arXiv:2603.04174v1 [math.CO] 4 Mar 2026

关于 k-多数竞赛图的拉姆齐性质

Asaf Shapira * Raphael Yuster †

摘要

拉姆齐理论的一个核心目标，是确定受限的离散结构族是否必然包含规模显著更大的齐性子结构，相较于不受限的结构而言。在竞赛图的情形中，众所周知，每个竞赛图都包含一个大小为 $\log n$ 的传递子图，而且除常数因子外，这一界是最优的。经过广泛研究的一类受限竞赛图是k-多数竞赛图。其构造方法是取集合 X 的 $2k-1$ 个线性序，并在 X 上定义一个竞赛图：如果在这些序中至少有 k 个满足 u 排在 v 之前，则从 u 向 v 连一条边。Milans、Schreiber 和 West 证明，这类竞赛图确实包含规模显著更大的传递锦标赛。更确切地说，他们证明每个 k-多数竞赛图都包含一个大小为 $n^{2^{-\Theta(k)}}$ 的传递锦标赛。本文的主要目标是通过证明每个 k-多数竞赛图都包含一个大小为 $n^{\Omega(1/k)}$ 的传递集合，从而对指数关于 k 的依赖给出指数级改进。最后，我们提出若干与随机 k-多数竞赛图相关的开放问题和猜想方向。

1 引言

图中的一组顶点称为齐次集，当且仅当它是完全的或空的。拉姆齐定理指出，对于每个 n ，都存在一个整数 $N = r(n)$，使得每个图都包含一个大小为 n 的齐次集。为 $r(n)$ 获取紧的上界和下界，是极值组合学和概率组合学中的核心问题之一，近年来在这方面取得了一些惊人的进展。关于这一主题的最新综述，请参阅 [12] 。众所周知， $r(n)$ 关于 n 呈指数增长；也就是说，在最坏情况下，含有 n 个顶点的图仅包含大小为 $O(\log n)$ 的齐次集。长期以来，人们一直注意到，属于许多受限图族的图包含大得多的齐次集。例如，Nguyen、Scott 和 Seymour 的一项最新定理 [14] 指出，VC维数有界的图包含大小为 $n^{\Theta(1)}$ 的齐次集。该领域一个由 Erd˝os 和 Hajnal [6] 提出的核心猜想进一步指出，对于每个固定的 H，诱导 H-自由图中都成立类似的结论。

本文研究锦标赛，即通过为完全图的边指定方向而得到的有向图。令 T_t 表示具有 t 个顶点的传递锦标赛。在锦标赛中，若一个含有 t 个顶点的集合所诱导的子图是.....的副本，则称该集合为齐次集

*特拉维夫大学数学学院，以色列特拉维夫 6997801。电子邮箱：asafico@tau.ac.il 。
†海法大学数学系，以色列海法 3103301。电子邮箱：raphael.yuster@gmail.com 。

T_t。Erd˝os 和莫泽 [5] 已经指出，每个有 n 个顶点的锦标赛都包含一个大小为 $\log n$ 的齐次集，而且这个结果在常数因子 2 的范围内是最佳的。我们自然会进一步问：对于属于某些受限图族的锦标赛，能否保证存在大得多的齐次集？接下来我们回顾其中一个图族的定义。

对于 $k \geq 1$ 以及集合 Π 上的 $2k-1$ 个线性序，集合 X所生成的 k-多数竞赛图Π 是竞赛图 G，其中 $V(G) = X$，且当且仅当 u 在至少 k 个线性序中先于 v 时，$(u, v) \in E(G)$。麦加维 [10] 最早将这类竞赛图作为分析投票悖论的工具加以研究；他注意到，每个竞赛图都是某个 k下的 k-多数竞赛图。此后，数位研究者进一步研究了 k-多数竞赛图，因为它们似乎具有某些良好性质，而这些性质即使对于 $k = 2$而言也远非显而易见。值得一提的是，埃尔德什˝和莫泽 [5] 证明，每个有 $k \log k$个顶点的竞赛图都是 k-多数竞赛图；斯特恩斯 [15] 则证明， $k \log k$ 的增长率是最优的。 k-多数竞赛图的一个有趣且非平凡的性质是，其支配数有界；事实上，阿隆等人 [1] 证明，其支配数为 $O(k \log k)$。特别是，即使 Π 中的元素是随机生成的，由此产生的 k-多数竞赛图也与典型的随机竞赛图相去甚远。

回到上文关于拉姆齐理论的讨论，现在自然会问：给定整数k，最大的 $t = f_k(n)$是多少，才能保证每个 n阶 k-多数竞赛图都包含T_t的一个副本？函数 $f_k(n)$最早由 Milans、Schreiber 和 West [11], 研究，他们证明了 $f_k(n)$关于 n是多项式的。更准确地说，他们证明了 $n^{1/c_k} \leq f_k(n) \leq n^{1/d_k}$，其中 $c_k \leq 3^{k-1}$，且$d_k \geq (1 + o_k(1)) \ln k \ln \ln k$。然而，值得注意的是，指数之间的差距关于$k$是双指数级的。对于 $f_2(n)$，情况则更令人满意，因为他们已经证明 $f_2(n) = \Theta(\sqrt{n})$。即使在 $k = 3$ 的情形下， $f_k(n)$的增长率也尚不清楚。还请注意，$\log_n f_k(n)$存在极限并非显而易见。我们的第一个主要结果显著改进了 $f_k(n)$的下界，证明了 $c_k \leq 2k - \frac{1}{2} \log_2 k$。此外，我们还证明了上述极限存在。结合上文给出的 d_k 上界，我们得到以下定理。

Th定理 1.1。 极限$n\to\infty$对数$_n f_k$（n）存在。此外，如果 $1/c_k$ 是该极限，那么

$$(1 + o_k(1)) \frac{\ln k}{\ln \ln k} \leq c_k \leq 2k - \frac{1}{2} \log_2 k \, .$$

换一种方式表述上述定理，我们看到，尽管 [11] 证明了每个 k-多数巡回赛都包含一个满足 $t = n^{2^{-\Theta(k)}}$的 T_t，但上述定理通过保证存在一个满足 $t = n^{\Omega(1/k)}$的 T_t，使指数对 k的依赖得到了指数级改进。

1.1 f_k的二部变体（n）

现在我们来讨论本文的主要技术结果，该结果涉及上述问题的一个二部变体，或许具有独立的研究价值。令 $T_{t,\ t}$ 表示每个部分有 t 个顶点的传递二部锦标赛，也就是对完全二部图 $K_{t,\ t}$的一种定向，其中所有边都从一个顶点集指向另一个顶点集。请注意，在竞赛图中寻找大型$T_{t,\ t}$，可以看作是经典扎兰凯维奇无向图问题的锦标赛类比

。随机竞赛图表明，存在不包含 $K_{t,\ t}$ 且其 $t >$ 为 $\log n$ 的竞赛图；因此，自然会再次提出这样的问题： k-多数竞赛图是否包含大得多的 $K_{t,\ t}$。于是，令 $b_k(n)$ 表示最大整数 t，使得每个 n顶点的k-多数竞赛图都包含一个$T_{t,\ t}$。

标准的归纳论证表明，可以由 $b_k(n)$ 的下界得到 $f_k(n)$ 的下界（见第3节），因此进一步促使我们为后者寻找一个合理的下界。事实证明，为了得到这样的下界，考虑传递二分划分的某些更强变体是有益的；这些变体在 k-多数竞赛图中有意义，定义如下。设 $\pi_1, \ldots, \pi_{2k-1}$ 是一个 n-元集合上的线性序，并令 G 表示相应的 k-多数竞赛图。对于 $V(G)$ 的两个互不相交的顶点集 A 和 B，若 A 的所有顶点在 π_i 中都排在 B 的所有顶点之前，我们就称 A 在 π_i 中支配 B。若 A 和 B 中的一个在 π_i 中支配另一个，就称它们在 π_i 中一致。若对于所有 $i = 1, \ldots, 2k-1$，A 和 B 在 π_i 中都一致，则称它们一致。若 A 在至少 k 个线性序中支配 B，则称 A 多数支配 B。注意，若 A 多数支配 B，则由 A 和 B 诱导的 G 的二部子竞赛图是传递的，且所有边都从 A 指向 B。类似地，若 A 和 B 一致，则由 A 和 B 诱导的二部子竞赛图是传递的，因为 A 支配 B，或反之。令 $d_k(n)$（分别为 $d_k^*(n)$）表示满足以下条件的最大整数 t：每个含有 n 个顶点的 k-多数竞赛图，都包含两个阶为 t 的不相交集合 A 和 B，使得 A 多数支配 B（分别地，A 和 B 一致）。显然，我们有 $d_k^*(n) \le d_k(n) \le b_k(n)$。

我们的下一个定理给出了 $d_k^*(n)$和 $d_k(n)$ 的下界与上界。$d_k(n)$ 的下界可作为 $b_k(n)$ 的下界。相当令人惊讶的是，我们为 $d_2(n)$ 得到的界，同时也是 $b_2(n)$ 的紧界。因此，人们可能会问，这种现象是否也适用于更大的 k。我们认为并非如此。事实上，我们对 $d_k^*(n)/n$ 和 $d_k(n)/n$ 得到的上界相对于 k呈指数级小，而对 $b_k(n)/n$ 得到的上界则仅与 $1/k$呈线性关系。我们在下面的定理中总结了关于二部参数的结果。

定理 1.2. 以下各极限均存在：$b_k = \lim_{n\to\infty} n/b_k(n)$，$d_k = \lim_{n\to\infty} n/d_k(n)$，$d_k^* = \lim_{n\to\infty} n/d_k^*(n)$. 此外，

$$\begin{aligned} \Theta(k) \le b_k &\le \binom{2k}{k}, \\ 2^k/e \le d_k &\le \binom{2k}{k}, \\ 2^{2k-1}/e \le d_k^* &\le 2^{2k-1}, \\ b_2 = d_2 &= k\,. \end{aligned}$$

1.2 随机 k-多数竞赛图

正如我们上文所指出的，每个竞赛图都包含一个规模为 T_t，其中 $t = \log n$ 的副本；与拉姆齐定理的许多变体中的常见情形一样，随机竞赛图表明，这个上界在常数因子意义下是紧的

因此，研究通过选取 $2k-1$ 个随机排列生成的 k-多数竞赛图中最大传递锦标赛的规模是很自然的。除了这个问题本身的内在意义之外，这些随机例子或许 [1] 很有可能为$f_k(n)$给出更好的上界。下面我们更正式地阐述这个有趣的问题。

令 $\mathcal{G}(n,k)$ 表示顶点集 $[n]$ 上的 k-多数竞赛图的概率空间；这些竞赛图通过从 $[n]$ 的所有线性序中均匀随机地（有放回地）选取 $2k-1$ 个得到。令 $X(n,k)$ 表示相应的随机变量，其值为 $G \sim \mathcal{G}(n,k)$ 的某个子图中满足 T_t 的最大 t。例如，简单练习即可验证， $X(3, 2)$ 以 1/18 的概率取值 2，以 17/18 的概率取值 3；众所周知，$\lim_{k\to\infty} \Pr[X(3,k) = 3] = 0.9123...$ [7, 8]。当 $k = 2$ 且 n 较大时， $X(n,k)$ 的分布已经变得复杂。我们可以考虑一个可能较容易的问题：确定（至少渐近地） $\mathbb{E}[X(n,k)]$。具体而言，令 r_k 为满足对所有充分大的 n，均有 $\mathbb{E}[X(n,k)] \le n^{\alpha}$ 的所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 中的下确界。

虽然 $r_k \le 1$显然成立，但 $r_k < 1$ 以及 r_k 随 k 增大而减小并不完全显然。第一个问题的答案确实是肯定的。正如 Matthew Kwan 向我们指出的，不难从 Cibulka 与 Kynˇcl 的一个结果 [4] 以及 Lyuben Lychev 的一个未发表结果推出，对每个 k都有 $r_k < 1$。特别地，利用 [4] 中的结果，我们可以证明：

命题 1.3. $\mathbb{E}[X(n,2)] = O(n^{2/3})$。特别地， $r_2 \le 2/3$。

注意，任何形如 $r_k = o(\ln\ln k / \ln k)$的界都会改进 $f_k(n)$的上界。我们猜想一个强得多的界成立。

猜想 1.4. $r_k = O(1/k)$。

注意到，若上述猜想成立，则它将（在常数因子意义下）与我们在定理 1.1 中的主要结果相吻合。我们指出，目前我们甚至不知道 r_k 是否随 k减小。值得注意的是，Mossel [13] 证明了 $\lim_{k\to\infty} \Pr[X(n,k) = n] = e^{-\Theta(n^{5/3})}$（特别地，所谓 n 个顶点上的无偏文化是传递的概率小于 n的任意多项式，但仍显著大于随机竞赛图为传递的概率）。

论文结构： 本文其余部分安排如下：第2节证明定理 1.2 中的二部参数；第3节给出定理 1.1 的证明，该证明基于二部结果；第4节给出命题 1.3 的证明。

2 二部传递子锦标赛

回想一下， $d_k^*(n)$ 是满足以下条件的最大整数 t：每个含有 n 个顶点的 k-多数竞赛图都包含两个阶数为 t 的不相交集合 A 和 B，使得 A和 B 一致。下面的引理，其证明与 [2], 中的引理 2.1 的证明类似，给出了 $d_k^*(n)$ 的一个下界。

[1]我们注意到，在引理2.2和引理2.4中，我们确实使用了随机多数锦标赛作为上界构造。

引理 2.1。 $d_k^*(n) \geq \lfloor n/2^{2k-1} \rfloor$。

证明。 根据引理的陈述，我们可以假设 n 是 2^{2k-1}的整数倍。令G为定义在顶点集 $[n]$ 上的 k-多数竞赛图，该竞赛图由 π_1、.....、 π_{2k-1}生成。对于 $i = 1$、.....、 $2k-1$，我们构造不相交的顶点集 A_i 和 B_i ，满足 $|A_i| = |B_i| \geq n/2^i$ ，使得对于所有 $j = 1$、.....、 i， A_i 和 B_i 是一致的。

我们首先将 A_1 设为 π_1 的前 $n/2$ 个顶点，并将 B_1设为 π_1的其余顶点，以此进行归纳。假设我们已经定义了具有所述性质的 A_i、 B_i ，特别是 $|A_i| = |B_i| = s \geq n/2^i$。令 σ 表示 π_{i+1} 在 $A_i \cup B_i$上的限制，则 σ 是 $A_i \cup B_i$ 的一个阶为 $2s$的排列。令 C 表示 σ 的前 s 个顶点，并令 D 表示 σ的其余 s 个顶点。现在，先假设 $|A_i \cap C| \geq s/2$。那么必有 $|B_i \cap D| \geq s/2$ ，因此我们可以令 $A_{i+1} = A_i \cap C$ 和 $B_{i+1} = B_i \cap D$。否则，必有 $|A_i \cap D| \geq s/2$。那么必有 $|B_i \cap C| \geq s/2$ ，因此我们可以令 $A_{i+1} = A_i \cap D$ 和$B_{i+1} = B_i \cap C$。

□

如下所示的上界表明，引理 2.1 的下界在绝对常数因子意义下是紧的。

引理 2.2. $d_k^*(n) \leq (1 + o(1))en/2^{2k-1}$.

证明。 我们构造一个由排列 $\pi_1, \ldots, \pi_{2k-1}$ 生成的 k-多数竞赛图 G，它具有以下性质：对于任意两个互不相交的顶点集 A, B ，若它们的大小均为 t，则 A 和 B 在某个 π_i 中不一致。此外， $t \leq (1 + o(1))en/2^{2k-1}$。

我们通过从 S_n 中均匀随机地选取每个 π_i 来生成 G ，且所有 $2k-1$ 的选择相互独立。对于一对给定的、阶为 t 的互不相交顶点集 $\{A, B\}$ ，令 $X(A, B)$ 表示 A 和 B 一致这一事件。我们必须证明，对于所声称的 t 值，存在正概率使得不发生任何形如 $X(A, B)$ 的事件。在 π_i 中， A 和 B 一致的概率为 $2/\binom{2t}{t}$。因此， $\Pr[X(A, B)] = (2/\binom{2t}{t})^{2k-1}$。于是，对所有可能的配对 $\{A, B\}$ 求和可得

$$\begin{aligned}\sum_{\{A,B\}} \Pr[X(A,B)] &\leq \frac{1}{2}\binom{n}{t}\binom{n-t}{t}\left(\frac{2}{\binom{2t}{t}}\right)^{2k-1} \\ &\leq \left(\frac{en}{t}\right)^{2t}\left(\frac{1+o(1)}{4}\right)^{t(2k-1)} < 1\end{aligned}$$

其中，最后一个严格不等式对所有 $t \geq (1 + o(1))en/2^{2k-1}$ 均成立。因此，根据并集界，以正概率不存在形如 $X(A, B)$ 的事件。 □

接下来我们讨论 $d_k(n)$。回顾一下，它是满足以下条件的最大整数 t：每个含有 n 个顶点的 k-多数竞赛图都包含两个阶为 t 的不相交集合 A和 B ，使得 A多数支配 B。我们对 $d_k(n)$的下界是对 $d_k^*(n)$的下界的 $\Theta(\sqrt{k})$倍。

引理 2.3。 设 G 是一个含有 n 个顶点的 k-多数竞赛图。那么， $V(G)$ 可以划分为 $2\binom{2k-1}{k}=\binom{2k}{k}$ 个两两不相交的部分 $\{A_s,B_s\}$，其中 $s=1$，……，$\binom{2k-1}{k}$，使得 A_s 多数支配B_s 和 $||A_s|-|B_s||\le 1$。特别地，

$$b_k(n)\ge d_k(n)\ge\left\lfloor\frac{n}{\binom{2k}{k}}\right\rfloor\ge\left\lfloor\sqrt{\pi(k-1)/4}\cdot\frac{n}{2^{2k-1}}\right\rfloor .$$

证明。 对于一个二进制向量 t，令 t^i 表示其长度为 i 的前缀，令 $t(i)$ 表示其第 i 个坐标，并令 t 表示其对跖向量。

假设 π_1，…，π_{2k-1} 生成了 G。我们为每个 $v\in V(G)$ 关联一个类型，该类型是长度为 $2k-1$ 的二进制向量 t_v，其定义如下。我们要求，对于每个长度为 i 的二进制向量 s，满足 $t_v^i=s$ 的顶点 v 的集合的基数与满足 $t_v^i=s$ 的所有顶点的集合的基数之差至多为 1。现在我们归纳地定义 t_v 的坐标。 π_1 中前 $\lfloor n/2\rfloor$ 个位置上的所有顶点 v 都满足 $t_v(1)=0$，其余顶点则满足 $t_v(1)=1$。注意，对于长度为 $i=1$ 的情形，基数条件成立。假设我们已经定义了所有顶点类型的前 i 个坐标。下面说明如何定义第 $(i+1)$ 个坐标。对于一个长度为 i 的二进制向量 s，令 A_s 为所有满足 $t^i(v)=s$ 的顶点 v 组成的集合，令 B_s 为所有满足 $t^i(v)=s$ 的顶点 v 组成的集合。根据归纳假设， $||A_s|-|B_s||\le 1$。令 σ 表示 π_{i+1} 在 $A_s\cup B_s$ 上的限制。令 C 为 σ 中前 $|A_s|$ 个位置上的顶点，令 D 为其余 $|B_s|$ 个位置上的顶点。所有 $v\in C$ 都满足 $t_v(i+1)=0$，所有 $v\in D$ 都满足 $t_v(i+1)=1$。由此定义了第 $(i+1)$ 个坐标。注意，对于长度为 $i+1$ 的情形，基数条件也成立。

定义了类型后，我们看到 $V(G)$ 可以根据类型划分为 2^{2k-1} 个部分。不过，我们可以采用更粗略的划分。我们归纳地定义一个二进制向量集合 Q。其中的元素长度从 k 到 $2k-1$ 不等。 Q 中长度为 k 的向量只有全零向量和全一向量。假设我们已经定义了 Q 中所有长度为 $k+i-1$ 的向量。长度为 $k+i$ 的向量 s，若至少有 k 个 1，或至少有 k 个 0，且其前缀 s^{k+i-1} 尚不属于 Q，则它属于 Q。注意， Q 中长度为 $k+i$ 的向量数为 $2\binom{k-1+i}{i}$，因此 $|Q|=\binom{2k}{k}$。此外，如果 $s\in Q$，那么 $s\in Q$。还要注意，每个长度为 $2k-1$ 的二进制向量都有一个前缀属于 Q。

我们的较粗划分将依据 Q 中的元素进行。对于一个至少含有 k 个零的向量 $s\in Q$，令 A_s 为所有类型以前缀 s 开头的顶点所组成的集合。类似地，定义 B_s 为所有类型以前缀 s 开头的顶点所组成的集合。注意，根据我们构造类型的方式，$||A_s|-|B_s||\le 1$，并且显然 A_s 多数支配 B_s。

□

通过与引理 2.2 中完全相同的随机构造，可以证明 $d_k(n)$ 的一个上界，因此证明过程也类似。由此得到以下引理，其证明从略。

引理2.4。 $d_k(n)\le(1+o(1))en/2^k$。 □

有趣的是，引理 2.3 给出的 $b_2(n)$ 的下界是渐近紧的。在证明这一点之前，我们先回顾字典序图积（在我们的情形下即竞赛图积），它

也将在后续结果中发挥作用。给定两个锦标赛 G_1 和 G_2，令 $H = G_1 \circ G_2$ 为顶点集 $V(G_1) \times V(G_2)$ 上的竞赛图，其中若 $v_1 \neq v_2$ 且 $(v_1, v_2) \in E(G_2)$，或若 $v_1 = v_2$ 且 $(u_1, u_2) \in E(G_1)$，则 (u_1, v_1)，(u_2, v_2) 是一条边。（注意，字典序积一般来说并不满足交换律。）对于竞赛图 G，我们用 $G^r = G^{r-1} \circ G$ 表示 G 的 r 次幂。不难看出，如果 G 是一个 k-多数竞赛图，那么 G^r 也是（见 [11] 命题 3.2 ）。

引理 2.5. $b_2(n) = (1 + o(1))n/6.$

证明。由引理 2.3，$b_2(n) \geq \lfloor n/6 \rfloor$。对于上界，我们证明，对每一个为 7 的幂的 n，都有 $b_2(n) = (n-1)/6$。该结果随即由 $b_2(n)/n$ 有极限这一事实得出。

设 P表示顶点集 $\{1, \ldots, 7\}$ 上的帕利竞赛图，它也是七个顶点上唯一不含 T_4 作为子图的（正则）竞赛图。众所周知，P，从而 P^r，是一个 2-多数竞赛图（见 [1]）。我们证明，使 P^r 具有 T_t,$_t$ 的最大 t 为 $t = (7^r - 1)/6$。注意到这对 $r = 1$ 成立，因为一个竞赛图具有 T_2,$_2$ 当且仅当它具有 T_4 且 P 不含 T_4。现在考虑具有 7^r 个顶点的 $P^r = P^{r-1} \circ P$。因此，P^r 的顶点集有七个部分 $V_1, \ldots, V_7$，其中由对 V_i, V_j 诱导的二部子竞赛图是一个 $T_{7^{r-1},7^{r-1}}$，其中所有边从 V_i 指向 V_j 当且仅当 $(i, j) \in E(P)$。此外，由每个 V_i 诱导的子锦标赛是 P^{r-1}。由归纳法，使 P^{r-1} 具有 T_t,$_t$ 的最大 t 为 $t = (7^{r-1} - 1)/6$。

现在，考虑 T_t,$_t$ 中的某个 P^r，并令其部分为 A, B。令 $X = \{i | A \cap V_i \neq \emptyset\}$ 且 $Y = \{i | B \cap V_i \neq \emptyset\}$。若 $|X| = 1$，则 $t = |A| \leq 7^{r-1} \leq (7^r - 1)/6$，结论即得。类似地，若 $|Y| = 1$，则 $t = |B| 7^{r-1} \leq (7^r - 1)/6$，结论即得。因此，我们可以假设 $|Y| \geq |X| \geq 2$。不失一般性，假设所有边都从 A 指向 B。设 $u, v \in X$。由于 P 没有 T_4，P 中任意两个顶点 u, v 至多有一个公共出邻点，记为 w。因此，$Y \subseteq \{w, u, v\}$。然而，u, v 不可能同时属于 Y，否则并非所有边都从 A 指向B。因此，必有 $|Y| = 2$，从而 $X = \{u, v\}$，且 $Y = \{w, u\}$ 或 $Y = \{w, v\}$。若 $Y = \{w, u\}$，则根据归纳假设，A 和 B 中至少有一个所含的 u 顶点不超过 $(7^{r-1} - 1)/6$。类似地，若 $Y = \{w, v\}$，则 A 和 B 中至少有一个所含的 v 顶点不超过 $(7^{r-1} - 1)/6$。无论哪种情况，这都意味着

$$t \leq 7^{r-1} + (7^{r-1} - 1)/6 = (7^r - 1)/6 .$$

□

我们的下一个结果是对 $b_k(n)$ 的一个上界。尽管我们对 $d_k^*(n)$ 和$d_k(n)$ 的上界和下界关于 k 都是指数级小量，但我们对 $b_k(n)$ 的上界关于 k 仅呈线性。

引理 2.6。存在一个绝对常数 c，使得 $b_k(n) \leq cn/k$。

证明。Erd˝os 和莫泽的一项结果 [5]表明，最大的 q 使得每个具有q 个顶点的竞赛图都是 k-多数竞赛图，满足 $q = \Omega(k \log k)$。事实上，正如斯特恩斯 [15]所证明的，$q = \Theta(k \log k)$。考虑一个在 q 个顶点上的随机竞赛图 G。这是一个标准的概率论

论证，用以证明 G 没有$T_{b+1,b+1}$，其中 $b = O(\log q) = O(\log\ k)$，因此我们固定这样一个竞赛图$G$。注意到$(q-1)/b \geq ck$，其中 c是某个绝对正常数。

我们证明，对每一个作为 q的幂的 n，都有 $b_k(n) \leq b(n-1)/(q-1)$。定理中所述结果随后由 $b_k(n)/n$ 存在极限这一事实得出。该证明推广了引理 2.5中的论证。我们证明，使得 G^r 具有$T_{t,t}$的最大 t为 $t = b(q^r-1)/(q-1)$。注意到这对 $r = 1$ 成立，因为 G 没有$T_{b+1,b+1}$。现在考虑具有q^r 顶点的 $G^r = G^{r-1} \circ G$。因此， G^r的顶点集有 q个部分 $V_1, \ldots, V_q$，其中由对 V_i, V_j 诱导的二部子竞赛图是一个$T_{q^{r-1},q^{r-1}}$，且所有边从 V_i 指向 V_j 当且仅当$(i,j) \in E(G)$。此外，由每个 V_i 诱导的子锦标赛是 G^{r-1}。由归纳法，使得G^{r-1} 具有$T_{t,t}$ 的最大 t为 $t = b(q^{r-1}-1)/(q-1)$。

现在，考虑某个 $T_{t,t}$ in G^r，并令其各部分为 A, B。令 $X = \{i | A \cap V_i \neq \emptyset\}$ 和 $Y = \{i | B \cap V_i \neq \emptyset\}$。若 $|X| \leq b$，则 $t = |A| \leq bq^{r-1} \leq b(q^r-1)/(q-1)$，结论成立。类似地，若 $|Y| \leq b$，则 $t = |B| \leq bq^{r-1} \leq b(q^r-1)/(q-1)$，结论成立。因此，不妨设 $|Y| \geq |X| \geq b+1$。不失一般性，假设所有边都从 A 指向 B（否则可考虑 G的转置）。设 $u_1, \ldots, u_{b+1} \in X$。由于 G 没有 T_{b+1}，顶点 $u_1, \ldots, u_{b+1}$ 在 G 中至多有 b 个共同出邻点，设它们为 $w_1, \ldots, w_b$。因此，$Y \subseteq \{w_1, \ldots, w_b, u_1, \ldots, u_{b+1}\}$。然而，对于不同的 i, j，我们不可能同时有 u_i, u_j属于 Y，否则并非所有边都从 A 指向 B。因此，必有 $|Y| = b+1$，进而 $X = \{u_1, \ldots, u_{b+1}\}$ 和某个 j的 $Y = \{w_1, \ldots, w_b, u_j\}$。由归纳假设， A 或 B 中至少有一个不能包含超过 $b(q^{r-1}-1)/(q-1)$ 个 u_j的顶点。这意味着

$$t \leq bq^{r-1} + b(q^{r-1}-1)/(q-1) = b(q^r-1)/(q-1)\ .$$

□

我们注意到，在引理 2.6 中，重要的是使用 Erd˝os 与莫泽关于最大 q 的 $\Omega(k \log k)$ 界，使得每个具有 q 顶点的竞赛图都是一个 k-多数竞赛图。使用较弱的界，例如更容易证明的 $q = \Omega(k)$，对 $b_k(n)$ 只能给出关于 $1/k$ 的次线性界。

引理 2.7. 定理 *1.2* 中所述的所有极限均存在。

证明. 我们证明 $\lim_{n\to\infty} b_k(n)/n$ 存在。其他极限的证明与此类似，且更为简单。设 $s_k =$ 下极限 $_{n\to\infty}\, b_k(n)/n$。设 $\epsilon > 0$。我们必须证明，对所有充分大的 n，有 $b_k(n) \leq (\epsilon + s_k)n$，因为这将证明上极限$_{n\to\infty}\, b_k(n)/n \leq s_k + \epsilon$，从而该极限存在。

因此，设给定 $\epsilon > 0$。根据下极限的定义，存在无穷多个正整数q，使得对每一个这样的 q，都存在一个具有 q 个顶点的 k-多数竞赛图 G，其中G 的最大$T_{b,b}$ 满足 $b \leq (s_k + \epsilon/2)q$。因此，我们还可以额外要求 $q \geq 2(s_k+\epsilon)/\epsilon$。

现在假设 $n > q$。令 r 为满足 $q^r \geq n$ 的最小整数，因此 $q^{r-1} \leq n$。考虑竞赛图 G^r。它是一个 k-多数竞赛图，并且正如引理 2.6 所证明的， G^r 的最大传递平衡二部竞赛图在每个部分中至多有 $b(q^{r-1}-1)/(q-1)$ 个顶点

因此，

$$b_k(n) \le b_k(q^r) \le b\frac{q^{r-1}-1}{q-1} \le \frac{b}{q-1}n \le \frac{(s_k+\epsilon/2)q}{q-1}n \le (\epsilon+s_k)n\ .$$

□

最后请注意，本节证明的所有引理共同证明了定理 1.2。 □

3 传递子锦标赛

我们通过以下引理建立 $f_k(n)$ 的下界。

引理 3.1. $f_k(n) \ge n^{1/(2k-\frac{1}{2}\log_2^- k)}$.

证明。 我们的证明基于递归地应用二部参数$b_k(n)$的下界。我们注意到， [3]中也采用了类似的方法。证明通过对 n 进行归纳法完成，其中基例显然对 $n = 1$ 成立。假设该结论对小于 n 的值成立，并令 G 为一个有 n 个顶点的 k-多数竞赛图。根据引理 2.3， G 包含一个$K_{t,t}$ ，满足$t \ge \lfloor\sqrt{\pi(k-1)/4\cdot\frac{n}{2^{2k-1}}}\rfloor$，因此特别地，对所有 $n \ge 2$ 都有 $t \ge \sqrt{k}n/2^{2k}$（因为我们总可以假设 $t \ge 1$）。设这种$K_{t,t}$的各部分为 A, B。根据归纳假设， $G[A]$ 和$G[B]$ 各自都含有一个 T_s，满足 $s \ge t^{1/(2k-\frac{1}{2}\log_2 k)}$。这两个 T_s 子锦标赛的并集是在 G 中的一个 T_{2s}，并且有

$$2s \ge 2t^{1/(2k-\frac{1}{2}\log_2 k)} \ge 2(\sqrt{k}n/2^{2k})^{1/(2k-\frac{1}{2}\log_2 k)} \ge n^{1/(2k-\frac{1}{2}\log_2 k)}\ .$$

□

引理 3.2. $\lim_{n\to\infty}\log_n f_k(n)$ 存在。

证明。 令 $s_k = \liminf_{n\to\infty}\log_n f_k(n)$。令 $\epsilon > 0$。我们必须证明，对于所有 n 充分大的$f_k(n) \le n^{\epsilon+s_k}$，因为这将证明 $\limsup_{n\to\infty}\log_n f_k(n) \le s_k+\epsilon$，从而极限存在。

因此，设给定 $\epsilon > 0$。根据下极限的定义，存在一个正整数 q 和一个k-多数竞赛图 G，其有 q 个顶点，其中最大的 T_t 个 G 具有 $t \le q^{s_k+\epsilon/2}$。

设 $N = q^{1+2s_k/\epsilon}$，并假设 $n > N$。令 r 为满足 $q^r \ge n$ 的最小整数，因此 $q^{r-1} \le n$。考虑竞赛图 G^r。它是一个 k-多数竞赛图，且 G^r 的最大传递子锦标赛恰有 t^r 个顶点。因此，

$$f_k(n) \le f_k(q^r) \le t^r \le (q^r)^{s_k+\epsilon/2} \le (qn)^{s_k+\epsilon/2} \le n^{s_k+\epsilon}$$

其中在最后一个不等式中，我们用到了 $n \ge q^{1+2s_k/\epsilon}$。 □

引理 3.1 和 3.2 合起来推出定理 1.1。 □

4 随机2-多数竞赛图中的传递集

本节证明命题 1.3。我们的主要工具是 [4] 的定理 1.6，为此我们需要引入一些记号和定义。阶为 n 的 d 维二进制矩阵（下文简称 (d,n)-矩阵）是一个从 $[n]^d$ 到 $\{0,1\}$ 的函数。(d,n)-置换矩阵是满足以下条件的 (d,n)-矩阵：对于每个 $j \in [d]$ 和每个 $i \in [n]$，将第 j 维限制为 i 后得到的 $(d-1,n)$-矩阵中，除一个元素外，其余元素均为零。请注意，通常的 n-置换矩阵就是 $(2,n)$-置换矩阵。对于一个 (d,n)-矩阵 A 和一个 (d,k)-置换矩阵 P，如果存在 d 个严格递增的 k-序列，它们包含于 $[n]$，$s_i = (s_{i,1}, \ldots, s_{i,k})$（其中 $i \in [d]$），并且若 $A(s_{1,j_1}, s_{2,j_2}, \ldots, s_{d,j_d}) = 1$，则 $P(j_1, \ldots, j_d) = 1$，我们就称 A 包含模式 P。否则，我们称 A 避免模式 P。对于一个固定的 (d,k)-置换矩阵 P，令 $S_P(n)$ 表示避免 P 的 (d,n)-置换矩阵的数量。Cibulka 和 Kynˇcl [4] 将 Marcus 和 Tardos 的著名定理 [9]（该定理又推出了 Stanley-Wilf 猜想，即对于一个 $(2,k)$-置换矩阵 P，$S_P(n) \le c_P^n$）推广到更高维，并证明了以下结果：

引理 4.1. *[[4], 定理 1.6]* 对每一个 d、$k \ge 2$ 以及每一个 (d,k)-置换矩阵 P，我们有

$$n^{-O_d(k)} \left(\Omega_d\left(k^{1/(2^{d-1}(d-1))}\right)\right)^n \cdot (n!)^{d-1-1/(d-1)} \le S_P(n) \le \left(2^{O_d(k)}\right)^n \cdot (n!)^{d-1-1/(d-1)}.$$

对于 $G \sim \mathcal{G}(n,2)$，令 p_n 为 $G = T_n$ 的概率（即 G 是一个传递的竞赛图）。由于顶点重新标记不影响 p_n，$\mathcal{G}(n,2)$ 的每个元素对应于一对 n-排列 (π_1, π_2)，而 G 则通过从 $(n!)^2$ 个可能的对中均匀随机选取一个，并由三元组 $(\mathrm{id}\ \pi_1, \pi_2)$ 构造 2-多数竞赛图而得到。因此，若 $|F(n)|$ 表示使相应的 G 为传递的那些对 (π_1, π_2) 所成的集合，则我们有 $p_n = |F(n)|/(n!)^2$。现在假设对于 $a < b < c$，（单行记号下的）π_1 包含 b, c, a 作为子串，且 π_2 包含 c, a, b 作为子串。则 G 在顶点 a, b, c 上包含一个有向三角形，因此 $(\pi_1, \pi_2) \notin F(n)$。令 $F^*(n)$ 为这样的对 (π_1, π_2) 的集合：对任意 $a < b < c$，π_1 不包含 b, c, a 作为子串，否则 π_2 不包含 c, a, b 作为子串。因此我们有 $F(n) \subseteq F^*(n)$。考虑 $(3,3)$-置换矩阵 P，其中 $P(1,2,3) = 1$、$P(2,3,1) = 1$ 以及 $P(3,1,2) = 1$，并考虑某个 $(3,n)$-置换矩阵 A。注意，A 借助 $A[i,j,k] = 1$ 双射到一对 (π_1, π_2)，这意味着 i 出现在 π_1 的第 j 位以及 π_2 的第 k 位。此外，A 避免模式 P 当且仅当相应的 $(\pi_1, \pi_2) \in F^*(n)$，因此 $S_P(n) = |F^*(n)|$。由引理 4.1 可得，对某个常数 C，有 $|F(n)| \le C^n (n!)^{1.5}$，从而 $p_n \le C^n (n!)^{-1/2}$。

利用 p_n 的这个上界，现在我们可以完成命题 1.3 的证明。令 m 为一个参数（依赖于 n），稍后再适当选取。考虑 $G \sim \mathcal{G}(n,2)$，其中 G 由排列 $(\mathrm{id}\ \pi_1, \pi_2)$ 生成。令 $A \subset [n]$ 满足 $|A| = m$，并考虑子锦标赛 $G[A]$，注意到 $G[A] \sim \mathcal{G}(m,2)$。因此，$G[A]$ 是传递的概率为 $p_m \le C^m (m!)^{-1/2}$

其中我们显然可以假设 $C \geq 1$。由并集界，

$$\Pr[X(n,2) > m] \leq \binom{n}{m} C^m (m!)^{-1/2} .$$

利用 $m = Cen^{2/3}$，我们有

$$\begin{aligned}
\Pr[X(n,2) > Cen^{2/3}] &\leq \binom{n}{Cen^{2/3}} C^{Cen^{2/3}} ((Cen^{2/3})!)^{-1/2} \\
&\leq n^{\frac{1}{3}Cen^{2/3}} (Cn^{2/3})^{-Cen^{2/3}/2} \\
&= (C^{-Ce/2})^{n^{2/3}}
\end{aligned}$$

因此，$X(n,\ 2) > Cen^{2/3}$ 的概率随 $n^{2/3}$ 呈指数级减小，这意味着 $\mathbb{E}[X(n,\ 2)] = O(n^{2/3})$，符合要求。 □

致谢

作者感谢 Noga Alon 提供有益的讨论，并感谢 Matthew Kwan 指出可以利用 [4] 中的结果来得到命题 1.3。

参考文献

[1] N. Alon、G. Brightwell、H. A. Kierstead、A. V. Kostochka 和 P. Winkler。k多数竞赛图中的支配集。组合理论杂志 *B* 辑，96(3):374–387，2006。[2] N. Alon 和 W. Maass。蜿蜒曲线、拉姆齐理论与分支程序的下界。载于第 *27* 届计算机科学基础年会（*FOCS*），第 410–417 页。IEEE，1986。[3] N. Alon、J. Pach、R. Pinchasi、R. Radoiˇci´c 和 M. Sharir。半代数集合的交叉模式。组合理论杂志 *A* 辑，111(2):310–326，2005。[4] J. Cibulka 和 J. Kynˇcl。排列的 f¨uredi-hajnal 界的更优上界。载于第二十八届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集（*SODA*），第 2280–2293 页。SIAM，2017。[5] P. Erd˝os 和 L. Moser。论将有向图表示为全序的并。匈牙利科学院数学研究所，9:125–132，1964。[6] P. Erd¨os 和 A. Hajnal。拉姆齐型定理。离散应用数学，25(1-2):37–52，1989。[7] M. B. Garman 和 M. I. Kamien。投票悖论：概率计算。行为科学，13(4):306–316，1968。

[8]G. T. Guilbaud。关于一般利益的理论与聚合的逻辑问题。*Economie Appliqu´e*，5:501–584，1952。[9] A. Marcus 和 G. Tardos。禁排列矩阵与斯坦利–威尔夫猜想。组合理论杂志 *A* 辑，107(1):153–160，2004。[10] D. C. McGarvey。关于构造投票悖论的一个定理。《计量经济学》，21(4):608– 610，1953。[11] K. G. Milans、D. H. Schreiber 和 D. B. West。 k多数竞赛图中的无环集。《电子组合学杂志》，18(1):122，2011。[12] R. Morris。拉姆齐理论中的一些近期结果。*arXiv* 预印本 *arXiv:2601.05221*，2026。[13] E. Mossel。函数噪声相关性的高斯界。《几何与泛函分析》，19(6):1713–1756，2010。[14] T. Nguyen、A. Scott 和 P. Seymour。诱导子图密度。vi. 有界 VC 维数。《数学进展》，482:110601，2025。[15] R. Stearns。投票问题。《美国数学月刊》，66(9):761–763，1959。