mathbb{G}_m$-作用 $\mathbb{A}^n$ 在正特征域上的 *[Asa94]*）构造了一个不可线性化的作用。

有趣的是，线性化问题在三维情形下出现了意想不到的转折。

3.2.3 $\mathbb{C}^\times$-作用于 Koras-Russell 三维簇

在维数 $n=3$，[Kor89]研究了一个由以下显式多项式方程定义的光滑仿射簇

$$\mathcal{R}:=\{x^2z+x+y^3+t^2=0\}\subset\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$$

后来称为*Russell* 三次簇，以纪念 Russell；他注意到了它与 $\mathbb{C}^3$ 的相似之处。存在一个不可线性化的 $\mathbb{C}^\times$-作用于 $\mathcal{R}$，其定义如下

$$\sigma:\mathbb{C}^*\times\mathcal{R}\to\mathcal{R},\quad(\lambda,(x,y,z,t))\mapsto(\lambda^6x,\lambda^{-6}y,\lambda^3z,\lambda^2t) \tag{3.1}$$

为什么这个作用不可线性化?

众所周知，不动点集的存在是一个作用可线性化的必要条件。这是因为不动点集是 $\mathbb{A}^m$（对于某个 m）的子集，其嵌入到 $\mathbb{A}^n$ 中必须与线性情形等价。此外，这样的不动点集还必须是连通的。但是，如果上文定义的作用 σ 可线性化，那么它对六次单位根 $\mu_6\subset\mathbb{C}^\times$ 的限制也可线性化。然而我们注意到，相应的不动点为 $\{x(1+xz)=0\}\subset\mathbb{A}^2$，它是不连通的！值得注意的是，$\mathcal{R}$ 是拓扑可缩的（参见 [Zai00]），因此在拓扑上无法与 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ 区分。更有意思的是，文献 [Kal05 的引理 5.1] 还证明，$\mathcal{R}$ 与 $\mathbb{R}^6$ 微分同胚（视为实流形），因此 $\mathcal{R}$ 具有一个惊人的性质：其对数 Kodaira 维数等于 $\kappa(\mathcal{R})=-\infty$，这与 $\mathbb{A}^n_k$ 的对数 Kodaira 维数相同。

因此，这里的意外之处在于：a）如果 $\mathcal{R}\cong\mathbb{C}^3$，那么这会构成一个三维线性化问题的反例，因为 σ 会产生一个不可线性化的$\mathbb{C}^\times$-作用于 $\mathbb{C}^3$；b）如果 $\mathcal{R}\ncong\mathbb{C}^3$，那么这会构成对 $\mathbb{A}^3$刻画的反例。因此，对这些仿射簇的研究在 AAG 中发挥了关键作用。这促使作者在 [KR97] 中，对所有类似于 $\mathcal{R}$ 且允许双曲型[2] $\mathbb{C}^\times$-作用的原型进行完整分类，并构造出一族三维簇

[2]具有唯一不动点，且该点处切 t
空间上诱导线性作用的权均非零，并且它们的乘积为负。

据称，这些簇会对该猜想构成反例。它们称为*Koras-Russell* 三维簇，根据这些三维簇所允许的 $\mathbb{G}_a$-作用数量，大致分为三类。第一类Koras-Russell 三维簇允许多个 $\mathbb{G}_a$-作用，其方程如下：

$$\mathcal{K} := \{x^m z + x + y^r + t^s = 0\} \tag{3.2}$$

其中 m， r， $s \geq 2$ 为满足 gcd 条件的整数$(r, s) = 1$。注意，Koras-Russell 三次三维簇 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{K}$ 的一种特殊情形，其中 $r = 3$ 且 $s = 2$。属于这类的簇构成第二类 Koras-Russell 三维簇，它们基本上只允许一种 $\mathbb{G}_a$-作用（[Pet16，§2]），其方程如下：

$$\tilde{\mathcal{K}} := \{x + (x^n + z^k)^l y + t^s = 0\} \subset \mathbb{A}^4 \tag{3.3}$$

其中 n、 k、 $s \geq 2$、 $s > k$、 $l \geq 1$， $\gcd(k, s) = 1 = \gcd(k, n)$。最后，还有其他类型的 Koras-Russell 三维簇（文献中有时称为第三类），它们只允许平凡的 $\mathbb{G}_a$-作用（关于更一般的类型，请参阅 [KKMLR97]）。值得注意的是，这三类簇的设计都使其具有一个带唯一不动点的双曲 $\mathbb{G}_m$-作用！就本文而言，我们只关注第一类式（3.2）的新颖性质。三维情形下的线性化问题曾长期悬而未决，因为难以确定 Koras-Russell 三维簇是否确实与 $\mathbb{A}^3$ 同构。最终，Makar-Limanov 的工作 [ML96] 解决了这个问题：他发明了一种纯代数不变量（称为 AK 不变量，后来成为以他命名的不变量），其产生完全是为了解决这一问题！

Makar-Limanov 与 Derksen 不变量

对于任意交换环 R，*Makar-Limanov* 不变量 定义如下：

$$\mathrm{ML}(R) := \left\{ \bigcap \mathrm{Ker}(\partial) \mid \partial \in \mathrm{LND}(R) \right\} \subseteq R \tag{3.4}$$

这里， ∂ 是与自由 $\mathbb{G}_a$-作用相对应的局部幂零导子。特别地，对于仿射簇（X， $\mathcal{O}_X$），$\mathrm{ML}(X) \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$对应于 X 上所有 $\mathbb{G}_a$-不变的正则函数。首先，我们有 $\mathrm{ML}(\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$，因为仿射空间上不存在非常值正则函数。另一方面，他证明了 $\mathrm{ML}(\mathcal{K}) = \mathbb{C}[x]$，这使其区别于 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$。因此，三维情形的 LP 于 1997年 得到肯定解决（[KKMLR97]）。此后，另一个类似的不变量——称为 Derksen 不变量，记为 $\mathcal{D}(R)$——也应运而生（[Der97]），它适用于环 R。其定义为由以下元素生成的子代数

$$\mathcal{D}(R) := \left\{ \bigcap \mathrm{Ker}\, \partial \mid \partial \in \mathrm{LND}(R) \backslash \{0\} \right\} \subseteq R \tag{3.5}$$

或者， $\mathcal{D}(R)$ 是由 R 的所有非平凡指数映射的不变量环生成的 R 子环。尽管它们看起来密切相关，但两者都不依赖于另一个（参见

它们。 [CM03]）。下面的计算表明 $\mathcal{K}$ 不同构于 $\mathbb{A}^3_k$:

例 *3.2.8.* 设 k 是一个域，且 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$。那么对于所有n，$\mathcal{ML}(R) = k$。当 $n \geq 2$ 时，我们有 $\mathcal{D}(R) = R$[3]。对于带有坐标环 $\Gamma(\mathcal{K})$ 的 *Koras-Russell* 三维簇 $\mathcal{K}$，我们有 $\mathcal{ML}(\mathcal{K}) = k^{[1]} \neq k$ *([Fre06，推论 9.7])*，并且$\mathcal{D}(\mathcal{K}) = k^{[3]} \neq \Gamma(\mathcal{K})$，这使它区别于 $\mathbb{A}^3_k$ *([Fre06，定理 9.6])*。

后来，Kaliman [Kal02] 给出了以下简洁优美的论证，以证明$\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ 不同构于 $\mathcal{K}$:

定理。对于任意特征零的域 k，若正则函数$\mathbb{A}^3_k \to \mathbb{A}^1_k$ 的一般纤维同构于 $\mathbb{A}^2_k$，则其他每个纤维也都同构于它。

后来，[DK09定理 42]通过勒夫谢茨原理的论证，将其推广到了所有特征为零的域。例如，注意到关于投影 $\mathrm{pr}_x^{-1}(0)$的 $\mathcal{K}$ 一般纤维 $\mathrm{pr}_x : \mathcal{K} \to \mathbb{A}^1$ 是尖点曲线上的圆柱$\mathbb{A}^1 \times \{y^2 + t^3\}$，并且是奇异的。特别地，它不可能与 $\mathbb{A}^2$同构。Miyanishi 给出了类似的刻画，但后来发现该刻画在高维情形下不成立（参见 [KZ00，定理 1]及其中的参考文献）。

注 3.2.9。在嵌入问题的背景下，人们随后考虑了这样一个问题：像 $\mathcal{K}$ 这样的三维簇是否与 $\mathbb{A}^3$ 同构；这一问题被视为对 *Abhyankar-Sathaye* 猜想的潜在威胁（参见 *[DG15，§2。2]*）。

动机同伦论在这里有何作用?

从动机观点来看，仿射 n-空间 $\mathbb{A}^n$ 构成了可缩概形的原始例子（参见定义 2.1.18）。在 $\mathcal{H}(k)$ 中不同构的两个簇（或者在 Spc$_k$ 中作为空间非-$\mathbb{A}^1$-弱等价）不可能作为k-簇同构。特别地，如果 $\mathcal{K}$ 不是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，那么它就不可能同构于仿射空间 $\mathbb{A}^3$。为实现这一目标，Asok [Aso11] 发起了一项计划，旨在证明 $\mathcal{K}$ 不是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，因而不与 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$同构。其思想是在 G-等变同伦论中构造可能的障碍。然而，由于整个计划中的一个关键步骤未能成功（参见 [HKØ16，§1]），遗憾的是，该计划未能证明 $\mathcal{K}$ 不是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。在同一篇论文中（同上），Hoyois-Krishna-Østvær 事实上证明了完全相反的结果： $\mathcal{K}$ 在稳定同伦范畴 SH($\mathbb{C}$) 中是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。最后，Dubouloz-Fasel 设法证明了 $\mathcal{K}$ 在零特征域上的非稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩性 [DF18]。我们将在第 5.1 节中全面概述这些结果，并证明这些结果还可以从域推广到一般的基概形。总而言之，一个令人惊异的事实是，这族三维簇对于动机上同调（或等价地，高阶 Chow 群）等强大的代数工具而言完全不可见，并且具有平凡向量丛，正如 $\mathbb{A}^3$ ([HKØ16，§3]) 一样。

[3]作为一种例外，当 $n = 1, \mathcal{D}(R) = k$

备注 3.2.10。 关于嵌入问题，已有研究表明 *[DMJP10]Koras-Russell*三维簇可以嵌入到 $\mathbb{A}^4$中，并且这些嵌入彼此不等价。

3.2.4 代数几何中的消去

广义而言，消去问题是关于仿射 k-代数某种性质的陈述，具体如下：设 A 是域 k 上的任意一个（例如有限生成的）仿射代数。那么对于任意 k-代数 B,

$$\text{does} \quad A[x] \cong_k B[x] \quad \text{imply} \quad A \cong_k B\,?$$

若此性质成立，我们就称这样的 k-代数 A 是可消去的。这一问题的一个特别重要的版本是 A 是 n维多项式环$A = k[x_1, \ldots, x_n]$，其消去性质在 AAG 中至关重要。这是因为，鉴于希尔伯特零点定理，我们可以将这一问题转移到代数几何领域。在环论背景下，该问题由扎里斯基提出——因此也被称为 Zariski 消去问题（ZCP）——地点是 1949年 的巴黎讨论会（[Nag67], §5），其表述如下：

问题 3.2.11. 设 k 为一个（相应地，代数闭的）域。那么对于一个 k-代数 B（相应地，对于一个仿射 k-概形 Y），$B \otimes k^{[1]} \cong k^{[n+1]}$（相应地，$Y \times \mathbb{A}^1_k \cong \mathbb{A}^{n+1}_k$）是否蕴含 $B \cong k^{[n]}$（相应地，$Y \cong \mathbb{A}^n_k$）？

这里，$k^{[n]}$ 指的是含 n 个变量的多项式环。一个有趣的反例是：当 $k = \mathbb{R}$ 时，由 [Hoc72] 构造的、由实球面上的切丛所定义的投射模是稳定自由的但不是自由的。ZCP 已在维数 1 和 2 上对任意域被证明成立：对于仿射曲线，这归功于 [AHE72]；对于特征零域上的仿射曲面，这归功于 [MS80; Fuj79]；而对于完美域，则归功于 [Rus81]，更一般地，归功于 [BG15]。在任意域上的另一种简化证明由 [CML08] 给出。该问题目前在零特征域上的维数 $n \geq 3$ 中仍广泛未决。在三维中，如上所讨论的（式 (3.2)）第一类 Koras-Russell 三维簇族 $\mathcal{K}$ 的存在被视为 ZCP 的一个潜在反例。Dubouloz [Dub09] 证明了 Koras-Russell 三维簇上的所有柱体都具有平凡的 Makar-Limanov不变量,

$$\mathrm{ML}(\mathcal{K} \times \mathbb{A}^1) \cong k \cong \mathrm{ML}(\mathbb{A}^3) \cong \mathrm{ML}(\mathbb{A}^n)$$

如果能证明情况并非如此，就可以回答 $\mathcal{K} \times \mathbb{A}^1$ 不能与 $\mathbb{A}^4$ 同构，从而解决这一猜想；但根据目前的结论，仍需证明或否定同构关系 $\mathcal{K} \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^4$。

正特征下的 ZCP

由于 Gupta 的工作 [Gup14], ZCP 在每个维数上都得到了否定解，$n \geq 3$其定义在正特征域上。这个反例本质上

源自另一个反例，该反例是在正特征下解决线性化问题的过程中构造出来的。特别是， [Asa94，定理 2。2]构造了一个 k-代数 A，它与 $\mathbb{A}^n$ 稳定同构，并带有一个不可线性化的 $\mathbb{G}_m$-作用于 A，对所有 $n \geq 4$，在特征为 k 的无限域上$p > 0$。构造这种 k-代数 A 的主要构件源自他的以下定理：

定理。 设 k 是特征为 $p > 0$ 的域，且

$$A = k[X, Y, Z, T]/\langle X^m Y + Z^{p^e} + T + T^{sp} \rangle$$

其中 m、e、s 是满足 $p^e \nmid sp$ 和 $sp \nmid p^e$的正整数。设 x 表示 X在 A中的像。那么 A 满足以下两个性质：

1. $A^{[1]} \cong_{k[x]} k[x]^{[3]} \cong_k k^{[4]}$
2. $A \ncong_{k[x]} k[x]^{[2]}$。

利用 Makar-Limanov 和 Crachiola 开发的技术， [Gup14]证明了，这样的 k-代数 A 确实给出了三维 ZCP 的一个反例，不久之后又将这一结果推广到了所有维数 $n \geq 4$ [Gup15]，从而彻底解决了正特征域上的 ZCP。为纪念其贡献，我们将这些仿射簇称为*Asanuma-Gupta* 簇。值得注意的是，所有这些情形中所采用的主要工具都是非平凡直线的存在及其在正特征域上的推广。回顾一下，非平凡直线是一个多项式 $f \in k^{[2]}$，满足

$$k^{[2]}/(f) \cong k^{[1]} \quad \text{but} \quad k[f]^{[1]} \ncong k^{[2]}$$

（也就是说， f 不能成为一个坐标）。对于 Gupta 的反例，多项式方程

$$f(Z, T) := Z^{p^e} + T + T^{sp}$$

其中 $sp \nmid p^e$， $p^e \nmid sp$ 充当一条非平凡直线。这种直线是 n $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ 的嵌入，但并非标准的坐标包含。

注 3.2.12。 根据 *[DMVØ]*, 中得到的结构定理，我们将在第 *4.2.2* 节和第 *4.3.4* 节看到，*Zariski* 消去问题的这一变体在相对维数不超过 *2* 时，适用于更一般的基概形。

3.2.5 Asanuma 的稳定结构定理

回顾一下，*Dolgačev-Veĭsfeĭler* 猜想 所问的是：在正则局部环 R 上，$\mathbb{A}^n$-纤维空间能否赋予扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^n$-丛结构。正如先前所指出的，在维数 $n \geq 3$ 的情形下，尚无已知的完备结论。然而，从维数 $n \geq 4$ 起，该猜想在正特征域上不成立，这可视为以下任一事实的推论：

- 存在非平凡直线（等价地，存在 $\mathbb{A}^1$ 的不可直化嵌入），
- 在 $\mathbb{A}^n_k$ 上存在不可线性化的 $\mathbb{G}_m$-作用，

我们将在第 4.3.4 节从动机观点阐述并回顾这一方面。本章最后将提及 Asanuma 的一项重要成果，即稳定结构定理 ([Asa87，定理 3。4])，该定理以 AAG 语言表述。为此，我们先简要回顾以下定义：

定义 22。 对于光滑的 k-概形 X 和 Y，若存在 $i, j \geq 0$ 使得，我们称 X 与 Y 稳定地 k-同构，

$$X \times_k \mathbb{A}^i \cong Y \times_k \mathbb{A}^j.$$

用环论术语来说，若对于某些 $l, m \geq 0, A \otimes_k k^{[i]} \cong k^{[j]}$，则称 k-代数 A 为稳定多项式。

转化为动机同伦论后，它为我们提供了一种优雅的方法，可构造大量相对于基概形的 $\mathbb{A}^1$-可缩概形。下面这个看似简单的交换代数事实，揭示了动机同伦技术在分类问题上的潜在局限，例如 Dolgačev-Veĭsfeĭler 猜想，或等价地，仿射空间上的（扎里斯基）局部平凡 $\mathbb{A}^n$-丛的平凡性：

定理 3.2.13. 设 R 为诺特环，且 A 为有限生成的平坦 R-代数，使得 $A \otimes \kappa(p) \cong \kappa(p)^{[n]}$ 对 R 的任意素理想 p 都成立。那么 A （在同构意义下）是某个多项式环 $R^{[m]}$ 的 R-子代数（其中 m为某个值），且满足

$$A^{[m]} \cong Sym_{R^{[m]}}(\mathfrak{P} \otimes R^{[m]}),$$

其中 $\mathfrak{P}$是一个射影的 A-模。

定义 3.2.13 断言，在诺特环 R上，任意有限生成的平坦 R-代数 A，若其所有纤维都同构于具有 m个变量的多项式环，则它是稳定多项式环，也就是说，$A^{[k]} \cong R^{[m]}$，对某些整数 k， $m \geq 0$。译成代数几何语言，它断言如下：

定理。 在局部诺特概形 S上，任意仿射态射 $f : X \to S$，若其为一个$\mathbb{A}^n$-纤维空间，则在扎里斯基局部意义下稳定地 同构于一个局部平凡的 $\mathbb{A}^m$-丛（其中 $m \geq 0$为某个正整数）。

这一结果对于动机同伦论至关重要，以下事实对此作了说明： [AØ21，引理 3.3。3]:

引理 3.2.14。 稳定同构的光滑簇是 $\mathbb{A}^1$-弱等价的。

推论。 若 $f : X \to S$ 是任意一个同时也是 $\mathbb{A}^n$-纤维空间的仿射态射，定义在诺特概形 S上，则 X 与某个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^{n+m}$-丛稳定同构（对某个 m而言）。特别地，根据定义 3.2.14 X 是定义在 $\mathbb{A}^1$上的 S-可缩概形。

因此，定义 3.2.13 为我们提供了一种富有成效的方法，用以利用多个族的 $\mathbb{A}^1$-可缩概形。重要的是，从动机观点来看，该定理准确地表明，仅凭 $\mathbb{A}^1$-同伦论技术无法区分 $\mathbb{A}^n$-纤维空间与扎里斯基局部平凡的空间。

你是否也从河流那里领悟了这个秘密：时间并不存在？河流无时无处不在，在源头和入海口，在瀑布、渡口和急流之中，在海洋和群山之间，处处皆是；对它而言，只有现在存在，没有过去的影子，也没有未来的影子。

赫尔曼·黑塞的《悉达多》。

4

光滑概形的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性

本章所呈现的结果取材于论文 [DMVØ]。

章节概要

回顾一下，若结构映射 $X \to \operatorname{Spec} k$ 在 Spc$_k$ 中是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，则称光滑 k-概形 X 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。事实证明，在相对维数 $n < 3$ 下， $\mathbb{A}^1$-可缩这一概念足以刻画 $\mathbb{A}^n$。本章将全面阐释这一结论，并证明 $\mathbb{A}^1$-同伦论能够检测相对维数为 $n < 3$时在扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^n$-丛。我们从任意基底上的 étale 概形这一情形开始，见第 4.1 节。第 4.2 节中，我们研究正规概形上光滑曲线的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性，并在此背景下刻画相对仿射直线。第 4.3.4 节中，我们系统研究光滑曲面的相对$\mathbb{A}^1$-可缩性，并刻画某些戴德金概形上的仿射平面。在这两种情形下，我们都由此得到了相对版本的 Zariski 消去问题的肯定解答。随后，我们在第4.4 节分析并回顾关于更高相对维数$n \geq 4$ 的常见知识，并证明 $\mathbb{A}^n$-纤维空间提供了大量相对$\mathbb{A}^1$-可缩空间的实例。

4.1 étale 概形的相对 $\mathbb{A}^1$可缩性

我们首先从 $\mathbb{A}^1$-可缩性的角度建立相对维数为 0 的结构定理，即针对 étale 概形，并将其推广到任意基底

概形。一个重要推论是，étale 概形与 $\mathbb{A}^1$-刚性概形相一致。零维光滑 k-概形的情形等价于 étale k-代数的刻画。由此得到以下直接结论。

引理 4.1.1. *[DMVØ]* 设 X 是任意域上的 *étale* 概形 k。则典范映射 $f: X \to$ 谱 k 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价（在 Spc_k 中），当且仅当 f 在 Sm_k中是同构。

证明。一个方向显然。假设 X 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。由于 $f: X \to$谱k 是 étale 的，X 是有限可分域扩张的谱的不交并，且这些扩张均为 k的扩张。由于每个 $\mathbb{A}^1$-可缩空间都是 $\mathbb{A}^1$-连通的（特别是作为拓扑空间连通），因此对于某个有限可分扩张 $X \cong$ 谱 k'有 k'是 k的扩张。由定义 2.1.20可知，任何 $\mathbb{A}^1$上的可缩概形 k 都有一个截面，因此 $k' \cong k$。 □

定理 4.1.2. *[DMVØ]* 设 X 是任意基概形 S上的有限表示 *étale* 概形。则典范态射 $f: X \to S$ 是相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价（在 Spc_S 中），当且仅当 f 在 Sm_S中是同构。

证明。一方向显然。假设 $f: X \to S$ 是 Spc_S 中的相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价。对于每个剩余域为 $\kappa(s)$ 的点 $s \in S$，由定义 2.1.41 可知，$f_s := \mathrm{pr}_2: X_s = X \times_S$ 谱 $\kappa(s) \to$ 谱 $\kappa(s)$ 是 $\mathrm{Spc}_{\kappa(s)}$ 中的相对$\mathbb{A}^1$-弱等价。因此，根据定义 4.1.1，态射f_s 是概形同构。于是，$f: X \to S$ 是一个双射态射，且其剩余域扩张平凡，因而是根式的；由此可知，$f: X \to S$ 是普遍单射。另一方面，由于 f 是 étale 态射，它是一个开浸入（见[Stacks，标签 02LC]）。又因为 f 也是满射，[1]结论得证。 □

回顾定义13指出，$\mathbb{A}^1$-刚性概形是动机同伦论中离散对象的类比。AM11 [AM11，例 2.1.10] 注意到，域上的任意零维概形都是 $\mathbb{A}^1$-刚性的。这一观察可推广到基概形上的情形，如下所示：

命题 4.1.3. *[DMVØ]* 有限表示的 *étale* 概形 $f: X \to S$ 在整概形上 S 是 $\mathbb{A}^1$-刚性的 S。

证明。设 $h: U \to S$ 是任意光滑 S-概形，并设 $\psi: \mathbb{A}^1_U \to X$ 是一个 S-态射。我们不妨假设 U 是连通的。设$\pi: \mathbb{A}^1_U \times_U \mathbb{A}^1_U \to U$是由投影 $\mathrm{pr}_1: \mathbb{A}^1_U \times_U \mathbb{A}^1_U \to \mathbb{A}^1_U$ 和 $\mathbb{A}^1_U \to U$ 的复合所定义的平坦态射，并考虑以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} Z = X \times_{X\times_S X} (\mathbb{A}^1_U \times_U \mathbb{A}^1_U) & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ \mathbb{A}^1_U \times_U \mathbb{A}^1_U & \xrightarrow{\psi\times\psi} & X \times_S X \end{array}$$

[1]满射性源于如下事实：对于 $\mathbb{A}^1$-可缩概形，纤维不可能为空

其中 $\Delta\colon X \to X \times_S X$ 是对角态射。由于 $f\colon X \to S$ 是分离的，Δ是 $X \times_S X$ 的闭子概形，因而 $j\colon Z \to \mathbb{A}^1_U \times_U \mathbb{A}^1_U$ 也是闭浸入。由于 π 是平坦的，从而是开态射，π 在扎里斯基开子集$\mathbb{A}^1_U \times_U \mathbb{A}^1_U \setminus j(Z)$上的像是 U 的一个扎里斯基开子集 U'，由构造它由所有使态射 $\psi|_{\mathbb{A}^1_u}\colon \mathbb{A}^1_u \to X$ 非常值的点 u 组成。$f\colon X \to S$ 在 S 的一般点 η 上的纤维X_η 是 S的函数域 K 上的étale概形，由上述观察可知它是 $\mathbb{A}^1$-刚性的。由此可知存在非空扎里斯基开子集 $S_0 \subset S$，使得令 $U_0 = h^{-1}(S_0)$时，ψ 的限制 $\psi|_{\mathbb{A}^1_{U_0}}\colon \mathbb{A}^1_{U_0} \to f^{-1}(S_0)$经由 U_0分解。这意味着$U' \subset U \setminus U_0$，从而 $U' = \emptyset$（因为 U' 在 U中是开的，$U \setminus U_0$ 在 U中是闭的，且U 是连通的）。因此，$\psi\colon \mathbb{A}^1_U \to X$ 经由投影 $\mathbb{A}^1_U \to U$分解，这表明 X 是 $\mathbb{A}^1$-刚性的。

□

问题 4.1.4。 定义 4.1.3 在以下情况下是否仍然成立：X 不是分离的？

4.2 光滑曲线的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性

本节中，我们将证明，对于光滑曲线而言，仿射性是 $\mathbb{A}^1$-可缩性的推论（定义 4.2.1）。随后，我们将详细证明如下事实：$\mathbb{A}^1$ 是任意域上唯一的光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲线（定义 4.2.2）。最后，我们将这一结果推广到相对维数 1、基底为相当任意的概形的情形（定义 4.2.5）。首先回顾以下定义：

定义 23。 设 Y 是一个 k簇。若对某个（例如有限生成的）域扩张 L/k，其概形论基变换 Y，则称 Y 是 $\mathbb{A}^n_k$ 的一个 k-形式

$$Y_L := Y \times_k \operatorname{Spec} L \cong \mathbb{A}^n_L \cong \operatorname{Spec} L[x_1, \ldots, x_n]$$

我们称这个 k-形式 Y 是平凡的，若 $L =$ 谱 k；否则称其为非平凡的。

4.2.1 域上的 $\mathbb{A}^1$-可缩性

我们固定一个域 k。我们从如下引理开始，该引理表明曲线 C 的 $\mathbb{A}^1$-可缩性必然蕴含 C 是仿射的。

引理 4.2.1. *[DMVØ]* 任意光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲线 C 在域上是仿射的。

证明。 由于 C 是一条光滑曲线，因此它要么是仿射的，要么是射影的。反之，假设 C 是射影的。根据域 k 上的光滑适当曲线（等价地，维数 1 时的射影曲线）在 $\mathbb{A}^1$-弱等价[AM11，命题 2.1 的意义下的分类结果，12], 我们知道，唯一的 $\mathbb{A}^1$-连通曲线是射影直线 $\mathbb{P}^1_k$。但显然，$\mathbb{P}^1_k$ 不可能是 $\mathbb{A}^1$-可缩的（例如，$\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z} \ncong 0$; 参见定义 2.1.52）。$\mathbb{P}^1_k$ 在 $\mathbb{A}^1$-连通的适当曲线中具有唯一性，这源于以下观察：其他候选对象，例如正亏格适当曲线，或 $\mathbb{P}^1_k$ 的非平凡 k-形式，或$\mathbb{G}_{m,\,k}$，都是 $\mathbb{A}^1$-刚性的簇，因此不可能是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。因此，C 必定是仿射的。

□

由此可知，在任意域上的 $\mathbb{A}^1$-可缩曲线中，可以唯一地刻画出仿射直线（另见 [AD07，断言 5。7]）。

定理 4.2.2. 任意域 k 上的光滑曲线 C 在 $\mathcal{H}(k)$ 中是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，当且仅当 C 与仿射直线 $\mathbb{A}^1_k$同构。

证明。 一个方向显然成立：仿射直线 $\mathbb{A}^1_k$ 在任意域上都是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。假设 C 是一条光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩曲线。首先，假设 k是代数闭的。那么众所周知，在完美域上，P 的（正则）紧化$C \hookrightarrow P$实际上是一条光滑曲线。此外，根据分类结果以及定义4.2.1中提到的亏格论证，可以再次得出 $P \cong \mathbb{P}^1_k$。根据紧化的定义，有 $C = \mathbb{P}^1 \backslash Z$，其中 $Z \hookrightarrow P$是闭补集 $Z := \mathbb{P}^1 \backslash C$。由于 C 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，特别是 $\mathbb{A}^1$-连通的（定义2.1.54）， Z 至多只有一个闭点。反过来，假设 $Z = \{p_1, p_2\}$，那么我们看到

$$C \cong \mathbb{P}^1 \backslash Z \cong \mathbb{P}^1 \backslash \{p_1, p_2\} \cong \mathbb{G}_{m,k}.$$

但根据 $\mathbb{A}^1$-刚性 $\mathbb{G}_m$ （定义 2.1.26），我们有$\mathbb{G}_{m,\ k}$ 不可能是$\mathbb{A}^1$-连通的；更不用说 $\mathbb{G}_{m,\ k} \backslash \{p_1, \ldots, p_n\}$。因此， $Z = \{p_1\}$。由此可得 $C \cong \mathbb{P}^1_k \backslash \{pt\} \cong \mathbb{A}^1_k$。现在，任取 k 。令 $\widetilde{k}$ 为 k的代数闭包。于是，根据定义 2.1.40，

$$C_{\widetilde{k}} := C \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \widetilde{k} \to \operatorname{Spec} \widetilde{k}$$

是一个定义在 $\mathbb{A}^1$上的光滑 $\widetilde{k}$-可缩曲线。根据前一种情形，它同构于 $\mathbb{A}^1_{\widetilde{k}}$。因此， C 是 k-形式的 $\mathbb{A}^1_k$。根据定义 2.1.43，这必然意味着它是平凡的 k-形式 $\mathbb{A}^1$。证明完毕。 □

注 4.2.3。 关于使用$\mathbb{G}_a$-作用，在特征零代数闭域上的另一种证明，参见 *[Fre06，推论 1。29]*。

推论 4.2.4. *[DMVØ]* 对于任意基概形 S，若 $f : X \to S$ 是 $\mathbb{A}^1$-中的相对弱等价 $\mathrm{Spc} S$，且相对维数为 *1*，则 X 是一个 $\mathbb{A}^1$-纤维空间。

证明。 对于任意点 $s \in S$，考虑沿 f 的基变换 谱 $\kappa(s) \to S$。根据定义 2.1.39，每个纤维 $X_s := X \times_S$ 谱 $\kappa(s)$ 都是一个 $\mathbb{A}^1$-可缩光滑曲线，位于 $\mathcal{H}(\kappa(s))$。根据定义4.2.2，可得 $X_s \cong \mathbb{A}^1_{\kappa(s)}$。 □

4.2.2 相对维数 1

利用定义 20和定义 4.2.2，我们进一步通过以下结构结果，将这一刻画推广到基概形上。

定理 4.2.5。 *[DMVØ]* 对于一个有限表示的光滑分离态射 $f :\ X \to S$ 且相对维数为 1 的诺特正规概形 S上，下列条件等价：

1. $f\colon X \to S$ 是 Spc$S$ 中的相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价，
2. $f\colon X \to S$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-纤维空间，
3. $f\colon X \to S$ 是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛。

证明。蕴含关系 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 是定义 2.1.48 和定义 4.2.2 的推论。事实上，假设 (1) 成立，则对任意 $s \in S$，基变换态射 $f_s : X_s \to$ 谱 $\kappa(s)$ 是 Spc$^{\kappa(s)}$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价；等价地，X_s 是 $\mathcal{H}(\kappa(s))$ 中的一条光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲线，因此由定义 4.2.2 可知 $X_s \cong \mathbb{A}^1_{\kappa(s)}$。定义 2.1.48 现在将这些逐纤维数据粘合起来，从而得到 X 是一个 $f\colon X \to S$ 是 Spc$S$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。另一个蕴含关系直接由定义 2.1.48 得出。蕴含关系 (3) $\Longrightarrow$ (1) 由定义 2.1.18 得出。蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (3) 则源于 Kambayashi-Wright [KW85] 对扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛的刻画。为方便读者，我们现在简要回顾 [KW85] 中给出的证明思路。

我们首先考虑 S 是离散赋值环 R 的谱、且一致化参数为 π 的情形。记 η 为 S 的一般点，其对应的剩余域为 $K = \mathrm{Frac}(R)$；记 s 为 S 的闭点，其剩余域为 κ。由于 $f\colon X \to S$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-纤维空间，纤维 X_η 同构于 $\mathbb{A}^1_K = \mathrm{Spec}(K[x_0])$。将 x_0 视为有理函数 X，必要时经过将 x_0 替换为适当的 $\pi^n x_0$（其中 $n \in \mathbb{Z}$），不妨设 x_0 实际上是 X 上的正则函数，并且其在 $f\colon X \to S$ 的闭纤维 $X_s \cong \mathbb{A}^1_\kappa$ 上的限制非零。包含 $R[x_0] \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 随即对应于一个 S-态射 $h\colon X \to \mathbb{A}^1_S = \mathrm{Spec}(R[x_0])$，其在 S 的一般点上限制为同构。若 h_0 在 S 的闭点 s 上的限制 $h_s : X_s \to \mathbb{A}^1_s$ 为常值，则按照 [KW85，命题 1.4]，的证明中的论证，存在一个 S-态射 $\tau\colon \mathbb{A}^1_S \to \mathbb{A}^1_S$ 以及一个准有限 S- 态射 $h'\colon X \to \mathbb{A}^1_S$，二者在 S 的一般点上均限制为同构，使得 $h = h' \circ \tau$；由扎里斯基主定理 [Gro66，推论 8.12.10]，可知其为开浸入，从而得到 $h'\colon X \to S$ 是一个 étale 态射，并且在 S 的一般点上限制为同构。另一方面，由于限制 $h'_s\colon X_s = \mathbb{A}^1_\kappa \to \mathbb{A}^1_\kappa = \mathbb{A}^1_s$ 是 étale 的，因此它是同构。这意味着 h' 是一个具有平凡剩余扩张的 étale 双射态射，因而是同构。

在 $\dim S = 1$ 的情形得到解决后，证明便通过对基概形 S 的维数作归纳来继续：令 S 为维数 $n \geq 2$ 的诺特正规局部环的谱，并令 s 为其闭点。根据归纳假设，我们可以假设 $f' : X' \to S'$ 对 $f : X \to S$ 在 $S' := S \setminus \{s\}$ 上的限制是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛。KW85, § 2.2-2.3] 中的论证可原样应用，从而得出结论：$f' : X' \to S'$ 同构于平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛$\mathbb{A}^1_{S'} \to S'$。所有水平映射均为开浸入的图表

确定了一个 S-概形之间的有理映射 $h\colon X \dashrightarrow \mathbb{A}^1_S$

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X' \cong \mathbb{A}^1_{S'} & \longrightarrow & \mathbb{A}^1_S \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

其在 S' 上限制为同构。由于 $\mathbb{A}^1_S$ 是仿射的， h 唯一地由 X 上的有理函数确定，该有理函数在 X_s 外正则；又由于 X 是正规的，这是因为 $f\colon X \to S$ 是平坦的，S 是正规的，且 X_s 在 X 中具有余维 ≥ 2，因此可知有理映射 h 实际上处处有定义，是一个 S-态射$h\colon X \to \mathbb{A}^1_S$。此外，由于 h 在 S' 上限制为同构，典范同态 $h^*\Omega^{\mathbb{A}^1_S/S} \to \Omega^{X/S}$ 在 X_s 外是同构；由此可知它本身是同构，因为 $h^*\Omega^{\mathbb{A}^1_S/S}$ 和 $\Omega^{X/S}$ 是可逆层，且 X_s 在 X 中具有余维 ≥ 2（参见 [Gro65，定理 5.10.5]）。总之， $h\colon X \to \mathbb{A}^1_S$ 是 S-概形之间的 étale 态射，并且在 S' 上限制为同构。由于 $X_s \cong \mathbb{A}^1_{\kappa(s)}$，我们如前一种情形一样得出，限制 $h_s\colon X_s \to \mathbb{A}^1_{\kappa(s)}$ 也是同构，最终得到 $h\colon X \to \mathbb{A}^1_S$ 是 S-概形的同构。

□

定义 4.2.5为我们提供了一种优雅的刻画，用于识别相对于基概形的仿射 l相对于一个基概形。

推论 4.2.6。 *[DMVØ]*一个光滑分离概形 $f\colon X \to S$ 有限表示且相对维数为 1 的诺特正规概形上的 S 同构于 $\mathbb{A}^1_S$ 当且仅当以下条件全部成立：

1. X 是 $\mathcal{H}$中的一条光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲线(S)，
2. f 的相对微分典范层Ωf 是平凡的，并且
3. f 有一个截面。

证明。 一个方向是显然的：仿射直线 $\mathbb{A}^1_S$ 在 S 上是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，具有相对微分的平凡层 $\Omega^{\mathbb{A}^1_S/S}$，并且容许由 0_S 给出的截面：$S \to \mathbb{A}^1_S$。

现在假设反向成立：由于 $f\colon X \to S$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，依据定义 4.2.5，它是一个扎里斯基局部平凡丛。由于仿射直线的自同构群函子 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1)$ 是仿射群 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$，每个 S 上的扎里斯基局部平凡$\mathbb{A}^1$-丛都是仿射线性丛，也就是说，它在 S 上同构于某个主齐性空间 $\rho\colon P \to S$ 的全空间；该主齐性空间由 S 上的某个线丛 $p\colon L = \mathbb{V}(\mathcal{L}) \to S$ 作用。对于某个 S上的可逆层，后一个可逆层 $\mathcal{L}$ 由如下性质唯一确定（在同构意义下）：在由 f 诱导的同构 $f^*\colon \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(X)$ 下（例如参见 [Mag75，定理 5]）， $f^*\mathcal{L}$的类等于ω_f的类。假设 ω_f 同构于 $\mathcal{O}_X$，则 $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_S$，从而$f\colon X \to S$ 在 S 上同构于某个 $\mathbb{G}_{a,S}$-主齐性空间 $P \to S$ 的全空间；而假设 f 有一个截面，又可推出 $P \to S$ 是平凡的 $\mathbb{G}_{a,S}$-主齐性空间$\mathbb{G}_{a,S} \to S$，进而 X 同构于 $\mathbb{A}^1_S$。

□

注 4.2.7。 由于仿射概形上的每个向量丛挠子都是平凡的，由定义 4.2.6 的证明可知，光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩概形 $f: X \to S$，其有限表示且相对维数为 1，定义在仿射诺特正规概形 S 上，始终存在一个截面。因此，对于诺特正规仿射概形 S，相对$\mathbb{A}^1$-可缩性和相对典范层的平凡性，足以在 上有限表示且相对维数为 1 的光滑 S-概形中刻画仿射直线 $\mathbb{A}^1_S$。 S。

另一方面，如果 S 不是仿射的，则定义4.2.6中截面的存在性是一个必要条件，以下例子对此进行了说明。

例 *4.2.8*。考虑拟射影概形 $Y := (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)\backslash\Delta(\mathbb{P}^1)$，它由删除对角线 $\Delta(\mathbb{P}^1) := Im(\Delta : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathbb{P}^1)$ 得到。令 $pr_1 : Y \to \mathbb{P}^1$ 为由投影到第一个坐标所定义的态射。注意，pr_1 是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，并且是 $Spc_{\mathbb{P}^1}$中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。此外，概形Y是仿射的，因为它是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中一个丰沛除子的补集。然而，态射 pr_1 不可能是 $\mathbb{P}^1$ 上的平凡主齐性空间，因为 Y不允许存在任何截面；这是因为任意截面都必然与对角线 $\Delta(\mathbb{P}^1)$相交。

相对曲线的 Zariski 消去问题

由定义4.2.6可得曲线的 Zariski 消去问题的以下相对变体成立。

推论 4.2.9。 *[DMVØ]* 设 $f: X \to S$ 是一个有限表示且相对维数为 1 的光滑分离概形，其基底为正规概形 S，并且 $X \times_S \mathbb{A}^n_S \cong \mathbb{A}^{n+1}_S$ 对某个$n \geq 1$成立。那么 X 与 S-同构于 $\mathbb{A}^1_S$。

证明。 由于相对典范层 $\omega_{X\times_S\mathbb{A}^n_S/S}$ 同构于

$$\mathrm{pr}_1^*\omega_f \otimes \mathrm{pr}_2^*\omega_{\mathbb{A}^{n+1}_S/S} \cong \mathrm{pr}_1^*\omega_f$$

我们由同构 $X \times_S \mathbb{A}^n_S \cong \mathbb{A}^{n+1}_S$ 推得 $\mathrm{pr}_1^*\omega_f$ 是平凡的。然而，由于 $\mathrm{pr}_1^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X \times_S \mathbb{A}^n_S)$ 是一个同构，我们有 ω_f 是平凡层。另一方面， f 有一个截面，由零截面 $s_0 : S \to \mathbb{A}^{n+1}_S$ 与投影 $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{A}^{n+1}_S \cong X \times_S \mathbb{A}^n_S \to X$的复合给出。最后，由于 $\mathrm{pr}_1 : X \times_S \mathbb{A}^n_S \to X$ 和 $\mathbb{A}^{n+1}_S \to S$ 是 Spc_S 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价，$f: X \to S$ 也如此，结论于是由定义 4.2.6 得出。 □

4.2.3 非正规基底上的一些反例

现在我们来给出一些反例，说明定义 4.2.5，尤其是在基概形不正规时。具体而言，这些例子展示了相对$\mathbb{A}^1$-可缩概形并非扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛。第一个例子归功于 Madhav Nori（[KW85，§3]），它为我们提供了一个几何实例：一个无法成为奇异（甚至是 $\mathbb{A}^1$-可缩！）概形上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛的 $\mathbb{A}^1$-纤维空间。

例 4.2.10。设 k 是一个代数闭域，并令 $C := \{V^2 - W^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^2_k$ 为在点 $p = (0,0)$处奇异的尖点曲线。考虑映射

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A}^1_k &\to C \times \mathbb{P}^1_k \\ t &\mapsto \Big((t^2, t^3), [t:1] \Big) \end{aligned}$$

映射 F 是一个闭浸入。设 $X = C \times \mathbb{P}^1_k \backslash Z$ 为 $C \times \mathbb{P}^1_k$的开子概形，其中 $Z := Im(F)$。现在投影$\mathrm{pr}_1 : C \times \mathbb{P}^1_k \to C$是一个（平凡的） $\mathbb{P}^1_k$-纤维空间，它限制为映射 $\phi : X \to C$。映射 ϕ 显然是一个 $\mathbb{A}^1$-纤维空间，因为对所有点$s \in X$，纤维 $\phi^{-1}(s) \cong (\mathbb{P}^1_k \backslash [t:1]) \cong \mathbb{A}^1_k$。

我们现在断言， ϕ 不是点 p附近任何开集中的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛。反设 $\phi : X \to C$ 在 p附近具有局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-结构，则通过在点 p附近收缩 C ，我们得到 C上的一个同构 $f : C \times \mathbb{A}^1_k \to X$ 。

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\cong}{\nearrow} & X \\ C \times \mathbb{A}^1_k & & \downarrow \phi \\ & \searrow & C \end{array}$$

现在，将 $C \times \mathbb{A}^1_k \to X \hookrightarrow C \times \mathbb{P}^1_k$ 限制在任意点 $x \in C$ 上方的纤维上，可得到一个开浸入 $\mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^1_k$。它唯一地延拓为一个同构（记作） $\sigma_x : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$。最后，我们注意到映射

$$\begin{aligned} C \times \mathbb{P}^1_k &\to C \times \mathbb{P}^1_k \\ (x, y) &\mapsto \Big(x, \sigma_x(y) \Big) \end{aligned}$$

将奇异曲线 $C \times \{\infty\}$ 双有理地映到光滑曲线 Z 上，这是不可能的。

第二个例子源自 [Ham75]。基概形 S 并非正则，而我们考虑的其上的 $\mathbb{A}^1$-纤维空间不可能是稳定 Zariski 局部平凡的（理由与其不具备 Zariski 局部平凡性相同）。然而，根据定义4.2.5，现在我们知道，所考虑的 $\mathbb{A}^1$-纤维空间确实是相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的！

例 4.2.11。设 k 是特征为 $p > 0$ 的域，设 $S \subset \mathbb{A}^2_k = \text{谱 } k[x,y]$ 是一条奇异的、非半正规的曲线，其方程为

$$x^{p+1} - y^p = 0$$

并令 $X \subset S \times_k \text{谱}(k[u,v])$ 为满足方程的仿射曲面

$$u^p + xv^p - v = 0.$$

分别用 A 和 B 表示 S 和 X 的坐标环。从投影 pr_S 到 X的限制是一个仿射 $\mathbb{A}^1$-纤维空间 $f\colon X \to S$，其在唯一奇点 $o=(0,0)$ 的补集 $S^* \cong$ 谱 $k[t^{\pm 1}]$（其中 $t=x^{-1}y$）上的限制与平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛同构

$$S^* \times_k \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[t^{\pm 1}][\tilde{u}]$$

在 S^*上，其中 $\tilde{u}=u+tv$。相反，众所周知，在 o 中不存在 S 的扎里斯基开邻域，使得 $f\colon X \to S$ 限制后成为平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛 *[Ham75，引理 1。6]*，特别地，$f\colon X \to S$ 不是扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛。然而，通过直接计算可以验证，S^*-概形的态射

$$\begin{aligned} X \times_{S^*} \mathbb{A}^1_{S^*} &\to \mathbb{A}^2_{S^*} \\ (\tilde{u}, w) \mapsto (z_1, z_2) &= \Big(\tilde{u} - t(\tilde{u}+tw)^p, w + (\tilde{u}+tw)^p\Big) \end{aligned}$$

是一个同构（其逆映射为

$$(z_1, z_2) \mapsto \Big(z_1 + t(z_1 + tz_2)^p, z_2 - (z_1 + tz_2)^p)\Big)$$

它进一步延拓到 o 上，成为 S-概形的同构 $X \times_S \mathbb{A}^1_S \to \mathbb{A}^2_S$。由定义 4.2.5可得 $f\colon X \to S$ 是 $\mathbb{A}^1$中的一个 Spc$_S$-弱等价。

其他一些 $\mathbb{A}^1$-纤维空间的例子 $f\colon X \to S$ 非正规曲线上的 S例子，它们不是扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，见 [KW85，§ 3。4]。

例 4.2.12。作为第三个例子，设 S 是域 k 上特征零的任意有理仿射平面尖点曲线，其方程为

$$\{x^p - y^q = 0\},$$

其中 p、$q \geq 2$ 是互素整数。令 $f\colon X \to S$ 为投影 $\mathrm{p}_S\colon \mathbb{P}^1_S \to S$ 在集合 X 上的限制，其中 X 是正规化态射 $\nu\colon \mathbb{A}^1_k \to S$ 的图 $\Gamma \subset \mathbb{A}^1_S$ 的扎里斯基闭包 $Z \subset \mathbb{P}^1_S$ 在 S 中的补集。根据构造，每个这样的 $f\colon X \to S$ 都是一个 $\mathbb{A}^1$-纤维空间，将其限制到唯一奇点 $c=(0,0)$ 的补集上时，是一个平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛；但其在 C 中包含 c 的任意扎里斯基开邻域 U 上的限制都不可能是平凡的。事实上，若存在这样的平凡化 $X|_U \cong \mathbb{A}^1_U$，则 U-概形的包含

$$\mathbb{A}^1_U \cong X|_U \hookrightarrow \mathbb{P}^1_U$$

这将延拓为一个态射 $\mathbb{P}^1_U \to \mathbb{P}^1_U$，将奇异曲线 $U = \mathbb{P}^1_U \backslash \mathbb{A}^1_U$ 双有理地映到光滑曲线 $Z|_U \cong \mathbb{A}^1_U$上，这是不可能的。尽管如此，我们看到所有这些 $\mathbb{A}^1$-纤维空间 $f\colon X \to S$ 都是 $\mathbb{A}^1$-*Spc* 中的弱等价Spc$_S$。

最后一个例子风格迥异：基底是一个正规概形，但这个例子说明了定义 4.2.5中考虑所有 纤维f： $X \to S$ 而不是只考虑 S 的闭点上的那些纤维的重要性，即使 S 是在代数闭域上定义的。

例 4.2.13. 设 k 是特征为 $p > 0$的代数闭域。考虑态射

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Spec} k[x,y] \cong \mathbb{A}^2_k := X &\longrightarrow S := \operatorname{Spec} k[t] \cong \mathbb{A}^1_k \\ (x,y) &\longmapsto x^{p^2} - y - y^{p^2+p}. \end{aligned}$$

那么， f 是一个介于 $\mathbb{A}^1$-可缩的 k-概形之间的光滑态射，其所有闭纤维均同构于 $\mathbb{A}^1_k$。事实上，给定 $\lambda \in k$，由于 k 是代数闭域，我们可以写成$\lambda = -\mu^{2p}$，其中存在某个 $\mu \in k$ 使得 $f^{-1}(\lambda)$ 等于 $\mathbb{A}^2_k$ 中方程为

$$(x+\mu)^{p^2} - y - y^{p^2+p} = 0,$$

它是 $\mathbb{A}^1_k$ 在由下式定义的闭浸入 $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^2_k$ 下的像

$$s \mapsto (s + s^{p^2+p} - \mu, s^{p^2}).$$

另一方面， f 在 $\mathbb{A}^1_k$ 的一般点上的纤维是 $\mathbb{A}^1_{k(t)}$ 的纯不可分$k(t)$-形式 Y，其方程为

$$x^{p^2} - y - y^{p^2+p} - t = 0$$

中 $\mathbb{A}^2_{k(t)}$。因此， $f : X \to S$ 不是一个 $\mathbb{A}^1$-纤维空间。然而，另一方面，由于 Y 不是 $\mathbb{A}^1$-可缩的（定义 *4.2.2*），由定义*2.1.39* 可知， f： $\mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$不是 $\mathbb{A}^1$中的相对弱等价 $\mathrm{Spc}_{\mathbb{A}^1}$。

4.3 相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性：光滑曲面

在本节中，我们继续研究维数 2 中的刻画。我们从 Choudhury-Roy 关于仿射平面唯一性的一项近期结果开始（定义4.3.1）。与曲线的情形一样，我们系统地证明：对光滑曲面而言，仿射性是 $\mathbb{A}^1$-可缩性的推论（定义4.3.3）。这一看似简单的事实实际上使我们得以推广上述仿射平面在完美域上的唯一性（定义4.3.4），而将不完全域上的情形留作开放问题。我们将借助非平凡的 k-形式理论，即 $\mathbb{A}^2_k$ 的形式，对不完全域稍作离题讨论。最后，所有这些将使我们能够陈述 Dedekind 概形 D 在相对维数 2 中的一个优美刻画（定义4.3.11）。作为推论，我们还刻画了 D 上的仿射平面（定义 4.3.13），并在此背景下陈述 Zariski 消去问题（定义 4.3.14）。

4.3. 域上的 $\mathbb{A}^n$-可缩性

回顾第 1.2.1 节可知，仅凭拓扑可缩性并不足以刻画仿射平面。另一方面，来自双有理几何的工具，例如对数 Kodaira 维数（通常 Kodaira 维数的仿射版本），已被证明对于研究由诸如定义 1.2.2、定义1.2.3 的曲面及其广义乘积所产生的奇异复结构非常有用（见 [Zai00，§1.5]）。刻画仿射平面的思想萌芽主要源于 Miyanishi 经由 $\mathbb{G}_a$- 作用 [Miy75] 所做的工作。然而，Choudhury-Roy 最近证明（ [CR24a，定理 1.1]），$\mathbb{A}^1$-可缩性是比拓扑可缩性和对数 Kodaira 不变量强得多的不变量，就 $\mathbb{A}^2$的刻画而言。我们现在将陈述他们的定理，并概述其证明中所涉及的机制。

定理 4.3.1. 域 k 上的光滑仿射曲面 X 在特征零条件下是 $\mathcal{H}(k)$ $\mathbb{A}^1$-可缩的，当且仅当其同构于 $\mathbb{A}^2_k$。

证明策略

Miyanshi-Sugie 的工作（[Miy81，§4.1],[MS80]）为代数闭域 k 上的非奇异仿射曲面 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 提供了一个代数刻画，其中该域具有$X \cong \mathbb{A}^2$ 特征零；他们证明了

- A 是一个唯一分解整环，且 $A^\times = k^\times$,
- X 具有对数 Kodaira 维数 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$。

假设 $\mathbb{A}^1$-可缩性 X，我们得到皮卡群是平凡的，且单位群 $\mathbb{G}_{m,\ k}(X) \cong k^\times$。剩下要证明的是 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$。为此，[CR24a，§4] 中的作者研究了簇被 的像支配这一概念 $\mathbb{A}^1$，简单来说，就是“能够用仿射直线覆盖给定的簇”。

定义 24。特征零域上的 A^n-簇 X 称为

(a) 被 $\mathbb{A}^1$ 的像支配，若存在一个开稠密子集 $U \subset X$，使得对每个 $p \in U(k)$，都存在一个 $\mathbb{A}^1$ 穿过 X，即存在一个从 $\mathbb{A}^1 \to X$ 出发的非恒定态射，其像包含 p)
(b) $\mathbb{A}^1$- 单有理覆盖的，若存在一个主导泛有限态射 $H\colon \mathbb{A}^1_k \times_k Y \to X$，其中某个 k-簇为 Y

一般来说，我们有 $(b) \implies (a)$；但如果基域 k 是不可数的，那么我们有 $(a) \iff (b)$。利用这类 $\mathbb{A}^1$-连通性结果，Choudhury-Roy 证明了一个关键事实：对于代数闭域 $\mathbb{A}^1$上任意一个特征零的 k -连通曲面，以下情形之一必然成立（[CR24a，定理 4.9]）：

- 存在一条非常数的 $\mathbb{A}^1$，经过所有 $x \in X(k)$，
- 存在一个非常值态射 $H : \mathbb{A}^1_Y \to X$，其中 $Y \in \mathrm{Sm}_k$ 不可约，且 H 的像的闭包维数至少为 2。

因此，当 k 不可数时，上述结论表明 X 必须是 $\mathbb{A}^1$-单有理的，由 [Iit77] 可知其对数 Kodaira 维数为负。现在，给定任意一个特征零域 k，我们的思路是将 k 嵌入为不可数代数闭域 L 的子域，并将扩张 L/k 表示为 k 的有限生成子扩张的滤过余极限。翻译成代数几何术语，这些扩张对应于带有仿射过渡映射的（仿射）光滑概形之间的态射；因此，由 [MV99，推论 1.24] 在拉回下保持 $\mathbb{A}^1$-可缩性，即 $X_L := X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} L$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-可缩簇。在前述论证的支持下，我们得到 $X_L \cong \mathbb{A}^2_L$。换言之，X 是 $\mathbb{A}^2$ 的一个 k-形式。最后，注意到根据 [Kam75，定理 3]，这必定是一个平凡的 k-形式，因此 $X \cong \mathbb{A}^2_k$。

因此，我们得到：一个复仿射曲面 X 是 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ 当且仅当它拓扑可缩且 $\mathbb{A}^1$-连通。因此，回到第1.2.1节的讨论，这一结果证明了 Ramanujam 曲面和 tom Dieck-Petrie 曲面不可能是 $\mathbb{A}^1$-连通的，这也独立地意味着它们既不是 $\mathbb{A}^1$-链连通的，也不是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。此外，定义 4.3.1 还回答了 [DPØ19中的问题 2：34] 任意 $\mathbb{A}^1$-可缩曲面确实具有负对数 Kodaira 维数（因为它们是$\mathbb{A}^1$-连通的！）。为此，对于光滑仿射曲面 X，我们有以下蕴含关系：

$$\mathbb{A}^1\text{-contractible} \implies \mathbb{A}^1\text{-connected} \implies \mathbb{A}^1\text{-uniruled} \implies \bar{\kappa}(X) = -\infty$$

既然如此，自然会提出以下扩张问题。

问题 4.3.2。 我们能否将定义 *4.3.1* 推广到任意域上？

4.3.2 推广到完美域

我们将首先证明，仿射性是 $\mathbb{A}^1$-可缩性对光滑曲面的一个推论（定义4.3.3），并将定义4.3.1 推广到完美域上（定义4.3.4）。

引理4.3.3. （*[DMVØ]*）任意光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲面必然是仿射的。

证明。 在此证明中，我们将用到穿孔管状邻域的稳定同伦型中的论证（参见第C.2节）。为证明一个光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩曲面 X 是仿射的，只需证明 X 是无穷远处连通，即对任意 $X \hookrightarrow X$ 的光滑完备化 X，其边界 $\partial X = X \setminus X$ 是一个连通概形。现在先假设 X 确实无穷远处连通。由曲面奇点消解的存在性，

¯我们可以假设 ∂X 是 X上的简单正规交叉（SNC）除子。由于 X是 $\mathbb{A}^1$-可缩的， $\mathcal{O}_X(X)^* = k^*$ 且 Pic(X) 平凡，由此可知¯ ¯Pic$(X) \cong$ Cl(X) 等于由¯ Cl(X)中 ∂X的不可约分支的除子类生成的自由阿贝尔群。如果 ∂X 还连通，那么应用 [Fuj82, P. 512, Theorem, item 3], 的证明，可得 ∂X 是 X上一个有效丰除子的支撑，这意味着 X 是仿射的。

现在还需证明，光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩曲面在无穷远处连通。为此，我们利用稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦型在无穷远处的一个关键性质： X 在无穷远处的稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦型（在稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 SH(k) 中）与 $\mathbb{A}^2_k$ 的稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦型（参见定义 C.2.4）同构，尤其与光滑连通概形 $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\}$ 的 $\mathbb{P}^1$-悬挂谱 $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\})_+$ 同构。结合 [DDØ22] 中关于光滑 SNC 紧化_X 中 X 的边界因子 $\partial X = X \setminus X$ 所给出的 X^- 在无穷远处的稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦型的描述，这一同构说明 ∂X 必须是连通的。

□

本质上，利用这样一个强有力的事实：任意光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲面自动是仿射的，我们可以将定义4.3.1 推广到完美域。

定理 4.3.4. *[DMVØ]*一个光滑曲面 X 在完美域上 k 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，当且仅当$\mathcal{H}(k)$它同构于 $\mathbb{A}^2_k$。

证明。一个方向显然： $\mathbb{A}^2_k$ 是任意域 k 上的一个 $\mathbb{A}^1$-可缩曲面。假设 X 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，那么根据定义 4.3.3， X 是仿射的。本质上，一旦我们知道 X 是一个仿射的 $\mathbb{A}^1$-可缩光滑曲面，就可以通过调整 [Rus81; CR24b] 中的论证得到证明。首先，回顾由 [Kam75] 可知， $\mathbb{A}^2$ 在完美域上没有非平凡形式。因此，只需证明将 X 基变换到 k 的代数闭包后与 $\mathbb{A}^2$ 同构。于是，不失一般性，以下假设 k 是代数闭域。由于 X 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，因此特别是 $\mathbb{A}^1$-连通的。所以， [CR24b，定理 2.3]，推出存在一个不可约光滑的 k-概形 W，以及一个非常值同伦 $H : W \times_k \mathbb{A}^1_k \to X$，使得 $H(0)$ 是支配的。现在， [CR24b，推论 2.4] 告诉我们，代数闭特征零域上的任意 $\mathbb{A}^1$-连通 k-簇都具有负对数 Kodaira 维数。然而，鉴于曲面存在奇点消解，这一事实也可推广到完美域，此时有适当的对数 Kodaira 维数理论扩张可用（对此的详细介绍，见 [Rus81]）。此外， X 的 $\mathbb{A}^1$-可缩性意味着 $\mathcal{O}_X(X)^* = k^*$，且 Pic(X) 平凡；另外，我们还有 X 也是仿射的（定义 4.3.3）。因此，援引 [Rus81，定理 2] 即得结论。

□

推论 4.3.5。 *[DMVØ]* 设 X 是基概形 S上的任意光滑分离概形，其剩余域均为完美剩余域。则典范态射 $f : X \to S$ 是 $\mathbb{A}^1$中的相对 Spc$S$ 相对维数 *2* 的弱等价，因此 X 是一个 $\mathbb{A}^2$纤维化类空间。

证明。 对于任意点 $s \in S$，考虑沿 f 的基变换 谱 $\kappa(s) \to S$。根据定义 2.1.39，每个纤维 $X_s \to$ 谱 $\kappa(s)$ 都是相对 $\mathbb{A}^1$弱等价。根据定义4.3.4，我们有 $X_s \cong \mathbb{A}^2_{\kappa(s)^\circ}$ □

话虽如此，我们要指出，在正特征域上，这种刻画仍相当开放，这在很大程度上取决于能否为 k-簇建立适当的（可分） $\mathbb{A}^1$-单有理性概念。

4.3.3 k 上的非平凡形式

分析定义证明的一种方法4.3.4 在不完全域上的情形，是研究并分类仿射平面的可能 k-形式 $\mathbb{A}^2_k$。下面的例子表明，非平凡的 k-形式 $\mathbb{A}^2$ 未必 $\mathbb{A}^1$-可缩。

例 4.3.6。设 k 是特征为 $p > 0$ 的域，且 k' 是 k 的次数为 p 的纯不可分扩张，因此 $k' = k(t^{\frac{1}{p}})$，其中 t 是 $k^\times$ 中一个不是 p 次幂的元素（实际上，任意这样的元素都可以）。那么商

$$U = (\mathfrak{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'})/\mathbb{G}_{m,k}$$

其中 $\mathfrak{R}_{k'/k}$ 表示 *Weil* 限制（参见第 C.1节），它是一个维数为k的光滑连通么么 $p-1$群。具体而言，根据 *Osterlé*（[Oes84]），U 同构于 $\mathbb{G}_a^p$，k 的一个子群，该子群由以下方程定义

$$x_0^p + tx_1^p + \cdots + t^{p-1}x_{p-1}^p - x_{p-1} = 0.$$

根据 *[Ach19，§4，1]*, 我们有 $\mathrm{Pic}(U) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。特别是，这意味着 U 不能是一个$\mathbb{A}^1$-可缩的 k-簇。

为什么 $\mathrm{Pic}(U)$ 是非平凡的?

为证明 $\mathbf{Pic}(U)$ 是非平凡的，我们利用 $\mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,\,k'}$ 同构于 $\mathbb{A}^p_k$ 的主开子集 $N_{k'/k} \neq 0$，其中 $N_{k'/k}$ 是该域扩张的范数，由此可得

$$H^0(\mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'}, \mathcal{O}^*_{\mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'}})/k^* = N_{k'/k}$$

and

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'}) = H^1(\mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'}, \mathcal{O}^*_{\mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'}}) = 0.$$

由以下 k-群概形的正合列

$$0 \to \mathbb{G}_{m,k} \to \mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'} \to U \to 0,$$

以及 $H^0(U, \mathcal{O}^*_U) = k^*$，我们得到短正合列

$$1 \to H^0(\mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'}, \mathcal{O}^*_{\mathrm{R}_{k'/k}\mathbb{G}_{m,k'}})/k^* = \mathbb{Z}\langle N_{k'/k}\rangle \to H^0(\mathbb{G}_{m,k}, \mathcal{O}^*_{\mathbb{G}_{m,k}}) \cong \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(U) \to 0$$

其中， $N_{k'/k}$ 在 $\mathbb{Z}$ 中的像恰为 p，由此可得 Pic(U) $\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。此外，根据 Osterlé（[Oes84]），已知群 U 是 k-绕的：每个 k-态射$\mathbb{A}^1_k \to U$ 都是常值的，其像为 U的一个 k-有理点。蒂茨提出的 k-绕的传统定义要求不存在非恒定的 k-群概形同态 $\mathbb{G}_{a,k} \to U$，但这一性质等价于先验上更强的要求，即不存在非恒定态射 $\mathbb{A}^1_k \to U$ （参见 [CGP15，命题 B.3.2]，其中给出了证明）。

备注 4.3.7。 我们知道， $\mathbb{A}^2$ 在可分闭扩张 k上不允许存在非平凡的 *[Kam75，定理 3]*。通过更仔细地观察 *Osterlé* 的构造（*[Oes84]*）的性质，可以自然地联系到*[CR24b]* 的研究方法：证明当 k 是特征零的代数闭域时，一个光滑的$\mathbb{A}^1$-连通 k-簇允许从 $\mathbb{A}^1_k$出发的非恒定态射。

鉴于上述例子，我们提出以下自然问题。

问题 4.3.8。 *[DMVØ]* 是否存在一个非平凡的 k-形式 $\mathbb{A}^2_k$，其定义在非完美域 k 上并且 $\mathbb{A}^1$-可缩?

任何满足上述问题的候选对象都将为不完全域上关于 $\mathbb{A}^2$ 的刻画提供一个反例。

4.3.4 相对维数 2

回忆一下，戴德金概形 是一个分离的整局部诺特概形 D，其闭点处的局部环是离散赋值环。典型例子包括域的 Zariski谱、戴德金整环的 Zariski谱（例如数域的整数环），以及域上的光滑曲线。

我们先介绍 A. Sathaye 的一个定理。用代数几何的语言来说，该定理表明，特征为零的离散赋值环上的任意 $\mathbb{A}^2$-纤维空间必定是扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^2$-丛。

定理 4.3.9。 设 R 是一个等特征零的秩一离散赋值环。设 R 的唯一极大理想为 tR。设 $K = Quot(tR)$ 和 $k = R/tR$，并设$A = R[X_1, \ldots, x_n]$ 是 R上的一个仿射整环，使得

$$A \otimes_R K \cong K^{[2]} \quad and \quad A \otimes_R k \cong k^{[2]}.$$

于是 $A \cong R^{[2]}$。

证明。 这归功于 [Sat83，定理 1]。 □

注记 4.3.10. 关于嵌入问题第 *3.2.1* 节，本定理为仿射三维空间给出了如下解答：设 k 是一个特征零域。设 $f \in k^{[3]}$ 是多项式环 $k[X, Y, Z]$ 中的一个元素。此外，假设

$$k[X, Y, Z] \otimes_{k[f]} k[f] \cong k(f)^{[2]}$$

且所有偏导数在 k^3 中没有公共零点，即，

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial Z} = 0.$$

那么，对于任意 $\lambda \in k$，都有 $k[X,Y,Z]/(f-\lambda) \cong k^{[2]}$。换言之，这意味着

$$k[X,Y,Z] \cong k[f]^{[2]}.$$

有关更多背景知识，请参阅 *[Sat83；Miy84]*。

就我们的目的而言，重要的结果（定义 4.3.9）结合动机同伦论中的函子性，为我们提供了以下结构定理（定义 4.3.11），并由此得到对 $\mathbb{A}^2$ 在相对维数 2 情形下的优雅刻画（定义 4.3.13）：

定理 4.3.11。 *[DMVØ]* 设 X 是一个相对维数为 2 的光滑概形，其定义在一个 *Dede-kind* 概形 D 上，且剩余域的特征为零。此外，设典范态射 $f\colon X \to S$ 是仿射的。那么，以下条件等价：

1. f 是一个相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价，取值于Spc_S，
2. f 是扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^2$丛。

证明。 蕴含关系 (2) $\Longrightarrow$ (1) 显然：扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^2$-丛是相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价。反过来，假设 X 相对$\mathbb{A}^1$-可缩，且在 D上维数为 2。于是，根据定义 4.3.5， $f\colon X \to D$ 是特征零离散赋值环上的一个$\mathbb{A}^2$-纤维空间。由定义 4.3.9，结论显然成立。

□

假设 $f\colon X \to D$ 是仿射态射这一条件不可或缺；与一维情形相比（在一维情形中不需要这一假设），这引出了以下问题：

问题 4.3.12。 *[DMVØ]*是否存在一个相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的 $\mathbb{A}^2$-纤维空间 $f\colon X \to D$，使得 f 不是仿射态射？

根据定义 4.3.11，我们得到戴德金概形上的仿射平面的唯一刻画。

推论 4.3.13. *[DMVØ]* 一个光滑仿射概形 $f\colon X \to D$ 在一个仿射戴德金概形 D 上，其剩余域的特征为零，同构于 $\mathbb{A}^2_D$ 当且仅当以下两项均成立：

1. X 是 $\mathcal{H}(D)$ 中的一个光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩曲面，且
2. 相对微分典范层ω_f 是平凡的。

证明。 其中一个方向是显然的：仿射空间 $\mathbb{A}^2_D$ 是光滑的、 $\mathbb{A}^1$-可缩的，且相对典范层$^{\omega_{\mathbb{A}^2_D/D}}$ 是平凡的。

反过来，假设：由定义 4.3.11 可知， $f\colon X \to D$ 是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^2$-丛。由于 D 是仿射的，由 [BCW76，定理 4.9]，可知，映射 $f\colon X \to D$ 实际上在 D 上同构于向量丛 $p\colon E = \text{谱}_D(\text{Sym}^\bullet \mathcal{E}) \to D$，其中 D上的某个秩为 2 的局部自由层为 $\mathcal{E}$。取相对微分，可得 $p^*\mathcal{E} \cong \Omega f$，进而应用行列式函子可得 $p^*(\det\ \mathcal{E}) \cong \omega_f$。另一方面，由于 D 是一维的，由 [Ser57，定理 1] 可知， $\mathcal{E}$同构于 $\mathcal{O}_D$与某个可逆层 $\mathcal{L}$的直和，且 $f^*\mathcal{L} \cong \omega_f$。由于 $f^*\colon \text{Pic}(D) \to \text{Pic}(X)$是一个同构，$\omega_f$ 的平凡性等价于 $\mathcal{E}$ 的平凡性，结论得证。

□

相对曲面的扎里斯基消去问题

一个重要推论是，在某些戴德金概形上，扎里斯基消去问题的相对版本成立。

推论 4.3.14。 *[DMVØ]* 设 D 是一个剩余域为特征零的仿射戴德金概形。那么，对于一个在戴德金概形 $f\colon X \to D$ 上相对维数为 *2* 的光滑仿射概形 D，同构$X \times_D \mathbb{A}^1_D \cong \mathbb{A}^3_D$ 蕴含 $X \cong \mathbb{A}^2_D$。

证明。 同样，给定的同构 $X \times_D \mathbb{A}^1_D \cong \mathbb{A}^3_D$ 蕴含 $\omega_{\mathbb{A}^3_D/D} = p_1^*\omega_f \otimes p_2^*\omega_{\mathbb{A}^2_D/D} \cong p_1^*\omega_f$，而由此诱导的皮卡群同构 $p_1^*\colon \text{Pic}(X) \to \text{Pic}(X \times_D \mathbb{A}^2_D)$ 蕴含 ω_f必为平凡的。但 X 稳定同构于仿射空间，这意味着 X 最终是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，且 $\mathcal{H}(D)$ (参见第 3.2.5 节的参考文献)。所需结论现由定义 4.3.13 得出。

□

定义的反例4.3.11 在特征 $k = p > 0$

以下例子表明，定义4.3.11 的类似结论在正特征下不成立。

例 4.3.15. 设 k 是特征为 $p > 0$的域。考虑仿射三维簇$V = \text{谱}\, R$，其中

$$R = \frac{k[X, Y, Z, T]}{\langle X^m Y - Z^{p^e} - T - T^{sp}\rangle} \quad \textit{where} \quad m \geq 2, \quad p^e \nmid sp \textit{ and } sp \nmid p^e.$$

定义映射 $\pi_x : V \to \mathbb{A}^1_k$，它是到 X坐标的投影。该映射 π_X是一个 $\mathbb{A}^2$-纤维空间。由 *[Asa87，定理 3.4]*，可知，环 R 在稳定意义下是 $k[X]$上的多项式环。特别地，这表明仿射簇 V在 $\mathcal{H}(\mathbb{A}^1_k)$ 中相对$\mathbb{A}^1$-可缩，因此在 $\mathcal{H}(k)$ 中也 $\mathbb{A}^1$-可缩。然而， π_X 不是扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^2$-丛（同上，定理 *5.1*）。

下面的例子给出了一个 $\mathbb{A}^2$-纤维空间，它定义在一个离散赋值环上，且该环的剩余域具有正特征。这展示了扩展定义4.3.14。

例 4.3.16。 设 R 是一个诺特整环， p 是 R 中任意一个非可逆素因子。取 π 为 R 中任意一个非可逆的非零因子。定义一个 R-代数

$$A = R[X, Y, Z]/\langle -X^{p^e} + Y + Y^{sp} + \pi Z \rangle,$$

其中 e， s 为正整数，使得 $sp \nmid p^e$ 且 $p^e \nmid sp$。则对于仿射簇f： X： $=$ 谱 $A \to$ 谱 R，根据 *[Asa87，推论 5.3]*:

1. 映射 f： $X \to$ 谱 R 是一个 $\mathbb{A}^2$-纤维空间（定义 20），
2. 仿射簇 X 是稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩的，即 $X \times_{\operatorname{Spec} R} \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^3$
3. 该仿射簇不是仿射平面， $X \ncong \mathbb{A}^2_R$。

性质 *(2)* 与 *(3)* 给出了在A上 *Zariski* 消去问题的否定解。

小插曲

设 X 为域 k 上维数为 $n < 3$ 的光滑概形。于是，由于我们在本章中所给出的刻画结果，我们得到如下优美的刻画：

- X 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的 $\iff$ $X \cong \mathbb{A}^n$，因此其对数 Kodaira 维数为负，$\bar{\kappa}(X) = -\infty$。当 $n = 2$ 满足 k 不可数时， X 为 $\mathbb{A}^1$-连通已蕴含 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$ （然而，反过来并不成立：取 $X = \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1_k$）。

这不禁让人思考以下问题。

问题 4.3.17. 在何种程度上， $\mathbb{A}^1$-可缩性蕴含从维数 ≥ 3起的 $\mathbb{A}^1$-链连通性，反之亦然？

问题 4.3.18。 从维数 ≥ 3 开始，可缩簇是否具有负的对数 *Kodaira* 维数，反之亦然？

4.4 高维中的相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性

从相对维数 $\mathbb{A}^n$ 起，关于扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛在 $n \geq 3$-可缩性意义下的刻画便不再成立。本章将阐释这一观点，并给出几何证明，说明 $\mathbb{A}^n$-纤维丛能够产生大量相对 $\mathbb{A}^1$-可缩概形的例子（定义 4.4.3）。我们将通过一个具体示例加以说明（定义 4.4.5）。

高维 $\mathbb{A}^n$ 的刻画

从维数 $\mathbb{A}^1$ 起，即使在“最友善”的基域上，仿射空间在 $n \geq 3$-可缩性意义下的刻画也不再成立。对于正特征域，结合第 3.2.4 节讨论的扎里斯基消去问题的否定解与定义 3.2.14，即可得出这一结论。在特征零域上，Koras-Russell 三维簇给出了首批光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩簇的例子，它们不同构于 $\mathbb{A}^3_k$；这些簇在第 3.2.3 节中已有介绍（我们将在第 5 章详细研究这一族簇）。

在高维情形下，Asok-Doran 的出色工作 [AD07]证明了从维数 $n \geq 4$起，存在大量光滑 n-概形，它们是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，但不同构于 $\mathbb{A}^n$。他们通过在仿射空间上构造处处稳定的 $\mathbb{G}_a$-作用来证明这一点，其商严格拟仿射。为此，他们利用了一种代数刻画(同上，定理 *4.20*)，从本质上说，该刻画描述了给定的 $\mathbb{G}_a$-作用何时处处稳定。他们的主要结果如下（[AD07，定理 5。1]）：

定理。 对于每个 $m \geq 4$，都存在一个可数无限族两两不同构的 m 维奇异 $\mathbb{A}^1$-可缩簇，每个簇都可嵌入到一个光滑仿射簇中，且其边界光滑并具有纯余维二。

事实上，从维数 ≥ 6开始，存在一个奇异光滑簇的模空间，这些簇源自幺幂群在仿射空间上作用所得的商。为方便读者，我们在下文列出其陈述（[AD07，定理 5。3]）。

定理。 对于每个 $m \geq 6$ 和每个 $n \geq 0$，都存在一个连通的 n维概形 S，以及一个相对维数为 m的光滑态射 $f\colon X \to S$，其在k-点上的纤维是 $\mathbb{A}^1$-可缩、严格拟仿射且互不同构的。

需要指出的是，通过这一构造得到的所有簇都是严格[2] 拟仿射光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩概形，且不同构于 $\mathbb{A}^n$。事实上，这类现象最简单的原型——一个光滑的（奇异）四维簇——早已由 Winkelmann 在复几何的背景下研究过。

定理 4.4.1。 以下结果是根据*[Win90, §2]*中的若干结果整理而成：

1. 存在一个幺幂群 $U \cong (\mathbb{C}^1, +)$在 $\mathbb{C}^5$ 上的作用，该作用由某个二次变换给出，使得商 $X = \mathbb{C}^5/U$ 与 $\mathbb{C}^4$微分同胚，但不双全纯同构。特别地， X 是一个严格拟仿射簇，同时也是一个非 *Stein* 流形（因此 $X \ncong \mathbb{C}^4$）。

2. 存在一个幺僻群 $U \cong (\mathbb{C}^2, +)$-作用于 $\mathbb{C}^6$，该作用由某个仿射线性变换给出，使得商 $X = \mathbb{C}^6/U$ 与 $\mathbb{C}^4$微分同胚，但

[2]拟仿射但非仿射，例如 $\mathbb{A}^n \backslash \{0\}$，对于 $n \geq 2$

并不双全纯。特别地， X 是一个严格拟仿射簇，同时是一个非 *Stein* 流形（因此 $X \ncong \mathbb{C}^4$）。

稍后我们将重新探讨这一原型（参见定义4.4.5）。这些结果引人深思，我们可以考虑以下问题（[AD07，问题 5。10]）：

问题 4.4.2. 是否存在一个由 $\mathbb{G}_a$ 作用于 $\mathbb{A}^4$ 所得的三维拟仿射商？。

作为一个特例，已有研究表明，任何处处稳定的 $\mathbb{G}_a$ 作用在 $\mathbb{A}^4$上，若其对应于三角局部幂零导子，则总会产生一个仿射空间商，即 $\mathbb{A}^4/\mathbb{G}_a \cong \mathbb{A}^3$ ([DFR04，定理 2。1])。

因此，与我们对低相对维数的分析一致，通过 n-纤维空间来刻画仿射 $\mathbb{A}^n$-空间的研究纲领在高维中行不通。换言之，对于每个 $n \geq 3$，现在都可以构造相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的概形，而它们不再是 $\mathbb{A}^n$-纤维空间。本节将给出若干例子来说明这一事实（请注意，在某些假设下，这在低相对维数时也会失效：参见定义4.2.11 和定义4.2.12）。

4.4.1 通过 $\mathbb{A}^n$-纤维空间构造 $\mathbb{A}^1$-可缩概形：一种几何证明

在 [ADF17], 中，作者研究了动机球面由含幺交换环上的光滑概形表示的可表性 k，并证明某一族（分裂的）光滑仿射四次超曲面 Q_{2n} 在 $\mathbb{A}^{2n+1}$ （定义见下文）具有动机球面的$\mathbb{A}^1$-同伦类型（见第5.3.1节），从而解决了这些动机球面类的可表性问题。

$$\begin{aligned} Q_{2n-1} &:= \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] / \langle \sum_i x_i y_i - 1 \rangle \\ Q_{2n} &:= \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z] / \langle \sum_i x_i y_i - z(1+z) \rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

特别地， [ADF17，定理 2.2。5] 表明，对于任意交换环 k,

$$Q_{2n-1} \simeq (S^1)^{n-1} \wedge (\mathbb{G}_m)^n (\mathbb{P}^1)^{\wedge n} \quad \text{and} \quad Q_{2n} \simeq (S^1)^n \wedge (\mathbb{G}_m)^n \quad \text{for all } n \geq 0. \tag{4.2}$$

这些结果已知在 S^1-稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴中成立，这归功于Morel（见同上，第2页），而式（4.2）表明它甚至在非稳定情形下也成立！该证明本质上考虑到Sm_k 配备了Nisnevich拓扑，从而使动机纯性（定义2.1.56）发挥作用。在同一篇论文中，他们还构造了如下例子：设

$$E_n := \{x_1 = \cdots = x_n = 0; z = -1\} \subset Q_{2n}$$

为 $\mathbb{A}^{2n+1}$的闭子概形。然后通过设定，

$$X_{2n} := Q_{2n} \backslash E_n \subset \mathbb{A}^{2n+1}$$

他们证明，这些子簇中的每一个 X_{2n} 都是严格拟仿射簇，且为 $\mathbb{A}^1$-可缩于谱 k。此外，他们还证明， X_{2n}并不能作为仿射空间上幂零群作用的商而得到。这与拓扑学形成鲜明的二分对照：在拓扑学中，每一个这样的可缩空间确实都是仿射空间的自由商。结合我们的语境，我们证明，所有这些 X_{2n}都给出了大量 $\mathbb{A}^1$-可缩概形相对于仿射空间基的例子。为使这一点更易理解，我们现在证明如下事实： $\mathbb{A}^n$-纤维空间总是构成一类相对 $\mathbb{A}^1$-可缩空间（定义4.4.3）。其一个主要推论是，光滑拟仿射子簇 X_{2n}（即上文所构造者）甚至成为相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的。下述定理本质上是 Asanuma 稳定结构定理的推论，见第3.2.5节。

定理 4.4.3。 *[DMVØ]* 设 $f\colon X \to S$ 是一个分离的 $\mathbb{A}^n$上正则概形的 A^n-纤维空间 S。那么 X 是一个相对 $\mathbb{A}^1$-可缩概形，其中 $\mathcal{H}(S)$。

证明。注意，关于 $f\colon X \to S$ 所作的假设，在将 S 基变换到由扎里斯基仿射开子集构成的覆盖上时保持不变。由此可知，不失一般性，我们可以假设 S 是仿射的。事实上，这可由 $\mathbb{A}^1$-可缩性的局部性质推出——是否为 Nisnevich 局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，可以在仿射开邻域上检验。由于 S 正则且 $f\colon X \to S$ 是光滑分离态射，因此 X 是分离正则概形。于是，根据 Jouanolou–Thomason 同伦引理（例如参见 [AØ21，引理 3.1.4]），存在一个扎里斯基局部平凡主齐性空间 $\rho\colon V \to X$，其结构群为向量丛 $p\colon E \to X$，设其秩为 r，且其全空间 V 是仿射概形。对于每个点 $s \in S$，诱导出的 E_s-主齐性空间

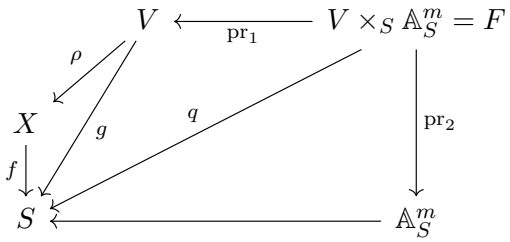
$$\rho_s : V_s \to X_s \cong \mathbb{A}^n_{\kappa(s)}$$

同构于平凡的 $p_s\colon E_s \to X_s$ 因为 X_s 是仿射的。另一方面， E_s 同构于 $X_s \cong \mathbb{A}^n_{\kappa(s)}$ 上的平凡向量丛，这由 Quillen-Suslin 定理得出 [Qui76], 我们得出 $\rho_s\colon V_s \to X_s$ 同构于平凡的 $\mathbb{A}^r$- 丛

$$\mathrm{pr}_2 : \mathbb{A}^r_{\kappa(s)} \times_{\kappa(s)} \mathbb{A}^n_{\kappa(s)} \to \mathbb{A}^n_{\kappa(s)}.$$

因此， $g = f \circ \rho\colon V \to S$ 是一个仿射 $\mathbb{A}^{n+r}$-纤维空间，其基底是正则仿射概形S。现在由 [Asa87，推论 3。5] 可知存在 $m \geq 0$ 使得$g \circ \mathrm{pr}_1\colon V \times_S \mathbb{A}^m_S \to S$ 同构于一个向量丛 $q\colon F \to S$ 其秩为 $n + r + m$

在 S 上。



这尤其意味着

$$g \circ \mathrm{pr}_1 : V \times_S \mathbb{A}^m_S \to S$$

在 Spc$S$ 中是 $\mathbb{A}^1$-弱等价。由于 $\mathrm{pr}_1 : V \times_S \mathbb{A}^m_S \to V$ 在 Spc$V$ 中是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，因此根据定义 2.1.36 (2)，它在 Spc$S$ 中也是如此；由定义2.1.37可知，$g : V \to S$ 在 Spc$S$ 中是 $\mathbb{A}^1$-弱等价。另一方面，由于 $\rho : V \to X$ 在 Spc$X$ 中是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，因此根据定义 2.1.36 (2)，它在 Spc$S$ 中也是如此；我们再次由定义 2.1.37 得出，$f : X \to S$ 在 Spc$S$ 中是 $\mathbb{A}^1$-弱等价。 □

注 4.4.4. 还请注意，现在可以运用源自动机动机同伦论的高度复杂的代数技术来证明定义 *4.4.3*（例如，通过定义 *2.1.48*）。然而，我们想强调的是，此处给出的证明很有价值，因为它揭示了上述代数事实背后的几何机制！

说明性示例：$\mathbb{A}^1$-可缩光滑二次曲面族

我们证明，方程（4.1）中的光滑仿射二次曲面族，是投影到仿射空间上的向量丛的主齐性空间。特别地，这些二次曲面展示了定义 4.4.3 中分离的 $\mathbb{A}^2$-纤维空间 $f : X \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$ 其全空间严格拟仿射 X。下例还表明，[Win90] 考虑的子簇，为定义 4.4.3在相对维数 4 时提供了最简单的说明：

示例 4.4.5。 *[DMVØ]* 令 $S = \text{谱}\,\mathbb{Z}[x,y] = \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$ 并考虑光滑仿射四维簇

$$V := \{xv - yu + z(z-1) = 0\} \subset S \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}^3_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x,y][z,u,v].$$

投影 $\mathrm{pr}_1|_V : V \to S$ 是一个光滑态射，其在 $S \backslash \{(0,0)\}$ 上的限制是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^2$-丛。另一方面，$(\mathrm{pr}_1|_V)^{-1}(0,0)$ 是不交并，由两个副本组成

$$F_0 = \{x = y = z = 0\} \quad \textit{and} \quad F_1 = \{x = y = 0, z = 1\}$$

的 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$。将$\mathrm{pr}_1|_V$限制到 $X := V \backslash F_1$，便得到一个 $\mathbb{A}^2$-纤维空间 $f : X \to S$，其全空间 X 是一个严格拟仿射的 k-簇。由此特别可知，f 不可能是

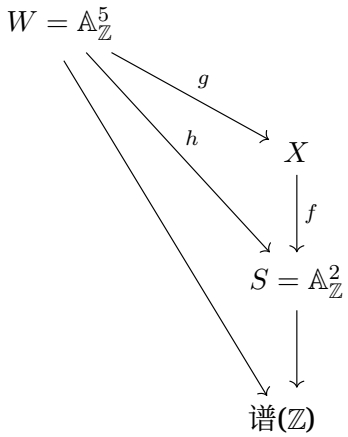
局部平凡的 $\mathbb{A}^2$-丛，既不是相对于扎里斯基拓扑，也不是相对于任何更精细的拓扑（如 *Nisnevich*、*étale*、*fppf* 或 *fpqc*）。不过，正如 *[AD07]* 首先指出的那样，X 在 $\mathbb{A}^1$上是可缩的。我们现在注意到，基本出于相同的原因，X 还具有更强的性质，即相对 $\mathbb{A}^1$在 S上可缩。具体来说，设

$$h = \mathrm{pr}_1 : W := S \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t_1, t_2, t_3] \cong \mathbb{A}^5_{\mathbb{Z}} \to S$$

是 S 上的平凡 $\mathbb{A}^3$-丛，并考虑由下式定义的 S-态射 g： $W \to X$

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (u, v, z) = (yt_3 - (xt_2 - yt_1 - 1)t_2, xt_3 - (xt_2 - yt_1 - 1)t_1, xt_2 - yt_1)$$

因此我们有如下交换图



态射 $g : W \to X$ 是一个$\mathbb{G}_{a,X}$-主齐性空间 *[Win90, §3]*，，因此根据定义 *2.1.36 (2)*，它是 *Spc*X 和 *Spc*S 中的相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价。另一方面，$h : W \to S$是一个平凡的 $\mathbb{A}^3$-丛，因此它是 *Spc*S中的相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价。根据定义 *2.1.37*，这两个性质进而意味着 $f : X \to S$ 是 *Spc*S中的相对 $\mathbb{A}^1$-弱等价。

注 4.4.6。定义 *4.4.5* 中的设定的若干高维类比已相继构造并得到研究，见 *[AD07; ADF17; ADØ23]* 由此产生了许多新的光滑严格拟仿射 $\mathbb{A}^1$-可缩概形 X，它们定义在一个仿射基概形 B 上，并具有 $\mathbb{A}^n$-纤维空间 f 的结构：$X \to \mathbb{A}^n_B$ 定义在仿射空间 $\mathbb{A}^n_B$上。例如，光滑拟仿射概形族

$$f_{n,\mathbf{m}} := \mathrm{pr}_{x_1,\ldots,x_n} : X_{n,\mathbf{m}} =: \Big\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m_i} y_i + z(z-1) = 0 \Big\} \backslash \{x_1 = \ldots = x_n = z - 1 = 0\} \to \mathbb{A}^n_B,$$

其中 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ 是正整数的多重指标。当 B 是正则的时，定义 *4.4.3* 意味着，对于这类概形，$\mathbb{A}^n$-纤维空间 $f_{n,\mathbf{m}} : X_{n,\mathbf{m}} \to \mathbb{A}^n_B$ 是 $\operatorname{Spc}^{\mathbb{A}^n_B}$ 中的一个$\mathbb{A}^1$-弱等价。进而，由于 $\mathbb{A}^n_B$ 在 B上是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，这也为所有这些概形在 B上是 $\mathbb{A}^1$-可缩的提供了另一种证明。

最后，回顾一下，Asanuma 反例（定义4.3.15）表明，Dolgačcev-Veˇisfeˇiler 猜想在正特征域上有否定答案，因此该猜想在特征零域上的情况仍悬而未决。目前已知的情形仅有 [KM78；KW85] 关于维数 1 的结果，以及 [Sat83] 关于维数 2 的结果，且基概形都包含一个特征零域。另一方面，从维数 $n \geq 3$开始，我们在本章中看到，存在许多相对 $\mathbb{A}^1$-可缩概形，它们不同构于 $\mathbb{A}^n$。因此，态射 $\mathbb{A}^1$的相对 $f\colon X \to S$ -弱等价通常并不能让我们断定 X 是一个 $\mathbb{A}^n$-纤维空间，即使 $n \geq 3$ 成立。并且，即便我们确知 X 是一个 $\mathbb{A}^n$-纤维空间，也无法判断它是否为扎里斯基拓扑（甚至更精细的拓扑）下的局部平凡 $\mathbb{A}^n$-丛！

切勿盖过主人的风头。

罗伯特·格林著《权力的48条法则》

5 Koras-Russell 原型与奇异动机球

本章所述结果源自论文 [MV25]。

章节摘要

我们证明了完美域上经典 Koras-Russell 三维簇的 $\mathbb{A}^1$-可缩性（定义 5.1.7）。这将使我们能够利用非稳定情形下相对数据与纤维数据之间的复杂关系（定义 2.1.48），将其相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性推广到整数上（定义 5.1.8），并进一步推广到诺特概形上（定义 5.1.9）。随后，我们研究高维 Koras-Russell 三维簇的广义原型，并将其 $\mathbb{A}^1$-可缩性推广到完美域上（定义 5.2.1），并系统地将相对可缩性推广到诺特概形上（定义 5.2.2）。作为这些结果的一项重要应用，我们将证明在无限完美域上，每个维数 ≥ 4（定义 5.3.8）中，动机同伦论都存在奇异球面。

5.1 Koras-Russell 三维簇族

回顾一下，光滑仿射概形 $X \to S$ 维数为 n 时，若称其为奇异，是指它相对地 $\mathbb{A}^1$-可缩，但作为 S-概形并不同构于仿射 n-空间 $\mathbb{A}^n_S$。此外，我们已经看到，即使假设 X 在任何“最理想”的基域上都是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，$\mathbb{A}^n_k$ 的刻画在高维情形下仍会失效。在三维情形中也是如此，而这要归因于*Koras-Russell* 三维簇，其姊妹对象早已在第 3.2.3节中介绍过。下文将详细讨论第一类 Koras-Russell 三维簇族，

该领域如今已发展成为一个独立且充满活力的研究方向，在动机同伦论与仿射代数几何之间起到衔接作用。在此基础上，我们研究这些 Koras-Russell 三维簇在高维中的原型，即任意维数 $n \geq 4$ 下所谓的广义 *Koras-Russell* 簇。

5.1.1 扩张到完美域

我们首先给出经典 Koras-Russell 三维簇的定义。

定义 25. 设 k 为任意完美域。定义第一类 *Koras-Russell* 三维簇 $\mathcal{K}$ 为由下列显式多项式方程描述的光滑仿射簇

$$\mathcal{K} := \{x^m z = x + y^r + t^s\} \subset \mathbb{A}^4_k \tag{5.1}$$

其中整数 $m \geq 2$ 和 r、 $s \geq 1$ 满足 $\gcd(r, s) = 1$。

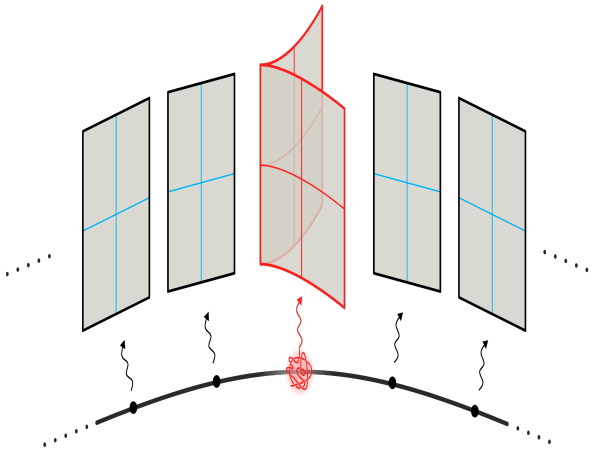


图 5.1： $\mathcal{K}$ 投影到 x轴时的纤维；一般纤维以红色表示

传统上，Koras-Russell 三维簇只在特征零域上得到广泛研究。然而，鉴于整数 r, s 互素，以及坐标“x”有助于使光滑性的雅可比判别法成立，它在任意完美域上也有良好定义。特别是，这意味着 $\mathcal{K}$ 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 以及算术曲线（例如，整数环 Spec $\mathbb{Z}$）上都有定义。仿射簇 $\mathcal{K}$ 展现了以下令人惊叹的性质：

- $\mathcal{K}$ 是拓扑可缩的（[KR97]），只要 k 可嵌入 $\mathbb{C}$,
- 这些柱体 $\mathcal{K} \times \mathbb{A}^1$ 在特征 $k = 0$下具有平凡的马卡尔-利马诺夫值，ML($\mathcal{K} \times \mathbb{A}^1$) $\cong$ ML(谱 k) ([Dub09])

- $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，无论是在稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 [HKØ16] 还是在非稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 [DF18] 中，只要基域的特征为零，

根据 Makar-Limanov 不变量可知，• $\mathcal{K}$ 与 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ 不同构：ML($\mathcal{K}$) $\ncong$ ML($\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$)。

所有这些性质使 $\mathcal{K}$ 成为 Whitehead 流形的代数几何类比$\mathcal{W}$（见第1.2.1节），因此很难构造代数不变量，将其与 $\mathbb{A}^1$-可缩光滑仿射三维簇区分开来。与~这一第一类密切相关的，还有某些第二类三维簇，$\mathcal{K}$ 如公式（3.3）所示；它们的稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩性已在 [HKØ16]中得到证明。我们很快将看到，这两类三维簇都包含一条特殊的仿射直线 $L := \{x = y = t = 0\}$。但关键步骤是得出 $\mathcal{K}\backslash L \simeq \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$；正如作者~在 [DF18] 中所指出的，对于第二类而言，这一点并非显而易见 $\mathcal{K}$。使第一类情形得以实现的主要工具是定义5.1.3 而其对应的第二类版本仍悬而未决！

在 [DF18的定理 1 中，1], 作者证明了特征零域上的第一类 Koras-Russell 三维概形的 $\mathbb{A}^1$-可缩性。在接下来的章节中，我们将证明，这一结论实际上可以推广到任意完美域以及某些基概形上。为了说明该策略的背景，我们现在将从解释 [DF18]中的相关要素开始。

5.1.2 $\mathbb{A}^1$-可缩性的非稳定性 $\mathcal{K}$

证明的基本要素是一个称为 非常弱五引理 的范畴论工具（参见定义 A.2.26）。为了将其应用于我们的情形，我们首先注意到，三维概形 $\mathcal{K}$ 包含一个由 $\{z = 0\}$ 给出的超曲面：$= P \subset \mathcal{K}$。可以证明，它与 $\mathbb{A}^2$ 同构，其坐标为 y 和 t，即 $P \cong$ 谱 $k[y, t]$。更为关键的是，$\mathcal{K}$ 还包含一条由下式给出的仿射直线：

$$L := \{x = y = t = 0\} \cong \mathbb{A}^1 \quad \text{such that} \quad L \cong \mathrm{Spec}(k[z]).$$

现在，考虑补集可知，$P\backslash L \simeq \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 属于 Spc$_k$。根据定义，簇 L 和 P 在 $\mathbb{A}^4$ 中于点 (0，0，0，0) 处横截相交，由此得到如下拉回图：

$$\begin{array}{ccc} P\backslash L \simeq \mathbb{A}^2\backslash\{0\} & \longrightarrow & P \simeq \mathbb{A}^2 \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathcal{K}\backslash L & \longrightarrow & \mathcal{K} \end{array} \tag{5.2}$$

考虑由下列交换图给出的相应余纤维序列

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^2\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2/\mathbb{A}^2\backslash\{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathcal{K}\backslash L & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K}/\mathcal{K}\backslash L \end{array} \tag{5.3}$$

鉴于定义 A.2.26，我们只需证明态射 i 与 j是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，位于 Spc_k中。

5.1. j的3 $\mathbb{A}^1$-弱等价

概形态射 $j:\ \mathbb{A}^2/\mathbb{A}^2\backslash\{0\} \to \mathcal{K}/\mathcal{K}\backslash L$ 的 $\mathbb{A}^1$-弱等价由动机同伦论中的纯性同构推出。$\mathcal{K}$ 的定义方程给出了 L 在 $\mathcal{K}$ 内部的正规锥的描述，这可通过改写看出

$$\mathcal{K} := \{x(x^{m-1}z-1) = y^r + t^s\}$$

以及正则函数（$x^{m-1}z-1$）在 L 中可逆（事实上，它等于 -1，在 L上），我们有正规锥 $N_{\mathcal{K}}(L)$ 由 y 与 t生成。将此数据与同伦纯性（定义 2.1.56）相结合，我们有

$$\mathcal{K}/(\mathcal{K}\backslash L) \simeq \mathrm{Th}(N_{\mathcal{K}}(L)) \simeq L_+ \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge 2}.$$

再次利用纯性同构，商空间 $\mathbb{A}^2/\mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 可以识别为 $(\mathbb{P}^1)^{\wedge 2}$ (例如参见 [AE17，§4。6] 或 [ADF17，§2。1])。包含 谱 $k \simeq \{0\} \hookrightarrow L \simeq \mathbb{A}^1$ 诱导出复合

$$\mathrm{Spec}\, k \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge 2} \simeq \mathbb{A}^2/\mathbb{A}^2\backslash\{0\} \xrightarrow{j} \mathcal{K}/\mathcal{K}\backslash L \simeq L_+ \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge 2}$$

这是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价（参见 [Voe03a，引理 2。1]），因此也是 j。

5.1.4 $\mathbb{A}^1$-弱等价 i

为了证明态射 $i : \mathbb{A}^2\backslash\{0\} \to \mathcal{K}\backslash L$是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，我们首先构造一个显式的 $\mathbb{A}^1$-弱等价 $g : \mathcal{K}\backslash L \to \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$，见第5.1.4节。然后利用 $\mathbb{A}^1$-Brouwer 度（定义 2.2.4）的函子性，我们证明复合 $g \circ i : \mathbb{A}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 是 $\mathbb{A}^1$中的一个 Spc_k-弱等价。

通过扎里斯基局部平凡性得到的显式 $\mathbb{A}^1$-弱等价

最终目标是通过在 $\mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 上构造一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，得到一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价 $g:\ \mathcal{K}\backslash L \to \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 考虑仿射概形 $\mathcal{K}(s):=\{x^m z = x + y^r + t^s\}$ 以及与之关联的严格拟仿射概形 $\mathcal{K}(s)\backslash\{0\}$。注意

当 $s=1$ 时，我们有 $\mathcal{K}(1):=\{x^m z=x+y^r+t\}\cong\{x^m z-x-y^r=t\}$通过坐标变换，该概形同构于 $\mathbb{A}^3_k$。因此，我们有

$$\mathcal{K}(1)\backslash L\cong\mathbb{A}^3\backslash L\simeq\mathbb{A}^2\backslash\{0\}\times\mathbb{A}^1\simeq\mathbb{A}^2\backslash\{0\}.$$

以下结果在 [DF18的命题 3 中证明，1]适用于特征零域。这里，我们证明这一技巧也可以推广到完美域。特别地，我们证明存在一个拟仿射四维簇 W，它是扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛在 $\mathcal{K}(s)\backslash L$上的全空间，对所有 $s\geq 1$均成立。这个四维簇W 是通过运用 Danielewski 纤维积技巧（[Dan89]）构造出来的。该技巧最初用于为曲面构造一个 Zariski 消去问题的反例（更多背景信息，参见 [Dub07]）。

命题 5.1.1。 *[MV25]* 设 k 为任意完美域。那么，对于每个 $s\geq 2$，都存在一个光滑严格拟仿射四维簇 W，它同时是扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛在 $\mathcal{K}(s)\backslash L$上的全空间，对所有 $s\geq 1$ 均成立。

证明。 所需的四维簇 W 构造为严格拟仿射概形在代数空间 $\mathfrak{S}$ 上的纤维积；我们将在定义 5.1.3 中证明该代数空间的存在性。

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\mathrm{pr}_s} & \mathcal{K}(s)\backslash L \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}(1)\backslash L & \longrightarrow & \mathfrak{S} \end{array}$$

定义 5.1.3 表明，对所有 $s\geq 1$，拟仿射三维簇 $\mathcal{K}(s)\backslash L$ 都具有 étale 局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛结构 $\rho:\ \mathcal{K}(s)\to\mathfrak{S}$ 纤维化于同一个代数空间 $\mathfrak{S}$之上。先验地，取纤维积

$$W:=(\mathcal{K}(1)\backslash L)\times_{\mathfrak{S}}(\mathcal{K}(s)\backslash L),$$

我们看到 W 只有代数空间的结构。但请注意，自然投影 $\mathrm{pr}_s: W\to\mathcal{K}(s)\backslash L$ (对所有 $s\geq 1$) 都是仿射态射，而 $\mathcal{K}\backslash L$ 是严格拟仿射概形，因此 W 也必然是严格拟仿射概形。这个 étale 等价也下降到扎里斯基拓扑，是因为过渡群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1)=\mathbb{G}_m\ltimes\mathbb{G}_a$ 是特殊的 [Gro58，§5]。

□

作为定义5.1.1的直接推论，我们得到了所需的结果。

推论 5.1.2. 映射 $g:\ \mathcal{K}(s)\backslash L\to\mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 对所有 $s\geq 1$都是 $\mathbb{A}^1$-弱等价。

证明。 这可由以下观察得出：扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^n$-丛保持 $\mathbb{A}^1$-弱等价（例如参见 [AØ21，引理 3.1。3]）。 □

5.1.5 在完美域上构造 $\mathfrak{S}$ 的策略

简而言之，所述代数空间的存在源于模空间理论中的一个基本事实：若代数群在概形上自由作用，则商空间存在且为代数空间（参见 [Knu06] 或 [Stacks，标记 071R]）。当 char $k = 0$ 时，在仿射簇 $\mathcal{K}$上构造这样的 $\mathbb{G}_a$-作用，等价于在其坐标环 $\Gamma(\mathcal{K})$ 上给出一个局部幂零导子 D，该作用由指数映射定义（参见 C.1 节）。然而，若 char $k = p > 0$，这种简单对应关系并非先验成立，例如，指数函数中的 $1/p!$ 并未定义良好。尽管如此，通过考虑局部有限迭代高阶导子而非单个局部幂零导子，仍可建立对应关系。前者可通过考虑 $\exp(tD)$ 的截断版本得到（例如参见 [Miy78，第一部分，§1], [Oku04，§5]）。因此，假设存在这样一族迭代高阶导子，对于 $\mathbb{G}_a$ 在 $\mathcal{K}(s)$ 上的作用，其代数商与投影 $\mathrm{pr}_{x,t} : \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^2$ 限制在 $q : \mathcal{K}(s) \to \mathbb{A}^2$ 上的映射一致，其中不动点轨迹为 L。因此，我们得到一个诱导的无不动点 $\mathbb{G}_a$- 作用于 $\mathcal{K}(s)\backslash L$，使得

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(s)\backslash L & \xrightarrow{\quad q \quad} & \mathbb{A}^2\backslash\{0\} \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & (\mathcal{K}(s)\backslash L)/\mathbb{G}_a & \end{array}$$

它经由其几何商上的一个 étale $\mathbb{G}_a$-主齐性空间分解 $(\mathcal{K}(s)\backslash L)/\mathbb{G}_a$，如上所述。所需的代数空间 $\mathfrak{S}$ 可由一个 étale 等价关系构造。考虑态射 $q : \mathcal{K}\backslash L \to \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 的纤维。注意，对于点 $x \neq 0$ 上方的纤维，扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛实际上是平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，因为若 $x \neq 0$，则存在形如 $a = f(y)/x^m$ 的元素，其中 $f(y) \in k[y]$ 是某个适当的多项式，使得 $D(a) = 1$，（即 a 是一个切片）。换言之，对于主仿射开集 $U_x := \{x \neq 0\}$ 和一个点 $b \in U_x$，有 $q^{-1}(b) \cong \mathbb{A}^2\backslash\{0\} \times \mathbb{A}^1 :=$ 谱 $k[x^{\pm 1}, t] \times$ 谱 $k[y]$。

另一方面，去心仿射直线 $C_0 := \{x = 0\} =$谱 $k[t^{\pm 1}]$ 上的纤维由 $C \times$ 谱 $k[z]$ 给出，其中

$$C := \operatorname{Spec} k[t^{\pm 1}, y]/\langle y^r + t^s \rangle.$$

曲线 $C \to C_0$ 可被识别为关于投影 $(y,\ t) \mapsto t$的次数为 r 的有限étale覆盖。这正是正特征域与特征零域的交汇点。若 char $k = p \mid r$，则无法构造如上所述的有限étale覆盖。但由于我们有 gcd $(r,\ s) = 1$，因此可以如下重新组织证明。若 $p \mid r$，则可以考虑关于另一个坐标的有限étale覆盖

$$\begin{array}{c} \operatorname{Spec} k[t^{\pm 1}, y]/\langle y^r + t^s \rangle =: C \to C_0 := \operatorname{Spec}(k[t^{\pm 1}]) \\ (y, t) \mapsto y \end{array}$$

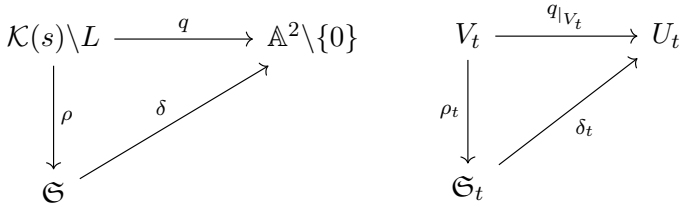
其次数为 s，其中我们仍然可以提取根（即 $(y^r)^{1/s}$ 存在于 k中），因为在这种情况下，根据互素性有 $p \nmid s$。

引理 5.1.3。 *[MV25]* 对于任意完美域 k，存在一个光滑代数空间 $\delta:\ \mathfrak{S} \to \mathbb{A}^2_k\backslash\{0\}$ 使得对于每个 $s \geq 1$，映射 $q : \mathcal{K}(s)\backslash L \to \mathbb{A}^2_k\backslash\{0\}$ 都可经由一个 ***étale*** 局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛 $\rho : \mathcal{K}(s)\backslash L \to \mathfrak{S}$。

证明的工作机制源于一条更一般的原理：通过以目标曲线的有限 étale 覆盖替代该曲线，从曲面构造代数空间（[DF14，§1.0。1]）。在我们的情形中，下面将说明策略以及此前承诺的、遵循 [DF18] 的 étale 等价。

证明。 不失一般性，设 $\operatorname{char} k = p \nmid r$。注意到严格拟仿射三维簇 $\mathcal{K}\backslash L$ 被两个主仿射开集覆盖，分别为（例如） $V_x := \{x \neq 0\}$，如上所述，这里它已经是一个平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛；以及$V_t := \{t \neq 0\}$，这里需要实施适当的修改。现在只需在 V_t 上局部构造代数空间 $\mathfrak{S}_t$，并证明它能相容地延拓为所需的全局代数空间。

我们首先证明，存在一个（局部的）代数空间 $\delta_t : \mathfrak{S}_t \to U_t$，使得 $q|_{V_t} : V_t \to U_t$ 可经由一个 étale 局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛 $\rho_t : V_t \to \mathfrak{S}_t$进行因子分解。此外，限制在交集 $U_{xt} := U_x \cap U_t$上时，经由 δ_t 的这种因子分解应为同构。这里，$U_x = \operatorname{Spec} k[x^{\pm 1}, t]$ 和 $U_t = \operatorname{Spec} k[x, t^{\pm 1}]$是 $\mathbb{A}^2\backslash\{0\}$中的对应主仿射开子集。所需的（整体）代数空间 $\delta : \mathfrak{S} \to \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 随后通过沿着 U_{xt} 以恒等映射粘合 U_x 与 $\mathfrak{S}_t$ 而得到，并满足 $\delta_t^{-1}(U_{xt}) \cong U_{xt}$。



令 $h : \operatorname{Spec} R =: C \to C_0$ 为有限 étale 映射 $h_0 :\ C_1 \to C_0$的伽罗瓦闭包，其中

$$C_1 := \operatorname{Spec}\left(k[t^{\pm 1}][y]\right)/\left(y^r + t^s\right).$$

换言之，C 给出了相对于.....的伽罗瓦闭包 κ 中 C_1 的正规化 ct
到该域扩张

$$k(t) \hookrightarrow k(t)[y]/\left(y^r + t^s\right).$$

上述伽罗瓦闭包 κ 恰好是通过向 t^s添加 r次根而得到的；由于依假设有 $p \nmid r$，这一做法是合理的。由 r 与 s的互素性，这等价于仅向 t 添加 r次根，并同时添加−1的所有 r次根。因此还需注意，κ、C_1 或 C 均不依赖于 s。由构造，这

给出一个étale G-主齐性空间 $h\colon C \to C_0$，其伽罗瓦群为 $G = \mathrm{Gal}(\kappa/k(t))$，以及一个因子分解

$$h : C \xrightarrow{h_1} C_1 \xrightarrow{h_0} C_0$$

其中 $h_1\colon C \to C_1$ 是某个指数为 r、且该指数等于 h_1 的次数的子群 $H \leq G$ 下的 étale 挠子。这对应于我们已经对 C_0 作了 r 重伽罗瓦覆盖这一事实。为完成该证明，我们证明存在一个概形 S，它由沿曲线 $C_0 \times C$ 以恒等映射粘合 $S_{\bar{g}}$ 的 r 个副本得到，其中 $\bar{g} \in G/H$，使得群 G 在 $S_{\bar{g}}$ 上自由作用，从而在代数空间范畴中给出一个几何商 $\mathfrak{S}_t := S/G$，其形式为 $\mathfrak{S}$ 上的 étale G-挠子。此外，这一局部态射粘合成一个整体的 G-不变量态射，随后下降到相应的（整体）商。由定义，该多项式

$$R[y] \ni y^r + t^s = \prod_{\bar{g}\in G/H} \big(y - \lambda_{\bar{g}}\big),$$

对某些元素 $\lambda_{\bar{g}} \in R$ 与 $\bar{g} \in G/H$ 在 κ 上分裂。于是伽罗瓦群 G 在商 G/H 上传递地作用，其作用经由

$$g' \cdot \lambda_{\bar{g}} = \lambda_{\overline{(g')^{-1}\cdot g}}.$$

由于 $h : C_1 \to C_0$ 是 étale 的，对于不同的元素 $\bar{g},\ \bar{g}' \in G/H$，元素 $\lambda_{\bar{g}} - \lambda_{\bar{g}'}$ 是 C 上的可逆正则函数。因此，我们可以找到一组元素 $\sigma_{\bar{g}(x)} \in B =: R[x]$，以及相应的剩余类$\lambda_{\bar{g}} \in R = B/xB$ 模 x，使得 G 通过以下方式作用：

$$g' \cdot \sigma_{\bar{g}}(x) \mapsto \sigma_{\overline{(g')^{-1}\cdot g}}(x)$$

以及一个 G-不变多项式 $s(x,\ y) \in B[y]$，使得在环 $B[y]$ 中，我们有

$$y^r + t^s + x = \prod_{\bar{g}\in G/G} (y - \sigma_{\bar{g}}(x)) + x^m s(x,y). \tag{5.4}$$

现在注意，在沿着 B 进行基变换后，主开子集 V_t（由 $\hat{} V_t := V_t \times_{U_t}$ 谱(B) 给出）同构于谱$(B[y,z_1])$ 中由方程定义的闭子簇

$$\hat{V}_t \cong \left\{ x^m z_1 = \prod_{\bar{g}\in G/H} (y - \sigma_{\bar{g}}(x)) \right\} \subset \mathrm{Spec}(B[y,z_1]) \tag{5.5}$$

其中 $z_1 = z - s(x,y)$。如前所述，正则函数 $\lambda_{\bar{g}} - \lambda_{\bar{g}'}$在 $g \neq g'$时可逆，闭子概形 $\{x = 0\} \subset \hat{} V_t$ 是 r-闭子概形 $D_{\bar{g}} \cong \mathrm{Spec}\, R[z_1]$ 的不交并，其对应的定义理想为 $\hat{}(x, y - \sigma_{\bar{g}}(x)) \in \Gamma(V_t, \mathcal{O}_{\hat{V}_t})$，且 G 在其上通过置换作用。此外，仿射 $\hat{}\hat{}$ 簇 V_t 被形如 $V_{t,\bar{g}}$的仿射开子集覆盖，其中

$$\hat{V}_{t,\bar{g}} = \hat{V}_t \setminus \bigcup_{\bar{g}'\in (G/H)\setminus\{\bar{g}\}} D_{\bar{g}}$$

对于 $\bar{g} \in G/H$。现在，由于根如等式（5.4）中那样分裂，我们得到了一个定义良好的有理映射

$$\hat{V}_{t,\bar{g}} \dashrightarrow \operatorname{Spec}(B[u_{\bar{g}}]), \quad (x, y, z_1) \mapsto \left(x, \frac{y - \sigma_{\bar{g}}(x)}{x^m} = \frac{z}{\prod_{\bar{g}' \in (G/H)\setminus\{\bar{g}'\}} (y - \sigma_{\bar{g}'}(x))} \right)$$

它实际上是 Spec B 上的概形同构。因此，可以验证，态射 $\hat{}q\colon V_t = V_t \times_{U_t}$ Spec $B \to$ Spec B 是忠实平坦的，并且 $\hat{}q$ 经由概形 $\hat{}\delta : S \to$ Spec B 上的一个扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛 $\hat{}\rho\colon \hat{}V_t \to S$ 分解。后一个概形 S 是通过沿主开子集，将 Spec $B \cong C \times \mathbb{A}^1$ 的 r 个副本（其中 $\bar{g} \in G/H$）按恒等映射粘合而得到的。

$$\operatorname{Spec} B_x \cong C \times \operatorname{Spec} k[x^{\pm 1}] \subset S_{\bar{g}}.$$

换言之，态射 $\hat{}\rho_t : \hat{}V_t \to S$ 是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，其局部平凡化为 $V_t \mid_{S_{\bar{g}}} \cong$ Spec$B[u_{\bar{g}}]$，而在 $S_{\bar{g}} \cap S_{\bar{g}'} \cong$Spec B_x 上的过渡函数具有如下形式：

$$u_{\bar{g}} \mapsto u_{\bar{g}'} + x^{-m}(\sigma_{\bar{g}}(x) - \sigma_{\bar{g}'}(x)).$$

$\hat{}$ G 在 V_t 上的作用下降为 S 上的无不动点作用，其局部定义为

$$S_{\bar{g}} \ni (c, x) \mapsto (g' \cdot c, x) \in S_{\overline{(g')^{-1} \cdot g}}.$$

只有当 h_0 满足以下条件时，这个 G-作用产生的商才是概形：$C_1 \to C_0$ 是同构；不过，它总是以 étale G-主齐性空间 $S \to \mathfrak{S}_t := S/G$的形式作为代数空间存在。根据 $\mathfrak{S}_t$的构造，我们得到以下笛卡尔方

$$\begin{array}{ccc} \hat{V}_t & \longrightarrow & V_t \cong \hat{V}_t/G \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{\rho}_t} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_t} \\ S & \longrightarrow & \mathfrak{S}_t = S/G \end{array}$$

其中水平映射是 étale G-主齐性空间。因此，诱导的态射 $\rho_t : V_t \to \mathfrak{S}_t$ 是 étale 局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛。接下来只需注意到 G-不变态射

$$\operatorname{pr}_1 \circ \hat{\delta} : S \to \operatorname{Spec} B \cong U_t \times_{C_0} C \to U_t$$

$\hat{}$ 下降为态射 $\delta_t : \mathfrak{S}_t \to U_t$，且 δ 在$\{x = 0\} \subset U_t$之外限制为同构。相反，在去心纤维上，$\delta^{-1}(\{x = 0\})$同构于 $C \times G/H$ 关于 G的对角作用所得的商，因此同构于$C/H \cong C_1$。因此，代数空间 $\mathfrak{S}_t$ 延拓为全局 δ 的：$\mathfrak{S} \to \mathbb{A}^2\setminus\{0\}$。 □

注 5.1.4. 定义 5.1.3 中的完美性假设并非严格必要。事实上，任何特征为 $k = p \mid r$ (分别为 $p \mid s$) 且可提取 s 次根 y (分别为 r 次根 t 的基域，都具有定义5.1.3 中给出的所需性质。

5.1.6 $\mathbb{A}^1$-布劳威尔次数

设 $g : \mathcal{K}\backslash L \to \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 是定义 $\mathbb{A}^1$ 中的 5.1.2-弱等价。回想一下，我们的目标是证明态射 $i : \mathbb{A}^2\backslash\{0\} \to \mathcal{K}\backslash L$ 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在 Spc_k 中。为此，只需证明复合映射 $i \circ g$: $\mathbb{A}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$

$$\mathbb{A}^2\backslash\{0\} \xrightarrow{i} \mathcal{K}\backslash L \xrightarrow{g} \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$$

是 Spc_k 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。这是由模型范畴的三取二性质（定义 34）得出的。为了证明 $i \circ g$ 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，我们使用动机同伦论（定义 2.2.3）中相关的 $\mathbb{A}^1$-布劳威尔次数映射。由于态射 g 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，我们可以在 Milnor-Witt K 理论中将 $\mathcal{K}\backslash L$ 识别为 $H^1(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}}) = K_0^{\mathrm{MW}}(k) \cdot \mu$，其中 $\mu = g^*(\xi)$ 是显式生成元的拉回。根据定义 2.2.4，只需证明 i 所诱导的 Milnor-Witt K 理论层上的映射

$$i^* : H^1(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}}) \to H^1(\mathbb{A}^2\backslash\{0\}, K_2^{\mathrm{MW}})$$

是群的同构。方程（5.3）导出 Milnor-Witt 理论中的以下交换图表： K-理论：

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}}) & \xrightarrow{\partial} & H^2(\mathcal{K}/(\mathcal{K}\backslash L), K_2^{\mathrm{MW}}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{K}, K_2^{\mathrm{MW}}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}}) \\ i^*\downarrow & & j^*\downarrow & & \downarrow & & i^*\downarrow \\ H^1(\mathbb{A}^2\backslash\{0\}, K_2^{\mathrm{MW}}) & \xrightarrow[\partial']{} & H^2((\mathbb{P}^1)^{\wedge 2}, K_2^{\mathrm{MW}}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{A}^2, K_2^{\mathrm{MW}}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{A}^2\backslash\{0\}, K_2^{\mathrm{MW}}) \end{array} \tag{5.6}$$

由于 j 是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，这意味着 j^* 是一个同构。根据 Milnor-Witt K-理论的 $\mathbb{A}^1$-同伦不变性，它在仿射空间上消失；特别地， $H^*(\mathbb{A}^2, K_2^{\mathrm{MW}}) = 0$。由正合性可知， ∂' 也是一个同构。注意，群 $H^1(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}})$ 和 $H^2(\mathcal{K}/(\mathcal{K}\backslash L)\ K_2^{\mathrm{MW}})$ 实际上是秩 1 的自由 K_0^{MW}-模（参见 AF14b，引理 4.5]）。这意味着 ∂ 是 $K_0^{\mathrm{MW}}(k)$-线性的，特别地，是一个单群同态。因此，只需证明 ∂ 是满射。下面将在定义 5.1.5 中证明这一点：通过说明 $H^2(\mathcal{K}/(\mathcal{K}\backslash L)\ K_2^{\mathrm{MW}})$ 的每个上循环都是 $H^1(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}})$ 中某个上循环的边界。换言之，对于每个这样的 $\beta \in H^2(\mathcal{K}/(\mathcal{K}\backslash L)\ K_2^{\mathrm{MW}})$，都存在一个上循环 $\alpha \in H^1(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}})$，使得 $\partial(\alpha) = \beta$。

命题 5.1.5. *[MV25]* 对任意完美域 k，连接同态

$$\partial : H^1(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}}) \to H^2(\mathcal{K}/(\mathcal{K}\backslash L), K_2^{\mathrm{MW}})$$

是满射。

除了表述方式不同外，证明的内容与 [DF18，命题 33]基本相同。为明确起见，我们在此列出证明。

证明。由 [Fas20], 可得关系式（参见定义 B.0.23）

$$H^n(\mathcal{K}/(\mathcal{K}\backslash L), K_*^{\mathrm{MW}}) \cong H_L^n(\mathcal{K}, K_*^{\mathrm{MW}})$$

对所有 $\forall\, n \in \mathbb{Z}$。特别地，我们有 $H^2(\mathcal{K}/(\mathcal{K}\backslash L)\ K_2^{\mathrm{MW}}) \cong H_L^2(\mathcal{K}, K_2^{\mathrm{MW}})$。回顾第 5.1.3 节， L 在 $\mathcal{K}$ 中的法丛由以下截面显式生成： y 和 t。利用 Chow-Witt 理论的局部化正合列（[Fas08, §10.4]），我们得到一个长正合列，因此也得到 $H_L^2(\mathcal{K},$ $K_2^{\mathrm{MW}})$ 的生成元，具体表示为以下上循环的类：

$$\beta := \langle 1\rangle \otimes \bar{t} \otimes \bar{y} \in K_0^{\mathrm{MW}}(\kappa(L), \wedge^2 \mathfrak{m}_L/m_L^2). \tag{5.7}$$

现在，为了证明我们的断言，只需证明这个上循环确实是上循环 $\alpha \in H^1(\mathcal{K}\backslash L, K_2^{\mathrm{MW}})$ 的边界。证明利用了 [Mor12, §5.1] 中发展出的若干工具。考虑 $\mathcal{K}$ 的整子簇如下： $M :=\{y=0\} \subset \mathcal{K}$和 $N :=\{t=0\} \subset \mathcal{K}$ 和 $L' :=\{y=t=0,\ x^{m-1}z=1\} \subset \mathcal{K}$。根据构造，我们有 $M \cap N = L \bigsqcup L'$。根据 M和 N的定义，元素γ：
$= [y] \otimes \bar{t} \in K_1^{\mathrm{MW}}(\kappa(N)\ m_N/m_N^2)$ 仅在 L和L' 上具有非平凡的边界，并且在各自剩余域中的边界取值相同；也就是说， γ 在 L 上的边界由 $\langle 1\rangle \otimes \bar{t} \wedge \bar{y} \in K_0^{\mathrm{MW}}(\kappa(L)$ $\wedge^2(m_L/m_L^2))$ 给出，在 L'上的边界则由 $\langle 1\rangle \otimes \bar{t} \wedge \bar{y} \in K_0^{\mathrm{MW}}(\kappa(L')\ \wedge^2(m_{L'}/m_{L'}^2))$ 给出。最终，结果表明$\gamma \in K_1^{\mathrm{MW}}(\kappa(N)\ m_N/m_N^2)$ 不是 $\mathcal{K}\backslash L$上的上循环，但我们可以通过进行以下修改来构造一个上循环。

注意，符号 $\alpha' := [x^{m-1}z-1] \otimes \bar{y} \in K_1^{\mathrm{MW}}(\kappa(M)\ m_M/m_M^2)$ 仅在 L' 上具有非平凡的边界。事实上，由 $\mathcal{K}$的方程，我们有$x(x^{m-1}z-1) = y^r + t^s$，并且由于 r、s 互素，任何包含 $x^{m-1}z-1$ 和 y 的素数也必须包含 t，进而根据 L' 的定义也包含对应于 L' 的素理想。现在我们利用上述理想的素性条件来计算 α' 在L'上的边界。由于x 在 L' 中可逆，我们可以写成 $(x^{m-1}z-1) = (y^r + t^s)$
$/x = x^{-1}y^r + x^{-1}t^s \in \mathcal{O}_{m_{L'}}$。因此，在 L' 上， α'的边界与 $[x^{-1}t^s] \otimes \bar{y}$的边界相同。后者可以利用 [Mor12，引理 3.5] 中给出的显式关系来计算。特别地，我们有

$$[x^{-1}t^s] = [x^{-1}] + \langle x^{-1}\rangle [t^s] = [x^{-1}] + \langle x\rangle [t^s].$$

现在，根据定义 B.0.13，我们有 $[t^s] = s_\epsilon[t]$。最后，利用 [Mor12，命题3。17], 中给出的边界公式，我们得到 α' 的边界为

$$d(\alpha') = \langle x\rangle s_\epsilon \otimes \bar{y} \wedge \bar{t} = \langle -x\rangle s_\epsilon \otimes \bar{t} \wedge \bar{y}.$$

令 $S := \{x^{m-1}z=1\} \subset \mathcal{K}$ 为 $\mathcal{K}$ 的余维 1 子簇。由于 M 和 S 是不同的余维 1 子簇，我们按如下方式计算边界：

$$d([y, x^{m-1}z-1]) = [x^{m-1}z-1] \otimes \bar{y} + \epsilon[y] \otimes \overline{x^{m-1}z-1}$$

由于 $d^2 = 0$ 和 $\epsilon = -\langle -1\rangle$，我们有

$$d([y] \otimes \overline{x^{m-1}z - 1}) = \langle -1\rangle\, d([x^{m-1}z - 1] \otimes \bar{y}) = \langle x\rangle s_\epsilon \otimes \bar{t} \wedge \bar{y}.$$

现在，x 是 S中的一个单位，因此我们有 $d(\langle x\rangle[y] \otimes \overline{x^{m-1}z} - 1) = s_\epsilon \otimes \bar{t} \wedge \bar{y}$。类似地，$d([x^{m-1}z - 1] \otimes \bar{t}) = \langle x\rangle r_\epsilon \otimes \bar{t} \wedge \bar{y}$，因此我们有

$$d([t] \otimes \overline{x^{m-1}z - 1}) = \langle -1\rangle d([x^{m-1}z - 1] \otimes \bar{t}) = \langle -x\rangle r_\epsilon \otimes \bar{t} \otimes \bar{y}.$$

因此，$d(\langle -x\rangle[t] \otimes x^{m-1}z - 1) = r_\epsilon \otimes \bar{t} \wedge \bar{y}$。现在，取 g、$h \in \mathbb{N}$，使得 $gr - hs = 1$；这是可行的，因为$(r, s) = 1$。对于任意整数 p、$q \in \mathbb{Z}$，我们有$(pq)_\epsilon = p_\epsilon q_\epsilon$，因此有 ~~$g_\epsilon r_\epsilon - h_\epsilon s_\epsilon = \langle \pm 1\rangle$~~ [1]。~~最后，我们~~得到 $d(g_\epsilon\langle -x\rangle[t] \otimes x^{m-1}z - 1) - h_\epsilon\langle x\rangle[y] \otimes ($ $x^{m-1}z - 1)) = \langle \pm 1\rangle \otimes \bar{t} \wedge \bar{y}$。通过如下修改 α'，便得到所需的上循环：

$$\alpha := [y] \otimes \bar{t} - \langle \pm 1\rangle(g_\epsilon\langle -x\rangle[t] \otimes \overline{(x^{m-1}z - 1)} - h_\epsilon\langle x\rangle[y] \otimes \overline{(x^{m-1}z - 1)})$$

在 ∂ 下映射到 $H^2_L(X,\ K_2^{\mathrm{MW}})$ 的生成元。 □

关于懒惰证明的注记

当 char $k = 0$时，[DF18] 中的作者给出了另一种证明，并称之为懒惰证明，其利用了 $\mathbb{A}^1$-可缩性 $\mathcal{K}$ ([HKØ16，定理 4。2]）在特征零域上的情形。这个证明在稳定背景下强烈依赖于这样一个深刻事实：每个光滑拟射影概形在稳定同伦范畴 $\mathrm{SH}(k)$ 中都是可对偶的。反过来，这一结论是利用特征零下奇点消解的存在性证明的。因此，假设完美域上的奇点消解存在，懒惰证明完全可以调整以适用于我们的情形。

注 5.1.6。 *[MV25]* 这族光滑仿射三维簇 $\mathcal{K}$ 首次给出了混合特征下的奇异簇实例。例如，由此可知，仿射簇 $\mathcal{K} \to$ 谱 $\mathbb{F}_p$ 是一个光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩三维簇，且不同构于 *Asanuma-Gupta* 三维簇（第3.2.4节）。因此，所有这些三维簇都加入了正特征下 *Zariski* 消去问题的“潜在”反例之列。鉴于这一差异，我们可以提出以下行动方案：

1. 构造一个不变量，以区分给定的光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩仿射三维簇与 *Koras-Russell* 三维簇。

并且类似于定义4.2.1 和定义4.3.3：

2. 证明或反驳如下事实：每个光滑的 $\mathbb{A}^1$-可缩三维簇都必然是仿射的。要反驳这一点，只需找到一个严格拟仿射的光滑 $\mathbb{A}^1$-可缩三维簇。

[1] 若 gr 为奇数，则为奇数；否则为 $\langle -1\rangle$

5.1.7 相对 $\mathbb{A}^1$-可缩性 of $\mathcal{K}$

我们现在可以将 $\mathcal{K}$ 的不稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩性推广到整数上，以及具有完美剩余域的任意诺特概形上。

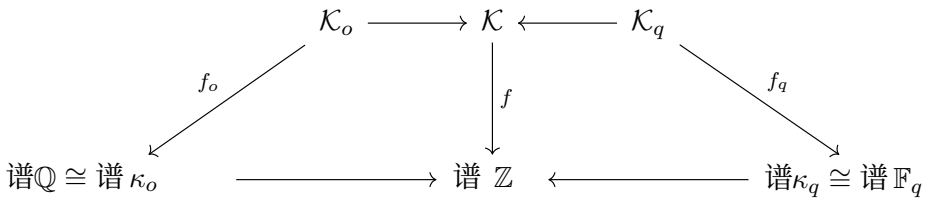
命题 5.1.7。 *[MV25]* 对于任意完美域 k，典范态射 $f:\mathcal{K}\to$ 谱 k是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在 Spc_k中。

证明。 由第 5.1.3 节和第 5.1.4节可知，态射 i 和 j 是$\mathbb{A}^1$-弱等价。因此， $\phi:\mathbb{A}^2\to\mathcal{K}$ 是式（）中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价，并且显然在 谱 k上是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。

□

定理 5.1.8。 *[MV25]* 第一类 *Koras-Russell* 三维簇 $f:\mathcal{K}\to$ 谱 $\mathbb{Z}$ 是相对 $\mathbb{A}^1$-可缩的，在 $\mathrm{Spc}_{\mathbb{Z}}$中。特别是， $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩概形，在 $\mathrm{Spc}_{\mathbb{Z}}$中，且不同构于 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Z}}$。

证明。 f 在一般点 $0\in$ 谱 $\mathbb{Z}$ 上的纤维是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，因为商域谱 $\mathbb{Q}$ 具有特征零，其证明由此根据[DF18]得出。现在，对所有闭点 $q\in$ 谱 $\mathbb{Z}$，相应的剩余域为 $\mathbb{F}_q$（特别地，它是完美的）， $\mathbb{A}^1$-可缩性在谱 $\mathbb{F}_q$上现由定义5.1.7得出。



现在， $f:\mathcal{K}\to$ 谱 $\mathbb{Z}$ 是一个动机空间态射，其所有纤维在相应剩余域上均为 $\mathbb{A}^1$-可缩。证明现作为定义2.1.48的推论得出。

□

事实上，上述定理可以如下推广。

定理 5.1.9。 *[MV25]* 设 S 是一个剩余域完美的诺特概形。第一类 *Koras-Russell* 三维簇 $f:\mathcal{K}\to S$ 在 $\mathbb{A}^1$ 中相对 Spc_S。

证明。首先注意，由定义 C.1.4 可知，典范映射 $\mathcal{K}\to S$ 是良定义且光滑的，因为 f 在商域或相应剩余域上的所有纤维都是光滑概形。现在，取一个点 $s\in S$，其剩余域为 κ_s。若 κ_s 的特征为零，则由 [DF18]可得 $\mathcal{K}\to$ Spec κ_s 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。若特征 $\kappa_s=p>0$，则由定义 5.1.8 可知， $\mathcal{K}\to$ Spec κ_s是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，因为根据假设，κ_s 是完美域。现在，态射 $f:\mathcal{K}\to S$ 的所有纤维都是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，由定义 2.1.48 即得证明。

□

关于 K 的变形版本的注记

我们还要提及一个密切相关的仿射三维簇族，称为第一类变形 *Koras-Russell* 三维簇，作者在 [DPØ19]中对其进行了研究。它们由以下方程定义：

$$\mathcal{K}(m,r,s,\phi) =: \mathcal{K}(\phi) = \{x^m z = y^r + t^s + x\phi(x,y,t)\}$$

其中 m、r、$s \geq 2$ 是整数，满足 r，且 s 互素；$\phi(x$、y、$t) \in k[x,y,t]$，使得 $\phi(0,0,0) \in k^\times$。注意，当 $\phi(x$、y、$t) = a \in k^\times$ 时，$\mathcal{K}(\phi) = \mathcal{K}$（定义 25）。而当 $\phi(x$、y、$t) = q(x) \in k[x]$ 且 $q(0) \in k^\times$ 时，相应的仿射三维簇 $\mathcal{K}(q)$ 已被证明在特征零域上是 $\mathbb{A}^1$-可缩的（[DF18，定理 1.2]）。现在，对于满足 $\phi(0,0,0) \in k^\times$ 的一般多项式 $\phi(x$、y、$t)$，已知相应的仿射簇 $\mathcal{K}(\phi)$ 是 Kaliman-Zaidenberg 意义下仿射修正的例子（[KZ99]）。沿着这一方向，经过在特征零代数闭域上进行单纯形悬挂，已证明 $\mathcal{K}(\phi)$ 在稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 $\mathrm{SH}^{S^1}(k)$ 中是 $\mathbb{A}^1$-可缩的（[DPØ19，定理 4.7]）。此外，[ibid] 中的作者还研究了 Koras-Russell 纤维丛的概念，其定义列于下文。

定义 26. 假设 $s(x) \in k[x]$ 具有正次数，并令 $R(x,y,t) \in k[x,y,t]$。由下列方程定义 $\mathbb{A}^1_x \times \mathbb{A}^3 = \text{谱}(k[x][y,z,t])$ 的闭子概形 $\mathcal{X}(s,R)$：

$$\{s(x)z = R(x,y,t)\}.$$

我们称投影映射 $\mathrm{pr}_x : \mathcal{X}(s,R) \to \mathbb{A}^1_x$ 定义一个 *Koras-Russell* 纤维丛，如果

1. $\mathcal{X}(s,R)$ 是一个光滑概形，并且
2. 对 $s(x)$ 的每一个零点 x_0，多项式$R(x_0,y,t)$ 在 $\mathbb{A}^2 = \text{谱}(k[y,t])$ 中的零点轨迹是一条具有无穷远处唯一位且至多具有单分支奇点的整有理平面曲线。

单纯稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩性 $\mathcal{X}(s,R)$ 已在特征为零的代数闭域上得到确立（[DPØ19，定理 4.13]）。鉴于定义 5.1.7，我们现在基本上也可以将这些结果提升到完美域上[2]。

5.2 广义 Koras-Russell 原型

本节将转而研究 Koras-Russell 三维簇的高维类似物，称为广义 *Koras-Russell* 簇。作者在 [DG25] 最近证明了它在特征 $\mathbb{A}^1$零域上的不稳定

[2]本文仍在撰写中

。秉承这一思路，我们现在将把 $\mathbb{A}^1$-可缩性从特征零推广到任意完美域，并由此推广到某些诺特概形上。作为后续内容，我们将在第5.3节看到，这些簇是构造奇异动机球面的关键要素。

我们先从这些簇的定义开始。关于记号， k 表示一个完美域， $k^{[n]}$ 表示以 n为变量的多项式环。

定义 27. 设 r、 $s \geq 2$ 为任意一对互素整数。考虑三元组（m、 n、 ψ），其中包含整数 $m \geq 0$ 以及一个（$m+1$）元组 $n = (\underline{n}_0, n_1, \ldots, n_m)$，它是一个满足 $n_i > 1$ 的多重指标；另有多项式 $\psi \in k^{[1]}$ 满足 ψ（0） $\neq 0$。接下来考虑坐标环

$$R_m(\underline{n}, \psi) := \frac{k[x_0, x_1 \ldots, x_m, y, z, t]}{\underline{x}^{\underline{n}} z + y^r + t^s + x_0\, \psi(\underline{x})}$$

其中 $x^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{m} x_i^{n_i}$且 $x = \prod_{i=0}^{m} x_i$。广义 Koras-Russell 簇定义为与该坐标环相关联的仿射簇

$$\mathcal{X}_m(\underline{n}, \psi) := \operatorname{Spec} R_m(\underline{n}, \psi) \tag{5.8}$$

对于每个 $m \geq 0$，如此得到的仿射簇 $\mathcal{X}_m$（n， ψ）的维数为（$m+3$），并且根据雅可比判别法可知它是光滑的；这是由 ψ（0） $\neq 0$这一假设得出的。现在来看一个简洁的例子：在仿射空间 $\mathbb{A}_k^{n-3}$ 上构造的一个相对维数为 $m+3$ 的簇。令 ψ（x） $= 1 + x + \sum_{i=2}^{n-2} a_i x^i$，它显然在原点处非零（因为$\psi$（0） $\equiv 1 \neq 0$），由此得到

$$\mathcal{X}_m(n, \psi) := \left\{ \underline{x}^n z = y^r + t^s + x_0(1 + \underline{x} + \sum_{i=2}^{n-2} a_i \underline{x}^i) \right\} \subseteq \mathbb{A}_k^{n-3} \times \mathbb{A}_k^{m+3} \tag{5.9}$$

坐标由谱($k[a_2, \ldots, a_{n-2}][x_0, \ldots, x_m, y, z, t]$)给出。特别地，$\mathcal{X}_m$($n$， ψ) 在投影映射 $\mathcal{X}_m$(n， ψ) $\to \mathbb{A}_k^{n-3}$ （由投影到 a_i 上给出）下是一个光滑仿射概形。

定理 5.2.1. *[MV25]* 设 k 是任意完美域。那么在定义 27中的记号和假设下，典范态射 $\mathcal{X}_m(n, \psi) \to$ 谱 k 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在 Spc$k$中。 –

证明。 [DG25] 中的作者已证明这些簇在零特征域上的 $\mathbb{A}^1$-可缩性。根据定义 5.1.7，沿用原证明，我们现在可以将这一结果推广到完美域上。首先注意到，所有这些簇都是稳定 k-同构的（[DG25，命题 3]），也就是说，对于任意如上所述的多项式 $\psi \in k^{[1]}$，均有$\mathcal{X}_m(n, \psi) \times \mathbb{A}_k^1 \cong \mathcal{X}_m(n, 1) \times \mathbb{A}_k^1$。因此，根据 $\mathbb{A}^1$-同伦不变性（定义 7），只需证明$\bar{\mathcal{X}}_m := \mathcal{X}_m(n, 1)$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。另外，注意当 $m = 0$ 且 ψ(x) $= 1$ 时，$\mathcal{X}_0(n_0, 1)$ 恰好是上一节研究的 Koras-Russell 三维簇族，我们已证明其是 $\mathbb{A}^1$-可缩的（定义 5.1.7）。

固定 $A_{m-1}=k[x_1,\dots,x_{m-1},y,t]$，
$R_m=A_{m-1}[x_0,x_m,z]/\left(\prod_{i=0}^{m}x_i^{n_i}z+y^r+t^s+x_0\right)$。接着考虑 $\mathcal{X}_m$ 中的以下闭子概形

$$W_m=\{x_m=0\}\cong \mathrm{Spec}(R_m/x_mR_m)\cong \mathrm{Spec}(A_{m-1}[z])\cong \mathbb{A}_k^{m+2} \tag{5.10}$$
$$H_m=\{z=0\}\cong \mathrm{Spec}(R_m/zR_m)\cong \mathrm{Spec}(A_{m-1}[x_m])\cong \mathbb{A}_k^{m+2} \tag{5.11}$$
$$P_m=W_m\cap H_m\cong \mathrm{Spec}(R_m/(x_m,z)R_m)\cong \mathrm{Spec}(A_{m-1})\cong \mathbb{A}_k^{m+1} \tag{5.12}$$

现在考虑如下典范闭浸入 $j_m:\ H_m\to\mathcal{X}_m$ 与$i_m:\ H_m\backslash P_m\to\mathcal{X}_m\backslash W_m$。通过令 $Z:=x_mz$，我们得到一个同构

$$\mathcal{X}_m\backslash W_m\cong \mathrm{Spec}(A_{m-2}[x_0,x_{m-1},Z][x_m^{-1}]/(x_0^{n_0}\prod_{i\neq m}x_i^{n_i}Z+y^r+t^s+x_0))\cong \mathcal{X}_{m-1}\times\mathbb{G}_{m,k}$$

其中 i_m 等于该乘积

$$j_{m-1}\times id_{\mathbb{G}_{m.k}}:H_m\backslash P_m\cong H_{m-1}\times_k\mathbb{G}_{m.k}=\mathrm{Spec}(A_{m-2}[x_{m-1}][x_m^{\pm1}])\to\mathcal{X}_{m-1}\times_k\mathbb{G}_{m.k}$$

现在，通过如式（5.3）那样建立余纤维序列，我们得到如下交换方块

$$\begin{array}{ccccc} H_m\backslash P_m & \longrightarrow & H_m & \longrightarrow & H_m/(H_m\backslash P_m) \\ \downarrow{\scriptstyle i_m} & & \downarrow{\scriptstyle j_m} & & \downarrow{\scriptstyle l_m} \\ \mathcal{X}_m\backslash W_m & \longrightarrow & \mathcal{X}_m & \longrightarrow & \mathcal{X}_m/(\mathcal{X}_m\backslash W_m) \end{array} \tag{5.13}$$

与开浸入 $H_m\backslash P_m\to H_m$ 和 $\mathcal{X}_m\backslash W_m\to W_m$相关联。注意到 H_m 依式（5.11）是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，从而 $\mathcal{X}_m$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，只要 j_m是 $\mathbb{A}^1$-弱等价。对于 $m=0$，态射 $j_0:\ H_0\to\mathcal{X}_0$ 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，这是由于定义5.1.7。现在我们为 $m\geq 1$ 通过对 m的归纳建立这一性质。

根据定义 A.2.26，要证明 j_m 是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，只需证明 i_m 和 l_m 是 $\mathbf{Spc}_k$ 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。i_m 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，这是因为 $i_m\simeq j_{m-1}\times id_{\mathbb{G}_m,\ k}$，并且根据归纳假设，$j_{m-1}$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价。另一方面，l_m 也是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价。事实上，由于 P_m 是 $\mathcal{X}_m$ 中两个光滑子簇的横截交，P_m 在 H_m 中的正规锥 $N_{P_m}H_m$ 实际上是 W_m 在 $\mathcal{X}_m$ 中的正规锥 $N_{W_m}\mathcal{X}_m$ 在 P_m 上的限制。但 $N_{W_m}X_m$ 的正规锥是平凡的，原因与第 5.1.3 节中的类似，因此 $N_{P_m}H_m$ 也是平凡的。由于所有这些簇都是光滑的，根据同伦纯性定义 2.1.56 即可得到证明。特别地，

$$H_m/(H_m\backslash P_m)\simeq \mathrm{Th}(N_{P_m}H_m)\simeq P_m\wedge\mathbb{P}^1$$

类似地，

$$\mathcal{X}_m/(\mathcal{X}_m\backslash W_m) \simeq \mathrm{Th}(N_{W_m}\mathcal{X}_m) \simeq W_m \wedge \mathbb{P}^1.$$

映射 l_m 与在上述同构下观察到的以下映射一致

$$\mathrm{Th}(N_{P_m}H_m) \simeq P_m \wedge \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\iota\wedge\mathbb{P}^1} W_m \wedge \mathbb{P}^1 \simeq \mathrm{Th}(N_{W_m}\mathcal{X}_m).$$

它是闭浸入 $\iota : P_m \hookrightarrow W_m$ 的 $\mathbb{P}^1$-悬挂。因此，$\mathbb{A}^1$-弱等价于 ι 蕴含 l_m 的弱等价。 □

推论 5.2.2. *[MV25]* 设 S 是一个具有完美剩余域的诺特概形。则在式 (5.8)中的假设下，典范态射 $\varphi : \mathcal{X}_m(n,\psi) \to S$ 是$\mathbb{A}^1$-弱等价，在Spc_S中。

证明。 证明策略与定义 5.1.9中的完全相同。任取一点 $s \in S$ 并考虑相应纤维上诱导的态射$\varphi_s : \mathcal{X}_m(n,\psi) \times_{\kappa_s} \text{谱}\,\kappa_s =: (\mathcal{X}_m(n,\psi))_s \to \text{谱}\,\kappa_s$。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_m(n,\psi)_s & \longrightarrow & \mathcal{X}_m(n,\psi) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_s} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \text{谱}\,\kappa_s & \longrightarrow & S \end{array}$$

由于根据假设，这样一个 κ_s 是完美的，$\varphi^{-1}(s)$ 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价，在$\mathcal{H}(\kappa_s)$ 这是由定义 5.2.1得出的。证明现在由定义2.1.48得证。 □

注 5.2.3。作者在 *[DG25]* 中指出，$\mathcal{X}_m$ 在所有维数下都是特征零域上 *Zariski* 消去问题的“潜在”反例 ≥ 3。依照他们的事实，我们对完美域的扩张定义5.2.1开辟了一条途径，可将这些簇 $\mathcal{X}_m$ 视为即使在正特征域上也可能是扎里斯基消去问题的“潜在”反例。此外，这些簇都不可能与 *Asanuma-Gupta* 簇同构（后者具有光滑纤维，而 $\mathcal{X}_m$ 的一般纤维是奇异的），因此它是一个熟悉却又以新颖形式出现的候选对象。

任意光滑奇异仿射簇的模空间

回顾第 4.4 节，[AD07 中的定理 51] 构造了一个由两两不同构的奇异 $\mathbb{A}^1$-可缩严格拟仿射簇组成的无限集合，其相对维数为 ≥ 4。维数 1（定义 4.2.2）和维数 2（定义 4.3.1）的情形已经完备，尚缺的部分是

1. 是否存在针对三维簇的类似结论?

作者通过研究 [DF18], -可缩性 $\mathbb{A}^1$的 Koras-Russell 三维簇，回答了这一问题。具体而言，他们 [DF18，推论 1。3]利用 $\mathbb{A}^1$-可缩光滑仿射三维簇的技术，构造出了任意正维数的模空间，其中各元素两两不同构、稳定同构；这些技术最初由 [DMJP11] 在 $\mathbb{C}$上建立。

2. 如果此类族始终只由维数为 ≥ 4 的严格拟仿射概形构成，那么在维数 ≥ 4 下是否存在具有此性质的（纯）仿射族?

广义 Koras-Russell 簇 $\mathcal{X}_m(n,\psi)$ 回答了上述问题。

作为一项可喜的补充，我们的结果（定义5.2.1）和定义 5.2.2）通过构造一个任意正维数的模空间，为这一整体图景添上了点睛之笔。该模空间由两两不同构但稳定同构的 $\mathbb{A}^1$-可缩光滑仿射概形组成，它们定义在广义基概形上，且相对维数为 ≥ 3。

5.3 奇异动机球

本节介绍动机球面，这是动机同伦论中最重要的研究对象之一；并研究奇异动机球的存在性。这项研究可与第4章中关于奇异仿射簇的研究形成对照。为此，我们首先证明仿射簇 $\mathcal{X}_m\backslash\{\bullet\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的（定义 5.3.7），并证明拟仿射簇 $\mathcal{X}_m\backslash\{\bullet\}$ 为所有高维 ≥ 4 中的奇异动机球提供了一个模型（定义5.3.8）。

回顾第 2.1.1 节，带基点的 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 $\mathcal{H}(S)_\bullet$关于楔积具有对称幺半结构。利用这一点，可以在 $\mathcal{H}(S)_\bullet$中得到更多对象。

命题 5.3.1。 对于 $X \in \mathrm{Spc}_{S\bullet}$，我们有一个典范的 $\mathbb{A}^1$-弱等价

$$\Sigma X \simeq S^1 \wedge X$$

证明。 注意到预层范畴 $\mathrm{Psh}(\mathrm{Sm}_S)$ 是余完备的，并且 $\mathbb{L}_{mot}$保持余积。因此，只需在单纯预层的层次上计算推出，其中余积按逐层方式计算。在单纯预层范畴中，显然 $\Sigma X(U) = S^1 \wedge X(U)$，对任意 $U \in \mathrm{Sm}_S$ 都成立。因此，作为带基点预层，我们有 $\Sigma X = S^1 \wedge X$。现在要说明这实际上在 $\mathcal{H}(S)_\bullet$ 中成立，注意到 $\mathbb{L}_{mot}$ 保持楔积运算，因为它保持有限积，同时也保持余积和余纤维（定义2.1.15）。

□

5.3.1 动机同伦论中的球面

砸积结构的一个重要应用，是在 $\mathcal{H}(S)_\bullet$中得到球面对象。在动机同伦论中，我们有两类球面:

1. 单纯圆周 S^1 来自拓扑学；作为单形，它可以看作以像 $\partial\Delta \hookrightarrow \Delta$为基点的 $S^1 = \Delta^1/\partial\Delta$。类比于拓扑学，若$S^0 := \{0\} \sqcup \{1\}$，则 S^1 是如下图表的推出：

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

与代数拓扑截然不同， S^1 作为节点概形存在。尤其是， S^1 并非代数球意义下的光滑对象！代数模型由 $S^1 := \mathbb{A}^1/\{0 \sim 1\}$给出。

2. *Tate* 圆 $\mathbb{G}_{m,\ k} := \mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1_k\backslash\{0\}$ 以 1 为基点的代数几何球。它作为光滑概形存在。在基概形 S上，我们定义$\mathbb{G}_{m,\ S} := \mathbb{G}_m \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} S$。

将这两种球面的副本取 smash 积，即可构造双分次（混合）动机球（参见第 2.1.1节）。这些动机球有多种不同记法。我们将采用以下约定，使其与动机上同调的分次一致（这种记法也被广泛使用）：

$$\mathbb{S}^{p,q} := (S^1)^{\wedge(p-q)} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge q}$$

对所有 $p \geq q \geq 0$。为方便记号，我们将改写为 S^{p-q} 表示 $(S^1)^{\wedge(p-q)}$，并以 $\mathbb{G}_m^q$ 表示 $\mathbb{G}_m^{\wedge q}$。

例 5.3.2. 以下是一些典型的动机球面例子。

1. 根据定义，我们有 $\mathbb{S}^{1,\ 0} = S^1$ 以及 $\mathbb{S}^{1,\ 1} = \mathbb{G}_m$。更一般地，对于每个$n \geq 1$，我们有 $\mathbb{S}^{2n-1,\ n} \simeq \mathbb{A}^n\backslash\{0\}$ （*[AE17*，命题 *4.40]*），

2. 对于每个 $n \geq 1$，我们都有一个推出图表（*[AE17*，推论 *4.41]*）

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \mathbb{A}^n/\mathbb{A}^n\backslash\{0\} = \mathbb{S}^{2n,n} \end{array}$$

由此我们得到如下识别

$$\mathbb{S}^{2n,n} := \Sigma_{S^1}\mathbb{S}^{2n-1,n} \simeq \mathbb{A}^n/(\mathbb{A}^n\backslash\{0\}) \simeq \mathbb{P}^n/(\mathbb{P}^n\backslash\{0\}) \simeq \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}.$$

特别是，对于 $n = 1$，我们得到

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

因此 $\mathbb{S}^{2,\ 1} \simeq \Sigma_s\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{P}^1$，

3. 第 Q_{2n} 节中讨论的光滑仿射二次曲面是动机*4.4.1* 球面。我们有

$$Q_{2n-1} \simeq \mathbb{S}^{2n-1,n} \quad \textit{and} \quad Q_{2n} \simeq \mathbb{S}^{2n,n} \simeq (\mathbb{P}^1)^{\wedge n}.$$

结合上面的 *(2)*，我们得到：

$$\Sigma_{S^1}\mathbb{A}^n\backslash\{0\} \simeq (\mathbb{P}^1)^{\wedge n}$$

对所有 $n \geq 1$。

4. 每当 $p > 2q$，已知动机球 $\mathbb{S}^{p,\,q}$ 不能由光滑概形 *[ADF17，命题 2.3。1]*。

5. 特殊线性群 SL_2 是一个维数为 *3* 的动机球 $\mathbb{S}^{3,\,2}$。事实上，投影 $\pi : SL_2 \to \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 是一个扎里斯基局部平凡的 $\mathbb{A}^1$-丛，因此是一个$\mathbb{A}^1$-弱等价，

在第 5.1 节研究奇异仿射簇之后，我们现在关注紧[3] 类比。

定义 28. 一个有限型且维数为 n 的（光滑）概形 $X \to S$ 将被称为 奇异动机球，如果它与光滑概形 $\mathbb{A}^n_S\backslash\{0\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-同伦的，但作为 S-概形并不同构，即

$$X \simeq \mathbb{A}^n_S\backslash\{0\} \quad \textit{and} \quad X \ncong \mathbb{A}^n_S\backslash\{0\}.$$

注记 5.3.3. 在微分几何中，人们讨论两类球面：拓扑球面 $\mathbb{S}^m$，它从 $\mathbb{R}^{m+1}$ 继承典范子空间拓扑，以及光滑球面 $\mathbb{S}^m$ 带有标准微分结构。这一区别随着 *Milnor[Mil56]* 发现可以在 $\mathbb{S}^7$ 上赋予不止一种光滑结构（事实上有 *28* 种！）而变得明显，从而导致了 光滑怪球面 在微分几何中的发现。他进一步证明，这种现象在高维中也同样持续出现。尽管我们对 奇异动机球 的研究纯粹是代数的，但当人们在这些簇上赋予光滑结构时，是否存在合理而微妙的联系，仍值得探究。

一个值得思考的问题是，这类奇异概形是否存在于域上，并进而存在于某个基概形上。下文将首先概述这一问题，并针对以下问题给出一个反例：

问题 5.3.4. 设 S 是一个相当任意的基概形。那么，对于维数为 n的光滑概形 $X \to S$，$X \simeq_{\mathbb{A}^1} \mathbb{A}^n_S\backslash\{0\}$ 是否蕴含 $X \cong \mathbb{A}^n_S\backslash\{0\}$ 作为S-概形的同构？

[3]不过，这一术语可能会引起误解，因为动机球未必总是适当的：例如，$\mathbb{G}_m$

5.3.2 低维动机球

在维数 0 的情形下，$\mathbb{S}^{1,\,0} := S^0 \cong \{0\} \cup \{1\}$ 是唯一的（奇异）动机球。在维数 1 的情形下，$\mathbb{S}^{0,\,1} \cong \mathbb{G}_m$ 在同构意义下是唯一的光滑动机球。这是下文所述的 $\mathbb{A}^1$-刚性关于 $\mathbb{G}_m$ 的推论。

命题 5.3.5. *[MV25]* 在约化概形 S 上，若光滑概形 $X \to S$ 与 $\mathbb{G}_{m,S}$ 弱同伦等价，则它与 $\mathbb{G}_{m,S}$ 同构。

证明。我们将在域 [4] 上证明此结论，并指出，由于定义 2.1.26，相同的证明思路本质上适用于任意约化概形。设 X 是与 $\mathbb{G}_m$ 弱等价的光滑曲线。根据定义 2.1.26，我们有 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X) \simeq \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{G}_{m\circ}$ 现在我们要证明 X 也是 $\mathbb{A}^1$-刚性的。反设不然。回顾一下，我们有一个 Nisnevich 层的典范满射 $X \to \pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$（定义 2.1.21），它给出一个优势态射 $\varphi : X \to \mathbb{G}_{m\circ}$ 由于假设 X 并非 $\mathbb{A}^1$-刚性，存在一个有限可分扩张 L/k 和一个 $\mathbb{A}^1$-同伦 $H : \mathbb{A}^1_L \to X$，使得 Spec $L \to X$ 的零截面和单位截面上的诱导映射不一致，即 $H(0) \neq H(1)$（见定义 2.1.25）。因此，H 是一个优势映射，它使复合 $\varphi \circ H : \mathbb{A}^1_L \to X \to \mathbb{G}_m$ 成为常映射（因为 $\mathbb{G}_m$ 是 $\mathbb{A}^1$-刚性的）。特别地，φ 是常映射，这与 φ 是优势态射矛盾。因此，$X \cong \mathbb{G}_{m\circ}$

□

在零特征域上维数为 2 的情形中，最近已证明（[CR24b，定理 3。1]）：若一个仿射曲面 U 的开子概形 X 与$\mathbb{A}^1$ 弱等价于 $\mathbb{A}^2\backslash\{0\}$，那么 $U \cong \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ 作为 k-概形。鉴于对完美域上 $\mathbb{A}^2$ 的刻画已扩展（定义 4.3.4），这一结果很可能也能推广到完美域上。在维数 3 的情形中，第一类 Koras-Russell 三维簇族 $\mathcal{K}$ 为这一问题提供了必要的障碍（参见 [CR24b，§3]）。然而，对于域上的维数 ≥ 4，这个问题仍基本悬而未决。我们在 [MV25] 中利用第 5.1 节的结果，在所有更高维数中解决了这个问题，下面将对此进行讨论。

5.3.3 高维奇异球面的存在

该族中的任意一个广义 *Koras-Russell* 簇都为我们提供了一种方法，可以在每个 5.3.4 维数 ≥ 3下构造一个反例。不过，考虑到所有这些簇 $\mathcal{X}_m(n,\psi)$ 都稳定同构，只需使用 $\mathcal{X}_m := \mathcal{X}_m(n,1)$构造一个反例即可。下面给出的证明受到三维簇情形的启发（[CR24b，§3]）。

为简单起见，考虑按公式（5.9）定义的光滑仿射簇族：

$$\mathcal{X}_m := \{\underline{x}^n z = y^r + t^s + x_0\} \subset \mathbb{A}^{m+4}_k \cong \mathrm{Spec}(k[x_0,\ldots,x_m,y,z,t]). \tag{5.14}$$

[4] 作者感谢 Biman Roy 慷慨地讲解了域上的证明。

典范态射 $\mathcal{X}_m \to$ 谱 k 使其成为一个维数为 $m+3$ 对所有 $m \geq 0$ 以及 $n \geq 2$ 以及 $x := \prod_{i=0}^{m} x_i$。这个簇由取 $\psi(x) = 1$ 以及原方程 Eq. (5.8) 中单个指数 $n = n$ 构成。注意到 $p = (1, \ldots, 1, 0, 1, 0) \in \mathcal{X}_m$ 是一个有理点。定义映射

$$\phi : \mathcal{X}_m \to \mathbb{A}_k^{m+3}$$
$$(x_0, \ldots, x_m, y, z, t) \mapsto (x_0, \ldots, x_m, y, t)$$

（忘掉 'z'）。然后将像 $\phi(p) = (1, \ldots, 1, 0, 0) =: q \in \mathbb{A}_k^{m+3}$ 记为。

引理 5.3.6. *[MV25]* 设 k 是一个域。对于所有 $m \geq 0$，诱导映射 $d\phi_p : T_p\mathcal{X}_m \to T_q\mathbb{A}_k^{m+3}$ 是切空间之间的同构。因此，$\mathcal{X}_m$ 在点 p处的法丛是平凡的。

证明。设方程为 $f(x_0, \ldots, x_m, y, z, t) := \{x^n z = \underline{y}^r + t^s + x_0\}$。我们计算 f 的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = n x_0^{n-1} x_1^n \ldots x_m^n z - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = n x_0^n \ldots x_{j-1}^n x_j^{n-1} x_{j+1}^n \ldots x_m^n z, \quad \text{for all } 0 < j \leq m,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = r y^{r-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \underline{x}^n \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = s t^{s-1}$$

f 的全导数 $\nabla(f)$ 可表示为

$$\nabla f = \left((n x_0^{n-1} x_1^n \ldots x_m^n z - 1), \ldots, (n x_0^n x_1^n \ldots x_j^{n-1}, \ldots, x_m^n z), (r y^{r-1}), (\underline{x}^n), (s t^{s-1}) \right)$$

在点 p 处，其值为 $\nabla f|_p = (n-1, n, \ldots, n, 0, 1, 0)$。回忆一下，$\mathcal{X}_m$ 在 p 处的切空间是 p 处全导数的核。因此，根据 m 的奇偶性，p 处的切空间可如下给出：若 m 为偶数，则有

$$T_p\mathcal{X}_m = \{(a, b, -b, \ldots, b, -b, c, -a(n-1), d) \mid a, b, c, d \in k\} \subset \mathbb{A}_k^{m+4}$$

如果 m 为奇数，则有

$$T_p\mathcal{X}_m = \{(a, b, -b, \ldots, 0, c, -a(n-1), d) \mid a, b, c, d \in k\} \subset \mathbb{A}_k^{m+4}$$

当 m 为奇数（分别为偶数）时，诱导映射 $d\phi_p$ 由下式给出

$$(a, b, -b, \ldots, b, -b, c, -a(n-1), d) \mapsto (a, b, -b, \ldots, b, -b, c, d)$$

以及（分别为）

$$(a, b, -b, \ldots, 0, c, -a(n-1), d) \mapsto (a, b, -b, \ldots, 0, c, d)$$

它们显然是同构的。这尤其意味着，$\mathcal{X}_m$ 在 p 处的法丛与 $N_q\mathbb{A}_k^{m+3}$ 的法丛同构，因而为平凡的。 □

接下来我们证明，对于所选的有理点 $p \in \mathcal{X}_m$，开子概形$\mathcal{X}_m \backslash \{p\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的。事实上，为了证明我们的主要结果（定义5.3.8），我们只需要 $\mathcal{X}_m \backslash \{p\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-连通的。一般而言，对于光滑的 $\mathbb{A}^1$-连通概形 X，若某个开子概形 $U \subset X$ 使得余维$X \backslash U \geq 2$ 再次是 $\mathbb{A}^1$-连通的问题，一般仍未解决（[AD09，猜想 2.18]）。然而，这一点对坐标子空间已被证明成立，即当$X = \mathbb{A}^n_k$时， k 为任意无限域（[AD09，引理 2.15]）。

引理 5.3.7. *[MV25]* 令 k 为任意无限完美域。则严格拟仿射簇 $\mathcal{X}_m \backslash \{p\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的。

证明。 证明策略考虑到了经典 Koras-Russell 三维簇 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的这一事实（[DPØ19，例 2.28]）。令 L/k 为任意有限生成域扩张。根据定义 15，回顾一下我们需要证明所有纤维以及纤维之间的任意点都可以通过初等$\mathbb{A}^1$-同伦连接起来。考虑投影

$$\begin{aligned} \mathrm{pr} : \mathcal{X}_m \to \mathbb{A}^1_k \quad \text{given by} \\ (x_0, \ldots, x_m, y, z, t) \mapsto x_0. \end{aligned}$$

首先，注意 $\mathbb{G}_m$ 上各点的纤维都是 $\mathbb{A}^1$-链连通的。事实上，取一点 $\alpha \in \mathbb{G}_m$。若 $\alpha \neq 1$，则 $\mathrm{pr}^{-1}(\alpha) \simeq \mathbb{A}^{m+2}_k$，它显然是 $\mathbb{A}^1$-链连通的；若 $\alpha = 1$，则有 $\mathrm{pr}^{-1}(\alpha) \simeq \mathbb{A}^{m+2}_k \backslash \{0\}$，它同样是 $\mathbb{A}^1$-链连通的。总之，对于每个点 $\alpha \in \mathbb{G}_m$，$\mathrm{pr}^{-1}(\alpha)$ 中任意两个 L-点都可以通过若干个 $\mathbb{A}^1_L$ 连接起来。点 $\{x_0 = 0\}$ 上方的纤维为 $\mathrm{pr}^{-1}(0) \simeq \mathbb{A}^{m+1}_k \times_k \Gamma_{r,s}$，其中 $\Gamma_{r,s} := \{y^r + t^s = 0\}$ 是尖点曲线。根据定义 2.1.18 (2)，尖点曲线是 $\mathbb{A}^1$-链连通的。因此，纤维 $\mathrm{pr}^{-1}(0)$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的，其见证为朴素的 $\mathbb{A}^1$-同伦

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1_L \to \mathbb{A}^{m+1} \times \Gamma_{r,s} \\ \gamma \mapsto (a_0\gamma, \ldots, a_m\gamma, b\gamma^s, c\gamma^r) \end{aligned}$$

将 $(0, \ldots, 0)$ 与点 $(a_0, \ldots, a_m, b, c)$ 相连。现在，为了得出结论，我们只需证明不同纤维中的点可以通过 $\mathbb{A}^1_L$ 链相连。为此，我们可以如下构造一个 $\mathbb{A}^1$-同伦：设 $f(w)$ 和 $g(w)$ 是 $k[w]$ 中的两个多项式，使得 w^n 整除 $f(w)^r + g(w)^s + w$。通过对 $n \geq 0$ 归纳，将模 w^n 的多项式提升，可以证明这样的多项式存在。$n = 0$ 的情形是平凡的；对于 $n = 1$ 的情形，取 $f(\alpha w) = 1$ 和 $g(\alpha w) = -1$。对于 $n = 2$ 的情形，取 $f(\alpha w) = 1 + w$ 和 $g(\alpha w) = w - 1$。以同样的方式继续下去，令下式成立，即可得到一般策略：

$$f(\alpha w) := 1 + a_0 w + a_1 w^2 + \cdots + a_{n-2} w^{n-1}$$

and

$$g(\alpha w) := 1 - w - \cdots - w^{n-1}$$

对于某些系数 $a_i \in k$。接下来需要选择 $\{a_i\}$s，使得对于所有 $i \leq n-1$， w_i 的系数都为零。现在，定义映射 $\theta : \mathbb{A}^1_L \to \mathcal{X}_m \backslash \{p\}$，如下：

$$w \mapsto \left(\alpha w, 1, \ldots, 1, \frac{f(\alpha w)^r + g(\alpha w)^s + \alpha w - 1}{(\alpha w)^n}, f(\alpha w), g(\alpha w)\right).$$

这将纤维 $\mathrm{pr}^{-1}(0)$ 中的点与纤维 $\mathrm{pr}^{-1}(\alpha)$ 中的点相连，其中$\alpha \in \mathbb{G}_m$。值得注意的是，我们选取的点 $p = (1, \ldots\ldots, 1, 0, 1, 0)$ 不在 θ 的像中。反设 $p \in \mathrm{Im}(\theta)$，则有 $\theta(a) = p = (1, \ldots\ldots, 1, 0, 1, 0)$，其中某个 $a \in \mathbb{A}^1_L$。由此可得 $\alpha w = 1$, $f(\alpha w) = 1$，以及 $g(\alpha w) = 0$。直接代入这些值，并与 $p = (1, \ldots\ldots, 1, 0, 1, 0)$ 比较后，我们发现

$$\frac{f(\alpha w)^r + g(\alpha w)^s + \alpha w}{(\alpha w)^n} = 1 \neq 0.$$

这表明拟仿射簇 $\mathcal{X}_m \backslash \{p\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的。 □

现在我们已经具备了证明关键结果的所有工具，该结果回答了定义 5.3.4。

定理 5.3.8。 *[MV25]* 设 k 是一个无限完美域。那么对每个 $m \geq 0$，维数为 $\mathcal{X}_m \backslash \{p\}$ 的严格拟仿射簇 $m+3$ 与 $\mathbb{A}^1$-同伦于 $\mathbb{A}^{m+3}_k \backslash \{0\}$，但作为 $\mathbb{A}^{m+3}_k \backslash \{q\}$-概形， k与其不同构。

证明。 设 $\mathcal{X}_m$ 是方程 (5.14) 中所述的光滑仿射簇，其有理点为 $p = (1, \ldots, 1, 0, 1, 0) \in \mathcal{X}_m$，其像为 $q = (1, \ldots, 1, 0, 0) \in \mathbb{A}^{m+3}_k$。我们首先证明 $\mathcal{X}_m \backslash \{p\}$ 与 $\mathbb{A}^1$-同伦于 $\mathbb{A}^{m+3} \backslash \{q\}$。为此，我们建立如下交换图，其各行均为余纤维序列：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_m \backslash \{p\} & \longrightarrow & \mathcal{X}_m & \longrightarrow & \mathcal{X}_m / (\mathcal{X}_m \backslash \{p\}) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathbb{A}^{m+3}_k \backslash \{q\} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{m+3}_k & \longrightarrow & \mathbb{A}^{m+3}_k / (\mathbb{A}^{m+3}_k \backslash \{q\}) \end{array} \tag{5.15}$$

根据定义 5.2.1，我们有 $\psi : \mathcal{X}_m \to \mathbb{A}^{m+3}_k$ 是 $\mathbb{A}^1$-弱等价于 $\mathrm{Spec} k$中的态射。接下来，我们观察到 ρ 也是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价。事实上，由于与闭浸入 $\{q\} \hookrightarrow \mathbb{A}^{m+3}_k$ 相关联的法丛是平凡的，根据 $\mathbb{A}^1$-同伦纯性（定义 2.1.56），我们有

$$\mathbb{A}^{m+3}_k / (\mathbb{A}^{m+3}_k \backslash \{q\}) \simeq \mathrm{Spec}\, k \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge (m+3)} \simeq (\mathbb{P}^1)^{\wedge (m+3)}.$$

由于 $\{p\} \in \mathcal{X}_m$ 和 $\mathcal{X}_m$ 是光滑子簇，根据上述纯性，我们有

$$\mathcal{X}_m / (\mathcal{X}_m \backslash \{p\}) \simeq \mathrm{Th}(N_p \mathcal{X}_m).$$

根据定义 5.3.6，我们有正规丛 $N_p\mathcal{X}_m$ 同构于平凡丛，因此

$$\mathrm{Th}(N_p\mathcal{X}_m) \simeq \{p\} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge(m+3)} \simeq (\mathbb{P}^1)^{\wedge(m+3)}.$$

因此，我们有

$$(\mathbb{P}^1)^{\wedge(m+3)} \simeq \mathcal{X}_m/(\mathcal{X}_m\backslash\{p\}) \xrightarrow{\rho} \mathbb{A}^{m+3}_k/(\mathbb{A}^{m+3}_k\backslash\{q\}) \simeq (\mathbb{P}^1)^{\wedge(m+3)}$$

由于映射 ρ 由映射 $d\phi_p$ 诱导，从而成为$\mathbb{A}^1$-弱等价，鉴于定义 2.1.57。该 $\mathbb{A}^1$-弱等价 ρ由定义意味着单纯形悬挂

$$\Sigma_{S^1}\phi : \Sigma_{S^1}\mathcal{X}_m\backslash\{p\} \to \Sigma_{S^1}\mathbb{A}^{m+3}_k\backslash\{q\}$$

是 $\mathbb{A}^1$-弱等价（动机空间的）。现观察到 $\mathcal{X}_m\backslash\{p\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的，由定义 5.3.7，从而由 [AM11，命题 2.2.7] 从而也是 $\mathbb{A}^1$-连通的。此外，其余维为 $d = m+3$，在 $\mathcal{X}_m$中，因为$m \geq 0$。因此，由 [AD09，定理 4.1], 这意味着开子概形 $\mathcal{X}_m\backslash\{p\} \hookrightarrow \mathcal{X}_m$ 具有相同的 $\mathbb{A}^1$-同伦层，在某一范围内：

$$\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}_m\backslash\{p\}) \xrightarrow{\sim} \pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}_m) \quad \text{for all} \quad 0 \leq i \leq d-2$$

特别地，$\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}_m\backslash\{p\})$ 是平凡的（因为 $\mathcal{X}_m$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩——见定义 2.1.54），由 $\mathbb{A}^1$-赫维茨定理 [Mor12，定理 6.35，定理 6.37] 推出 ϕ 是一个 $\mathbb{A}^1$-同调等价。最后，注意到由于[Shi22，定理 1.1] 任何 $\mathbb{A}^1$-同调等价都是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，并且 $\mathcal{X}_m\backslash\{p\} \simeq \mathbb{A}^{m+3}_k\backslash\{q\}$。

现在，我们证明这些准仿射簇不能作为 k 上的概形同构。反设存在一个同构

$$\sigma : \mathcal{X}_m\backslash\{p\} \to \mathbb{A}^{m+3}_k\backslash\{q\}$$

及其逆

$$\tau : \mathbb{A}^{m+3}_k\backslash\{q\} \to \mathcal{X}_m\backslash\{p\}.$$

现在，由于点 $\{p\}$（相应地，$\{q\}$）在 $\mathcal{X}_m$ 中（相应地，在 $\mathbb{A}^{m+3}_k$ 中）的余维数至少为 2，态射 σ 与 τ 可以连续延拓为光滑态射 $\sigma' : \mathcal{X}_m \to \mathbb{A}^{m+3}_k$ 与 $\tau' : \mathbb{A}^{m+3}_k \to \mathcal{X}_m$。映射 σ' 与 τ' 在一个有理点的补集之外与恒等映射取值相同，这意味着 σ' 与 τ' 都是同构。但由于 $\mathrm{ML}(\mathcal{X}_m) \ncong \mathrm{ML}(\mathbb{A}^{m+3}_k)$（参见 [GG23，命题 3.4]），这是荒谬的。因此，准仿射簇 $\mathcal{X}_m\backslash\{p\}$ 与 $\mathbb{A}^{m+3}_k\backslash\{q\}$ 不能作为 k-概形同构。

□

注 5.3.9（更新！）。定义5.3.8中关于基域为无限的假设，源于 *[AD09，注2。16]* 中所述的限制。本质上，该限制如下：对于一个光滑概形 X，连同开浸入 $U \hookrightarrow X$ 及其闭补集 $Z := X\backslash U$，若 $X(k) \subseteq Z$，则显然 U 没有有理点，因此它不可能是 $\mathbb{A}^1$-连通的。然而，鉴于 $\mathbb{A}^1$-单连通性（针对 $\mathcal{X}_m\backslash\{p\}$），定义5.3.8 中的无限假设可依据 *[Shi22，推论3。6]*予以取消。

5.3.4 动机球的基变换

在这一简短小节中，我们将评述动机球面的基变换性质。鉴于域上奇异动机球的存在性（定义5.3.8），自然要系统地追问其在基概形 S上是否成立。所关注的问题可表述如下：

问题 5.3.10。设 S 是任意一个“合理”的基概形。那么，对于每个 $m \geq 0$，$\mathcal{X}_m \backslash \{p\}$ $\mathbb{A}^1$ 是否与 $\mathbb{A}_S^{m+3} \backslash \{0\}$ 同伦？若是，它们是否作为 S-概形同构？

直观上，鉴于相对 Makar-Limanov 不变量的失效（如域的情形），我们预期它们作为 S-概形并不同构。为说明它们是 $\mathbb{A}^1$-同伦的，我们拟研究以下方法：

粘合动机球面

可以像处理 $\mathbb{A}^1$-可缩性那样，选择逐纤维地进行研究。为此，固定基概形 S 为一个具有无限完美剩余域的诺特概形。现在来辨明采用这种方法的障碍。根据定义5.2.2，我们知道 $\mathcal{X}_m$ 在 S 上是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，因此有 $f\colon \mathcal{X}_m \to S$ 是动机 S-空间之间的一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价。对于每个点 $s \in S$，考虑基变换 $f_s : (\mathcal{X}_m)_s \to \operatorname{Spec}(\kappa_s)$，其中 κ_s 是 $s \in S$ 处对应的剩余域，按假设它是（无限）完美的。因此，根据定义5.3.8，对于每个 $s \in S$，拟仿射概形 $(\mathcal{X}_m \backslash \{p\})_s$ 在 $\operatorname{Spc}_{\kappa_s}$ 中与 $\mathbb{A}_{\kappa_s}^{m+3} \backslash \{q\}$ $\mathbb{A}^1$-同伦。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{\kappa_s}^{m+3} \backslash \{0\} \simeq (\mathcal{X}_m \backslash \{p\})_s & \longrightarrow & \mathcal{X}_m \backslash \{p\} \\ \downarrow{\scriptstyle f_s} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec} \kappa_s & \longrightarrow & S \end{array}$$

但一般来说，$\mathbb{A}^1$-动机球面的同伦类并非平凡的（见定义2.2.3）。因此，即使知道所有纤维$(\mathcal{X}_m \backslash \{p\})_s$ 都 $\mathbb{A}^1$-同伦于 $\mathbb{A}_{\kappa_s}^{m+3} \backslash \{q\}$，也不能使我们得出原空间 $\mathcal{X}_m \backslash \{p\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-同伦于 $\mathbb{A}_S^{m+3} \backslash \{q\}$。这可以解释为缺少一个类似的粘合引理，即动机球面并不具备我们针对可缩对象所拥有的那种（定义2.1.48）。若预期动机球面也有这样的粘合引理，则不难验证，在相对维数 ≥ 3 上、于这样的基概形 S上存在奇异动机球面。

相对方法

另一种证明定义 5.3.10中的簇是 $\mathbb{A}^1$-同伦的途径，是直接在基概形 S 上进行研究，并沿着定义 5.3.8的思路建立类似结果。首先，纯性同构（定义 2.1.56）

在任意诺特概形 S上都成立。我们相信，通过恰当地选取基概形 S，应当可以重新得到 $\mathcal{X}_m\backslash\{p\}$ 是 $\mathbb{A}^1$-链连通的 S这一结论，只需构造一个显式的 $\mathbb{A}^1$-链同伦，其系数为 $\{a_i\} \in S$，正如我们在定义 5.3.7中所做的那样。现在只需检查我们在多大程度上能够扩展 S，以重新得到以下事实：

- “相对” $\mathbb{A}^1$切除型结果 S（参见 [AD09，定理 4。1]），
- $\mathbb{A}^1$同调与一定范围内的 $\mathbb{A}^1$同伦相同（参见 [Shi22，定理 1。1]）。

相对维数 2 中动机球面的唯一性

考虑到类似的粘合引理，可以尝试证明相对维数 2 中不存在奇异动机球。

猜想 1。设 S 是任意一个具有特征零剩余域的诺特概形。设f： $X \to S$ 是一个相对维数为 *2* 的光滑概形。那么，若 X 与$\mathbb{A}^2_S\backslash\{0\}$是 $\mathbb{A}^1$-同伦的，则 X 与 $\mathbb{A}^2_S\backslash\{0\}$ 作为 S-概形同构。

所提出的策略如下：首先，根据 [CR24b，定理 3。1], 我们知道，在特征零域上，光滑概形 $X \simeq \mathbb{A}^2_k\backslash\{0\}$蕴含$X \cong \mathbb{A}^2_k\backslash\{0\}$。现在，若 S 是任意一个具有特征零剩余域的诺特概形，那么根据“预期的”粘合引理，我们有 $X \simeq \mathbb{A}^2_k\backslash\{0\}$ 蕴含 $X \cong \mathbb{A}^2_k\backslash\{0\}$ 作为 S-概形同构，这由定义4.3.1可知。

太棒了，你已经来到结尾的开端！

我们就像建造沙堡的孩子……诀窍在于尽情享受，却不执着；等到时机到来，就让它消融，回归大海。

佩玛·丘卓著《当事情分崩离析时》

A 范畴全解！

A.1 格罗滕迪克拓扑

本节将阐述格罗滕迪克拓扑的概念。我们还将说明，与扎里斯基拓扑和 étale 拓扑相比，Nisnevich 拓扑的实用性。定义和表述将从简；如需更详尽的细节，请参阅 [MM12]或 [Vis04] 。

A.1.1 拓扑空间上的层

为方便读者，我们将回顾拓扑空间中的预层和层的一些基本概念。设 X 为一个拓扑空间，并记其开子集的集合为 $\mathcal{O}_X$ 。

定义29。 在 X 上，一个预层 F 是一个反变函子

$$F : \mathcal{O}_X^{op} \to \mathrm{Set}$$

它对每个开子集 $U \subset X$赋予一个集合 F（U）。在 X上，一个层 $\mathcal{F}$是满足以下公理的预层：对于 X的一个开子集 U 的每个开覆盖 $U = \bigcup_i U_i$，我们都有如下形式的等化子图表

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{e} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \underset{p}{\overset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

其中，对于 $t \in \mathcal{F}$（U），e（t）$= \{t|_{U_i} \mid i \in I\}$；对于一个族 $t_i \in \mathcal{F}$（U_i），并定义 U_{ij}：$= U_i \times_U U_j$

$$p\{t_i\} = \{t_i|_{U_{ij}}\}, \quad q\{t_j\} = \{t_j|_{U_{ij}}\}.$$

（预）层的态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是函子的自然变换。

上述层的定义等价于满足层公理的预层（[Stacks，第006S节]）。当然，人们也可以（并且将会）讨论群、环、阿贝尔群、模等的（预）层，只需在上述定义中把集合范畴替换为相应的范畴。所有这些变体都有助于讨论所涉范畴中的（预）层概念。

例 A.1.1. 自然界中有许多层的例子：

- 设 X 是一个拓扑空间， k 是一个域（例如 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$.....）。那么，对于每个开集$U \subseteq X$，对应关系$U \mapsto \{f\colon\ U \to k \mid f$ 是一个取值于 k 的连续/光滑/可微函数}事实上，它是一个环层。

- 任意拓扑空间 X 上的常值函数都是一个预层，而局部常值函数则是一个层。

- 设 X 是一个拓扑空间，并选取 $x \in X$ 以及任意集合 S。对于任意开集 $U \subseteq X$，预层
$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} S & x \in U \\ \emptyset & x \notin U \end{cases}$$
事实上，这是一个层，称为摩天楼层。

拓扑空间上的层这一概念可以推广到任意范畴$\mathscr{C}$。对于任意 $X \in \mathscr{C}$，考虑形如 $\{U \to X\}$ 的映射，它们“覆盖 X”（具体含义将在下文给出）。随后，可以针对这些（开）覆盖构造一种拓扑，并将层定义为满足某些类似局部性和粘合性质的相应反变函子。Grothendieck 及其合作者在 SGA IV 中建立了这一概念，用以研究广义空间的上同调理论，通常称之为格罗滕迪克拓扑。从某种意义上说，它提供了一种方法，将层这一概念从拓扑空间“范畴化”到任意小范畴 $\mathscr{C}$。$\mathscr{C}$ 上的预层（分别为层）的全体构成函子范畴的一个例子。我们将 $\mathscr{C}$ 上的预层（分别为层）范畴记作 Psh($\mathscr{C}$)（分别记作 Shv($\mathscr{C}$）。

为定义格罗滕迪克拓扑的概念，我们将通过筛的概念来表述它。设 $\mathscr{C}$ 是一个（小）范畴。

定义 30. 给定一个对象 $C \in \mathscr{C}$，筛 S 是 $\mathscr{C}$ 中一族陪域为 C 的态射，满足
$$f \in S \Rightarrow f \circ g \in S$$
只要该复合有意义即可。若 S 是 C 上的一个筛，且 $h : D \to C$ 是指向 C 的任意箭头，则
$$h^*(S) = \{g \mid cod(g) = D, \quad h \circ g \in S\}$$
是 D上的一个筛。

筛还有一种便捷的替代定义：设 U 是范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个对象。U 上的一个 筛 是 h_U 的一个子函子：$\mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Set}$，其中 $h_U := \mathrm{Hom}(-, U)$ 是 U 上的可表函子。

定义 31。 范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个格罗滕迪克拓扑 是一个函数 J，它为每个对象 $C \in \mathscr{C}$ 指定一个筛的集合 $J(C)$，并满足以下三个公理：

1. （极大性）：极大筛 $t_C = \{f \mid \text{陪域}(f) = C\}$ 属于 $J(C)$，
2. （稳定性）：如果 $S \in J(C)$，那么对于任意箭头 $h\colon C \to D$，有 $h^*(S) \in J(D)$，
3. （传递性）：如果 $S \in J(C)$，并且 R 是 C 上的任意筛，使得对于所有 $h\colon D \to C$ 属于 S，都有 $h^*(R) \in J(D)$，那么 $R \in J(C)$。

定义 32。 一个位点 是一个小范畴 $\mathscr{C}$ 及其上的格罗滕迪克拓扑 J 组成的二元组 $(\mathscr{C}, J)$。如果 $S \in J(C)$，则称 S 是一个覆盖筛，或称“S 覆盖 C”。

例 A.1.2. 现在我们给出一些位点的例子。

- 设 X 是一个拓扑空间；记 X_{op} 为这样一个范畴，其对象是 X 的开子集，箭头由包含给出。于是，我们在 X_{op} 上得到一个格罗滕迪克拓扑：将每个开子集 $U \subseteq X$ 与 U 的开覆盖集合相对应。这定义了一个拓扑空间的位点。

- 设 $\mathscr{C} = \mathrm{Top}$ 是拓扑空间范畴。若 U 是一个拓扑空间，则 U 的覆盖是一个联合满射的[1] 开嵌入族[2] $\{U_i \to U\}$。这也称为经典拓扑学于 X。

- 在上面的例子中，如果覆盖族 $\{U_i \to U\}$ 还是局部同胚，则称其为 X 上的 étale 位点。

A.1.2 概形上的层

现在我们将阐述位点上的层这一概念，以便将其应用于代数几何，并最终应用于动机空间范畴 Spc_S。位点上的层可以用与拓扑空间上的层大致相同的方式定义。回顾一下，环空间 是一个有序对 $(X, \mathcal{O}_X)$，其中 X 是一个拓扑空间，$\mathcal{O}_X$ 是 X 上的环层。如果此外每个茎都是局部环，则称其为局部环化的 。概形 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是局部环化空间的一个典型例子，它在扎里斯基拓扑下局部同构于仿射概形。换言之，对于每个点 $p \in X$，都存在一个开邻域 U，使得 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ 同构于一个仿射概形 (谱 $R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, R}$)。人们为概形范畴赋予另一种格罗滕迪克拓扑，该拓扑随所定义的开覆盖的性质而变化。

[1] 也就是说，其像的集合论并等于 U [2] 开连续单射 $V \to U$

例 A.1.3. 设 T 是一个概形，带有一族覆盖 $\{f_i : T_i \to T\}_{i\in I}$，且满足$T = \bigcup_i f_i(T_i)$，则称这样的覆盖为

- 扎里斯基，若每个 f_i 都是开浸入，
- étale，若每个 f_i 都是*étale*，
- 光滑，若每个 f_i 都是光滑，
- fppf[3]（忠实平坦且有限表示）若每个 f_i 都是平坦且局部有限表示的，
- fpqc[4]（忠实平坦且且拟紧）若每个 f_i 都是平坦的，并且对于每个仿射开集$U \subseteq T$，存在有限集合 K、映射 $\boldsymbol{i} : K \to I$ 以及仿射开集 $U_{\boldsymbol{i}(k)} \subset T_{\boldsymbol{i}(k)}$，使得$U = \bigcup_{k\in K} f_{\boldsymbol{i}(k)}(U_{\boldsymbol{i}(k)})$。

现在我们将介绍另一种重要的拓扑学，称为*Nisnevich*拓扑，它非常适合进行 $\mathbb{A}^1$-同伦论。

A.1.3 尼西涅维奇位点

我们先介绍一种不同于第 2.1 节所述的 Nisnevich 拓扑的定义。此定义源自 [Lur18，定义 3.7.1。1]（另见 [MV99，引理 1。5]）：

定义 33. Sm_S 上的 Nisnevich拓扑是由满足以下条件的有限族 *étale* 态射 $\{p_i : U_i \to X\}_{i\in I}$ 生成的：存在一个有限序列

$$\emptyset \subseteq Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 = X$$

由 X 的有限表示闭子概形组成，使得

$$\bigsqcup_{i\in I} p_i^{-1}(Z_m \backslash Z_{m+1}) \to Z_m \backslash Z_{m+1}$$

存在一个到 $0 \le m \le n-1$ 的截面。

关于此定义确实等价于在 k-点上满射的论证，可参见 [Hoy16]。Nisnevich 拓扑的另一个等价定义如下：它是由初等特异方块（[AØ21，注 2.3。3]）生成的格罗滕迪克拓扑。就覆盖筛而言，Nisnevich 拓扑是满足以下条件的最粗拓扑：空筛覆盖 $\emptyset$；对于上述 EDS，X 上由 $U \to X$ 和$V \to X$ 生成的筛是一个覆盖筛。无论采用哪种定义，Nisnevich 拓扑都比扎里斯基拓扑精细，但比 étale 拓扑粗：

$$\text{étale} >> \text{Nisnevich} > \text{Zariski}$$

这种双重特性使 Nisnevich 拓扑更适合开展动机同伦论。

[3]法语，意为“有限表现忠实平坦”。[4]法语，意为“忠实平坦”和“拟紧”。

Nisnevich拓扑的优点

1. 克鲁尔维数为 d 的概形的 Nisnevich 上同调维数（甚至同伦维数）等于 d（这与扎里斯基拓扑类似）：$H^i_{Nis}(S,\mathcal{F}) = 0$，对所有 $i > d$ 以及任意阿贝尔群层 $\mathcal{F}$ 都成立（[MV99，命题 1.8]）。2. 对于域 k，任意域都没有非平凡的 Nisnevich 上同调（与扎里斯基拓扑类似）：H^i_{Nis}(谱 $k,\mathcal{F}$) $= 0$，对任意阿贝尔群层 $\mathcal{F}$ 都成立。3. 代数 K-理论具有 Nisnevich 下降（与扎里斯基拓扑类似）。4. 沿有限态射的推前是 Nisnevich 阿贝尔群层上的正合函子（其表现类似于 étale 拓扑）。5. Nisnevich 上同调可以用 Čech 上同调计算（类似于 étale 拓扑）：对于 Sm_S 上的任意阿贝尔群层 $\mathcal{F}$ 以及任意 $n \geq 0$，我们有群同构 $\check{H}^n_{Nis}(S,\mathcal{F})$ $\cong H^n_{Nis}(S,\mathcal{F})$（[MV99，命题 1.9]），其中左边是空间 X 的 Čech 上同调。扎里斯基拓扑中这一性质不成立（见 [MV99，例 1.10]）。6. 对于闭浸入，Nisnevich 层具有纯性同构（类似于 étale 拓扑）。因此，任意光滑对 (Z,X) 在 Nisnevich 拓扑中局部等价于形如 $(\mathbb{A}^m,\mathbb{A}^n)$ 的一对：见定义 2.1.56。7. 由于 Nisnevich 拓扑比 étale 拓扑更粗，它继承了 étale 拓扑的子正则性质。因此，Nisnevich 拓扑中的任意可表预层自动就是可表层（例如，见 [AM11，§2.4] 或 [Stacks，注记 03O4]）。

A.2 模型范畴

模型范畴的语言由 Quillen（[Qui67]）确立，作为处理同伦论表述的合适框架。如今，这一框架在研究带有某种同伦背景的范畴时几乎不可或缺；首先要做的，是为目标范畴赋予模型结构，并在这一框架下重新表述原问题。模型范畴具有广泛适用性，这归功于其简洁的描述方式：只需研究给定范畴中的两类特定映射——弱等价以及纤维化或余纤维化——便可研究其中的态射。此外，在同伦范畴层面定义的某些（Quillen）函子伴随对进一步增强了这一点。交换代数中的局部化形式体系，允许我们形式地将选定的乘法系中的元素求逆。应用于

代数几何中，局部化帮助我们形式地将任意选定的一类映射求逆，从而得到一个更大的新范畴，在其中这些选定的映射都成为同构。本节将简要介绍这一工具及其背景，重点讨论 $\mathbb{A}^1$-同伦论。在大部分内容中，我们将遵循 [Lur09]。

定义 34. *A*模型结构 由范畴 $\mathscr{C}$ 中的三类特殊态射组成 $\mathscr{C}$

- 余纤维化 $\mathcal{C}$的
- 纤维化 $\mathcal{F}ib$
- 弱等价 $\mathcal{W}eq$

满足以下公理：

1. 范畴 $\mathscr{C}$ 存在（小）极限和余极限。

2. 给定一对可复合的映射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，若 $g \circ f$、 f 与 g 中任意两个是弱等价，则第三个也是弱等价（这称为二取三公理），

3. 假设 $f : X \to Y$ 是 $g : X \to Y$ 的一个收缩：也就是说，假设存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & X' & \xrightarrow{r} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[i']{} & Y' & \xrightarrow[r']{} & Y \end{array}$$

其中 $r \circ i = id_X$ 且 $r' \circ i' = id_Y$。则

（*i*）若 g 是纤维化，则 f 也是；
（*ii*）若 g 是余纤维化，则 f 也是；
（*iii*）若 g 是弱等价，则 f 也是。

4. 给定一个图表

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

若满足下列任一条件，则可找到一条虚线箭头，使该图表交换

(i) 映射 i 是余纤维化，映射 p 既是纤维化也是弱等价。*(ii)* 映射 i 既是余纤维化也是弱等价，映射 p 是纤维化。

5. $\mathscr{C}$ 中的任意映射 $X \to Z$ 都存在如下函子性分解：

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \qquad\qquad X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z$$

其中 f 是余纤维化， g 是平凡纤维化， f' 是平凡余纤维化，而 g' 是纤维化。

一个 模型范畴是配备了模型结构的范畴 $\mathscr{C}$。

之后我们会遇到许多模型范畴的例子。下面是其中最简单的一个：

例 A.2.1. 设 $\mathscr{C}$ 是任意一个具有小极限和余极限的范畴。那么 $\mathscr{C}$ 可以赋予平凡模型结构：

- 弱等价 $\mathcal{W}eq$ 是 $\mathscr{C}$中的同构。
- 每个态射都是纤维化 $\mathcal{F}ib$。
- 每个态射都是一个余纤维化 $\mathcal{C}$的。

定义35。 模型范畴 $\mathscr{C}$ 中的态射称为平凡余纤维化，当且仅当它既是余纤维化又是弱等价。同样， f 称为平凡纤维化，当且仅当它既是纤维化又是弱等价。

由公理(1)，任意模型范畴 $\mathscr{C}$ 都有一个始对象 $\emptyset$ 和一个终对象 $*$。这给出了如下描述：

定义36。 M 中的对象 X 称为纤维的，如果 $X \to *$是纤维化；对象 X 称为余纤维的，如果$\emptyset \to X$ 是余纤维化。给定 M中的对象 X ，若无环纤维化 $QX \to X$ 满足QX 是余纤维的，则称其为余纤维替换。类似地，如果 $X \to RX$ 是一个无环纤维化，且 RX 是纤维的，那么 RX 称为 X的纤维替换。

根据模型范畴的公理，这些替换总是存在。

A.2.1 模型范畴的同伦范畴

概括来说，构造与模型范畴相关的同伦范畴有两种不同（但等价）的方法。下面我们将简要介绍这两种观点。

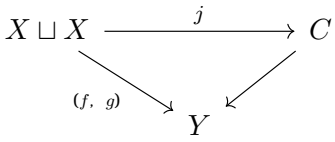
柱体—路径分解

定义 37. 设 $\mathscr{C}$ 是一个包含对象 X 的模型范畴。X 的柱体对象是一个对象 C，连同图表 $X \sqcup X \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} X$，其中 i 是余纤维化， j 是弱等价，且复合 $j \circ i$ 是折叠映射 $X \sqcup X \to X$。对偶地， $Y \in \mathscr{C}$ 的路径对象是一个对象 P，连同图表 $Y \xrightarrow{q} P \xrightarrow{p} Y \times Y$，使得 q 是弱等价， p 是纤维化，且 $p \circ q$ 是对角映射 $Y \to Y \times Y$。

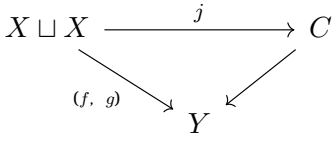
柱体对象与路径对象的存在性由定义34的分解公理 (5) 得出。下述事实为构造同伦范畴确立了一个重要工具：

命题 A.2.2。 设 $\mathscr{C}$ 为一个模型范畴。设 X 为 $\mathscr{C}$ 的一个余纤维对象， Y 为 $\mathscr{C}$ 的一个纤维对象，且 f 与 g： $X \to Y$ 为两个映射。以下条件等价：

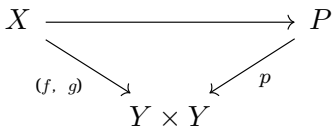
1. 对于每个柱体对象 $X \sqcup X \xrightarrow{j} C$，存在一个交换图



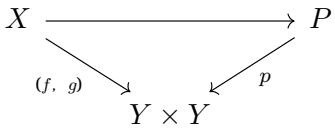
2. 存在一个柱体对象 $X \sqcup X \xrightarrow{j} C$ 以及一个交换图



3. 对于每个路径对象 $P \xrightarrow{p} Y \times Y$，存在一个交换图



4. 存在一个路径对象 $P \xrightarrow{p} Y \times Y$ 以及一个交换图



若 $\mathscr{C}$ 是一个包含余纤维对象 X 和纤维对象 Y 的模型范畴，我们称两个映射 f， g： $X \to Y$ 是 同伦的，如果定义 A.2.2 的假设得到满足，并记作 $f \simeq g$。关系 $\simeq$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ 上的等价关系。

定义 38。 同伦范畴 $h\mathscr{C}$ 可定义如下：

- $h\mathscr{C}$ 的对象是 $\mathscr{C}$ 的纤维-余纤维对象。
- 集合 $\mathrm{Hom}_{h\mathscr{C}}(X, Y)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ 的 $\simeq$-等价类集合，对所有 X、 $Y \in h\mathscr{C}$ 均成立。

注意，复合在 $h\mathscr{C}$ 中是良定义的：如果 $f \simeq g$，那么 $f \circ h \simeq g \circ h$（这由定义 A.2.2 的刻画 (4) 显然可得），且 $h' \circ f \simeq h' \circ g$（这由定义 A.2.2 的刻画 (2) 显然可得），对任意映射 h， h'，只要它们的复合在 $\mathscr{C}$ 中有定义。

形式逆

另一种观点是形式上添加一类（逆）映射，以扩大 $\mathscr{C}$ 的弱等价类 $\mathcal{W}eq$。令 $H(\mathscr{C})$ 表示由此得到的范畴，则

$$H(\mathscr{C}) := \mathscr{C}[\mathcal{W}eq]^{-1}.$$

若 $X \in \mathscr{C}$ 是余纤维且 $Y \in \mathscr{C}$ 是纤维，则同伦映射 f、$g\colon X \to Y$ 在 $H(\mathscr{C})$ 中具有相同的像。因此，我们得到一个函子 $h\mathscr{C} \to H(\mathscr{C})$，可以证明它是一个等价。于是，这两种方法至少在等价意义下产生相似的同伦论。在这一方向上还需指出的一项重要技巧是：存在一种将所有同伦余极限附加到 $\mathscr{C}$ 以产生同伦范畴的普遍方式。这称为由 Dugger [Dug01b], 构造的普遍同伦论 $U\mathscr{C}$；尽管它是一种高度形式化的工具，但通过考察某些普遍情形，已被证明有助于验证$\mathscr{C}$ 的某些一般性质。就我们的语境而言，可以证明与 Sm_k、$U(\mathrm{Sm}_k)_{\mathbb{A}^1}$ 相关联的普遍同伦与 Morel-Voevodsky 的 $\mathbb{A}^1$-同伦论的相应对象是 Quillen 等价的 $\mathscr{MV}_k$（详见同上，§8）。

A.2.2 Quillen函子与Quillen伴随

设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是模型范畴，并假设给定了一对伴随函子

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$$

（其中 F 是左伴随，G 是右伴随）。以下条件等价:

1. 函子 F 保持余纤维化和平凡余纤维化。
2. 函子 G 保持纤维化和平凡纤维化。
3. 函子 F 保持余纤维化，且函子 G 保持纤维化。
4. 函子 F 保持平凡余纤维化，而函子 G 保持平凡纤维化。

定义 39。若这些等价条件中任一条件成立，我们就称这对(F, G) 是模型范畴 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 之间的 Quillen 伴随，并称 F 是左 Quillen 函子，而 G 是右 Quillen 函子。在这种情况下，可以证明 F 保持余纤维对象之间的弱等价，而 G 保持纤维对象之间的弱等价。

对于上述 Quillen 伴随，可以将同伦范畴 $h\mathscr{C}$ 视为这样得到：先取由余纤维对象组成的全子范畴，再将所有弱等价取逆。对$\mathscr{D}$采用类似的步骤可知，由于 F 保持余纤维对象之间的弱等价，它

诱导出一个函子 $LF: h\mathscr{C} \to h\mathscr{D}$。这个函子称为$F$的左导出函子。对偶地，将 G 的右导出函子定义为 $RG: h\mathscr{D} \to h\mathscr{C}$。此外，还可以证明，导出函子 LF 和 RG 在同伦范畴 $h\mathscr{C}$ 与 $h\mathscr{D}$之间确定了一个伴随：

命题 A.2.3。 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 为模型范畴，并设

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftharpoons}} \mathscr{D}$$

为一个 *Quillen*伴随。以下条件等价：

1. 左导出函子 $LF: h\mathscr{C} \to h\mathscr{D}$ 是范畴等价。

2. 右导出函子 $RG: h\mathscr{D} \to h\mathscr{C}$ 是范畴等价。

3. 对每个余纤维对象 $C \in \mathscr{C}$ 和每个纤维对象 $D \in \mathscr{D}$，映射 $C \to G(D)$在 $\mathscr{C}$ 中是弱等价，当且仅当伴随映射 $F(C) \to D$ 在 $\mathscr{D}$中是弱等价。

如果满足上述等价条件，则称伴随 (F, G)给出了模型范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$之间的 *Quillen* 等价。

证明。 参见 [Lur09，命题 A.2.5.1。]。 □

Bousfield 局部化

给定一个模型范畴 $\mathscr{C}$，我们现在讨论一种过程：通过称为局部化的步骤，形式地反演某一类映射，从而扩充 $\mathscr{C}$，使其包含更多弱等价。读者应注意，这种映射局部化过程并不会将映射本身变为同构，而是使这些映射在同伦范畴中的像成为同构。由于映射在同伦范畴中的像是同构，当且仅当该映射是弱等价，因此，相对于某一类映射对模型范畴进行局部化，意味着将映射变为弱等价，而非同构。

定义 40。 设 $M = (\mathcal{W}eq, \mathcal{C}of, \mathcal{F}ib)$ 是一个弱等价类为 $\mathcal{W}eq$ 的单纯模型范畴。假设 I 是 M 中的一个映射集合。

- 一个 X 对象 M 是 I-局部的，如果它是纤维的，并且对于所有 i： $A \to B$ 满足 $i \in I$的情形，映射空间上的诱导态射 i^*： $\mathrm{Map}_M(B, X) \to \mathrm{Map}_M(A, X)$ 是单纯集合之间的弱等价。

- 若对每个 I-局部对象X，映射空间上的诱导态射 $f^*: \mathrm{Map}_M(B, X) \to \mathrm{Map}_M(A, X)$ 都是弱等价，则态射 $f: A \to B$ 称为 I-局部弱等价 。

令 $\mathcal{F}ib_I$ 表示满足相对于 W_I-无圈余纤维化的右提升性质的映射类，记作 $\{\mathcal{W}eq_I \cap \mathcal{C}of\}$。若 M 上的模型范畴结构 $(\mathcal{W}eq_I, \mathcal{C}of, \mathcal{F}ib_I)$ 存在，则称其为关于 I 的 M 的左*Bousfield*局部化 。只要它构成模型范畴，我们就将该局部化记作 $\mathbb{L}_I M$。

备注 A.2.4. 当其存在时，关于 I 的 M 的 *Bousfield* 局部化，具有如下 *Quillen*对 $F\colon\ M \rightleftharpoons N\colon\ G$ 的普适性：对所有 $i \in I$， $LF(i)$ 在 N 中是弱等价。

下述定理说明，在良好情形下此类局部化的存在性，并给出了这些情形下纤维对象的优雅刻画：

定理 A.2.5. 若 M 是左适当的组合单纯模型范畴，且 I 是 M 中的一组态射，则左 *Bousfield*局部化 $\mathbb{L}_I M$ 存在，并继承 M 的单纯模型范畴结构。此外， $\mathbb{L}_I M$ 的纤维对象恰为 M 中的 I-局部对象。

证明。 参见 [Lur09，命题 A.3.7。3]。 □

关于其他模型结构下 Bousfield 局部化的其他刻画及其存在性，可参阅 [Lur09，第A.3节。7] 或 [Hir03，第 4]章。对偶地，对于右适当胞腔模型范畴，我们有右Bousfield局部化理论，它通过将 $\mathcal{W}eq_I$-无环纤维化 $\mathcal{W}eq_I \cap \mathcal{F}ib$这一类取为等价而得到。这称为 胞腔化 (参见 [Hir03，第 5]章）。读者也可参阅经典文献 [Bou 75] 或现代论述 [AE17，第3节。3]。

现在我们转而讨论最重要的模型范畴之一；它具有优雅的描述，并且在文献中已得到充分研究。

A.2.3 组合模型结构

现在我们简要描述一种特殊的模型结构。组合模型范畴是一种易于处理的模型结构，能够对该模型结构中的余纤维化进行非常强的控制。它由小数据 = 生成，具体而言，是由一组小对象之间的（非循环）余纤维化生成的结构。

定义 41。模型范畴 $\mathscr{C}$ 是左适当的，如果对于任意推出方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ A' & \xrightarrow[i']{} & B' \end{array}$$

其中 i 是余纤维化且 j 是弱等价，映射 j 也是弱等价。对偶地，如果对于任意拉回方块，$\mathscr{C}$ 是右适当的

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p'} & Y' \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow[p]{} & Y \end{array}$$

其中 p 是一个纤维化，且 q 是一个弱等价，则映射 q 也是一个弱等价。如果 $\mathscr{C}$ 中的每个对象都是余纤维的，则 $\mathscr{C}$ 是左适当的。

定义 42。 *[Lur09，定义 5.5.0。1]*范畴 $\mathscr{C}$ 是 可呈示的，如果它满足以下条件：

1. 范畴 $\mathscr{C}$ 具有所有（小）余极限；*2.* 存在一个（小）集合 S，其元素是 $\mathscr{C}$ 中的对象，并且在余极限下生成 $\mathscr{C}$；换言之，$\mathscr{C}$ 中的每个对象都可以表示为一个取值于 S的（小）图表的余极限；*3.* $\mathscr{C}$ 中的每个对象都是小的。（假设（*2*）成立，这等价于断言属于 S 的每个对象都是小的。）*4.* 对任意一对对象 X、$Y \in \mathscr{C}$，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ 是小的。

例 A.2.6。 对于任意模型范畴 $\mathscr{C}$，预层范畴 $\mathrm{Psh}(\mathscr{C})$ 是可呈示的。这是因为任意预层都是可表对象的余极限（定义 *A.2.15*）。

定义43。 设 $\mathscr{C}$ 是一个可呈示范畴，且 κ 是一个正则基数。若全子范畴 $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$ 满足以下条件，我们称其为 $\mathscr{C}$ 的一个 κ-可达子范畴：

1. 全子范畴 $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$ 在 κ-滤过余极限下封闭。

2. 存在一个由 $\mathscr{C}_0$ 中对象构成的（小）集合，使得 $\mathscr{C}_0$ 可由该集合在 κ-滤过余极限下生成。

若对于某个正则基数 κ，$\mathscr{C}_0$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个 κ-可达子范畴，我们就称 $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$ 是一个可达子范畴。

注记 A.2.7。 若 $\mathscr{C}$ 可达且存在小余极限，则一个 $(\infty,1)$-范畴 $\mathscr{C}$ 是可呈示的 。

例 A.2.8。 动机空间范畴 $\mathrm{Spc}_S \subset \mathrm{Psh}(Sm_S)$ 是 $\mathrm{Psh}(Sm_S)$ 的一个可达子范畴。这由 *[Lur09，命题 5.5.12]* 以及 $\mathrm{Psh}(Sm_S)$ 是一个可达范畴这一事实可知。

定义 44。 模型范畴 $\mathscr{C}$ 是余纤维生成 的，当且仅当存在小的态射集合 I、$J \subset Mor(\mathscr{C})$，使得

- $\mathcal{C}of(I)$ 恰好是 $\mathscr{C}$ 的余纤维化类，
- $\mathcal{C}of(J)$ 恰好是 $\mathscr{C}$ 中无圈余纤维化的全体，
- I 且 J 容许小对象论证。

上述定义的关键要点在于：在余纤维生成模型范畴中，余纤维化与无圈余纤维化的全体可以用简单得多的方式加以刻画：

(a) $\mathcal{C}of(I) = llp(rlp(I))$,

(b) $\mathcal{C}of(J) = llp(rlp(J))$.

因此纤维化恰好构成 $rlp(J)$ 而无圈纤维化恰好构成 $rlp(I)$。此处， $llp =$ 表示左提升性质， $rlp =$ 表示右提升性质。关于余纤维生成范畴的等价定义及各种讨论，可参阅 [nLab，Cofib-gen]。由于在实践中这些生成元可能难以找到， [Lur09，§A.2.6] 给出了另一种定义，更强调 $\mathscr{C}$ 中弱等价的全体。

定义 45. 模型范畴 $\mathscr{C}$ 是组合的，如果它作为范畴是可呈示的，且作为模型范畴是余纤维生成的。

至少有两种绝妙的方法可以识别 $\mathscr{C}$ 上的组合结构：

1. Smith 的一个定理（[Bek00，定理 1。7]）根据弱等价和生成余纤维化刻画了组合模型范畴，因此只需显式使用所需输入数据的三分之二，这使得识别组合结构更加容易。例如，可以证明某些组合模型范畴的左Bousfield局部化仍然是组合模型范畴。

2. Dugger（定义 A.2.9）将组合结构与具有如下呈示的模型范畴联系起来：它们在 Quillen 等价意义下是单纯预层上全局模型结构的 Bousfield 局部化（[Dug01a，推论 1。2]）。Lurie 在证明单纯组合模型范畴恰好是局部可呈示 $(\infty, 1)$-范畴的模型时，这一结果发挥了重要作用。

定理 A.2.9。 每个组合模型范畴 $\mathscr{C}$ 都与一个左*Bousfield*局部化 $\mathbb{L}_S\mathrm{sPsh}(K)$ 等价；该局部化是小范畴 K上的单纯预层 $\mathrm{sPsh}(K)^{proj}$ 的全局投射模型结构

$$\mathbb{L}_S\,\mathrm{sPsh}(K) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{C}$$

其中 $S \subset \mathrm{sPsh}(K)$ 是一个定义良好的子集。

证明。 这是 [Dug01a]的主要结果。 □

A.2.4 单纯预层上的同伦理论

在本节中，我们将简要回顾单纯集合范畴与单纯预层，并按照 [Hov07；GJ09；Lur09]为其配备模型范畴结构。

单纯集合范畴

定义 46。 对每个 $n \geq 0$，我们用 $[n] := \{0 < 1 < \dots n-1 < n\}$ 表示该线性有序集。单形（组合）范畴记作 Δ，其对象和态射如下：

- 对象：线性有序集 $[n]$（亦称关系串 $1 \to 2 \to \cdots \to n$）。
- 态射：$\theta:\ [m] \to [n]$ 是保序集合函数。

范畴 Δ 也称为序数范畴。

若 $\mathscr{C}$ 是任意范畴，则 $\mathscr{C}$ 上的单纯对象是一个函子 $\Delta^{op} \to \mathscr{C}$。对偶地，$\mathscr{C}$ 上的余单纯对象 是一个函子 $\Delta \to \mathscr{C}$。

定义 47. 单纯集合范畴记作sSet，它是集合范畴中的一个单纯对象，也就是说，sSet：$= \mathrm{Fun}(\Delta^{op}$,集合)。

由于集合范畴具有所有（小）极限和余极限，因此单纯集合范畴也具有所有（小）极限和余极限。

例 A.2.10. 存在一个标准的协变函子

$$\begin{aligned} \Delta &\to \mathrm{Top} \\ n &\mapsto |\Delta^n| \end{aligned}$$

拓扑 n-单形 $|\Delta^n| \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是空间

$$|\Delta^n| := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{t=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

赋予子空间拓扑。由 $\theta:\ [m] \to [n]$ 诱导的映射 $\theta^*:\ |\Delta^n| \to |\Delta^m|$ 定义为 $\theta_*(t_0, \dots, t_m) = (s_0, \dots, s_n)$ 其中

$$s_i = \begin{cases} 0 & \textit{if} \quad \theta^{-1} = \emptyset \\ \sum_{j \in \theta^{-1}(i)} & \textit{if} \quad \textit{else} \end{cases}$$

对于任意 $T \in \mathrm{sSet}$，奇异集 $\mathrm{Sing}(T)$ 是由下式给出的单纯集：

$$[n] \mapsto \hom(|\Delta^n, T|)$$

按照约定，我们通过设定 $\Delta^{-1} = \emptyset$ 来扩展此构造。标准 0-单纯形 Δ^0 是单纯集合范畴的终对象，也就是说，它将每个 $[n] \in \Delta^{op}$ 映射到只含有一个元素的集合。

注 A.2.11。 单纯集 $S_\bullet$ 还有一种等价定义，这一定义有助于进行计算。单纯集 $S_\bullet$ 可以视为一族集合 $\{S_n\}_{n\geq 0}$，并赋予其两种额外结构：

$$d^i : [n-1] \to [n], \quad 0 \leq i \leq n \quad (\textit{cofaces})$$
$$s^j : [n+1] \to [n], \quad 0 \leq j \leq n \quad (\textit{codegeneracies})$$

这两个映射 d^i 和 s^j 都应满足一系列等式，这些等式称为单纯恒等式，可参见任何标准参考文献（例如，*[GJ09，第 I 章，§1]*）。从 $[n]$ 到 $[m]$ 的每个保序映射都可以分解为面映射与退化映射的复合，因此，单纯集 S 的结构完全由集合 S_n （$n \geq 0$ 取遍所有值）以及这些面映射和退化映射决定。

例 A.2.12. 单纯集范畴中的标准 n单形（单纯集） Δ^n sSet 定义为

$$\Delta^n := \hom_\Delta(-, [n]).$$

换言之， Δ^n 是由 $[n]$ 表示的 Δ 上的反变函子。

单纯集的态射 $f : X \to Y$，称为单纯映射，是定义在 Δ 上的反变集合值函子之间的自然变换。Yoneda 引理表明，单纯映射 $\Delta^n \to Y$刻画了 Y的 n-单形，其意义在于存在一个自然双射

$$\hom_{\mathrm{sSet}}(\Delta^n, Y) \cong Y_n$$

在 Y 的 n-单形集合 Y_n 与 $\hom_S(\Delta^n, Y)$ 之间。存在一个标准单形

$$\iota_n := \mathbf{1}_n \in \hom_\Delta([n], [n])$$

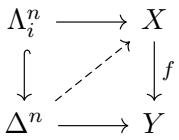
例 A.2.13. 范畴 Δ^n 包含两个重要的子复形：第 k 个角 Λ^n_k $0 \leq k \leq n$，它是由除第 k 个面 $d_k(\iota_n)$ 外的所有面 $d_j(\iota_n)$ 生成的 Δ^n 的子复形；以及边界 $\partial\Delta^n$，它是包含标准单形 ι_n 的面 $d_j(\iota_n)$、 $0 \leq j \leq n$ 的最小子复形。

单纯集合上的模型结构

单纯集合范畴 sSet 具有一个组合、左适当且右适当的模型结构，通常称为*Kan*模型结构，定义如下：

1. 单纯集合 f 的映射：$X \to Y$是<款式 id='3'>余纤维化</款式>，当且仅当它是单态射：若对所有 $n \geq 0$，诱导映射 $X_n \to Y_n$ 都是单射，

2. 单纯集合 f 的映射：$X \to Y$是<款式 id='3'>纤维化</款式>，当且仅当它是 Kan 纤维化：对于任意图表



可以补上使图表交换的虚线箭头，其中 Λ_i^n是 Δ^n的第 i 个角。

3. 单纯集合映射 $f: X \to Y$若其几何实现的诱导映射 $|X| \to |Y|$ 是拓扑空间之间的同伦等价，则称为弱等价。

研究单纯集合范畴上的模型结构，是为动机构建模型结构的基础步骤 S-空间 Spc$_S$。这主要是因为构建空间范畴 Spc$_S$ 的单纯预层范畴实际上是 sSet 上的富集范畴（且这种富集与模型结构相容）。这类富集范畴称为单纯范畴。简而言之，模型范畴 $\mathscr{C}$ 若满足以下条件，则称为单纯的：

1. 存在映射空间函子 Map : $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to$ sSet 2. 存在积函子 $\otimes$: sSet $\times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$

并且乘积满足结合律，即

- $(L \times K) \otimes X \simeq L \times (K \otimes X)$，关于 $X \in \mathscr{C}$、 K， $L \in$ sSe 自然 t
- Δ^0 是单位对象，即 $\Delta^0 \otimes X \cong X$。
- 对于一个 $X \in \mathscr{C}$和 $K \in$ sSet，存在伴随函子对

$$\otimes X : \mathrm{sSet} \leftrightharpoons \mathscr{C} : Map(-, X)$$
$$K \otimes - : \mathscr{C} \leftrightharpoons \mathrm{sSet} : (-)^K$$

例 A.2.14。 范畴 sSet 与上文介绍的模型结构一起构成一个单纯模型范畴，若取 $K \otimes X :\ = K \times X$ *([GJ09，* 命题 *11。5])*。

A.2.5 单纯预层范畴

模型范畴 $\mathscr{C}$ 上的单纯预层范畴 sPsh($\mathscr{C}$) 是反变函子

$$\mathrm{sPsh}(\mathscr{C}) := \mathrm{Fun}(\mathscr{C}^{op} \to \mathrm{sSet})$$

现在我们将简要讨论单纯预层范畴上的一些相关模型结构。历史上，预层范畴上的若干模型结构已

得到研究（参见 [Jar87；Hel88；GJ09；Hir03；Dug01b；DRØ03；Isa05；Hov07；Rön25]）。经典地说，人们会在这个范畴上赋予四种可能的模型结构：

- （整体）内射模型结构和局部内射模型结构
- （整体）投射模型结构和局部投射模型结构

内射模型结构是指余纤维化可逐点检测的模型结构[5]，而纤维化则定义为具有相对于平凡（也称为无环）余纤维化的左提升性质的态射。另一方面，投射模型结构是指弱等价保持不变，但纤维化可逐点检测，而余纤维化是具有相对于无环纤维化的左提升性质的态射的模型结构。因此，内射模型结构更适合描述余纤维化，而投射模型结构更适合描述纤维化。局部版本则通过相对于某个合适的态射类进行（Bousfield）局部化而得到，从而产生某些额外的弱等价，使我们能够局部研究该范畴。

以下论述将遵循 [Sev06；AE17]。我们只在预层层面构建这一理论，并指出，所有这些内容也都可以通过伴随函子对提升到单纯层范畴

$$a : \mathrm{sPsh}(T) \rightleftarrows \mathrm{sShv}(T) : \iota_*$$

其中 ι是包含函子， a是逐对象定义的伴随层函子。

定义 48. 设 $T = (\mathcal{C}, J)$ 为一个小的 *Grothendieck* 位点。则称下列单纯对象

$$\mathrm{sPsh}(T) := \mathrm{Fun}(\Delta^{op}, \mathrm{Psh}(T))$$

为 T上的单纯预层。也就是说，$\mathrm{sPsh}(T) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{sSet})$ 是取值于sSet的 T上的预层。此外，带基点单纯预层等同于取值于 T上的sSet值预层，即 $\mathrm{sPsh}_*(T) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{sSet}_*)$。

命题 A.2.15. 每个单纯预层都典范同构于可表单纯预层的一个余极限 $R_X := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$。

证明。 这归功于 [ML98，第三章，第 7 节，定理 1]。 □

推论 A.2.16. 每个动机空间都是可表对象的余极限。

证明。 这是由以下事实得出的： $\mathbb{L}_{mot}$ 保留余极限（参见定义2.1.15）。另见 [DRØ03，引理 2。4]。 □

定义 49. 设 $f : X \to Y$ 是单纯预层之间的一个映射。则 f 称为

[5]也称为逐截面或逐对象

• 局部弱等价，若 $f_*:\pi_0(X)\to\pi_0(Y)$ 是一个双射，并且对所有 $n>0$ 和 $U\in\mathcal{C}$，诱导映射 $\pi_n(X|_U,x)\to\pi_n(Y|_U,f(x)$ 对所有基点 $x\in X(U)_0$都是层同构。

• 逐对象弱等价 （分别地，若对所有 $U\in\mathcal{C}$，诱导映射$f(U):X(U)\to Y(U)$ 在 sSet中是弱等价（分别地，是（余）纤维化）。

单纯预层上存在闭对称幺半结构（[ML98，第 XI 章，§1]）。设 X,Y为单纯预层。定义单纯函数复形

$$\mathrm{Map}(X,Y)_n:=\mathrm{Hom}_{\mathrm{sPsh}(T)}(X\times\Delta^n,Y)$$

其中 Δ^n 视为常值单纯预层。内部函数复形定义为

$$\underline{\mathrm{Map}}(X,Y)(U):=\mathrm{Map}(X|_U,Y|_U)$$

在单纯层上，并且可以证明该复形仍是一个单纯预层。单纯预层范畴连同范畴论积

$$-\times-:\mathrm{sPsh}(T)\times\mathrm{sPsh}(t)\to\mathrm{sPsh}(T)$$

构成对称幺半范畴，其中 $X\times Y$记作 $X\otimes Y$。此外，它们是闭的，因为

$$-\otimes X:\mathrm{sPsh}(T)\rightleftarrows\mathrm{sPsh}(T):\underline{\mathrm{Map}}(X,-)$$

以下是 sSet 上 Yoneda 引理的一个版本。

引理 A.2.17. 设 $X\in\mathcal{C}$ 和 $F\in\mathrm{sPsh}(T)$。那么有

$$\mathrm{Map}(R_X,F)\cong F(X)\in\mathrm{sSet}\,.$$

引理 A.2.18. 设 F,G 为单纯预层，且 $X\in\mathcal{C}$。那么

$$\underline{\mathrm{Map}}(R_X,G)=G(-\times X)\quad \textit{and}\quad \underline{\mathrm{Map}}(F,G)(X)=\mathrm{Map}(F,G(-\times X))$$

对于预层。

这些结论也都可以表述为适用于带基点单纯预层。此外，关于楔积，它是一个闭对称幺半范畴

$$-\wedge X:\mathrm{sPsh}_*(T)\rightleftarrows\mathrm{sPsh}(T):\underline{\mathrm{Map}}_*(X,-)$$

单纯预层上的模型结构

现在我们可以定义单纯预层上的（局部）模型结构了。我们从以下单纯结构开始。

定义 50。 设 X、Y 为单纯预层， K 为视为常值预层的单纯集。则定义

$$K \otimes X := K \times X$$

并且$\mathrm{Map}(X, Y)$ 是定义为 $X^K := \mathrm{Map}(K, X)$ 和$\mathrm{Map}(K, X(U) := \mathrm{Map}(K, X(U))$的单纯函数复形。于是

$$- \otimes X : \mathrm{sSet} \rightleftarrows \mathrm{sPsh}(T) : \mathrm{Map}(X, -)$$

and

$$K \otimes - : \mathrm{sPsh}(T) \rightleftarrows \mathrm{sPsh}(T) : (-)^K$$

构成一对伴随函子。

现在我们定义它的同伦范畴。

定义 51。 设 X 是一个单纯预层。定义 $\pi_0(X)$ 为层化预层

$$U \mapsto \pi_0(X(U))$$

对于 $U \in \mathcal{C}$， 其中 $\pi_0(X(U))$ 只是单纯集 $X(U)$的连通分支。设 $U \in \mathcal{C}, x \in X(U)_0$, 和 $n > 0$。定义 $\pi_n(X|_U, x)$ 为层化预层

$$(V \to U) \mapsto \pi_n(X(V), x_V)$$

位点 $T \downarrow U$ 上的单纯集同伦群，并且 $x_V \in X(V)_0$ 只是 x 在 $X(U)_0 \to X(V)_0$下的像。这里， $X \downarrow U$ 是限制的带基点单纯预层，它通过复合定义

$$X|_U := (\mathcal{C} \downarrow U)^{op} \xrightarrow{(\iota_U)^{op}} \mathcal{C}^{op} \xrightarrow{X} \mathrm{sSet}_*$$

定义 52。 设 $f\colon\ X \to Y$是单纯预层的一个映射，则称 f 为

- 局部弱等价， 如果 $f_*\colon\ \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ 是层同构，并且对于所有 $n > 0$ 和 $U \in \mathcal{C}$, 诱导映射 $f_*\colon\ \pi_n(X|_U, x) \to \pi_n(Y|_U, f(x)$ 对于所有基点 $x \in X(U)_0$都是层同构，

- 逐对象弱等价， 如果对于所有 $U \in \mathcal{C}$、 $f(U)\colon\ X(U) \to Y(U)$ 在 sSet 中是弱等价，

- 逐对象（余）纤维化， 如果对于所有 $U \in \mathcal{C}$, $f(U) : X(U) \to Y(U)$ 在sSet中都是（余）纤维化。

单纯预层上的四种模型结构

以下定理建立了 Jardine 提出的单纯预层的（局部）内射模型结构（[Jar87]）：

定理 A.2.19。 小 *Grothendieck* 位点上的单纯预层范畴，以及以下特定的映射类

- （局部）逐对象弱等价
- 逐对象余纤维化
- 内射纤维化，即对于无环（平凡）逐对象余纤维化具有右提升性质的映射。

构成一个适当的单纯余纤维生成模型范畴，称为（局部）内射模型结构（参见 *[Bla01，定理 1。1]*）。

例如， $\mathbb{A}^1$-同伦论由 [MV99] 建立，使用的正是这一模型结构。Bousfield 和 Kan（[BK72]）通过将余纤维化与纤维化互换，得到了一个类似的模型结构：

定理 A.2.20. 小 *Grothendieck* 位点上的单纯预层范畴，连同以下指定的映射类

- （局部）逐对象弱等价
- 逐对象纤维化
- 投射余纤维化，即相对于无环（平凡）逐对象纤维化具有左提升性质的映射。

构成一个适当的单纯胞腔/组合模型范畴，称为（局部）投射模型结构（参见 *[Bla01，定理 1。4], [AE17，命题 3。32]*）。

投射模型范畴结构具有一种特殊的万有性质，由Dugger所强调 [Dug01b]：它是 C 嵌入其中的初始模型范畴。必须注意，这两种模型结构是Quillen 等价的（参见例如 [Sev06，定理6.2。11]），因而产生相同的同伦论。

我们将以模型范畴中若干有用概念的汇集来结束本章。

Kan 延拓

现在我们来定义 Kan 延拓。函子 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 的 Kan 延拓（如果存在）是寻找从另一个

范畴 $\mathscr{C}'$ 到 $\mathscr{C}$ 的扩张的最佳近似之一。换言之，关于函子 $p:\mathscr{C}'\to\mathscr{D}$ 的 F 的 Kan 延拓，是使下图

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{C} & \xrightarrow{F} & \mathscr{D} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nearrow_{?} & \\ \mathscr{C}' & & \end{array}$$

交换的。这样，它将 F 的定义域通过 p 从 $\mathscr{C}$ 扩张到 $\mathscr{C}'$。对偶地，也存在Kan提升的概念，其定义方式类似，用以提升任意函子。这里我们给出这一事实的正式定义（[Lur25，Tag 02Y1]）：

定义53。 设 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为范畴之间的函子，并设 $\mathscr{C}^0\subset\mathscr{C}$ 为全子范畴。我们称 F 是从 $\mathscr{C}^0$ 左*Kan*扩张的，如果对每个对象 $C\in\mathscr{C}$，态射族 $\{F(u):F(C_0)\to F(C)\}_{u:C_0\to C}$ 将 $F(C)$ 表现为该图表的一个余极限

$$(\mathscr{C}^0\times_{\mathscr{C}}\mathscr{C}_{/C})\to\mathscr{C}^0\hookrightarrow\mathscr{C}\xrightarrow{F}\mathscr{D}.$$

这样的函子若存在，则是唯一的。在上文中，$\mathscr{C}_{/C}$ 我们指的是切片范畴，其对象是映射 $f:X\to C$，而 $f:X\to C$ 与 $g:Y\to C$ 之间的态射是一个态射 $h:X\to Y$，使得显然的交换三角形交换。

命题 A.2.21. 设 $F,G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是范畴之间的函子，并假设 F 是从全子范畴 $\mathscr{C}^0\subset\mathscr{C}$ 左 *Kan* 扩张得到的。那么限制映射

$$\{\textit{Natural transformation from } F \textit{ to } G\to\textit{Natural transformation from } F_{|\mathscr{C}^0} \textit{ to } G_{|\mathscr{C}^0}\}$$

是双射。特别地，函子 F 可由限制 $F_{|\mathscr{C}^0}$ 恢复（在典范同构意义下）

是否存在这样的扩张，可以通过考察 $\mathscr{D}$ 中的某个余极限来检验。

命题 A.2.22. 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴，$\mathscr{C}^0\subset\mathscr{C}$ 是一个全子范畴，且 $F_0:\mathscr{C}^0\to\mathscr{D}$ 是范畴之间的函子。那么以下条件等价：

1. 存在一个函子 $F:C\to D$，它是从 $\mathscr{C}^0$ 左 *Kan* 扩张得到的，并且满足 $F_{|\mathscr{C}^0}\to F_0$

2. 对每个对象 $C\in\mathscr{C}$，图表

$$(\mathscr{C}^0\times_{\mathscr{C}}\mathscr{C}_{/C})\to\mathscr{C}^0\xrightarrow{F_0}\mathscr{D}.$$

在所有数学表述中，Kan 延拓是自然界中最常见的现象之一。以下是其中几个例子。

例 A.2.23. 可以将左*Kan*扩张视为余极限的推广，反之亦然。设 $\mathscr{C}$ 是一个既完备又余完备的范畴（例如，$\mathscr{C}=$ 集合）。设 $\mathscr{D}$ 是任意小范畴，则所有函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 沿任意函子 $K:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$都有右 *Kan* 延拓和左 *Kan* 延拓。特别地，任意函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 沿 $1_{\mathscr{C}}:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$都有右 *Kan* 延拓和左 *Kan* 延拓。根据 *Kan* 延拓的万有性质，这进而意味着左、右 *Kan* 延拓本身都是 F。

一般而言，任意前复合函子的左伴随都是左 Kan 延拓，而任意前复合函子的右伴随都是右 Kan 延拓。这是因为伴随在唯一同构意义下唯一。以下示例说明了这一原理:

例 A.2.24。 设 G 是一个群，$H\leq G$ 是其子群，并配有包含函子$i:\ H\to G$。从群 G 到 k 向量空间的函子范畴 $[G,Vect_k]$，其对象为 G 表示，态射为 G 等变线性映射。由于 G 的任意表示都可以通过包含映射 i 限制为 H 的表示，因此我们有一个函子 ***Res***：$[G,Vect_k]\to[H,Vect_k]$，它由前复合 i 定义。现在，H 上的任意表示都可以通过诱导函子 ***Ind*** 扩张为 G 的（诱导）表示；反过来，也可以通过余诱导函子 ***Coind*** 扩张为 G 的余诱导表示。这些扩张定义了函子 ***Ind***、***Coind***：$[H,Vect_k]\to[G,Vect_k]$，它们分别是限制函子 ***Res*** 的左伴随和右伴随。根据上述一般原理，这些函子定义了沿 i 的左、右 *Kan* 延拓。

余终性

定义 54. 子范畴 $I\subseteq J$ 被称为余终的，如果对任意函子 $F:J\to\mathcal{C}$，余极限上的诱导映射

$$colim_I F\to colim_J F$$

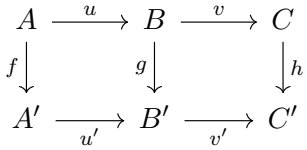
是一个同构。因此，要在 J 中计算余极限，只需在子图表 $I\subseteq J$ 中计算即可。

例 A.2.25. 子范畴 $2\mathbf{N}\subseteq\mathbb{N}$ 与 $2\mathbb{N}+1\subseteq\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{N}$ 中是余终的。

非常弱五引理

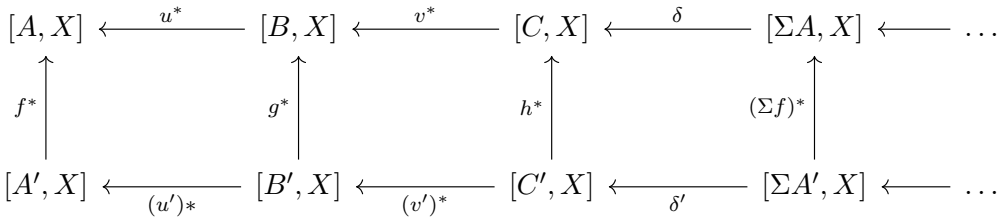
我们针对一般的带基点模型范畴陈述五引理，并在可缩性假设下阐明其有效性。欲了解更多参考，请读者参阅[Hov07，第 6] 章。

引理 A.2.26. 设 $\mathcal{C}$ 是任意带基点模型范畴，并考虑 $\mathcal{C}$ 中如下交换图表，其中各行都是余纤维序列。



若 f 和 g 是弱等价，则 h 也是弱等价。此外，假设 f 和 h 是弱等价，且 B 在 $\mathcal{C}$ 中可缩，则 g 是 $\mathcal{C}$ 中的弱等价，因此 B' 在 $\mathcal{C}$ 中可缩。

证明。 该证明归功于 [Hov07，命题 6.5.3 (b)]。只需证明$[B', X] \simeq *$对每个对象 $X \in \mathcal{C}$，应用可表 Hom 函子 $[-, X]$，对任意对象 $X \in \mathcal{C}$ 作用于上述图表，即可得到一个由带基点集合和群构成的长正合序列的交换图



通过简单的图表追踪，我们得出纤维 g^* 是平凡的。由于 $[B, X] \simeq *$，因此 $[B', X] \simeq *$ 也成立。 □

以下引理归功于 Ken Brown，在模型范畴中极为有用。

引理 A.2.27. 设 $\mathscr{C}$ 是一个模型范畴， $\mathscr{D}$ 是一个带有弱等价子范畴的范畴，且该子范畴满足三取二公理。设 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是一个将余纤维对象之间的平凡余纤维化映为弱等价的函子。那么F会将余纤维对象之间的所有弱等价映为弱等价。对偶地，如果 F将纤维对象之间的平凡纤维化映为弱等价，那么 F 会将纤维对象之间的所有弱等价映为弱等价。

证明。 这归功于 [Hov07，引理 1.1。12]。 □

我们并没有驯化小麦，是小麦驯化了我们。

尤瓦尔·赫拉利所著《人类简史》

B $\mathbb{A}^1$-代数拓扑

扑

在本节中，我们将定义并阐释严格且强$\mathbb{A}^1$-不变量，其内容遵循著作《$\mathbb{A}^1$-域上的代数拓扑》（[Mor12]）。接下来，我们还将定义 $\mathbb{A}^1$-导出范畴和 $\mathbb{A}^1$-同调层，这些内容将在第5章中用到。之后，我们将在本讲义的范围内介绍 Milnor-Witt 层理论及其相关的 Chow-Witt理论。

代数拓扑告诉我们，道路连通分支的集合 π_0和同伦群 pi_i 都是离散的。研究（严格且强）$\mathbb{A}^1$-不变量层，可以视为研究 $\mathbb{A}^1$-同伦理论层的类似“离散性”性质。

定义 55。以下提及的所有层均在 *Nisnevich*拓扑中考虑。

1. 若集合层 $\mathcal{S}$ 在 Sm_k 上满足：对于任意 $X \in \mathrm{Sm}_k$，映射
$$\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X \times \mathbb{A}^1)$$
由投影 $\mathbb{A}^1 \times X \to X$诱导的映射是一个双射。

2. 若群层 $\mathcal{G}$ 在 Sm_k 上满足：对于任意 $X \in \mathrm{Sm}_k$，映射强 $\mathbb{A}^1$-不变
$$H^i_{Nis}(X;\mathcal{G}) \to H^i_{Nis}(X \times \mathbb{A}^1;\mathcal{G})$$
由投影 $\mathbb{A}^1 \times X \to X$诱导的映射对于 $i \in \{0,1\}$是一个双射。

3. 若群层 $\mathcal{M}$ 在 Sm_k 上满足：对于任意 $X \in \mathrm{Sm}_k$，映射严格 $\mathbb{A}^1$-不变
$$H^i_{Nis}(X,\mathcal{M}) \to H^i_{Nis}(X \times_k \mathbb{A}^1,\mathcal{M})$$
由投影 $\mathbb{A}^1 \times X \to X$ 诱导的映射，对于 $i \in \mathbb{N}$ 是一个双射。

注B.0.1。 此外，还可以用这些层所对应的代数不变量来刻画它们：

1. 集合层 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变的，当且仅当它作为空间是 $\mathbb{A}^1$-局部的；*2.* 群层 $\mathcal{G}$ 是强 $\mathbb{A}^1$-不变的，当且仅当分类空间 $B(\mathcal{G}) = \boldsymbol{K}(\mathcal{G},1)$ 是 A^n-局部空间；*3.* 阿贝尔群层 $\mathcal{M}$ 是严格 $\mathbb{A}^1$-不变的，当且仅当对于任意 $n \in \mathbb{N}$，艾伦伯格-麦克莱恩空间 $\boldsymbol{K}(\mathcal{M}, n)$ 是 $\mathbb{A}^1$-局部的。

定理 B.0.2. 设 $\mathcal{X}$ 是一个带基点空间。那么，其 $\mathbb{A}^1$-基本群层 $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ 是强 $\mathbb{A}^1$-不变的。对于任意 $n \geq 2$，其高阶 $\mathbb{A}^1$-同伦阿贝尔群层 $\pi_n^{\mathbb{A}^1}$ 都是严格 $\mathbb{A}^1$-不变的。

证明。 此证明源自 [Mor12，定理 6.1，推论 6。2]。 □

例 B.0.3. 对于 $i \geq 1$，$\mathbb{A}^1$-同伦层 $\pi_i^{\mathbb{A}^1}$ 是强 $\mathbb{A}^1$-不变的、*Rost* 循环模、*Voevodsky* 的带转移的 $\mathbb{A}^1$-不变层，以及非分歧维特群的层 $\boldsymbol{W}$。 —

B.0.1 $\mathbb{A}^1$-导出范畴

我们用 $\mathcal{A}b(k)$ 表示 Sm_S 上关于 Nisnevich拓扑的阿贝尔群层的阿贝尔范畴。令 $C_*(\mathcal{A}b(k))$ 为 $\mathcal{A}b(k)$ 中链复形所构成的范畴。与经典同调代数的情形一样，通过将链复形之间拟同构的类取逆，可从 $C_*(\mathcal{A}b(k))$ 得到 $\mathcal{A}b(k)$ 的导出范畴，记作 $D(\mathcal{A}b(k))$。为建立模型范畴结构，可以在 $\mathcal{A}b(k)$ 中使用链复形范畴 $C_*(\mathcal{A}b(k))$ 上如下的（Nisnevich）局部模型结构：

1. 态射 $f\colon A_* \to B_*$ in $C_*(\mathcal{A}b(k))$ 是弱等价，如果它在光滑亨泽尔局部概形的截面上（即 Nisnevich 拓扑中的茎）诱导出拟同构，

2. 态射 $f\colon A_* \to B_*$ 是纤维化，当且仅当它是满态射，

3. 态射 $f\colon A_* \to B_*$ 是余纤维化，当且仅当它对平凡纤维化具有左提升性质。

导出范畴 $D(\mathcal{A}b(k))$ 是通过在上述模型结构中形式地求逆拟同构而得到的相应同伦范畴。现在我们将定义 $\mathbb{A}^1$-导出范畴。它通过左Bousfield局部化得到：在上述局部模型结构中，相对于 $\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1_k)$ 将投影映射求逆，其中 $\mathbb{Z}(\mathbb{A}^1_k)$ 是 $\mathbb{A}^1_k$ 上的自由阿贝尔层。

定义 56. 现在我们将定义 $\mathbb{A}^1$-导出范畴。

• 链复形 $D_* \in C_*(\mathcal{A}b(k))$ 称为 $\mathbb{A}^1$-局部的，当且仅当对于任意 $C_* \in C_*(\mathcal{A}b(k))$，投影 $C_* \otimes \mathbb{Z}(\mathbb{A}^1) \to C_*$ 诱导一个双射：

$$Hom_{D(\mathcal{A}b(k))}(C_*, D_*) \to Hom_{D(\mathcal{A}b(k))}(C_* \otimes \mathbb{Z}(\mathbb{A}^1), D_*).$$

• 态射 $f: C_* \to D_*$ 在 $C_*(\mathcal{A}b(k))$ 称为 $\mathbb{A}^1$-拟同构，当且仅当对于任意 $\mathbb{A}^1$-局部链复形 E_*，态射：

$$Hom_{D(\mathcal{A}b(k))}(D_*, E_*) \to Hom_{D(\mathcal{A}b(k))}(C_*, E_*)$$

是双射。

• 最后，我们将 $\mathbb{A}^1$-导出范畴 $D_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{A}b(k))$ 定义为将所有 $\mathbb{A}^1$-拟同构取逆后得到的范畴。

与单纯预层理论的情形一样，我们有一个（阿贝尔） $\mathbb{A}^1$-局部化函子

$$L^{Ab}_{\mathbb{A}^1} : C_*(\mathcal{A}b(k)) \to C_*(\mathcal{A}b(k))$$

以及一个自然变换 $\theta: Id \to L^{Ab}_{\mathbb{A}^1}$，使得对于任意链复形$C_*$,

$$\theta_{C_*} : C_* \to L^{Ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*)$$

是一个 $\mathbb{A}^1$-拟同构，其目标是一个 $\mathbb{A}^1$-局部纤维链复形。由此框架可形式地推出自然的函子性（见 [Mor12，§6。2]）。

$\mathbb{A}^1$-同调层

回顾一下，在代数拓扑中（例如参见 [May92，第 5] 章），对于任意链复形 C_*，都有与之对应的归一化链复形 $N(C_*)$ 这一概念。将这一工具引入代数几何后，人们定义了 $\mathbb{A}^1$-同调层的概念（[Mor12，第 6.3] 节）。我们现在简要介绍一下。设 $\mathcal{X}$ 是任意一个集合单纯层，其在 $C_*(\mathcal{A}b(k))$ 中的归一化链复形为 $\mathcal{N}(\mathcal{X})$；该链复形与 $\mathcal{X}$ 上的自由阿贝尔群单纯层 $\mathbb{Z}(\mathcal{X})$ 相对应。这定义了一个函子

$$\mathcal{N}_* : \Delta^{op}\,\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Sm}_k) \to C_*(\mathcal{A}b(k)).$$

这个函子有一个右伴随

$$K : C_*(\mathcal{A}b(k)) \to \Delta^{op}\,\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Sm}_k)$$

称为 *Eilenberg-MacLane* 空间函子。

注 B.0.4。 对于阿贝尔层 $\mathcal{A} \in \mathcal{A}b(k)$ 和整数 n，带基点单纯层 $K(\mathcal{A}, n)$ 定义为将 K 应用于复形 $\mathcal{A}$ 置于第 *0* 次的移位复形 $\mathcal{A}[n]$所得。它由以下性质刻画：

$$\pi_i^{\mathbb{A}^1}(K(\mathcal{A}, n)) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } n < 0 \\ \mathcal{A} & \text{if } i = n \\ 0 & \text{if } i \neq n \end{cases}$$

此外，函子 $\mathcal{N}_*(-)$ 将单纯弱等价映为拟同构，而 $K(-)$ 将拟同构映为单纯弱等价。因此，它们诱导出一对伴随函子

$$\mathcal{N}_* : \mathcal{H}_s(k) \to D(\mathcal{A}b(k))$$

and

$$K : D(\mathcal{A}b(k)) \to \mathcal{H}_s(k).$$

因此 $\mathcal{N}_* : \mathcal{H}_s(k) \to D(\mathcal{A}b(k))$ 将 $\mathbb{A}^1$-弱等价映射为 $\mathbb{A}^1$-拟同构，并诱导出一个函子

$$\mathcal{N}_*^{\mathbb{A}^1} : \mathcal{H}(k) \to D_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{A}b(k))$$

定义为

$$\mathcal{X} \mapsto L^{Ab}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{N}_*(\mathcal{X})).$$

定义 57。 设 $\mathcal{X}$ 是一个空间， $n \in \mathbb{Z}$ 是一个整数。与 $\mathcal{X}$相关联的 n次 $\mathbb{A}^1$同调层记作 $H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$，定义为复形$\mathcal{N}_*(\mathcal{X})$的 n次同调层。

若 $\mathcal{X}$带基点，则将约化 n次 $\mathbb{A}^1$同调层 定义为

$$\widetilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) := Ker(H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \to H_n^{\mathbb{A}^1}(\operatorname{Spec} k))$$

由于谱 k 在所有非零维数上的同调层均消失，我们得到

$$H_*^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H_*}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$$

以下结论是由 $\mathbb{A}^1$连通性定理（[Mor12，推论 6。31]）形式推出的:

推论 B.0.5。 空间 $\mathcal{X}$ 的 $\mathbb{A}^1$-同调层 $H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ 在 $n < 0$ 时消失，并且当 $n \geq 0$时是严格 $\mathbb{A}^1$-不变层。

推论 B.0.6。 $\mathbb{A}^1$-局部化函子与 $D(\mathcal{A}b(k))$ 中的悬挂可交换，因此对于任意带基点空间 $\mathcal{X}$ 和任意整数 $n \in \mathbb{Z}$，都存在典范悬挂同构:

$$\widetilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \cong \widetilde{H}_{n+1}^{\mathbb{A}^1}(\Sigma_s\mathcal{X})$$

其中 $\Sigma_s\mathcal{X} := S^1 \wedge \mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 的单纯形悬挂。

本节最后介绍这些层在 $\mathbb{A}^1$-单连通空间中的一项重要应用，我们将在第5章中使用它。

定理 B.0.7。 设 k 是任意完美域。设 $f : X \to Y$ 是 $\mathbb{A}^1$-单连通带基点光滑 k-概形之间的一个态射，并令 $d = max\{$维数 $X + 1, Y\}$。若 f 对所有 $2 \leq i < d$ 都诱导同构 $H_i^{\mathbb{A}^1}(X) \xrightarrow{\cong} H_i^{\mathbb{A}^1}(Y)$，并诱导满态射 $H_d^{\mathbb{A}^1}(X) \to H_d^{\mathbb{A}^1}(Y)$，则 f 是 Spc_k 中的 $\mathbb{A}^1$-弱等价。

证明。参见 [Shi22，定理 1.1，§3]。 □

B.0.2 Milnor-Witt层

Milnor-Witt层是严格 $\mathbb{A}^1$-不变层的例子。在本节中，我们将补充（第2.2节）的背景，并紧密遵循 [Fas20；Dég23]。我们将从格罗滕迪克-维特环、Witt 环和基本理想的背景开始。然后我们还将定义米尔诺 K-理论，并陈述米尔诺猜想。我们将以 Milnor-Witt K-理论与Chow-Witt群的一些补充知识结束。总体而言，就此处的阐述而言，参考文献将是 [Lam05；Mor12；Dég23；BCDFØ25；Fas20]。

格罗滕迪克-维特环

定义 58。 设 F是一个域。 F上的一个内积空间 (E, ϕ) 是一个有限维的 F-向量空间 E，并配备一个双线性形式

$$\phi : E \otimes_F E \to F$$

该形式是对称且非退化的[1]。内积空间之间的态射 $f : (E, \phi) \to (F, \psi)$ 是一个 F-线性态射 $f : E \to F$，满足 $\phi(f(v)\ f(w) = \psi(v, w)$。我们将 (E, ϕ) 的秩定义为向量空间 E/F 的维数。

内积空间范畴上存在直和 $\oplus$ 和张量积 $\otimes$ 运算。因此，内积空间同构类的集合记作 I_F，对于 $\oplus$ 构成一个交换幺半群，对于 $\oplus$， $\otimes$则构成一个交换半环。以下基于内积空间的定义归功于 [MH73]。

定义59。 域 F 的格罗滕迪克-维特环 定义为幺半群（I_F、 $\oplus$）的群完备化，其乘积由张量积 $\otimes$诱导。上述定义的秩映射 rk诱导出环同态 rk： GW（F） $\to \mathbb{Z}$。

另一种定义是：GW（F）由 F上的二次型的同构类构成，这利用了对称双线性形式与二次型理论之间的一一对应关系。但当 $F = 2$ 的特征为 [时，这一对应关系将不再成立（参见Dég23，注记2.1.3]）。然而，基于内积空间的定义与 F的特征无关，因此在论文中 $\mathbb{A}^1$-同伦论的所有表述里，我们都将采用这一方法。GW（F）还可以表示为由显式生成元及关系构成的对象（参见Dég23，定理2.1.11]）。GW（F）还可以通过一个显式元素 $\epsilon = -\langle -1\rangle$ 表示为环，该元素给出GW（F） $= \mathbb{Z}[\epsilon]/$（$\epsilon^2 - 1$）。

备注 B.0.8. 对于单位 $u \in F^\times$，由 $(x, y) \mapsto u \cdot xy$定义的内空间秩为 *1*。我们用符号 $\langle u\rangle$表示它在 $\mathrm{GW}(F)$ 中的类。这给出一个关系$\langle uv^2\rangle = \langle u\rangle$。如果我们有 n-单位 u_1、……、 u_n，则记作 $\langle u_1$、……、 $u_n\rangle = \langle u_1\rangle + \ldots \langle u_n\rangle$。

[1]这意味着 $E \to E^\vee$， $x \mapsto \phi(x,\ -)$ 是一个同构

定义 60. 如果域 F 中的每个元素都是 F中的平方，则称域 F 为二次闭。等价地说，每个二次多项式在 F中都有一个根。我们将 f的二次类记为 $Q(F) := F^\times/(F^\times)^2$。对于任意域 F，都有一个典范映射$\phi : Q(F) \to \mathrm{GW}(F)$，由上述备注中的关系定义。

命题 B.0.9. 域 F 是二次闭的，当且仅当映射 $rk : \mathrm{GW}(F) \to \mathbb{Z}$ 是环同构。

证明。 这是映射 ϕ 上述同构的直接推论，参见[Lam05，命题 3。1]。

□

例 B.0.10. 以下是格罗滕迪克-维特环的一些最初计算。

- 如果 F 是代数闭域，那么秩映射 $rk : \mathrm{GW}(k) \to \mathbb{Z}$ 是同构。更一般地，只要(-1) 在 k中是一个平方（因为它们是二次闭的）， rk 就是同构。

- 设 $F = \mathbb{R}$，则 $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$。事实上，我们知道，符号差能够确定实向量空间上的二次型。因此，任意类 $\sigma \in \mathrm{GW}(\mathbb{R})$ 都可以唯一地写成 $\sigma = p \cdot \langle 1 \rangle + q \cdot \langle -1 \rangle$，其中 $rk(\sigma) = p + q$，且 σ 的符号差是有序对 (p, q)。因此，由 $\sigma \mapsto (p, q)$ 定义的映射 $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 是同构。
- 设 $F = \mathbb{F}_q$ 为具有 $q = p^n$ 且 p 为素数的有限域。那么我们有

$$\mathrm{GW}(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q \text{ even} \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z} & q \text{ odd} \end{cases}$$

Grothendieck-Witt 环与 Milnor-Witt 环密切相关，具体如下：对于 $a \in F^\times$，记 $\langle a \rangle$ 为由 F上的对称双线性型 $(X, Y) \mapsto aXY$定义的类。于是我们有一个由[Mor12，引理 310]给出的基本结论。

引理 B.0.11. 映射

$$\begin{aligned} \mathrm{GW}(F) &\to K_0^{\mathrm{MW}}(F) \\ \langle a \rangle &\mapsto 1 + \eta[a] \end{aligned}$$

诱导出一个定义良好的同构。

注 B.0.12. 由于这一结果，我们将用 $\langle a \rangle$ 表示 $1 + \eta[a]$ 这一 *0* 次符号。例如，定义 *19* 中的关系 *2* 于是可以写成

$$[ab] = [a] + \langle a \rangle [b] = [b] + \langle b \rangle [a]$$

对任意 $a, b \in F^\times$ 均成立。特别地，我们有 $\langle b^2 \rangle = 1$ 导出 $[ab^2] = [a] + [b^2]$。此外，第四个关系变为

$$\eta[-1] + 2 = \langle -1 \rangle + 1 = \langle -1, 1 \rangle =: h \quad \textit{implies} \quad \eta h = 0 \tag{B.1}$$

这里， h 称为 F^2上的双曲型。

GW(F)中的下列元素对于描述 $K_*^{\mathrm{MW}}(F)$的交换性至关重要。

引理 B.0.13. 设 $\epsilon := -\langle -1\rangle \in \mathrm{GW}(F)$。对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，令

$$n_\epsilon = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \langle (-1)^{i-1}\rangle & \text{if } n > 0. \\ 0 & \text{if } n = 0. \\ \epsilon \sum_{i=1}^{-n} \langle (-1)^{i-1}\rangle & \text{if } n < 0. \end{cases}$$

则有以下结论。

1. 对于任意 $a \in F^\times$，有 $[a,a] = [-1,a] = [a,-1]$ 和 $[-a,a] = 0$
2. 对于任意 $\alpha \in K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ 和 $\beta \in K_m^{\mathrm{MW}}(F)$，有 $\alpha\beta = \epsilon^{mn}\beta\alpha$
3. 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $a \in F^\times$，有 $[a^n] = n_\epsilon[a]$。

Witt 环

Witt 环 定义为商环

$$\mathrm{W}(F) := \mathrm{GW}(F)/(h).$$

双曲型 h 的秩为 2，秩映射 rk 诱导出环之间的态射$\mathrm{W}(F) \to \mathbb{Z}/2$。Milnor-Witt K-理论的负部分由 Witt 环控制，具体如以下事实所述（[Mor12，引理 3。10]）：

引理 B.0.14。 对于所有的 $n \le -1$ 和 $a \in F^\times$，该态射

$$\gamma_n : K_n^{\mathrm{MW}}(F) \to \mathrm{W}(F) \quad \textit{defined by} \quad \langle a\rangle\eta^{-n} \mapsto \langle a\rangle$$

是阿贝尔群之间的同构。

因此，对于所有的 m， $n \le -1$，有以下图表

$$\begin{array}{ccc} K_m^{\mathrm{MW}}(F) \times K_n^{\mathrm{MW}}(F) & \xrightarrow{\times} & K_{m+n}^{\mathrm{MW}}(F) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_m\times\gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{m+n}} \\ \mathrm{W}(F) \times \mathrm{W}(F) & \xrightarrow[\times]{} & \mathrm{W}(F) \end{array}$$

是交换的。

基本理想

秩映射 Ker(rk) $:= \mathcal{I}$ 的核称为基本理想，它由 GW(F) 中形如 $\langle -1, a\rangle - h$ 的类加法生成。类似地，Witt 理论中还有另一个秩映射 rk : W(F) $\to \mathbb{Z}/2$，并且我们令 $Ker(rk) := \mathcal{I}(F)$，称其为（姑且如此命名）基本理想。$\mathcal{I}(F)$ 由 W(F) 中的 $\langle -1, a\rangle$ 类加法生成。对于 $n \leq 0$，通常令$\mathcal{I}^n :=$ W(F)，并考虑商群

$$\overline{\mathcal{I}}^n := \mathcal{I}^n(F)/\mathcal{I}^{n+1}(F)$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}$（按约定，若 $n \precneqq -1$，则 $\mathcal{I}^n = 0$）。基本理想可用 Pfister 形式方便地描述。对于任意 $u \in F^\times$，Pfister 形式定义为 $\langle\langle u\rangle\rangle := 1 - \langle u\rangle$。

命题 B.0.15. 域 F 是二次闭的，当且仅当映射 $rk : \mathrm{W}(F) \to \mathbb{Z}/2$ 是环同构。

例 B.0.16. 下面给出 *Witt* 环及其基本理想的一些简单例子。

- 若 F 是代数闭域，则 $\mathrm{W}(F) \cong \mathbb{Z}/2$，因此其基本理想 $\mathcal{I}(F)$ 是平凡的，

- 若 $F = \mathbb{R}$，则任意二次型都等价于对角形式 $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle a_1 x_1^2, \ldots, a_n x_n^2\rangle$，因此，诱导的秩映射 $\mathrm{W}(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}$ 是同构。由此，核由偶秩型构成，因此有 $\mathcal{I}(\mathbb{R}) = 2\mathbb{Z}$。

- 设 $F = \mathbb{F}_q$ 为一个含有 $q = p^n$ 的有限域，其中 p 为某个素数。根据对 $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_q)$ 的计算，我们得到，

$$I(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} 0 & q \text{ even} \\ \mathbb{Z}/2 & q \text{ odd} \end{cases}$$

  因此，我们有

$$\mathrm{W}(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & q \text{ even} \\ \mathbb{Z}/2[t]/(t-1)^2 & q \text{=1 mod 4} \\ \mathbb{Z}/4 & q \text{=3 mod 4} \end{cases}$$

  高阶基本理想全部消失，$I^n(\mathbb{F}_q) = 0$，其中 $n \geq 2$。

Milnor K理论

为了提供更多背景，我们还将简要介绍 Milnor K-理论（[Mil70]）。Milnor K-理论 $K^{\mathrm{M}}(F)$ 的域 F 定义为由符号生成的 $\mathbb{Z}$- 分次代数 $\{a\}$，其次数为 +1，其中 $a \in F^{\times}$ 模去以下关系：

(M1) $\{a, 1-a\} = 0$，对所有 $a \in F\backslash\{0,1\}$（Steinberg 关系）

(M2) $\{ab\} := \{a\} \cdot \{b\} = \{a\} + \{b\}$

所具有的最基本性质是： $K_0^{\mathrm{M}}(F) = \mathbb{Z}$ 以及 $K_1^{\mathrm{M}}(F) = F^{\times}$。从 Milnor K理论到 Quillen 的代数 K理论存在一个典范映射 $K_n^{\mathrm{M}}(F) \to K_n(F)$；当 $n \leq 2$ 时它是一个同构（对于 $n = 2$，这是由于[Mat69]）。上文定义的基本理想 $\mathcal{I}$ 构成了与米尔诺猜想（[Mil70，问题 4.3]）相关研究的重要组成部分；如今，该猜想已成为定理：在特征 2 下归功于 Kato [Kat82]，在所有其他情形下则归功于 Orlov-Vishik-Voevodsky [OVV07] 和[Mor05]。我们将以陈述下面这一美妙结果结束本节：

定理 B.0.17. 设 F 为任意域。那么对于任意 $n \geq 0$，映射 $F^{\times} \to I(F), u \mapsto \langle\langle u \rangle\rangle$ 诱导出一个环态射：

$$\mu : K_*^{\mathrm{M}}(F)/2K_*^{M}(F) \to \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n(F)/\mathcal{I}^{n+1}(F)$$

它是一个同构。

B.0.3 K_*^{MW}中的剩余态射

Milnor-Witt K-理论中一个至关重要的工具是剩余同态，它使我们能够定义下文将要介绍的 Rost-Schmid 复形中的微分，进而引出 Chow-Witt群的定义。设 F 是一个域，且 $v : F \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ 是一个离散赋值，其剩余域为 $\kappa(v)$，赋值环为 $\mathcal{O}_v$，并选取一个一致化参数$\pi = \pi_v$ 属于 v。于是定义如下群同态，称为非典范剩余态射，源自 [Mor12，定理 3。15]:

定理 B.0.18. 存在唯一一个分次阿贝尔群的

$$\partial_v^{\pi} : K_*^{\mathrm{MW}}(F) \to K_{*-1}^{\mathrm{MW}}(\kappa(v))$$

次数为 *-1* 的同态，使得 ∂_v^{π} 与乘以 η 的运算可交换，并且

1. $\partial_v^{\pi}([\pi, u_1, \ldots, u_n]) = [\bar{u_1}, \ldots, \bar{u_n}]$
2. $\partial_v^{\pi}([u_1, \ldots, u_n]) = 0$

我们称这样的 ∂_v^{π} 为剩余同态。

事实证明，这个同态 ∂_v^π 取决于所选的赋值 π（因此得名），具体如下所述。这正是 [Mor12] 引入扭曲 *Milnor Witt* K-理论的原因；在此情形下，这是最适合考虑的态射：

命题 B.0.19。设 $\alpha \in K_*^{\mathrm{MW}}(F)$ 并设 $u \in \mathcal{O}_v^\times$。则 $\partial_v^\pi(\langle u\rangle\alpha) = \langle \bar{u}\rangle\partial_v^\pi(\alpha)$。

证明。 这出自 [Mor12，命题 3。17]。 □

注 B.0.20。 *([Fas20，注 1。9])* 同态 ∂_v^π 不仅取决于赋值 v，还取决于一致化参数的选择 π。

证明。 假设 $\pi' = u\pi$，其中 $u \in \mathcal{O}_v^\times$。则我们有 $\partial_v^\pi([\pi,-1]) = [-1]$，这基本上是由构造得到的。然而，我们看到

$$\begin{aligned}\partial_v^{\pi'}([\pi,-1]) &= \partial_v^{\pi'}([u^{-1}\pi',-1])\\ &= \partial_v^{\pi'}([u^{-1},-1]+[\pi',-1]+\eta[u^{-1},\pi',-1])\\ &= \partial_v^{\pi'}([u^{-1},-1]+[\pi',-1]+\eta[\pi',u^{-1},-1])\\ &= [-1]+\eta[u^{-1},-1]\\ &= \langle u^{-1}\rangle[-1].\end{aligned} \tag{B.2}$$

一般而言，类 $[-1] \neq \langle u^{-1}\rangle[-1]$。例如，若 $\kappa(v) = \mathbb{R}$，则同态 $K_1^{\mathrm{MW}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{I}(\mathbb{R})$ 表明 $[-1] \neq \langle -1\rangle[-1]$。 □

Milnor-Witt K理论中的扭曲

现在我们将解释 Milnor-Witt 环中的扭曲理论。通常，这些扭曲是相对于一个可逆层（即线丛）来考虑的（在最一般的情形下，使用分次线丛：（参见 [Fas20，§1。3]）。现在我们将描述 K_*^{MW}的扭曲版本，并由此说明扭曲剩余态射∂_v^π，并使我们确信，这一修改确实消除了对局部参数的选择。

设 V是一个秩为 1 的 F-向量空间，其中 $V^\times$ 由 V的非零元素组成。群 $V^\times$ 在 $F^\times$上传递地作用，这赋予自由阿贝尔群$\mathbb{Z}[V^\times]$一个 $\mathbb{Z}[F^\times]$-代数结构。另一方面，我们知道 $K_*^{\mathrm{MW}}(F)$ 是一个 $K_0^{\mathrm{MW}}(F)$-代数，并且存在一个典范映射

$$F^\times \to K_0^{\mathrm{MW}}(F) \quad \text{defined by} \quad u \mapsto \langle u\rangle.$$

因此，所有的群 $K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ 也都继承了 $\mathbb{Z}[F^\times]$-代数的结构。现在，我们可以方便地将由 V 扭曲的 *Milnor-Witt* K-理论定义为

$$K_n^{\mathrm{MW}}(F,V) := K_n^{\mathrm{MW}}(F) \otimes_{\mathbb{Z}[F^\times]} \mathbb{Z}[V^\times]$$

根据这个定义，现在我们可以考虑关于线丛 L 的扭曲留数同态（也称为典范留数映射）。该同态

$$\partial_v : K_*^{\mathrm{MW}}(F, L) \to K_{*-1}^{\mathrm{MW}}(\kappa(v), (\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)^* \otimes L)$$

定义为

$$\partial_v(\alpha \otimes l) = \partial_v^\pi(\alpha) \otimes \overline{\pi}^* \otimes l$$

对于 $l \in L$。这里，$(\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)^*$ 表示相对切空间，按照定义，它是相对余切空间 $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$（视为 $\kappa(v)$-向量空间）的对偶。

引理 B.0.21。 *[Fas20，引理 1。19]* 同态 ∂_v 定义良好，且与局部参数 π无关。

证明。 为简便起见，记线丛 $L = \mathcal{O}_v$。态射 $\partial_v^{\pi'}$ 定义良好，正如 ∂_v^π一样。令 π' 为另一个一致化参数。于是存在 $u \in \mathcal{O}_v^\times$使得 $u\pi = \pi'$。如定义 B.0.20中所示，我们有 $\partial_v^\pi = \langle \underline{u} \rangle \partial_v^{\pi'}$。因此，由 $\pi^* = u^{-1}(\pi')^*$，我们得到

$$p(\alpha) \otimes \overline{\pi}^* = \langle u \rangle \partial_v^{\pi'}(\alpha) \otimes \overline{\pi}^* = \langle u \rangle \partial_v^{\pi'} \otimes u^{-1}(\overline{\pi'})^* = \partial_v^{\pi'}(\alpha) \otimes (\overline{\pi'})^*$$

□

几何与典范转移

与许多其他动机理论类似，Milnor-Witt K-理论也具有转移，通常称为逆向映射，在不带扭曲（称为“几何”转移）和带扭曲（称为“典范”转移）的情形下皆是如此。后者中存在这种转移这一事实，再次凸显了非典范情形下的转移仍取决于某些我们不希望它取决于的因素（例如截面的选择！）。

在不带扭曲的情形下，我们有如下（[Fas20，定理 1。11]）分裂短正合列：对任意 $n \in \mathbb{Z}$

$$0 \to K_n^{\mathrm{MW}}(F) \to K_n^{\mathrm{MW}}(F(t)) \xrightarrow{\sum \partial_p^p} \bigoplus_p K_{n-1}^{\mathrm{MW}}(F(p)) \to 0$$

其中， p 遍历 $F[t]$ 的首一不可约多项式集合，而 $F(p)$是 $= F[t]/(p)$。左侧同态由域扩张 $F \subset F(t)$诱导，右侧同态则是与 p-进赋值及一致化参数 p相关的剩余同态之和。对于任意 $\alpha \in K_n^{\mathrm{MW}}(F(t))$，考虑 $[t]\alpha \in K_{n+1}^{\mathrm{MW}}(F(t))$，并使用剩余映射 ∂_t^t。但也可以考虑另一个重要的赋值 $p = \infty$，即 $v_\infty(f/g)$是 $= deg(g) - deg(f)$，其一致化参数为 $-1/t$。事实上，这引出了几何转移的定义；几何转移是关于赋值 ∂_∞ 在未扭曲的 Milnor-Witt K-理论中的某些转移映射。对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，该同态

$$\partial_\infty^{1/t} : K_n^{\mathrm{MW}}(F(t)) \to K_{n-1}^{\mathrm{MW}}(F)$$

帮助我们定义如下（[Mor12，§4。2]）：设 p <style id='12}>是 $F[t]$中的首一不可约多项式，则复合映射为

$$\tau_F^{F(p)} : K_{n-1}^{\mathrm{MW}}(F(p)) \subset \bigoplus_p K_{n-1}^{\mathrm{MW}}(F(p)) \xrightarrow{s} K_n^{\mathrm{MW}}(F(t)) \xrightarrow{-\partial_\infty^{-1/t}} K_{n-1}^{\mathrm{MW}}(F)$$

称为几何转移，其中 s 是与扩张 $F \subset F(p)$ 相关的任意截面。下面的引理总结了这一过程。

引理 B.0.22. 几何转移 $\tau^{F}{}_{(p)\,F}$是使图表交换的唯一同态

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{K_n^{MW}}(F) & \longrightarrow & \mathrm{K_n^{MW}}(F(t)) & \xrightarrow{\sum \partial_p^p} & \bigoplus_p \mathrm{K_{n-1}^{MW}}(F(p)) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle -\partial_\infty^{-1/t}} & \swarrow{\scriptstyle \sum \tau_F^{F(p)}} & & & \\ & & & & \mathrm{K_{n-1}^{MW}}(F) & & & & \end{array}$$

。换言之，存在唯一的同态 $f_p : K_{n-1}^{\mathrm{MW}}(F(p)) \to K^{\mathrm{MW}} n-1(F)$ 满足 $\sum(f_p \circ \partial_p^p) + \partial_\infty^{-1/t} = 0$。

但事实证明，这些转移取决于所选的截面 s。这是利用扭曲剩余态射发展（典范）转移理论的主要原因。现在我们将简要介绍这一点。扭曲是相对于有限生成域扩张 F/k的微分典范层$\omega_{F/k}$ 而言的。注意， $F[t]$-模 $\Omega^{F[t]/k}$ 是自由模，其秩等于 $\mathrm{tr.deg}\,(F/k) + 1$（若 k 是完美的）。现在，给定首一多项式 $p \in F[t]$，考虑 p-进赋值，以得到扭曲剩余态射

$$\partial_p : K_*^{\mathrm{MW}}(F(t), \det(\Omega_{F(t)/k})) \to K_{*-1}^{\mathrm{MW}}(F(p), ((\mathfrak{m}_p)/(\mathfrak{m}_p^2)^*) \otimes_{F[t]} \det(\Omega_{F[t]/k}).$$

由此可知，与未扭曲情形一样，我们有一个分裂正合列（[Fas08，命题 1。20]）：

$$0 \to K_n^{\mathrm{MW}}(F, \det(\Omega_{F/k})) \to K_n^{\mathrm{MW}}(F(t), \det(\Omega_{F(t)/k})) \xrightarrow{d} \bigoplus_p K_{*-1}^{\mathrm{MW}}(F(p), \det(\Omega_{F(p)/k})) \to 0$$

其中 d 是对所有 p 取的全剩余同态。现在，对于任意首一不可约多项式 $p \in F[t]$，我们有一个如下形式的同态

$$\mathrm{Tr}_F^{F(q)} : K_{n-1}^{\mathrm{MW}}(F(p), \det(\Omega_{F(p)/k})) \to K_{n-1}^{\mathrm{MW}}(F, \det(\Omega_{F/k}))$$

称为典范转移。对于满足 $k \subset F \subset L$ 且 L/F 有限的域扩张，这个同态表示为

$$\mathrm{Tr}_F^L : K_*^{\mathrm{MW}}(L, \det(\Omega_{L/k}) \to K_*^{\mathrm{MW}}(F, \det(\Omega_{F/k}))$$

B.0.4 Rost-Schmid复形与 Chow-Witt理论

借助扭曲的剩余同态和典范转移，现在可以定义*Rost-Schmid*复形，进而定义*Chow-Witt*群。

定义 61. 设 X 是任意域 k上的有限型分离概形，且 L 是任意~线丛。对于任意 $j \in \mathbb{Z}$，权 j 下的 *Rost-Schmid*复形 $C(X, j, L)$ 是一个复形（按同调维数计），其次数 i 上的项定义为

$$\tilde{C}_i(X, j, L) := \bigoplus_{x \in X_{(i)}} K^{\mathrm{MW}}_{j+i}(\kappa(x), \omega_{\kappa(y)/k} \otimes L)$$

因此可以验证，对于 $x \in X_{(i)}$ 和 $y \in X_{(i-1)}$，存在定义良好的微分概念

$$d^x_y : K^{\mathrm{MW}}_{j+1}(\kappa(x), \omega_{\kappa(x)/k} \otimes L) \to K^{\mathrm{MW}}_{j+i-1}(\kappa(y), \omega_{\kappa(y)/k} \otimes L)$$

该微分由上述剩余同态和典范转移定义，并且我们有

$$d_i : \tilde{C}_i(X, j, L) \to \tilde{C}_{i-1}(X, j, L)$$

~总之，复形 $(C(X, j, L)$ 是一个（分次）阿贝尔群，带有一个次数为 -1 的同态d，满足 $d_{i-1} \cdot d_i = 0$。这称为经扭曲的同调 *Rost-Schmid*复形 L，我们用 $H_i(X, j, L)$ 表示该复形的同调群。

现在，让我们考虑 X 光滑的特殊情形。在此情形下，我们得到一个（分次）阿贝尔群，其 i 次分量具有如下形式

$$C(X, j, L)^i := \bigoplus_{x \in X^{(i)}} K^{\mathrm{MW}}_{j-i}(\kappa(x), (\omega_{\kappa(x)/k})^{-1} \otimes L)$$

并且有 $\tilde{C}_i(X,\ j,\ (\omega^{-1}_{\kappa\ x()/k})) = C(X,\ j + d_X)^{d_X - i}$，其中 d_X 是 X 的维数。由此可得一个（上链）复形 $C(X,\ j)$ 的群同态，其微分为 d，即一对 $(C(X,\ j)\ d)$，次数为 +1。我们称之为上同调 *Rost-Schmid*复形，并将其上同调群记为 $H^i(X,\ j,\ L)$。

注 B.0.23。若 $Y \subset X$ 是 X 的闭子集，则还可以考虑支撑在 Y 上的子复形~，分别记为 $C_Y(X, j, L)$ 和 $C_Y(X, j, L)$。此外，若 $i : Y \hookrightarrow X$ 是 X 的闭子概形，则有如下对应

$$\tilde{C}(Y, j, i^* L) = \tilde{C}_Y(X, j, L). \tag{B.3}$$

此外，这些群在对概形取约化时也保持不变，即~ ~$C(X, j, L) = C(X_{red}$, $j, L)$。而且，还可以放宽条件，要求 X 本质有限型。

现在，我们已经具备理解 Chow-Witt群定义所需的一切知识。

定义 62. 设 X 是一个在域 k 上本质有限型的分离概形。对于任意 $i \in \mathbb{N}$ 以及 X上的任意线丛 L，群

$$\widetilde{\mathrm{CH}}_i(X, L) := H_i(X, -i, L)$$

称为 i维循环的同调 Chow-Witt群，扭结系数为 L。其他名称包括同调 i次 *Chow-Witt*群，或简称 *Chow-Witt*群。类似地，还有

$$\widetilde{\mathrm{CH}}^i(X, L) := H^i(X, i, L)$$

称为 i维循环的上同调 Chow–Witt 群，扭结系数为 L，也称为同调 i次 *Chow-Witt*群，或简称 *Chow-Witt*群。若$Y \subset X$ 是一个闭子集，则还有带支撑的版本

$$\widetilde{\mathrm{CH}}^i_Y(X, L) := H^i(C_Y(X, i, L))$$

称为 由 i 维循环构成、支撑在 Y 上且以 L 为扭结系数的上同调 Chow–Witt 群，或支撑在 Y上的 *Chow-Witt* 群。

命题 B.0.24。 按照 *[Fas20，§2.2, 2.3, 2, 4]*，我们列出该理论的一些基本性质：

1. 若 $i > \dim(X)$ 或 $i < 0$，则 $\widetilde{\mathrm{CH}}_i(X, L) = 0$。

2. 若 X 是维数为 d_X的光滑概形，则有 $\widetilde{\mathrm{CH}}_i(X, \det(\Omega^{X/k})^{-1} \otimes L) \simeq \widetilde{\mathrm{CH}}^{d_X - i}(X, L)$。

3. 对于有限型概形之间的真态射 $f : X \to Y$，我们有推前（参见 *[Fas20，定理 2。9]*）

$$f_* : \widetilde{C}(X, j, f^*L) \to \widetilde{C}(Y, j, L)$$

且若 f 是光滑 k-概形之间的有限态射 $f : X \to Y$，满足 $d = \dim(Y) - \dim(X)$，则有

$$f_* : \mathrm{C}(\mathrm{X}, \mathrm{j}, \det(\Omega_{\mathrm{X/k}}) \otimes \mathrm{f}^*\mathrm{L}) \to \mathrm{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{j} + \mathrm{d}, \det(\Omega_{\mathrm{Y/k}}) \otimes \mathrm{L})$$

4. 若 $f : Y \to X$ 是本质光滑概形之间的平坦态射 k，则我们有拉回（参见 *[Fas20，定理 2。12]*）：

$$f^* : C(X, j, L) \to C(Y, j, f^*L).$$

对于光滑态射 $f : Y \to X$ 本质光滑的 k有限型复数域概形，且$d = \dim(Y) - \dim(X)$，我们得到 (*[Fas20，定理 2.14]*)

$$f^* : \widetilde{C}(C, j, L) \to \widetilde{C}(Y, j - d, \det(\Omega_{Y/X})^{-1}) \otimes f^*L)$$

~5. 若 ι： $Y \subset X$ 是一个闭子概形（在 Y 上赋予约化结构），则对所有 L, $C(Y, j, \iota^* L) =\sim C_Y(X, j, L)$。

6. 令 u： $U \to X$ 为 Y 的补开子概形，我们得到复形的正合列

$$0 \to \widetilde{C}(Y, j, \iota^* L) \to \widetilde{C}(X, j, L) \to \widetilde{C}(U, j, u^*(L)) \to 0$$

该正合列诱导出 *Chow-Witt*群的长正合列

$$.. \cdots \to \widetilde{\mathrm{CH}}_i(Y, \iota^*(L)) \to \widetilde{\mathrm{CH}}_i(X, L) \to \widetilde{\mathrm{CH}}_i(U, u^*(L)) \to \cdots ..$$

~与经典 *Chow* 群不同，右侧箭头 $\mathrm{CH}(X, L) \to \widetilde{\ } \mathrm{CH}(U, u^*(L))$ 一般而言并非满射。

~7. 若 X 是光滑概形，则拉回映射将群 $\mathrm{CH}_i(X, j, L)$ 赋予环结构，其环乘法由外积得到，进而扩展为光滑概形的环同态（[*Fas20*，命题*3.13*。]）。

财富是你看不到的东西。《金钱心理学》，Morgan Housel 著

C 杂项

C.1 概形理论与无穷远处的动机拓扑学

本节汇集了概形理论中的一些杂项概念。我们将简要介绍动机版本的无穷远处拓扑学机制的背景。

Weil限制函子

设 $h : S' \to S$ 是一个概形态射。那么，对于任意 S'-概形 X'，反变函子

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{S/S'}(X') : (\mathrm{Sch}_S)^{op} &\to \mathrm{Set} \\ T &\mapsto \mathrm{Hom}_{S'}(T \times_S S', X') \end{aligned}$$

定义在 S-概形的范畴 Sch_S 上。如果它是可表的，则相应的S-概形再次记为 $\mathfrak{R}_{S'/S}(X')$，称为关于 h的 X' 的 ***Weil***限制。因此，后者由一个函子性的同构刻画为

$$\mathrm{Hom}_S(T, \mathfrak{R}_{S'/S}(X')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S'}(T \times_S S', X')$$

在 T中的函子，其中 T遍历所有 S-概形。

相对微分层

概形的相对微分层，是环和模的 Kähler 微分在代数中的类比。例如，对于定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑簇 X，微分层本质上与切丛的对偶相同，切丛的定义

见微分几何。本文将简要介绍相关内容，参见 [Har13，第 2 章 §8]。我们先回顾经典定义。设 A 是一个环（交换且含单位），设 B 是一个 A-代数，且设 M 是一个 B-模。

定义 63. B 在 A 上的相对微分模是一个 B-模$\Omega^{B/A}$，连同一个 A-导子 $d : B \to \Omega^{B/A}$，满足以下万有性质：对于任意 B-模 M以及任意 A-导子 $d' : B \to M$，存在唯一的B-模同态 $f : \Omega_{B/A} \to M$，使得 $d' = f \circ d$。

例 C.1.1. 若 $B = A[x_1, \ldots, x_n]$，则$\Omega^{B/A}$是由 $dx_1, \ldots, dx_n$生成的秩为 n 的自由 B-模。

设 $f : X \to Y$是概形的一个态射。我们考虑对角态射$\Delta : X \to X \times_Y X$，以及闭子概形 $\Delta(X) \subset X \times_Y X$。

定义 64. 设 $\mathcal{I}$ 是 $\Delta(X)$的理想层。则我们将 X 在 Y 上的相对微分层定义为层

$$\Omega_{X/Y} := \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$$

在 X 中。层 $\Omega^{X/Y}$ 具有自然的 $\mathcal{O}_X$-模结构，先验上是准凝聚的。如果 Y 是诺特的且 f 是有限型的，那么 $\Omega^{X/Y}$ 是X上的凝聚层。

例 C.1.2. 如果 $X = \mathbb{A}^n$，那么 $\Omega^{X/Y}$ 是一个秩为 n 的自由 $\mathcal{O}_X$-模，由整体截面 $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$生成，其中 $x_1, \ldots, x_n$ 是 $\mathbb{A}^n$的仿射坐标。

定义 65. 相对典范层 $\omega_{X/Y}$ 定义为与 n 阶外积 $\bigwedge^n \Omega^{X/Y}$ 相关联的层，其中 $n = \dim(X)$。典范层 $\omega_{X/Y}$是 X上的可逆层。

对于光滑射影簇 $X \to$ 谱 k，典范层给出一个称为其亏格的双有理不变量，$\rho_g(X) :=$ 维 $_k\Gamma(X, \omega_X)$。由伴随公式可得 $\omega_{\mathbb{P}^n_k} \cong \mathcal{O}_X(-n-1)$。由于对于 $l < 0$，$\mathcal{O}(l)$ 没有整体截面，我们得到对于任意 $n \geq 1$，$\rho_g(\mathbb{P}^n) = 0$。因此，如果 Y是任意有理簇，那么 $\rho_g(Y) = 0$。

$\mathbb{G}_a$-作用与局部幂零导子

设 k 是一个特征零域。那么对于一个 k-代数 B，$\mathbb{G}_a$在 B 上的作用集合与 B ([Fre06,§1.5])中的局部幂零导子之间存在双射。设 $X =$ 谱 B 为相应的仿射簇。给定 $\partial \in \mathrm{LND}(B)$，则有一个群同态

$$\begin{aligned} \eta : (\ker \partial, +) &\to \mathrm{Aut}_k(B) \\ f &\mapsto \exp(t\partial)(f) \end{aligned}$$

其中 exp 是指数映射

$$exp(t\partial)(f) := 1 + (\partial f)t + \frac{(\partial^2 f)t^2}{2!} + \cdots + \frac{(\partial^n f)t^n}{n!} + \ldots.$$

此外，若 $\partial = 0$，则 η 是单射。将 η 限制到子群 $\mathbb{G}_a = (k, +)$，可得代数表示 $\eta : \mathbb{G}_a \hookrightarrow \mathrm{Aut}_k(B)$。从几何上看，这意味着 ∂ 在 X $(t \in k)$ 上诱导忠实的代数 $\mathbb{G}_a$-作用 $exp(t\partial)$。反过来，设 $\rho : \mathbb{G}_a \times X \to X$ 是 k 上的一个代数 $\mathbb{G}_a$-作用。那么 ρ 诱导一个导子 $\rho'(0)$，其中求导是相对于 $t \in \mathbb{G}_a$进行的。

以下引理有助于通过纤维检验概形的光滑性。

引理 C.1.4. 设 S 是任意有限型诺特概形。则对于任意仿射 S-概形X，典范态射 $f : X \to S$ 是一个局部有限表示的仿射态射。此外，如果 $f : X \to S$ 的所有纤维都是光滑的，则 f 是光滑的。

证明。 这可由 [Stacks，引理 01SG] 以及 [Stacks，引理 01V8]得出。 □

C.2 无穷远处的动机拓扑

$\mathbb{A}^1$-可缩性与其拓扑学对应概念相比是一个微妙的概念。为进一步强调这一点，我们在拓扑学中知道，若空间 X 可缩，则 $F \to E \to X$ 上的每个向量丛都同构于平凡丛 $E \cong X \times F$，其中 F 为纤维。但这在代数几何中绝非直截了当。特别地，存在带有平凡向量丛但并非 $\mathbb{A}^1$-可缩的光滑概形的例子。另一方面，存在带有非平凡丛的 $\mathbb{A}^1$-可缩概形的例子（参见 [AD08]的出色工作）；然而，迄今已知的所有此类例子都是严格拟仿射概形，而这种纷乱可以通过将问题限制在仿射范围内加以控制。总而言之，这些实例只是再次表明，迄今尚无普遍的不变量能够在所有光滑仿射 $\mathbb{A}^1$-可缩概形中唯一识别出仿射空间。

关于动机开庞加莱猜想（参见第1.2节），一种研究思路是发展一种无穷远处的动机拓扑。仿照拓扑学的发展，首先提出“无穷远处的动机同调”这一概念似乎很有启发意义。Wil06] 以边界动机之名提出了这一概念，它存在于 Voevodsky 的动机导出范畴 $\mathrm{DM}^{eff}_{,\ Nis}{}^{-}$ (谱 k，$\mathbb{Z}$) 中。

无穷远处的动机同调

我们简要回顾 Voevodsky 关于 k 以下[VSF00，第5章第§2节1]。固定一个完美域 k，并考虑对应的范畴 $\mathrm{SmCor}(k)$，其对象为光滑概形 X，$Y \in \mathrm{Sm}_k$。一个态射

$Y \to X$ in SmCor(k) 是一个有限对应：由以下类型的整闭子概形生成的自由阿贝尔群：

$$\mathrm{Cor}(Y, X) := \mathbb{Z}\{Z \subset Y \times_k X : Z \to Y \text{ is finite, surjective}\} \subset Y \times X.$$

该范畴中的复合律由概形的自然拉回给出。带转移的 Nisnevich 层范畴 Shv_{Nis}(SmCor(k)) 是由从 SmCor(k) 到阿贝尔群的那些逆变加性函子所构成的范畴，其到 Sm_k 的限制是关于 Nisnevich拓扑的层。Shv_{Nis}(SmCor(k)) 是一个阿贝尔范畴，因而包含上有界复形的导出范畴 $D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{SmCor}(k)))$。后者进而包含 k 上有效动机复形的全子范畴 DM_-^{eff} (Shv_{Nis}(SmCor(k)))。后者即其上同调层为同伦不变的那个范畴（[VSF00，定义 3.1.10]）。

另有一个三角范畴 $\mathrm{DM}_{gm}^{eff}(k)$，称为有效几何动机（见 [VSF00，第5章，§2.1]）。它具有一个将 $\mathrm{DM}_{gm}^{eff}(k)$ 嵌入 DM_-^{eff} (k) 的典范全三角嵌入，并把 $X \in \mathrm{Sm}_k$的几何动机映到 $M_{gm}(X)$。经由该嵌入，可将 $M_{gm}(X) =: M(X)$ 等同为 $\mathrm{DM}_{gm}^{eff}(k)$ 的一个对象。几何动机范畴 $\mathrm{DM}_{gm}(k)$ 是在 $\mathrm{DM}_{gm}^{eff}(k)$ 中对 Tate 动机 $\mathbb{Z}(1)$ 取逆而得到的范畴（[VSF00，第 192] 页）。后一范畴亦称为 Voevodsky 混合动机导出范畴，记作 DM(谱 $k, \mathbb{Z}$)。

以下版本的边界动机足以满足我们的语境。关于精确定义，可参阅 [Wil06，定义 2。1]。

定义 66. 设 $X \in \mathrm{Sm}_k$ 是完美域 k上的光滑概形。那么，边界动机 $\partial M_{gm}(X)$ 可定义为满足以下正合三角的对象：

$$\partial M_{gm}(X) \to M_{gm}(X) \to M_{gm}^c(X) \to \partial M_{gm}(X)[1]$$

其中，$M_{gm}(X)$ 表示 X 的动机，而 $M_{gm}^c(X)$ 表示其在DM_-^{eff} $(\mathrm{Spec}\, k)$中的紧支撑动机。

特别地，存在链复形 $C_*\mathbb{Z}_{tr}(X)$ 和 $C_*\mathbb{Z}_{tr}^c(X)$，由此得到相应的动机范畴 $M(X)$ 以及作为 X 在 $DM^{eff}{}_{,Nis}{}^{-}(X, \mathbb{Z})$ 中对象的紧支撑动机范畴 $M^c(X)$。这与拓扑学中的“无穷远处奇异链复形”（定义 2）类似。于是存在典范映射$\iota_X : C_*\mathbb{Z}_{tr}(X) \to C_*\mathbb{Z}_{tr}^c(X)$，它由带转移的预层之间的底层态射 $\mathbb{Z}_{tr}(X) \hookrightarrow \mathbb{Z}_{tr}^c(X)$ 诱导。接着定义无穷远处动机，记为$M^\infty(X) := M_{gm}^\infty(X)$，它是与复形 $C_*(\mathrm{coker}(\iota_X)[-1])$ 相关联的动机。基于这一设定，我们得到以下结果，它与拓扑学定义 1.1.4 的结果类似：

引理 C.2.1. 设 $\mathcal{X}$ 是一个 m 维的 $\mathbb{A}^1$-可缩有限型光滑概形。那么我们有

$$M^\infty(\mathcal{X}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(m)[2m-1]$$

（非典范地）作为 DM(谱 $k, \mathbb{Z}$) 中的对象。

证明。参见 [AD07，引理 6。5]。 □

无穷远处的动机同伦

换言之， $\mathcal{X}$ 的无穷远处动机同调，就是适当维数球面的动机同调。然而，要充分区分$\mathbb{A}^1$-可缩概形，无穷远处同伦这一更强大的理论不可或缺。至少在稳定 $\mathbb{A}^1$-同伦范畴 $\mathrm{SH}(k)$中，同伦纯性的存在使我们得以做到这一点。这最早由 [Lev07]描述。除此之外，通过在稳定动机同伦理论中发展穿孔管状邻域理论， [DDØ22] 的作者最近提出了一种无穷远处稳定动机同伦的候选理论，使其与拓扑学中的相应理论相一致。

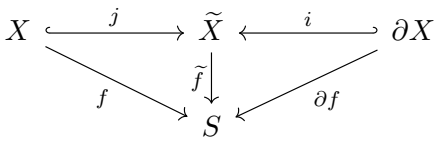
定义 67。 *(*[同上，等式 *1.1.0.a])*设 S 为一个拟紧、拟分离的基概形。设 $f:\ X \to S$ 为任意分离的有限型概形。则无穷远处的稳定动机同伦类型定义为同伦正合序列

$$\Pi_S^\infty(X) \to f_! f^!(\mathbf{1}_S) \xrightarrow{\alpha_X} f_* f^!(\mathbf{1}_S).$$

这里， $\mathbf{1}_S$ 是基于 S的动机球谱， $f_! f^! \mathbf{1}_S = \Pi_S(X)$ 是 X 的稳定同伦型，而 $f_* f^!(\mathbf{1}_S) = \Pi_S^c(X)$ 是 X的适当支撑的稳定同伦型。典范态射 α_X 由稳定动机同伦范畴 $\mathrm{SH}(S)$ 的六函子形式主义得到。以下基本性质表明，这一定义是一个典范选择。

- 如果 f 光滑，则 $f_!\ f_!\ (\mathbf{1}_S) = \Sigma^\infty X_+$ 重新得到 X的动机悬挂谱，
- 如果 f 是适当的，那么 α_X 是同构（作为$f_* \cong f_!$ ）
- 态射 α_X 关于真态射是协变的，关于 étale 态射是逆变的。

对于上述态射 $f: X \to S$ ，回顾一下，紧化 由 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$一组开浸入 $j: X \hookrightarrow \widetilde{X}$ 到一个适当的 S-概形 $\widetilde{f}: \widetilde{X} \to S$ 给出。$\widetilde{\ }$ 闭补集称为边界，由 $\partial X := (\widetilde{X} \backslash X)_{red}$ 给出，它属于 $\widetilde{\ }X$ ，并带有闭浸入 $i: \partial X \hookrightarrow \widetilde{X}$。此外，通过令$\widetilde{\ }\partial f = f \circ i: \partial X \to S$，我们得到以下交换图：



该系统引出了以下定义：

定义68。 *([同上，定义4.1.1])* 设 (X, Z) 是一个闭 S-对，且 v 是 X上的一个（虚）向量丛。那么，相对于 S并由 v扭曲的 Z 在 X 中的穿孔管状邻域，$\mathrm{TN}_S^{\times}(X, Z, v)$ 是 $\mathrm{SH}(k)$ 中以下复合映射的同伦纤维

$$\beta_{X,Z} : \Pi_S(Z, i^{-1}v) \to \Pi_S(X, v) \to \Pi_S(X/X - Z, v)$$

除其他若干性质外，他们还证明了 $\mathrm{TN}_S^{\times}$ 与无穷远处的稳定同伦相一致（同上 [命题 4.4.2]）：

~命题 C.2.2. 设$(X, \partial X)$ 是与某个有限型分离 S概形的紧化相关联的闭 S-对。则存在一个典范同构

$$\Pi_S^{\infty}(X) \simeq \mathrm{TN}_S^{\times}(\widetilde{X}, \partial X)$$

此外，该同构实际上与紧化的选取无关（[同上，推论4.4.4]）：

推论 C.2.3. 设(X, Z) 是一个闭 S-对，且 X/S 是适当的。则穿孔管状邻域$\mathrm{TN}_S^{\times}(X, Z)$ 同构于 $\Pi_S^{\infty}(X \backslash Z)$，因此仅取决于开子概形 $X \backslash Z$。

作者还计算了若干代数簇的无穷远处的稳定动机同伦，包括正规曲面上的 Du Val 奇点（同上 [§5.4，例 1]）和 Danielewski 曲面（同上 [§5.4，例 2]）等。原则上，可以将 Π_S^{∞}视为衡量 Π_S（X）与其紧化版本 Π_S^c（X）之间形式差异的量。结合本文的背景，我们以以下例子作结（同上 [例 4.3.7]）。

例 C.2.4. 设 $\mathcal{X}$ 是域 k上维数为 d 的稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩簇。则可见 $\mathcal{X}$ 的无穷远处的稳定动机同伦即为仿射 d-空间的无穷远处的稳定动机同伦，即

$$\Pi_k^{\infty}(\mathcal{X}) = \mathbf{1}_k \oplus \mathbf{1}_k(d)[2d-1] = \Pi_k^{\infty}(\mathbb{A}_k^d).$$

因此，无穷远处的稳定动机同伦无法区分稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩簇与 $\mathbb{A}_k^d$。此外，由拓扑学可知，与欧几里得空间（或任何可缩空间）取积会消去无穷远处同伦。对 Π_S^{∞}而言亦是如此，正如下文所示（参见同上 [命题 4.3.9]）：

例 C.2.5. 设 $f\colon\ Y \to S$ 是一个相对维数为 n、相对切丛平凡的光滑稳定 $\mathbb{A}^1$-可缩 S-概形（例如，取 $Y = \mathbb{A}_k^n$），那么我们有如下扩张的分裂

$$\Pi_S^{\infty}(X \times Y) \simeq \Pi_S(X) \oplus \Pi_S^c(X)(n)[2n-1].$$

作者在 [DDØ22] 还认为，无穷远处不稳定的动机同伦版本应当能够解决当前的问题。然而，目前要定义一个候选的无穷远处的不稳定动机同伦仍存在若干困难；例如，如何一致地选择无穷远基点，或如何表述动机无穷远处同伦本身的“正确定义”：因为在不稳定情形下，同伦纤维与同伦余纤维通常并不相同，所以一开始究竟应采用何种正确概念尚不清楚。

迄今为止，拥有这样一个出众的动机不变量还只是梦想；然而，这个梦想终将成为现实！

参考文献

[AHE72] Shreeram Abhyankar、William Heinzer 和 Paul Eakin。“多项式环中系数环的唯一性”。载于：《代数杂志》23.2（1972年），第310–342页（第52页）。[AM75] Shreeram S Abhyankar 和 Tzuong-tsieng Moh。“平面中的直线嵌入。”载于：《纯粹与应用数学杂志》（1975年）（第46页）。[Ach19] Raphaël Achet。“幺幂群的皮卡群、限制皮卡函子”。载于：HAL开放科学，hal-02063586v2（2019年）（第70页）。[Ach17] Raphaël Achet。“仿射直线的形式与加法群的皮卡群”。载于：《纯粹与应用代数杂志》221.11（2017年），第2838–2860页（第34页）。[Ada74] John Frank Adams。《稳定同伦与广义同调》。芝加哥大学出版社，1974年（第18页）。[AE17] Benjamin Antieau 和 Elden Elmanto。“不稳定动机同伦论入门”。载于：代数几何近期进展综述 95（2017年），第305–370页（第14、16、17、21–23、84、99、119、125、128页）。[Asa94] Teruo Asanuma。“$\mathbb{A}^n$上的不可线性化代数群作用”。载于：《代数杂志》166.1（1994年），第72–79页（第49、53页）。[Asa87] Teruo Asanuma。“诺特环上代数的多项式纤维环”。载于：《数学创刊》87.1（1987年），第101–127页（第44、54、73、74、77页）。[Aso11] Aravind Asok。“$\mathbb{A}^1$-可缩性与拓扑可缩性”。载于：群作用、广义上同调理论与仿射代数几何，渥太华大学，加拿大（2011年）（第51页）。[ABEH25] Aravind Asok、Tom Bachmann、Elden Elmanto 和 Michael J Hopkins。“不稳定动机同伦论与实平展同伦论”。载于：预印本 arXiv:2501.15651（2025年）（第36页）。[AD09] Aravind Asok 和 Brent Doran。“$\mathbb{A}^1$-同伦群、切除与可解商”。载于：《数学进展》221.4（2009年），第1144–1190页（第39、103、105、107页）。[AD07] Aravind Asok 和 Brent Doran。“关于幂单商与某些可缩光滑概形”。载于：《国际数学研究论文》，牛津大学出版社（2007年）（第23、38、60、75、76、79、97、152页）。[AD08] Aravind Asok 和 Brent Doran。“可缩光滑概形上的向量丛”。载于：《杜克数学杂志》141.1（2008年），第513–530页（第151页）。[ADF17] Aravind Asok、Brent Doran 和 Jean Fasel。“动机球面的光滑模型与抓握构造”。载于：《国际数学研究通告》2017.6（2017年），第1890–1925页（第76、79、84、100页）。[ADØ23] Aravind Asok、Adrien Dubouloz 和 Paul Arne Østvær。“代数悬挂的几何模型”。载于：《国际数学研究通告》IMRN 20（2023年），第17788–17821页。ISSN：1073-7928。DOI：10.1093/imrn/rnad094。URL：https://doi.org/10.1093/imrn/rnad094（第79页）。

[AF14a] Aravind Asok 和 Jean Fasel。“光滑仿射三维簇上向量丛的上同调分类”。载于：《杜克数学杂志》163.14（2014年），第2561–2601页（第xv页）。[AF14b] Aravind Asok 和 Jean Fasel。“球面上的代数向量丛”。载于：《拓扑学杂志》7.3（2014年），第894–926页（第xv、90页）。[AHW17] Aravind Asok、Marc Hoyois 和 Matthias Wendt。“$\mathbb{A}^1$-同伦论中的仿射可表性结果，I：向量丛”。载于：《杜克数学杂志》166.10（2017年）（第xiii页）。[AM11] Aravind Asok 和 Fabien Morel。“在 $\mathbb{A}^1$-同伦意义下的光滑簇与代数h-上同调 cobordism”。载于：《数学进展》227.5（2011年），第1990–2058页（第xiv、7、24、26–28、58、59、105、113页）。[AØ21] Aravind Asok 和 Paul Arne Østvær。“$\mathbb{A}^1$-同伦论与可缩簇：综述”。载于：《同伦论与算术几何——动机与丢番图方面：LMS-CMI研究班，伦敦，2018年7月》（2021年），第145–212页（第5、9、21、26–28、54、77、85、112页）。[nLab] nLab 作者。nLab。https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage（第121页）。[Ayo23] Joseph Ayoub。“关于 F. Morel 的 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ 猜想的反例”。载于：《数学报告》361.G7（2023年），第1087–1090页（第25页）。[Ayo07] Joseph Ayoub。“Grothendieck 的六种运算与动机世界中的消失循环形式体系（II）”。载于：《Astérisque》315（2007年）（第xiv、29页）。[Bac24] Tom Bachmann。《强 $\mathbb{A}^1$-不变层（据 F. Morel）》。2024年。arXiv：2406.11526[math.AG（第29页）。[BCDFØ25] Tom Bachmann、Baptiste Calmès、Frédéric Déglise、Jean Fasel 和 Paul Østvær。“Milnor-Witt 动机”。载于：（2025年）（第137页）。[BEØ24] Tom Bachmann、Elden Elmanto 和 Paul Arne Østvær。“Étale 动机谱与 Voevodsky 收敛猜想”。载于：《欧洲数学学会杂志》27.7（2024年），第2653–2704页（第xiv页）。[BH21] Tom Bachmann 和 Marc Hoyois。“动机同伦论中的范数”。载于：《Astérisque》425（2021年）（第21、37页）。[BHS15] Chetan Balwe、Amit Hogadi 和 Anand Sawant。“概形的$\mathbb{A}^1$-连通分支”。载于：《数学进展》282（2015年），第335–361页（第25、28、29页）。[BCW76] Hyman Bass、Edwin Connell 和 David Wright。“局部多项式代数是对称代数”。载于：《数学创刊》38.3（1976年），第279–299页（第44、73页）。[BMS87] Alexander Beilinson、Robert MacPherson 和 Vadim Schechtman。“动机上同调笔记”。载于：《杜克数学杂志》第54卷第2期（1987年）（第xii页）。[Bei85] Alexander A Beilinson。“高阶调节子与 L-函数的值”。载于：《苏联数学杂志》30.2（1985年），第2036–2070页（第xii页）。[Bek00] Tibor Beke。“可层化同伦模型范畴”。载于：《剑桥哲学学会数学会刊》129.3（2000年）。ISSN：1469-8064（第121页）。[BD94] Shrikant Mahadeo Bhatwadekar 和 Amartya Kumar Dutta。“关于仿射纤维化”。载于：《交换代数》（的里雅斯特，1992年）。World Sci. Publ.，新泽西州埃奇沃特，1994年，第1–17页（第44页）。[BG15] Shrikant Mahadeo Bhatwadekar 和 Neena Gupta。“关于 $k[X,Y]$的消去性质的一则注记”。载于：《代数及其应用杂志》14.09（2015年），第1540007页（第52页）。[BP22] Jérémy Blanc 和 Pierre-Marie Poloni。“双变量与 Vénéreau 多项式”。载于：《图卢兹科学学院年刊：数学》卷31，第5期（2022年），第1391–1418页（第45页）。

[Bla01] Benjamin A Blander.《单纯预层上的局部射影模型结构》。载于：《K 理论》24.3（2001年），第283页（第15、22、128页）。[Blo86] Spencer Bloch.《代数循环与高阶K-理论》。载于：《数学进展》61.3（1986年），第267–304页（第xii页）。[BK86] Spencer Bloch 和 Kazuya Kato.《p-进étale 上同调》。载于：Publications Mathématiques de l'IHÉS 63（1986年），第107–152页（第xiv页）。[Bou75] Aldridge Knight Bousfield.《关于同调的空间局部化》。载于：《拓扑学》14.2（1975年），第133–150页（第119页）。[BK72] Aldridge Knight Bousfield 和 Daniel Marinus Kan.《同伦极限、完备化与局部化》。第304卷。Springer Science & Business Media，1972年（第22、128页）。[Bra18] Thomas Brazelton.《利用（∞,1）-范畴构造不稳定动机同伦范畴》。载于：arXiv:1810.00094（2018年）（第12页）。[BG06] Kenneth Brown 和 Stephen Gersten.《作为广义层上同调的代数 K-理论》。载于：《高阶K-理论：1972年8月28日至9月8日在巴特尔纪念研究所西雅图研究中心举行的会议论文集》。施普林格。2006年，第266–292页（第15页）。[Car14] James Carlson.《庞加莱猜想》。第19卷。美国数学会，2014年（第5页）。[CR24a] Utsav Choudhury 和 Biman Roy.《$\mathbb{A}^1$-连通分支及$\mathbb{A}^2$的刻画》。载于：《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal）2024.807（2024年），第55–80页（第25–27、67页）。[CR24b] Utsav Choudhury 和 Biman Roy.《$\mathbb{A}^1$- $\mathbb{A}^2\setminus\{(0,0)$的同伦类型》。载于：arxiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2404.01087（2024年）（第69、71、101、107页）。[CD19] Denis-Charles Cisinski 和 Frédéric Déglise.《纤维范畴与六函子形式体系》。载于：《混合动机的三角范畴》。施普林格，2019年，第3–166页（第29页）。[CGP15] Brian Conrad、Ofer Gabber 和 Gopal Prasad.《伪约化群》。第26卷。剑桥大学出版社，2015年（第71页）。[CM03] Anthony Crachiola 和 Stefan Maubach.《Derksen 不变量与 Makar-Limanov 不变量》。载于：《美国数学会会刊》（ 2003 年），第 3365–3369 页（第 51 页）。[CML08] Anthony J Crachiola 和 Leonid G Makar-Limanov.《曲面消去定理的代数证明》。载于：《代数杂志》320.8（2008年），第3113–3119页（第47、52页）。[CK65] Morton Landers Curtis 和 Kyung Whan Kwun.《流形的无限和》。载于：《拓扑学》3.1（1965年），第31–42页（第8页）。[DF10] Daniel Daigle 和 Gene Freudenburg.《仿射纤维化族》。载于：《对称性与空间》。第278卷。数学进展系列。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，2010年，第35–43页（第44、45页）。[DK09] Daniel Daigle 和 Shulim Kaliman.《关于局部幂零导子与 $k[X,Y,Z]$的变量的一则注记》。载于：《加拿大数学通报》52.4（2009年），第535–543页（第51页）。[Dan89] Wlodzimierz Danielewski.《关于仿射代数簇的消去问题与自同构群》。预印本，华沙。1989年（第85页）。[Dég21] Frédéric Déglise.《动机同伦论与有理混合动机导论课程》。载于：（2021年）。PCMI 暑期学校"动机同伦论"（第12页）。[Dég23] Frédéric Déglise.《Milnor-Witt K-理论笔记》。载于：预印本 arXiv:2305.18609（2023年）（第137页）。

[DDØ22] Frédéric Déglise、Adrien Dubouloz 和 Paul Arne Østvær.《穿孔管状邻域与无穷远处的稳定同伦》。2022年。arXiv: 2206.01564 [math.AG]（第69、153、155页）。[DFJK21] Frédéric Déglise、Jean Fasel、Fangzhou Jin 和 Adeel A. Khan.《关于有理动机同伦范畴》。载于: J. Éc. polytech. Math. 8（2021年），第533–583页。ISSN：2429-7100。DOI：10.5802/jep.153（第35页）。[Der97] Harm Derksen.《构造不变量理论与线性化问题》。博士学位论文，出版社信息未详。博士论文。Citeseer，1997年（第50页）。[DFR04] James Deveney、David Finston 和 Peter van Rossum.《$\mathbb{G}_a$在$\mathbb{C}^4$上的三角作用》。载于: 《美国数学会会刊》（2004年），第2841–2848页（第76页）。[DP90] Tammo tom Dieck 和 Ted Petrie.《Kodaira 维数为一的可缩仿射曲面》。载于: 《日本数学杂志》新系列16.1（1990年），第147–169页（第7页）。[DL01] Gabino González Diez 和 Pierre Lochak.《关于紧黎曼曲面模空间无穷远处的基本群》。载于: 《密歇根数学杂志》49.3（2001年），第493–500页（第4页）。[Dub07] Adrien Dubouloz.《Danielewski 簇上的加法群作用与消去问题》。载于: 《数学杂志》255.1（2007年），第77–93页（第85页）。[Dub09] Adrien Dubouloz.《Koras–Russell 三次三维簇上的圆柱具有平凡的 Makar-Limanov 不变量》。载于: 《变换群》14.3（2009年），第531–539页（第52、82页）。[DF18] Adrien Dubouloz 和 Jean Fasel.《$\mathbb{A}^1$-可缩仿射三维簇族》。载于: Algebr. Geom. 5.1（2018年），第1–14页（第42、51、83、85、87、90、92–94、98页）。[DF14] Adrien Dubouloz 和 David Finston.《$\mathbb{G}_a$ 在 $\mathbb{A}^4$ 上的适当双三角作用是平移》。载于: 《美国数学会会刊》142.5（2014年），第1513–1526页（第87页）。[DG25] Adrien Dubouloz 和 Parnashree Ghosh.《非同构于仿射空间的高维 $\mathbb{A}^1$-可缩仿射簇的代数族》。2025年。arXiv: 2501.09613（第94、95、97页）。[DMVØ] Adrien Dubouloz、Krishna Kumar Madhavan Vijayalakshmi 和 Paul Arne Østvær.$\mathbb{A}^1$在戴德金概形上的光滑概形于低相对维数下的可缩性。（合作进行中的工作）（第31–33、36、53、57–60、62、63、68、69、71–73、77、78页）。[DMJP10] Adrien Dubouloz、Lucy Moser-Jauslin 和 Pierre-Marie Poloni.《Koras-Russell 三次三维簇的不等价嵌入》。载于: 《密歇根数学杂志》59.3（2010年），第679–694页（第52页）。[DMJP11] Adrien Dubouloz、Lucy Moser-Jauslin 和 Pierre-Marie Poloni.《可缩仿射三维簇的不可消去性》。载于: 《美国数学会会刊》139.12（2011年），第4273–4284页（第98页）。[DPØ19] Adrien Dubouloz、Sabrina Pauli 和 Paul Arne Østvær.《仿射修正的$\mathbb{A}^1$-可缩性》。载于: 《国际数学杂志》30.14（2019年），第1950069页（第7、29、68、94、103页）。[Dug01a] Daniel Dugger.《组合模型范畴具有表示》。载于: 《数学进展》164.1（2001年），第177–201页（第121页）。[Dug01b] Daniel Dugger.《泛同伦理论》。载于: 《数学进展》164.1（2001年），第144–176页（第15、38、117、125、128页）。[DHI04] Daniel Dugger、Sharon Hollander 和 Daniel C Isaksen.《超覆盖与单纯预层》。载于: 《剑桥哲学学会数学会刊》。第136卷。第1期。剑桥大学出版社。2004年，第9–51页（第15页）。

[DLØRV07] Bjorn Ian Dundas、Marc Levine、Paul Arne Østvær、Oliver Röndigs 和 Vladimir Voevodsky。《动机同伦论：2002年8月在挪威 Nordfjordeid 举办的暑期学校讲座》。Springer Science & Business Media，2007（第 xiii、18 页）。[DRØ03] Bjørn Ian Dundas、Oliver Röndigs 和 Paul Arne Østvær。“动机函子”。载于：Documenta mathematica 8（2003），第 489–525 页（第 15、18、125 页）。[DG15] Amartya Kumar Dutta 和 Neena Gupta。“满态射定理及其推广”。载于：《代数及其应用杂志》14.09（2015），第 1540010 页（第 48、51 页）。[ELSØ22] Elden Elmanto、Marc Levine、Markus Spitzweck 和 Paul Arne Østvær。“代数配边与étale 上同调”。载于：Geom. Topol. 26.2（2022年），第 477–586 页。ISSN：1465-3060。DOI：10.2140/gt.2022.26.477（第 29 页）。[Ess04] Arno van den Essen。“围绕 Abhyankar-Moh 定理”。载于：《代数、算术与几何及其应用：纪念 Shreeram S. Abhyankar 七十寿辰会议论文集》。施普林格。2004年，第 283–294 页（第 46 页）。[Ess97] Arnoldus Richardus Petrus van den van den Essen。“多项式自同构与雅可比猜想”。载于：《非交换代数、量子群与不变量，第七届法比接触会议》，编辑等（1997年）（第 46 页）。[Fas08] Jean Fasel。“Chow-Witt群”。载于：《法国数学会回忆录》113（2008年）（第 91、144 页）。[Fas20] Jean Fasel。“Chow-Witt群讲义”。载于：Contemporary mathematics 745（2020年），第 83–121 页（第 91、137、142、143、146、147 页）。[Fre06] Gene Freudenburg。《局部幂零导子的代数理论》。第 136 卷。施普林格，2006年（第 51、60、150 页）。[Fre30] Hans Freudenthal。“论拓扑空间与群的端”。博士论文。施普林格，1930年（第 2 页）。[Fuj82] Takao Fujita。“论非完备代数曲面的拓扑学”。载于：J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math 29.3（1982年），第 503–566 页（第 69 页）。[Fuj79] Takao Fujita。“论扎里斯基问题”。载于：Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 55.7（1979年），第 106–110 页（第 52 页）。[GS09] David Gepner 和 Victor Snaith。“表示代数配边与代数 K-理论的动机谱”。载于：Documenta Mathematica 14（2009年），第 359–396 页（第 xiii 页）。[GG23] Parnashree Ghosh 和 Neena Gupta。“关于一族线性超平面的平凡性”。载于：《数学进展》428（2023年），第 109166 页（第 105 页）。[GD75] Marat Gizatullin 和 Vladimir Danilov。“仿射曲面的自同构。I”。载于：苏联数学学报 9.3（1975年），第 493 页（第 48 页）。[Gli60] James Glimm。“两个笛卡尔积是欧几里得空间”。载于：《法国数学会通报》88（1960年），第 131–135 页（第 8 页）。[GJ09] Paul Gregory Goerss 和 John Frederick Jardine。《单纯同伦论》。Springer Science & Business Media，2009年（第 122–125 页）。[Gro65] Alexander Grothendieck。“代数几何原理：IV. 概形与概形态射的局部研究，第二部分”。载于：高等科学研究所数学出版物 24（1965年），第 5–231 页（第 62 页）。[Gro66] Alexander Grothendieck。“代数几何原理：IV. 概形与概形态射的局部研究，第三部分”。载于：高等科学研究所数学出版物 28（1966年），第 5–255 页（第 61 页）。

[Gro68] Alexander Grothendieck。“代数循环的标准猜想”。载于：TIFR Bombay，牛津大学出版社（1968年）。1968年1月16日至23日在 TIFR 孟买举行的国际代数几何研讨会。URL：https://mathweb.tifr.res.in/sites/ default/files/publications/studies/SM_04-Algebraic-Geometry. pdf\#page=214 （第 xi 页）。[Gro58] 亚历山大·格罗滕迪克。“同调扭子与有理截面”。载于：克劳德·谢瓦莱研讨班 3（1958年），第 1–29 页（第 85 页）。[Gup15] Neena Gupta。“关于 Zariski 消去问题的综述”。载于：《印度纯粹与应用数学杂志》46（2015年），第 865–877 页（第 53 页）。[Gup14] Neena Gupta。“正特征下的 Zariski 消去问题”。载于：《数学进展》264（2014年），第 296–307 页（第 52、53 页）。[Gup22] Neena Gupta。“Zariski 消去问题及仿射代数几何中的相关问题”。载于：Proc. Int. Cong. Math. 第 3 卷。2022年，第 1578–1598 页（第 45、47 页）。[GM88] 拉金德拉·瓦桑特·古尔贾尔和 Masayoshi Miyanishi。“具有 $\kappa \leq 1$的仿射曲面”。载于：《代数几何与交换代数》。爱思唯尔，1988年，第 99–124 页（第 7 页）。[Ham75] 埃洛伊丝·哈曼。“关于 R对 $R[x]$的不变性”。载于：《代数杂志》35（1975年），第 1–16 页。ISSN：0021-8693（第 64、65 页）。[Har13] 罗宾·哈茨霍恩。《代数几何》。第 52 卷。Springer Science & Business Media，2013年（第 150 页）。[Hel88] 亚历克斯·海勒。《同伦论》。美国数学会，普罗维登斯，1988年（第 125 页）。[Hir03] 菲利普·史蒂文·赫希霍恩。《模型范畴及其局部化》。美国数学会，2003年（第 119、125 页）。[Hoc72] 梅尔文·霍赫斯特。“多项式环中系数环的不唯一性”。载于：美国数学会会刊 34.1（1972年），第 81–82 页（第 52 页）。[Hov07] 马克·霍维。《模型范畴》。数学综述与专著，63，美国数学会，2007年（第 122、125、130、131 页）。[Hov01] 马克·霍维。“一般模型范畴中的谱与对称谱”。载于：《纯粹与应用代数杂志》165.1（2001年），第 63–127 页（第 18 页）。[Hoy16] Marc Hoyois。“关于 Nisnevich 拓扑的一则平凡备注”。载于：此处可查阅的笔记（2016年）（第 112 页）。[Hoy17] Marc Hoyois。“等变动机同伦论中的六种运算”。载于：《数学进展》305（2017年），第 197–279 页（第 21、29 页）。[HKØ16] Marc Hoyois、Amalendu Krishna 和 Paul Arne Østvær。“Koras-Russell 三维簇的$\mathbb{A}^1$-可缩性”。载于：Algebr. Geom. 3.4（2016年），第 407–423 页。ISSN：2214-2584（第 51、83、92 页）。[HR96] 布鲁斯·休斯和安德鲁·拉尼茨基。《复形的端》。第 123 卷。剑桥大学出版社，1996年（第 3、5 页）。[Iit77] 饭高茂。“论代数簇的对数 Kodaira 维数”。载于：《复分析与代数几何》（1977年），第 175–189 页（第 68 页）。[Isa05] 丹尼尔·查尔斯·伊萨克森。“单纯预层的 Flasque 模型结构”。载于：K-Theory 36（2005年），第 371–395 页（第 15、38、125 页）。[Jar00] John Frederick Jardine。“动机对称谱”。载于：Documenta Mathematica 5（2000年），第 445–553 页（第 18 页）。[Jar87] John Frederick Jardine。“单纯预层”。载于：《纯粹与应用代数杂志》47.1（1987年），第 35–87 页（第 125、128 页）。

[Jel87] Zbigniew Jelonek. “正则嵌入与有理嵌入的扩张”。载于：《数学年刊》277.1（1987），第 113–120 页（第 47 页）。[Jel92] Zbigniew Jelonek. “雅可比猜想与多项式嵌入的扩张”。载于：《数学年刊》294.1（1992），第 289–293 页（第 46 页）。[Kal05] Shulim Kaliman. “仿射代数簇上的 $\mathbb{C}^*$ 和 $\mathbb{C}_+$ 作用”。载于：《代数几何——西雅图》（2005），第 629–654 页（第 49 页）。[Kal02] Shulim Kaliman. “一般 $\mathbb{C}^2$-纤维的多项式是变量”。载于：《太平洋数学杂志》203.1（2002），第 161–190 页（第 51 页）。[KKMLR97] Shulim Kaliman、Mariusz Koras、Leonid Makar-Limanov 和 Peter Russell. “$\mathbb{C}^*$作用于 $\mathbb{C}^3$ 时可线性化”。载于：Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 3（1997），第 63–71 页。ISSN：1079-6762（第 50 页）。[KZ99] Shulim Kaliman 和 Mikhail Zaidenberg. “仿射修正与具有高度传递自同构群的仿射超曲面”。载于：《变换群》4.1（1999），第 53–95 页（第 7、94 页）。[KZ01] Shulim Kaliman 和 Mikhail Zaidenberg. “仿射平面族：圆柱的存在性”。载于：《密歇根数学杂志》49.2（2001），第 353–367 页（第 45 页）。[KZ00] Shulim Kaliman 和 Mikhail Zaidenberg. “Miyanishi 对仿射三维空间的刻画在高维中不成立”。载于：《傅里叶研究所年刊》第 50 卷第 6 期（2000），第 1649–1669 页（第 51 页）。[Kam75] Tatsuji Kambayashi. “关于仿射平面不存在非平凡可分形式”。载于：《代数杂志》35.1-3（1975），第 449–456 页（第 68、69、71 页）。[KM78] Tatsuji Kambayashi 和 Masayoshi Miyanishi. “关于以仿射直线为纤维的平坦纤维化”。载于：《伊利诺伊数学杂志》22.4（1978），第 662–671 页（第 44、80 页）。[KW85] Tatsuji Kambayashi 和 David Wright. “仿射直线的平坦族是仿射直线丛”。载于：《伊利诺伊数学杂志》29.4（1985），第 672–681 页（第 44、45、61、63、65、80 页）。[Kat82] Kazuya Kato. “特征二下的对称双线性型、二次型与 Milnor K理论”。载于：《数学创刊》66（1982），第 493–510 页（第 141 页）。[Kel39] Ott-Heinrich Keller. “整 Cremona 变换”。载于：Monatshefte für Mathematik und Physik 47.1（1939），第 299–306 页（第 46 页）。[Knu06] Donald Knutson.《代数空间》。施普林格，2006，第 91–152 页（第 86 页）。[KR97] M. Koras 和 P. Russell. “可缩三维簇与作用于 $\mathbb{C}^3$上的 $\mathbb{C}^*$作用”。载于：J. Algebraic Geom. 6.4（1997），第 671–695 页。ISSN：1056-3911（第 49、82 页）。[Kor89] Mariusz Koras. “关于 $\mathbb{C}^3$上的‘良好’$\mathbb{C}^*$作用的线性化”。载于：Proc. Can. Math. Soc. Conf. 第 10 卷（1989），第 93–102 页（第 49 页）。[Kra17] Hanspeter Kraft. “仿射簇的自同构群及仿射 n空间的刻画”。载于：《莫斯科数学会汇刊》78（2017），第 171–186 页（第 45 页）。[Kra96] Hanspeter Kraft. “关于仿射 n空间的挑战性问题”。载于：《Astérisque》237（1996）。Bourbaki 研讨班，1994/95 年，第 802 号报告，第 5 篇，第 295–317 页。ISSN：0303-1179（第 43 页）。[KRS21] Hanspeter Kraft、Andriy Regeta 和 Immanuel van Santen. “仿射空间能否由其自同构群确定？”载于：《国际数学研究通告》2021年6期（2021），第 4280–4300 页（第 45 页）。[Kul53] Wouter Van der Kulk. “关于二元多项式环”。载于：《数学新档案》3（1953），第 33 页（第 48 页）。

[Lam05] Tsit-Yuen Lam.《域上的二次型导论》。第 67 卷。美国数学会，2005（第 137、138 页）。[Lam06] Tsit-Yuen Lam.《Serre 关于射影模的问题》。施普林格，2006（第 xii 页）。[Lev94] Marc Levine. “重访 Bloch 高阶 Chow 群”。载于：《Astérisque》226.10（1994），第 235–320 页（第 xii 页）。[Lev13] Marc Levine. “Voevodsky 切片塔的收敛性”。载于：Documenta Mathematica 18（2013），第 907–941 页（第 xiv 页）。[Lev07] Marc Levine. “动机管状邻域”。载于：Documenta Mathematica 12（2007），第 71–146 页（第 153 页）。[Lev08] Marc Levine. “同伦 coniveau 塔”。载于：Journal of Topology 1.1（2008），第 217–267 页（第 xiv 页）。[LM07] Marc Levine 和 Fabien Morel.《代数配边》。施普林格，2007（第 xiv 页）。[Lur09] Jacob Lurie.《高阶拓扑斯理论》。普林斯顿大学出版社，2009（第 12、20、21、31、114、118–122 页）。[Lur25] Jacob Lurie. Kerodon. https://kerodon.net。2025年（第 129 页）。[Lur18] Jacob Lurie. “谱代数几何”。载于：预印本（2018年）。网址：https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf（第 112 页）。[ML98] Saunders Mac Lane.《工作数学家的范畴论》。第 5 卷。Springer Science & Business Media，1998（第 125、126 页）。[MM12] Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk.《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论初步导论》。Springer Science & Business Media，2012（第 109 页）。[MV25] Krishna Kumar Madhavan Vijayalakshmi. Koras-Russell 原型的相对 $\mathbb{A}^1$可缩性与奇异动机球面。2025年。arXiv：2510.21594 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/2510.21594（第 34、35、81、85、87、90、92、93、95、97、101–104 页）。[Mag75] Andy R Magid. “纤维化的 Picard 序列”。载于：《美国数学会会刊》53.1（1975），第 37–40 页（第 62 页）。[ML96] Leonid Makar-Limanov. “在 $\mathbb{C}^4$ 中的超曲面 $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$，或一个 $\mathbb{C}^4$类似但并非 $\mathbb{C}^3$的三维簇”。载于：以色列数学杂志96（1996），第 419–429 页（第 50 页）。[Mat69] Hideya Matsumoto. “论半单分裂群的算术子群”。载于：高等师范学校科学年鉴第 2 卷第 1 期（1969），第 1–62 页（第 141 页）。[May92] J Peter May.《代数拓扑中的单纯对象》。第 11 卷。芝加哥大学出版社，1992（第 135 页）。[Maz61] Barry Mazur. “关于若干可缩4维流形的注记”。载于：数学年刊73.1（1961），第 221–228 页（第 8 页）。[MVW06] Carlo Mazza、Vladimir Voevodsky 和 Charles A Weibel.《动机上同调讲义》。第 2 卷。美国数学会，2006（第 xiii、17 页）。[McM62] D R McMillan. “若干可缩开三维流形”。载于：《美国数学会汇刊》102.2（1962），第 373–382 页（第 8 页）。[Mil70] John Milnor. “代数 K 理论与二次型”。载于：《数学创刊》9.4（1970），第 318–344 页（第 xiii、40、141 页）。[Mil56] John Milnor. “论与七维球面同胚的流形”。载于：数学年刊64.2（1956）（第 1、100 页）。

[Mil97] John Milnor。《M H Freedman 的工作》。载于：菲尔兹奖得主讲座。World Scien- tific, 1997年，第405–408页（第5页）。[MH73] 约翰·威拉德·米尔诺和戴尔·休斯莫勒。《对称双线性型》。第73卷。施普林格，1973年（第137页）。[Miy75] M. Miyanishi。《仿射平面的代数刻画》。载于：京都大学数学杂志 15（1975），第169–184页。ISSN：0023-608X。DOI：10.1215/kjm/1250523123。URL：https://doi.org/10.1215/kjm/1250523123（第67页）。[Miy84] Masayoshi Miyanishi。《三维仿射空间的代数拓扑刻画》。载于：《美国数学杂志》106.6（1984），第1469–1485页（第72页）。[Miy78] Masayoshi Miyanishi。《有理曲面和单有理曲面上的曲线讲义》。第60卷。施普林格，1978年（第86页）。[Miy81] Masayoshi Miyanishi。《非完备代数曲面》。载于：数学讲义，施普林格，柏林 857（1981）（第67页）。[MS80] Masayoshi Miyanishi 和杉江彻。《含有类柱体开集的仿射曲面》。载于：《京都大学数学杂志》20.1（1980），第11–42页（第52、67页）。[Mor12] Fabien Morel。域上的 $\mathbb{A}^1$-代数拓扑。第2052卷。施普林格，2012年（第xiii、xiv、25、41、91、105、133–139、141、142、144页）。[Mor05] Fabien Morel。《米尔诺关于二次型和模 2 动机复形的猜想》。载于：《帕多瓦大学数学研讨会汇刊》114（2005），第63–101页（第141页）。[MV99] Fabien Morel 和 Vladimir Voevodsky。《概形的$\mathbb{A}^1$-同伦论》。载于：IHÉS 数学出版物 90（1999），第45–143页（第xii、13、15、18、20、23–25、29、36–38、68、112、113、128页）。[Nag67] 永田雅宜。《关于赋值环的一个定理及其应用》。载于：《名古屋数学杂志》29（1967），第85–91页（第52页）。[Nag72] 永田雅宜。《关于 A^n 的自同构群》。第5卷。纪伊国屋书店，1972年（第47页）。[Nis89] Yeo A Nisnevich。《概形上的完全分裂拓扑及其在代数 K理论中的下降谱序列》。载于：《代数 K 理论：与几何和拓扑的联系》（1989），第241页（第13页）。[Oes84] Joseph Oesterlé。《特征 p下的 Tamagawa 数与幺幂群》。载于：《数学创刊》78.1（1984），第13–88页（第70、71页）。[Oku04] Shun-Ichiro Okuda。《正特征下导子的核》。载于：《广岛数学杂志》34.1（2004），第1–19页（第86页）。[OVV07] Dmitri Orlov、亚历山大·维希克和 Vladimir Voevodsky。《一个关于$K_*^{\mathrm{M}}/2$ 的正合列及其在二次型中的应用》。载于：数学年刊（2007），第1–13页（第xiii、141页）。[Pet16] Charlie Petitjean。《第二类 Koras-Russell 三维簇的自同构群》。载于：《代数与几何论丛/代数与几何贡献》57.3（2016），第599–605页（第50页）。[Poe60] Valentin Poenaru。《超立方体的拓扑乘积分解》。载于：《法国数学会通报》88（1960），第113–129页（第8页）。[Qui76] Daniel Quillen。《多项式环上的投射模》。载于：《数学创刊》36（1976），第167–171页。ISSN：0020-9910。DOI：10.1007/BF01390008（第44、77页）。[Qui67] Daniel G Quillen。《同伦代数》。第43卷。数学讲义，施普林格，1967年（第xii、12、113页）。

[Ram71] Chakravarthi Padmanabhan Ramanujam。《作为代数簇的仿射平面的拓扑刻画》。载于：数学年刊（第2辑）94（1971），第69–88页。ISSN：0003-486X。DOI：10.2307/1970735（第6页）。[Rob15] Marco Robalo。《K理论以及从动机到非交换动机的桥梁》。载于：《数学进展》269（2015），第399–550页（第12页）。[Rön25] Oliver Röndigs。《簇的 Grothendieck 环与空间的代数 K 理论》。载于：Open Book Series 6.1（2025年），第165–196页（第21、29、31、125页）。[Rud95] Walter Rudin。《单射多项式映射是自同构》。载于：《美国数学月刊》102.6（1995），第540–543页（第46页）。[Rus70] Peter Russell。《仿射直线及其加法群的形式》。载于：《太平洋数学杂志》32.2（1970），第527–539页（第34页）。[Rus81] Peter Russell。《关于仿射直纹有理曲面》。载于：《数学年刊》255（1981），第287–302页（第52、69页）。[Sat83] Avinash Sathaye。《离散赋值环上二元多项式环：一个判别准则》。载于：《数学创刊》74.1（1983），第159–168页（第44、71、72、80页）。[Sch17] Marco Schlichting。《欧拉类群与初等群、特殊线性群的同调》。载于：《数学进展》320（2017），第1–81页（第xiii页）。[Sco05] Alexandru Scorpan。《4维流形的奇异世界》。美国数学会，2005年（第1页）。[Seg56] Beniamino Segre。《莫比乌斯对应与整 Cremona 变换》。载于：都灵科学院自然科学、物理与数学类论文集 91（1956），第3页（第46、47页）。[Ser57] Jean-Pierre Serre。《投射模与纤维为向量空间的纤维丛》。法文。载于：Dubreil 研讨班：代数与数论 11.2（1957–1958）。报告：23，第1–18页。URL：http://www.numdam.org/item/SD_1957-1958__11_2_A9_0/（第73页）。[Sev06] Markus Severitt。《射影曲线的动机同伦类型》。载于：（2006）。URL：https://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/data/mseveritt.pdf（第22、33、125、128页）。[Sha92] Anant R Shastri。《纽结的多项式表示》。载于：《东北数学杂志》第二辑 44.1（1992），第11–17页（第47页）。[Shi22] Yuri Shimizu。《相对 $\mathbb{A}^1$-同调及其应用》。载于：《同调、同伦与应用》24.1（2022年）（第105、107、136页）。[Sie68] Laurent Carl Siebenmann。《从同伦角度识别拓扑流形中的欧几里得空间》。载于：《数学创刊》6.3（1968），第245–261页（第5页）。[Sma98] Steve Smale。《下个世纪的数学问题》。载于：《数学智能》20.2（1998年），第7–15页（第46页）。[Spi12] Markus Spitzweck。《动机 Landweber 谱的切片》。载于：《K 理论杂志》9.1（2012），第103–117页（第xiv页）。[SØ09] Markus Spitzweck 和 Paul Arne Østvær。《Bott反转的无穷射影空间是同伦代数K理论》。载于：《伦敦数学会通报》41.2（2009），第281–292页（第xiii页）。[Stacks] Stacks Project作者。Stacks Project。https://stacks.math.columbia.edu。2018年（第58、86、110、113、151页）。[Sta62] John Stallings。《欧几里得空间的分片线性结构》。载于：《剑桥哲学学会数学会刊》第58卷第3期。剑桥大学出版社，1962年，第481–488页（第8页）。

[Sus97] 安德烈·苏斯林。沃沃德斯基关于Milnor猜想的证明。1997年。URL: https://intlpress.com/site/pub/files/_fulltext/journals/cdm/1997/1997/0001/CDM-1997-1997-0001-a006.pdf（第 xiii 页）。[Suz74] 铃木正和。“复二元多项式的拓扑性质及空间的代数自同构 $\mathbb{C}^2$”。载于：《日本数学会会刊》26.2（1974年），第 241–257 页（第 46 页）。[Tsa07] Lun-Yi London Tsai。怀特海德连续统。绘图作品，《怀特海德连续统 I》，纸上木炭与石墨，25 x 41 英寸。2007年。URL: https://www.londontsai.com/drawing/view/582083/1/679362（第 9 页）。[VD74] Boris Yu Veˇisfeˇiler 和 Igor Vladimirovich Dolgaˇcev。“整环上的幺幂群概形”。载于：《俄罗斯科学院学报·数学辑》38.4（1974年），第 757–799 页（第 44 页）。[Vis04] Angelo Vistoli。“关于格罗滕迪克拓扑、纤维范畴和下降理论的笔记”。载于：arXiv 预印本 math/0412512（2004年）（第 109 页）。[Voe02a] Vladimir Voevodsky。“一种研究代数 K 理论动机谱序列的可能新方法”。载于：Contemporary Mathematics 293（2002年），第 371–380 页（第 xiv 页）。[Voe98] Vladimir Voevodsky。“$\mathbb{A}^1$-同伦论”。载于：《国际数学家大会论文集》。第 1 卷。柏林。1998年，第 579–604 页（第 xiii、14、18 页）。[Voe02b] Vladimir Voevodsky。“任意特征下动机上同调群同构于高阶 Chow 群”。载于：《国际数学研究通告》2002.7（2002年），第 351–355 页（第 xii 页）。[Voe03a] Vladimir Voevodsky。“带有 $\mathbb{Z}/2$-系数的动机上同调”。载于：《高等科学研究所数学出版物》98（2003年），第 59–104 页（第 xiv、39、84 页）。[Voe11] Vladimir Voevodsky。“关于带有 $\mathbb{Z}/l$-系数的动机上同调”。载于：《数学年刊》（2011年），第 401–438 页（第 xiv 页）。[Voe03b] Vladimir Voevodsky。“球谱的零切片”。载于：arXiv 预印本 math/0301013（2003年）（第 xiv 页）。[Voe02c] Vladimir Voevodsky。“动机稳定同伦论中的未解决问题 I”。载于：《动机、对数及霍奇理论》第一部分（加利福尼亚州尔湾，1998年）3（2002年），第 3–34 页（第 xiv 页）。[Voe03c] Vladimir Voevodsky。“动机上同调中的约化幂运算”。载于：《高等科学研究所数学出版物》98（2003年），第 1–57 页（第 xiv 页）。[Voe00] Vladimir Voevodsky。“米尔诺猜想”。载于：（2000年4月）。URL: https://www.researchgate.net/profile/Vladimir-Voevodsky/publication/2426765_The-Milnor-Conjecture/links/00b4952f294da2c740000000/The-Milnor-Conjecture.pdf（第 xiii 页）。[VSF00] 弗拉基米尔·沃沃德斯基、安德烈·苏斯林和埃里克·M·弗里德兰德。循环、转移与动机同调理论。(am-143)。143。普林斯顿大学出版社，2000年（第 151、152 页）。[Whi35] 约翰·亨利·康斯坦丁·怀特海。“一个群为单位元的特定开流形”。载于：《数学季刊》1（1935年），第 268–268 页（第 8 页）。[Whi34] 约翰·亨利·康斯坦丁·怀特海。“关于三维流形的某些定理（I）”。载于：《数学季刊》1（1934年），第 308–320 页（第 8 页）。[Wil06] Jörg Wildeshaus。“边界动机：定义与基本性质”。载于：《数学汇编》142.3（2006年），第 631–656 页（第 151、152 页）。[Win90] Jörg Winkelmann。“关于齐性斯坦流形上的自由全纯 $\mathbb{C}$-作用”。载于：《数学年刊》286（1990年），第 593–612 页（第 75、78、79 页）。

[Zai00] Mikhail Zaidenberg.《关于仿射空间上的奇异代数结构》。载于：圣彼得堡数学杂志11（2000），第703–760页（**P.** 8，49，67）。

封面鸣谢

我谨向以下来源致以诚挚谢意，感谢它们为本论文封面作出的贡献。

- 实异三维流形，Whitehead 流形
- Henry Segerman，俄克拉荷马州立大学 - T恤设计
- 毛里茨·科内利斯·埃舍尔的作品，海牙埃舍尔博物馆