认知不确定性框架的范畴化形式化

Torgeir Aambø挪威国防研究院（*FFI*）

arXiv:2603.04188v1 [math.CT] 4 Mar 2026

摘要

当我们对系统状态缺乏完备的认识时，就会产生认知不确定性。用于定量测量此类不确定性的数学框架有多种，通常称为非精确概率理论。**受 Opdan 的研究启发，我们提出认知演算的一般范畴论定义，并以此为基础，对若干哲学认识论概念之间的矛盾与协同效应进行建模和研究。我们进一步发展了一种用于改变演算系统的富范畴论过程，并借此研究现有实例之间的关系，例如可能性理论与确定性因子。最后，我们提出一种基于富结构变化的信念更新一般范畴形式，并证明贝叶斯更新和可能性条件化都是其特例。**

1 引言

任何现实世界中的测量都包含一定程度的不确定性，而且准确理解某项测量或陈述究竟有多大的不确定性，往往至关重要。不确定性可以是偶然的，也可以是认知的。前者与系统固有的随机性有关，后者则源于对相关系统缺乏完备的认识——本文关注的正是后一种不确定性。

我们的目标是将不确定性的数学句法与其语义分离，并以抽象方式定义我们所称的不确定性演算。受[Opd25], 的启发，Opdan 为确定性因子以及一般的 t 模糊逻辑中的 - 范数 [Zad65；KMP00], 我们以对称幺半偏序范畴为理论基础，从而能够更精确地研究这类不确定性演算所体现的代数性质和序理论性质。结合确定性因子，我们在这一框架中形式化了可能性理论、双极可能性理论和区间概率。

认识论是研究知识本质的领域，其中既有大量哲学观点上的分歧，也涵盖范围广泛的理论。我们运用形式化方法对其中一些立场进行建模——封闭性、强保守性、可错性、消去性、乐观主义、怀疑主义 和 幂等性 ——借此不仅能根据不同认知演算系统的哲学立场与态度对其进行公理化比较，还能研究这些哲学立场之间的相互作用。

定理 A. 若 $\mathcal{V}$ 是一种不确定性演算系统，则 $\mathcal{V}$ 不可能同时具有封闭性、保守性和消去性。此外，若 $\mathcal{V}$ 是完备的，则封闭性等价于可错性。

在分别考察不确定性演算系统的这些公理性质后，我们转而关注不同演算系统之间的关系层面。我们利用松弛幺半函子和反松弛幺半函子 $F\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ 对演算系统的保守变化和宽松变化进行建模，前者不会通过融合产生确定性，后者则不会通过融合丢失确定性。借助这些函子，我们比较了四个例子，并证明例如双极可能性理论与区间概率理论作为认知演算是等价的。

在对句法层有了一定了解后，我们运用富化范畴论构建一种通用方法，将认知演算应用于需要测量不确定性（即语义层）的系统中。这种富化方法与 [BTV22], 的方法类似，作者在其中为大语言模型（LLM）建立了一个富化范畴论基础。这使我们能够运用 [Kel82]中的方法来建模演算变换 函子；这种函子保持语义层不变，只改变不确定性量化的句法层。

贝叶斯更新由于其非对称性，

不在上述理论的涵盖范围内。为了解决这一问题，我们在认知演算 $\mathcal{V}$ 中形式化了更新 的一般形式，并证明这些形式推广了熟悉的概念。

定理 B。 设 $\mathcal{H}$ 是一个以认知演算 $\mathcal{V}$为富化结构的假设范畴。若 $\mathcal{V}$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的标准偏序集，并配有乘法，则 $\mathcal{V}$-更新就是贝叶斯更新的赔率形式。若 $\mathcal{V}$ 是可能性理论，则 $\mathcal{V}$- 更新可还原为 *Dubois–Prade* 的可能性条件化 *[DP90]*。

值得指出的是，我们研究不确定性演算的方法，很大程度上是站在巨人的肩膀上。我们的目标并非建立一套最终理论，而只是为现有思想贡献一种新的视角，并将哲学与数学思想同范畴论概念联系起来。

2 范畴论

范畴由 Eilenberg–MacLane 于[EM45] 中引入——标准参考文献之一是 [Mac98] ——并作为一种高度一般且灵活的结构，用于研究整个数学领域中的关系概念。一个范畴 $\mathcal{C}$ 由一类对象$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$和一类态射$\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$组成，这些态射连接对象。每个对象都有一个恒等态射，而态射的复合满足自然的结合律和恒等条件。一个经典例子是集合范畴，它由所有集合及其映射构成。

一个函子 F 介于范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 之间，将 $\mathcal{C}$ 中的任意对象指派为 $\mathcal{D}$中的一个对象，并将 $\mathcal{C}$中的任意态射指派为 $\mathcal{D}$中的一个态射，且保持恒等态射与复合。

我们也可以为范畴配备额外结构。例如，一个对称幺半范畴 是范畴$\mathcal{C}$ 连同一个二元运算

$$-\otimes_{\mathcal{C}}-\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$$

以及一个单位对象 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$，满足自然的单位律、结合律与对称性条件。我们通常将其写成元组 $(\mathcal{C},\otimes_{\mathcal{C}},\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$。

如果两个对称幺半范畴 $(\mathcal{C},\ \otimes_{\mathcal{C}},\ \mathbb{1}_{\mathcal{C}})$ 和 $(\mathcal{D},\ \otimes_{\mathcal{D}},\ \mathbb{1}_{\mathcal{D}})$ 之间的函子 F 对所有对象 $x,\ y\in\mathcal{C}$ 都存在自然等价 $F(x\otimes_{\mathcal{C}}y)\ \cong\ F(x)\ \otimes_{\mathcal{D}}\ F(y)$，则称其为对称幺半函子 。

2.1 Opdans CFcategory

Opdan 在 [Opd25] 中定义了一个范畴，其对象是区间 $(-1,\ 1)$ 中的实数，态射则由自然全序 $\leqslant$决定。更确切地说，对于任意两个对象 x 和 y，也就是区间 $(-1,\ 1)$中的两个数，如果 $x\longrightarrow y$，则存在唯一一个态射 $x\leqslant y$；否则不存在态射。

其解释是：该范畴中的一个对象表示对某一陈述的信念强度；0 表示完全的认知不确定性，1 表示真信念，而-1 表示真不信念。

它通过双曲和被赋予对称幺半结构。

$$x\otimes y=\frac{x+y}{1+xy},$$

这使得信念可以组合或融合。

注记 2.1. 双曲和，也称为爱因斯坦 t-余范数，在物理学中用于相加相对论速度，参见例如 [PJW25]。

Opdan 将该运算写作

$$x\otimes y=\varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y)),$$

其中 φ 是由$\varphi(x)\ =\ \frac{1+x}{1-x}$ 给出的双射 $(-1,\ 1)\ \longrightarrow(0,\ \infty)$。由于实数乘法的性质，对称幺半结构显然既具有交换性，也具有结合性。此外，幺半单位是 0，这在直觉上说得通，因为添加完全认知不确定性的信息不应改变信念值。

请注意，如果 $x\leqslant x'$且 $y\leqslant y'$，那么 $x\otimes y\leqslant x'\otimes y'$，这可由 φ的单调性以及实数乘法看出。这使该范畴成为对称幺半偏序集 ，其含义见 [FS19]。

还要注意，我们可以在这个范畴中撤销克伦威尔定律——该定律最初由 Lindley 在 [Lin91]中提出——只需添加两个极端值 -1 和1，从而得到完整的闭区间 $[-1,1]$。为使其与幺半结构相容，我们规定 $-1\otimes 1=0$。

我们将 CF 定义为上述范畴，并加入极值 -1 和 1。现在我们以此为模板，给出一个一般定义。

3 认知演算

根据上述 CF 的性质，我们现在可以给出一个一般定义。认知演算 是一个（非平凡的）幺半对称偏序范畴 $(\mathcal{V}, \leqslant_{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{V}}, \mathbb{1}_{\mathcal{V}})$。当范畴明确时，我们通常省略下标。我们将 $(\mathcal{V}, \leqslant, \otimes, \mathbb{1})$ 解读为： $\mathcal{V}$ 中的对象是认知值，态射表示值之间的比较，幺半积表示值融合——幺半单位 $\mathbb{1}$ 则表示完全的认知不确定性。

注释 3.1. 这个定义只是对 t单位区间上的 - 范数 $[0,1]$, 的抽象，参见 [KMP00]。这里我们也将讨论范围限定于对称结构，以便对证据融合而非更新进行建模；更新将在第4.2节中重点讨论。

3.1 示例

承接上一节的思路，我们将在抽象框架中介绍一些已知的示例。

可能性理论
可能性理论由 Zadeh 提出，见 [Zad78],随后由 Dubois–Prade 进一步拓展，参见[DP88]或综述 [DP 15]。可能性理论可以看作概率论的一种形式：它将 $\mathbb{R}$ 上的标准环结构替换为热带最大加或最小加半环结构——参见 [Cun79] 对这一理论的早期介绍，以及 [Pin98] 提出的现代化方法。

可能性理论为给定假设 H 赋予一个值 $P(H) \in [0,1]$，用于衡量该假设的可能程度。值为 0 表示该假设不可能，值为 1 则表示该假设完全可能。融合定义为 $P(H_1 \cup H_2) = \min(P(H_1)\ P(H_2))$。另一个参数称为必然性，定义为$N(H) = 1 - P(\neg H)$，用于衡量该假设的必然程度。

去除与假设和语义的联系后，我们将范畴 PT 定义为单位区间 $[0,1]$ 上的标准预序范畴。我们赋予该范畴如下幺半结构：

$$x \otimes y = \min(x, y).$$

因此，幺半单位为 1，这恰当地将完备的认知不确定性等同于纯粹的可能性。

熟悉可能性理论的读者可能会想知道，必然性值在此处如何发挥作用。然而，由于必然性要求对假设应用否定算子 $\neg$，它必然是一种语义操作，因此不属于此处呈现的句法结构。

将必然性类型纳入句法结构的一种方法是使用双极可能性理论。

双极可能性理论
双极可能性理论，参见 [Ben+06]和 [DLP13],是可能性理论的一种扩展。它引入了第二组算子，因此共有四个算子：P， N， Δ 和 ∇。它们依次称为 强可能性、弱必然性、弱可能性 和强必然性。此处我们只关注强算子。

我们将 PT_{bi} 定义为一个范畴，其对象为 $\{(x,\ x') \in I \times I \mid x \leqslant x'\}$。这被解释为 x 衡量拒绝程度，或假设的保证不可能性，而 x' 衡量潜在可能性的程度。态射由以下预序决定：

$$(x, x') \leqslant (y, y') \text{ if } x \geqslant y \text{ and } x' \leqslant y'.$$

我们为 PT_{bi} 赋予如下定义的对称幺半结构：

$$(x, x') \otimes (y, y') = (\max(x, y), \min(x', y')).$$

该结构满足结合律，具有对称性，且单位元为 $(0,\ 1)$。这是正确的认知解释——它既未被拒绝，又完全可能；这也可以说是完全的认知不确定性。

双极可能性理论使我们得以保留这样一个特点：对假设的信念与不信彼此独立，而非一视同仁——不信并非仅仅是缺乏信念；或者如萨根广为传播的那句话所说：“证据缺失并不意味着缺失证据” [萨根97]。

区间概率
另一种认知演算源自基于区间的概率，这是对概率中不确定性的一种解释。此处我们采用一个非常简单的版本——与 Walley 等人的方法相比 [Wal91] ——并使用交算子作为幺半结构。

令 IP 为一个对称幺半范畴，其对象为 $I = [0,1]$ 的非空闭子区间。态射由包含预序确定，

$[x,x'] \leqslant [y,y']$ 若 $[x,x'] \subseteq [y,y']$，而对称幺半结构由下式给出

$$[x,x'] \otimes_{\mathrm{IP}} [y,y'] = [x,x'] \cap [y,y'].$$

幺半单位是完整区间 $[0,1]$。其解释是，区间概率是不确定的概率，而真实概率位于该区间的某处。区间越大，包含这一真实值的可能性就越高，因此 $\mathbb{1} = [0,1]$ 仅表示我们对该假设的真实概率一无所知。

注记 3.2。这里一个自然的补充选项是邓普斯特-谢弗理论 [Dem67; Sha76]。不过，我们目前尚不清楚如何在本文提出的框架中实现这一点，因为 DS 理论的运作方式略有不同。我们计划在后续工作中研究 DS 理论的范畴化版本。

3.2 扩展与性质

有了这些例子，我们便可以开始为一般定义添加额外结构。具体做法是加入可添加到认知演算中的额外公理。请注意，这些公理并非由一般定义自动推出。

E1： 存在一个元素 $\top \in \mathcal{V}$，使得 $x \leqslant \top$对所有 x均成立。

满足 **E1** 的认知范畴称为 乐观主义的。如果不存在这样的顶元素，则称为怀疑论的。这些定义融合了 认识论乐观主义 与彻底怀疑论这两种哲学立场，参见 [Has04; Net97],以及克伦威尔定律 [Lin91]。

对此的一个扩展是要求 $\mathcal{V}$ 具有所有并，这相当于对具有所有上确界这一要求的推广。

E2： 给定对象的一个子集 $S \subseteq \mathcal{V}$，存在一个最小上界 $\bigvee S$，称为 S 的并。

根据 [FS19，2.72] 任何具有所有并的认知演算也具有所有交，从而使其成为一个对称幺半格。满足 **E2** 的认知演算称为 完备的。若 $\mathcal{V}$是完备的，则它也满足 **E1**，因为 $\top$ 是空集上的交。范畴 CF不难看出是完备的。

在 CF 中，我们注意到，给定对象 x，y 使得 $0 \leqslant x \otimes_{\mathrm{CF}} y$，则 x，y 中至少有一个也必须为非负。这被解释为不可能从原本并不包含确定性的来源中创造出确定性。

E3： 如果 $\mathbb{1}_{\mathcal{V}} \leqslant x \otimes_{\mathcal{V}} y$，则 $\mathbb{1}_{\mathcal{V}} \leqslant x$ 或 $\mathbb{1}_{\mathcal{V}} \leqslant y$。

此外，在 CF 中，请注意，对称幺半积存在一个称为内同态的“逆”。如果认知演算 $\mathcal{V}$ 具有内同态，则存在一个自然的二元运算 $[-,-]$，使得对于所有对象三元组 x、y、z，我们有

$$x \otimes y \leqslant z \iff x \leqslant [y,z].$$

对于 CF，很容易验证双曲减法

$$[x,y] = \frac{x-y}{1-xy}$$

满足这一性质，因此它是一个内同态。这使得CF 构成一个闭对称幺半预序，其意义与 [BTV22]和 [FS19]中的相同。

E4： 对称幺半结构是闭的。

注 3.3。这里需要注意，闭指的是范畴结构，而不是认识论封闭，例如 [Hol15]。

具有内同态等价于对称幺半范畴是自身上的富化范畴 [Kel82，第 1 节。6]。将幺半结构解释为 t-范数的推广，内同态就是剩余的推广，参见 [KMP00]。可能性理论也可通过标准哥德尔蕴涵实现闭合：

$$[x,y] = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ y, & x > y. \end{cases}$$

CF 不满足的一项性质是强认识论保守性。这是一种哲学立场，基本主张是：除非有充分理由改变当前信念，否则坚持现有信念是合理的，[McC08]。这基本意味着，我们将举证责任放在改变信念上，而不是维持信念上。给定一个认知框架 $\mathcal{V}$，我们可以将这一立场的一个非常强的版本建模如下。

E5： 对于所有 $x \in \mathcal{V}$，任意 $y \in \mathcal{V}$ 都有 $x \leqslant x \otimes y$。

直观而言，给定一个认知值 x ，我们绝不会因为将其与另一个认知值 y 融合，而降低对 x 的信念。这类似于现代数字回音室信念动态。值得注意的是，上述保守性的定义相当强；也可以根据反证的强度，定义更细致的版本。

备注 3.4。 本文中的例子没有一个满足**E5** 公理。然而，可能性理论的另一种版本以最大值算子取代最小值算子，即认知演算 $([0,1], \leqslant, \max, 0)$，是 强保守的。

另一个重要的认识论概念（例如 PT 就满足这一概念）是幂等性。这种立场认为，同一来源提供的相同证据不应多次影响一个人对某个陈述的信念。如果我们通过阅读一本书获知了支持某个陈述的证据，就不能通过再次阅读同一本书来增强对该陈述的信念。

E6： 对于所有 $x \in \mathcal{V}$，都有 $x \otimes x = x$。

备注 3.5。 满足 **E6**的认知演算可避免类似于沃格尔的引导论证所引发的问题，[Vog08]。

我们在此考察的最后一个性质是 认识论可错论，这是一种哲学立场，认为当面对矛盾证据或支持相反观点的新论据时，任何人的所有信念都可以更新——例如参见 [Kek72] 或 [Fel81]。简言之，没有任何信念是不可错的。我们可以如下对其建模。

E7： 对于所有 x，$y \in \mathcal{V}$ 都存在一个 $z \in \mathcal{V}$ ，使得 $x \otimes z \leqslant y$。如果 $\mathcal{V}$ 满足 **E1**，那么我们要求这一条件对所有 $x \neq \top$都成立。

注意，当 $x \leqslant y$ 时，我们可以选择 $z = \mathbb{1}$，因此这实际上是在描述如何通过更新信念，得到一个信念程度较弱的事物。

最后，我们加入消去性这一性质，它指出，将相同的证据与两个值融合，不会改变它们的相对强度。

E8： 如果 $x \otimes z \leqslant y \otimes z$，那么 $x \leqslant y$也成立。

认知演算 $\mathcal{V}$具有消去性，意味着其代数结构的表现类似于阿贝尔群。

3.3 不一致性

以这种一般方式定义认知不确定性演算的一个好处是，可以证明各项性质之间的一般关系，并研究哪些哲学立场彼此不相容。

一个不可能性结果如下：满足 **E2** 的认知演算 $\mathcal{V}$ 无法同时满足**E4**、**E5**和**E8**。其思路是，闭合性和消去性迫使否定信念存在，而这与强保守性不相容。

定理 3.6. 一个完备的、非平凡的认知框架 $\mathcal{V}$不可能同时是闭合的、强认知保守的且具有消去性。

证明。 反设 $\mathcal{V}$ 具备这三种性质，并选取对象 x, y 使得$y \leqslant x$。内蕴同态 $[x, y]$ 是集合 $\{z \in \mathcal{V} \mid x \otimes z \leqslant y\}$ 的最小上界，这一点由其定义性质可轻易得出。若 z 属于该集合，则由于 $\mathcal{V}$是强保守的，我们有 $x \otimes z \leqslant y \leqslant y \otimes z$,由消去性可推出 $x \leqslant y$ 。因此，集合$\{z \in \mathcal{V} \mid x \otimes z \leqslant y\}$ 要么为空，从而得到 $[x, y] = \bot$；要么在 $x = y$时仅包含$\mathbb{1}$ 。第一种情况意味着定义公式 $z \otimes x \leqslant y \iff z \leqslant [x, y] = \bot$ 仅对 $z = \bot$成立，这与$\mathcal{V}$的非平凡性矛盾。第二种情况也意味着 $\mathcal{V}$ 中的所有点都相同，与非平凡性矛盾。 □

我们还可以证明，一个完备的认知演算满足**E4** 当且仅当它满足**E7**。

定理 3.7. 一个完备的认知演算 $\mathcal{V}$ 具有认知可错性，当且仅当它是闭的。

证明。 假设**E7**成立，则集合

$$\{z \mid x \otimes z \leqslant y\}$$

非空。根据完备性，最小上界存在，且根据 定理 3.6 证明中的论证，它等价于 $[x, y]$ 。反过来，若 $\mathcal{V}$ 是闭的，则上述集合同样非空，从而推出 **E7**。 □

在 Zadeh 的模糊逻辑中，参见 [Zad65] or [KY95], 有一个标准结果指出，唯一的幂等 t-范数是 Gödel t-范数（即 min 算子）——例如参见[DJ99，3。3]。我们也可以在我们的框架中证明这一结果的类似结论，使其具有更强的结构性。

定理 3.8。 设 $\mathcal{V}$ 是一个全序结构上的认知演算，且具有 $\mathbb{1} = \top$。若 $\mathcal{V}$ 上的幺半结构是幂等的，则 $p \otimes q = \min(p, q)$。

证明。 根据序关系的全序性，不失一般性地假设 $x \leqslant y$。由 $\otimes$ 的单调性和幂等性可得

$$x = x \otimes x \leqslant x \otimes y \leqslant y \otimes y = y.$$

因此，$x = \min(x,\ y) \leqslant x \otimes y$。由于 $y \leqslant \mathbb{1}$，我们还可得

$$x \otimes y \leqslant x \otimes \mathbb{1} = x,$$

因此 $x \otimes y = \min(x,\ y)$。 □

推论 3.9。 范畴 PT 是 $[0, 1]$ 上唯一的幂等认知演算，差异至多为保序同构。

我们通过概述本节所展示示例的性质来总结本节。请注意，运用克伦威尔定律，所有示例也都有非完备版本，而且这些版本也很容易扩展到列表中。

	E1	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**	**E8**
CF	✓	✓	✓	✓			✓	✓
PT	✓	✓	✓	✓		✓	✓	
$\mathbf{PT}_{bi}$	✓	✓	✓			✓	✓	
IP	✓	✓	✓			✓	✓	

引人注目的是，$\mathbf{PT}_{bi}$ 和 IP 满足完全相同的公理。这很好地表明了这些框架之间存在紧密关系；我们很快将看到，这些相应的成对对象事实上是同构的。

4 演算变换

通常，人们只能使用单一框架来测量和量化不确定性。这项工作的目的之一，是为如何在测量过程中或测量完成后更换框架奠定概念基础。人们或许很容易认为，只需对数值应用某种翻译函数即可，但这样一来，这种做法对不确定性测量整体结构的影响就变得极其不透明。上文使用的语言使我们能够理解如何确保一切顺利进行，并进一步了解这些变化所带来的后果。

如果 $\mathcal{V}$和 $\mathcal{W}$ 是认知演算，那么，保守演算变换是一个松对称幺半函子$F\colon\ \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$。特别地，$F$ 满足

- $x \leqslant_{\mathcal{V}} y$, then $F(x) \leqslant_{\mathcal{W}} F(y)$;
- $F(x) \otimes_{\mathcal{W}} F(y) \leqslant_{\mathcal{W}} F(x \otimes_{\mathcal{V}} y)$;
- $\mathbb{1}_{\mathcal{W}} \leqslant_{\mathcal{W}} F(\mathbb{1}_{\mathcal{V}})$.

类似地，宽松的演算系统变换是一个反松幺半函子 $F\colon\ \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$，这意味着它满足

- $x \leqslant_{\mathcal{V}} y$, then $F(x) \leqslant_{\mathcal{W}} F(y)$;
- $F(x \otimes_{\mathcal{V}} y) \leqslant_{\mathcal{W}} F(x) \otimes_{\mathcal{W}} F(y)$;
- $F(\mathbb{1}_{\mathcal{V}}) \leqslant_{\mathcal{W}} \mathbb{1}_{\mathcal{W}}$.

松对称幺半性意味着，沿保守变换进行的信息融合所产生的确定性，不会多于原始演算中已有的确定性。相反，沿宽松变换进行的信息融合所产生的确定性，不会少于原始演算中已有的确定性。如果一个函子既是保守的又是宽松的，我们就称其为平衡的。因此，平衡变换满足

- $F(x) \otimes_{\mathcal{W}} F(y) = F(x \otimes_{\mathcal{V}} y)$;
- $\mathbb{1}_{\mathcal{W}} = F(\mathbb{1}_{\mathcal{V}})$,

换句话说，它是一个对称幺半函子。

让我们证明之前关于 $\mathbf{PT}_{bi}$ 与 IP 等价的论断。

引理 4.1。 这个指派

$$\begin{aligned} F\colon \mathrm{PT}_{bi} &\longrightarrow \mathrm{IP} \\ (x, x') &\longmapsto [x, x'] \end{aligned}$$

是平衡的演算变换。特别是，在 IP 上采用交集幺半结构时，映射 F 是等价。

证明。 容易看出，该映射在对象上是等价的。它在幺半结构上也是单调的。

最后，对于两个对象（x，x'）和（y，y'），我们有

$$\begin{aligned} F((x,x')\otimes(y,y')) &= F(\max(x,y),\min(x',y')) \\ &= [\max(x,y),\min(x',y')] \\ &= [x,x']\cap[y,y] \\ &= F(x,x')\otimes F(y,y'), \end{aligned}$$

这证明它是平衡的。 □

注 4.2. 请注意，尽管上面的映射是一个等价，但其用途和语义往往有所不同。这里，拒绝程度被映射到概率的下界，这在直觉上似乎不太恰当。这表明，底层的演算系统可能是等价的，尽管我们对它们的解释有所不同。本文只关注这种语法等价，但希望今后进一步扩展这一概念，使其也涵盖对该结构的解释。

我们还有一个自然映射 $F\colon \mathbf{PT} \longrightarrow \mathbf{CF}$，它在对象上的定义为 $F(x) = 2x - 1$。由于该映射是单调的，它也可以扩展为一个函子。注意，我们有 $F(1) = 1 \geqslant 0$。此外，不失一般性地假设$x \leqslant y$，则

$$F(x \otimes_{\mathrm{PT}} y) = F(x) \leqslant F(x) \otimes_{\mathrm{CF}} F(y)$$

因为在 CF 中，无法通过与认知值更高的对象融合来产生认知值更低的对象。因此， F 是一个反松幺半函子，换言之，是一种宽松的演算系统变换。

这个映射看起来有些奇怪，因为幺半单位 1 被映射到最高值 $\top$，而由于这是一个重缩放，1_2 被映射到 0。从形式上说，这没有问题，但或许并不是比较认知框架的好映射。问题在于，我们的可能性理论版本无法纳入负面证据，而且需要语义来定义必然性，这正是我们加入双极可能性理论的原因。让我们看看这如何也能修正上述有问题的映射。

回顾一下，点 $(x,\ y) \in \mathbf{PT}_{bi}$ 表示 x拒绝程度，而 y 表示可能性程度。我们定义

$$\begin{aligned} F\colon \mathrm{PT}_{bi} &\longrightarrow \mathrm{CF} \\ (x,y) &\longmapsto y-(1-x) \end{aligned}$$

它衡量可能性与未被拒绝性之差，从而得到一种单值信念。特别地，$F(0,\ 1) = 0$、 $F(1,\ 1) = 1$ 以及 $F(0,\ 0) = -1$。可以验证，这给出了一种宽松的演算变换。

注 4.3. 请注意，“不一致”状态 (1,1) 被解释为既完全可能、又因遭到拒绝而完全不可能，最终被映射到最大信念状态。这同样不太符合直觉。一种修正方法是将数对 (x,y) 解释为 x 未被拒绝性，y 解释为可能性，并将幺半结构改为 min-min，而不是 max-min。这样便可以定义一种保守变换 $F(x,y) = x + y - 2$，其语义解释更为合适。

4.1 富化范畴论

将认知不确定性量化直接纳入过程的一种方式，是利用富化范畴。这是一种借助另一个范畴赋予某个范畴额外结构的理论。我们的方法是关系式的，而非逐点式的。这遵循范畴论的准则：关系结构以及对象在其语境中的位置，比对象本身更重要。

设 $(\mathcal{V},\ \otimes_{\mathcal{V}},\ \mathbb{1}_{\mathcal{V}})$ 为一个对称幺半范畴。一个 A$\mathcal{V}$-富化范畴 $\mathcal{C}$ 由一组对象 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，以及对象 $\mathcal{V}(x,\ y) \in \mathcal{V}$（对应任意一对对象 $x,\ y \in \mathcal{C}$）、称为恒等态射的态射 $\mathbb{1}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{V}(x,\ x)$ 和一个态射组成

$$\mathcal{V}(y,z)\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{V}(x,y) \longrightarrow \mathcal{V}(x,z)$$

（对应任意三个对象 $x,\ y,\ z$），称为复合。这些还必须满足自然的结合律和单位条件。类似地，也有-富化函子 $\mathcal{V}$的概念，它将对象映射到对象，并将态射 $\mathcal{V}$-对象映射到态射 $\mathcal{V}$-对象；详情请参见标准参考文献 [Kel82]。由$\mathcal{V}$-富化范畴和 $\mathcal{V}$-富化函子构成的范畴记作 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{V}}$。

为范畴 $\mathcal{C}$ 引入认知不确定性的核心思想，是在认知演算中对其进行富化。例如，定义 $\mathcal{H}$ 为一个由假设 H 构成的范畴，其中态射 $H \longrightarrow H'$ 是信念更新。我们可以将 $\mathcal{H}$ 构造成关于任意不确定性框架 $\mathcal{C}$ 的富化范畴，以便定量衡量我们对假设的信念程度

H' 依据 H。具体而言，这意味着为每个信念更新 $f\colon H \longrightarrow H'$ 赋予一个认知值 $\mathcal{C}(f)$，使得 $\mathcal{C}(\mathrm{id}_H) = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 对任意 H都成立——任何假设都不能为其自身的信念提供依据——并且复合遵循 $\mathcal{C}$中的幺半结构，即：

$$\mathcal{C}(f' \circ f) = \mathcal{C}(f) \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C}(f')$$

对于任意 $H \longrightarrow H' \longrightarrow H''$。在 [Opd25], Opdan 使用这些思想为潜艇探测建立传感器系统模型，并使用 CF 作为其富集范畴。在 [BTV22]作者使用这些思想为大语言模型建模，并使用 $([0,1], \leqslant, \cdot, 1)$ 作为其认知演算。

由于我们的设定具有一般性，我们现在可以立即得到一个过程，用于改变范畴使用认知演算的方式。

定理 4.4 ([EK66])。对于任意保守演算变换 $F\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$，都存在一个诱导函子

$$F^*\colon \mathrm{Cat}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathrm{Cat}_{\mathcal{W}},$$

该函子将一个 $\mathcal{V}$-富集范畴 $\mathcal{C}$ 映射到由相同对象构成的 $\mathcal{W}$-范畴，但其态射 $\mathcal{W}$-对象由态射$\mathcal{C}$-对象在 F下的像决定。类似地，宽松的演算系统变换会诱导一个方向相反的函子。

这意味着，对于任意在某种认知演算 $\mathcal{V}$中富集的范畴 $\mathcal{C}$，都可以以非常自然的方式变换框架。语义保持不变，但句法会发生变化。

注 4.5. 有趣的是，可以利用富集句法和语义范畴来研究大语言模型 [BTV22], ，并采用其他不确定性演算系统。如 [Opd25], 中所述，这样或许就能避免后验坍塌问题。

4.2 富集认知更新

迄今为止，这个故事中尚缺少的一块拼图是：贝叶斯更新——或许是对不确定性进行编码和更新的标准方式——如何融入这一框架。

首先需要注意的是，贝叶斯法则并非对称幺半，因此它并不能简单地定义一种认知演算。这在直觉上也是说得通的。贝叶斯法则背后的数理逻辑并不是贝叶斯法则本身，而是乘法 和 除法。贝叶斯法则以及其他用于更新信念的机制，都处于数理逻辑之上一个层级。下面我们将对此进行描述，并从一个一般的范畴过程推导出贝叶斯法则。

注 4.6. 请注意，还有其他关于贝叶斯更新的范畴理论，例如马尔可夫范畴，参见 [Fri20] 和 [CJ19]。

设 $\mathcal{V}$ 为一个闭认知演算，其幺半结构为 $- \otimes -$，内同态为 $[-,-]$。进一步设 $\mathcal{H}$ 为一个以$\mathcal{V}$为富集的假设范畴。解释与前文相同：对于两个假设H 和 H'，$\mathcal{V}$-对象 $\mathcal{H}(H, H')$描述的是我们相对于 H对 H' 的信念。

我们想了解纳入一条新的证据后会发生什么。纳入“新”的概念有几种不同的方式，不过目前我们只令 $E \in \mathcal{H}$。也可以将E 视为通过某个 $\mathcal{V}$-函子从某个证据范畴映射而来，映入 $\mathcal{H}$。

现在，给定两个假设 H 和 H'，以及某些证据 E，我们将基于 E 对 $\mathcal{H}$ 进行的 $\mathcal{V}$-更新定义为同一个范畴 $\mathcal{H}$，但其富化结构由下式给出：

$$\mathcal{H}_E(H, H') := [\mathcal{H}(H, H') \otimes \mathcal{H}(H', E), \mathcal{H}(H, E)].$$

事实上，这是一个富化，这可以通过柯里化和内同态复合看出。其解释是，$\mathcal{H}_E(H, H')$ 衡量 $\mathcal{H}(H, H')$ 与证据 E 的相容程度。

这一想法的一般形式是“更新后的比较 $=$ 证据 -（先验比较 $+$证据，由该比较解释）”，至少在采用正确坐标解释时如此。我们可以看出贝叶斯公式具有这一形式，并可将这一说法形式化如下。

定理 4.7。 令 $\mathcal{V}$ 为由 $\infty(0,)$上的标准预序定义的认知演算，用于表示似然比。我们赋予其由乘法 $\otimes$ 给出的幺半结构，使得内同态为除法。若 $\mathcal{H}$ 是一个假设的 $\mathcal{V}$-范畴，其 $\mathcal{V}$-结构由 $\mathcal{H}(H, H') = {}^{p(H')}\!/_{p(H)}$ 给出，则 $\mathcal{V}$-更新是非归一化的贝叶斯更新。

证明。 设 E 是 $\mathcal{H}$中的一个对象，并设 $\mathcal{H}(H, E) =$

$p(E \mid H)$。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_E(H, H') &= \frac{p(E \mid H)}{\frac{p(H')}{p(H)} \cdot p(E \mid H')} \\ &= \frac{p(H) \cdot p(E \mid H)}{p(H') \cdot p(E \mid H')} \\ &= \frac{p(H \mid E)}{p(H' \mid E)}\end{aligned}$$

这正是后验赔率。 □

我们也可以对上述公式进行归一化，但这需要选择一个参考对象。如果 $\mathcal{V}$ 是完备的，那么自然可以使用 $\top \in \mathcal{V}$。这样便得到绝对概率的一种范畴构造。

我们再来看一些其他示例中的 $\mathcal{V}$-更新。对于 $\mathcal{V} = \mathbf{PT}$，我们得到一种关系式的 Dubois–Prade 可能性条件化版本，其中$\mathcal{H}_E(H, H')$ 定义为

$$\begin{cases} 1, & \min(\mathcal{H}(H, H'), \mathcal{H}(H', E)) \leqslant \mathcal{H}(H, E) \\ \mathcal{H}(H, E), & \min(H, H'), \mathcal{H}(H', E) > \mathcal{H}(H, E). \end{cases}$$

参见[DP90], ，标准的绝对可能性条件化可以通过定义 $p(H) = \mathcal{H}(R, H)$ 而从关系式条件化中恢复，其中参考假设为R。

对于确定性因子，我们可以使用证据坐标将 CF 更新的一般形式转换为相应形式，即对该表达式应用$\tanh^{-1}$，得到:

$$e_E(H, H') = e(H, E) - (e(H, H') + e(H', E)),$$

其中 $e(H, H') = \tanh^{-1} \mathcal{H}(H, H')$ 是证据。要还原确定性因子，我们只需计算

$$\mathcal{H}_E(H, H') = \tanh(e_E(H, H')).$$

这意味着，CF 更新与对数赔率贝叶斯更新类似，但其回投到 $[0, 1]$ 的过程有界且非线性。我们计划在未来的工作中进一步研究这种一般性的 $\mathcal{V}$ 更新。

5 结论

本文为认知不确定性的句法引入了一种通用的范畴论基础，将不确定性量化奠定在一个共同的框架之中，其层次高于通常做法。对该框架中的已知示例进行解读，表明它具有很强的通用性，并为现有示例提供了新的视角。

我们的方法使我们能够自然地构建对认知哲学立场和概念的数学形式化，并以自然的方式对它们进行比较。我们还阐述了这些示例分别适用哪些哲学立场和概念。

随后，我们提出了一种比较认知演算的结构化方法，并说明此类变化如何影响逻辑和认识论质量。这促成了一种形式化方法，可将认知不确定性赋予给定结构——其形式为一个一般范畴。由于范畴论具有很强的一般性，并且能够对许多结构进行建模，因此它为讨论赋予这些结构的不确定性及其如何沿着结构的特征组合，提供了稳健且数学上严谨的框架。该方法还使我们能够构建一个数学上严谨的过程，用于更改分配给系统的认知演算。

最后，我们基于一般认知演算引入了信念更新的若干推广，并证明贝叶斯更新与可能性条件化均可作为其特例导出。

势必还有其他立场与概念可以在这一框架中建模，我们希望本文能够成为对认知观念进行范畴建模的更广泛讨论与探索的起点。

参考文献

[Ben+06] Salem Benferhat、Didier Dubois、Souhila Kaci与Henri Prade。“偏好建模中的双极可能性理论：表示、融合与最优解”。载于：*Information Fusion* 7（1 2006），第135–150页。

[BTV22] Tai-Danae Bradley、John Terilla 和 Yian- nis Vlassopoulos。《语言的富化范畴理论：从句法到语义》。载于：*La Matematica* 1.2（2022），第 551–580 页。

[CJ19] Kenta Cho 和 Bart Jacobs。《通过弦图实现析取 F 与贝叶斯反演》。载于：《计算机科学中的数学结构》29.7（2019），第 938–971 页。[Cun79] Raymond Cuninghame-Green。《极小极大代数》。经济学与数学系统讲义 166。施普林格出版社，柏林、海德堡，1979。[Dem67] Arthur P. Dempster。《多值映射所诱导的上概率与下概率》。载于：《数理统计年鉴》38.2（1967），第 325–339 页。[DLP13] Didier Dubois、Emiliano Lorini 和 Henri Prade。《双极可能性理论：欲望与信念逻辑的基础》。载于：可扩展不确定性管理。第 8078 卷。计算机科学讲义。施普林格出版社，柏林、海德堡，2013。[DP88] Didier Dubois 和 Henri Prade。《可能性理论：一种不确定性的计算机处理方法》。全会出版社，纽约和伦敦，1988。[DP90] Didier Dubois 和 Henri Prade。《条件化的逻辑观点及其在可能性理论和证据理论中的应用》。载于：《国际近似推理杂志》4（1990 年第 1 期），第 23–46 页。[DP15] Didier Dubois 和 Henri Prade。《可能性理论及其应用：现状如何？》载于：计算智能施普林格手册。施普林格手册丛书。施普林格出版社，柏林、海德堡，2015。[DJ99] Wieslaw A. Dudek 和 Young Bae Jun。《t-范数上的模糊子拟群》。载于：《拟群及相关系统》6（1999），第 87–98 页。[EK66] Samuel Eilenberg 和 Max Kelly。《闭范畴》。载于：范畴代数会议论文集（拉霍亚，*1965*）（1966），第 421–562 页。[EM45] Samuel Eilenberg 和 Saunders MacLane。《自然等价的一般理论》。载于：《美国数学会会刊》58（1945），第 231–294 页。

[Fel81] Richard Feldman。“可错论与知道自己知道”。载于：《哲学评论》90（1981）。2，第266–282页。

[FS19] Brendan Fong 和 David I. Spivak。《应用范畴论导论》。剑桥大学出版社，2019年。

[Fri20] Tobias Fritz。“马尔可夫核、条件独立性与充分统计量定理的综合方法”。载于：《数学进展》370（2020）。

[Has04] Ekaterina V. Haskins。“可信意见、认识论乐观主义与亚里士多德的修辞学计划”。载于：《哲学与修辞》37.1（2004），第1–20页。

[Hol15] Wesley H. Holliday。“认识论封闭与认识逻辑 I：相关替代项与反事实条件主义”。载于：《哲学逻辑杂志》44.1（2015），第1–62页。

[Kek72] John Kekes。“可错论与理性”。载于：《美国哲学季刊》9.4（1972），第301–309页。

[Kel82] Gregory Maxwell Kelly。富化范畴论的基本概念。伦敦数学学会讲义系列64。剑桥大学出版社，1982年。

[KMP00] Erich PeterKlement、Radko Mesiar和Endre Pap。三角范数。第8卷。逻辑学前沿。施普林格多德雷赫特，2000年。

[KY95] George J. Klir和Bo Yuan。模糊集与模糊逻辑：理论与应用。普伦蒂斯霍尔，1995年。

[Lin91] Dennis V. Lindley。《*Making Decisions*》。第2版。奇切斯特：John Wiley & Sons，1991年。

[Mac98] Saunders MacLane。工作数学家的范畴。数学研究生教材5。施普林格出版社，纽约，1998年。

[McC08] Kevin McCain。《认识论保守主义的美德》。载于：《*Synthese*》164（2008），第 185–200 页。

[Net97] José R. Maia Neto.《早期现代哲学中的学术怀疑主义》。载于：《思想史杂志》58.2 (1997)，第199–220页。

[Opd25] Nikolai Opdan。确定性因子理论的数学基础及其在区域搜索中的应用。预印本。2025。[PJW25] Michael C. Parker、Chris Jeynes 和 Stuart D. Walker。“概率的双曲求和规则：解决递归（‘先有鸡还是先有蛋’）问题”。载于：《熵》27.4 (2025)。[Pin98] Jean-Eric Pin。“热带半环”。载于：幂等性。牛顿研究所出版物。剑桥大学出版社，1998年，第50–69页。[Sag97] 卡尔·萨根。《魔鬼出没的世界：科学如暗夜中的烛光》。Ballantine Books，1997年。[Sha76] Glenn Shafer。证据的数学理论。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1976年。[Vog08] Jonathan Vogel。“认识自举”。载于：《哲学杂志》105 (2008)。第9期，第518–539页。[Wal91] Peter Walley。精确概率下的统计推理。伦敦：Chapman and Hall，1991年。[Zad65] 洛菲·扎德。“模糊集”。载于：《信息与控制》8 (3 1965)，第338–353页。[Zad78] 洛菲·扎德。“模糊集作为可能性理论的基础”。载于：《模糊集与系统》1 (1978)，第3–28页。