arXiv:2603.04216v1 [math.NA] 4 Mar 2026

用于稳健金属–半导体接触重建的统计拓扑梯度与形状优化

L. Afraites* A. Hadri† M. Hrizi‡ J. F. T. Rabago§

摘要

我们提出了一个基于拓扑梯度、用于重建金属–半导体接触区域的统计稳健框架。该反问题被表述为：根据由具有分片系数的椭圆模型所支配的边界测量数据，识别未知接触区域。我们建立了拓扑梯度关于测量噪声的确定性稳定性，并将分析拓展至包含多个独立观测的统计情形。我们证明了可分希尔伯特空间中经验拓扑梯度的中心极限定理，从而获得最优的 $n^{-1/2}$ 收敛，并能够构造用于接触检测的置信区间和假设检验。为进一步改进重建结果，我们采用了形状优化方法，其中 CCBM公式中的自由参数 β 在控制界面敏感性方面发挥着关键作用。尽管 β 会影响拓扑重建和形状重建，但其影响在形状优化阶段尤为显著，因此能够更准确地估计接触子区域的尺寸和几何形状。所提出的方法为区分真实结构特征与噪声诱发伪影提供了严谨的判据；数值实验则表明，结合统计方法、拓扑方法与 β引导的基于形状的重建，具有稳健性、精确性和更优的性能。

关键词： 几何反问题、拓扑优化、形状优化、耦合复杂边界方法、接触电阻率

MSC 分类号： 49Q12, 49N45, 49Q10, 49K40, 35A15, 35B20, 65R32

目录

1 引言 **2**
1.1 接触电阻率问题 .21.2 数学表述 .21.3 几何反问题 .31.4 记号 .41.5 优化框架.4

2 拓扑灵敏度分析 **6**
2.1 对 $J_1(\varepsilon)$ 的估计.72.2 对 $J_2(\varepsilon)$ 的估计.7

3 含噪测量下的拓扑梯度的稳定性 **8**3.1 含噪边界测量与受扰系统 .83.2 拓扑梯度的利普希茨稳定性 .83.3 随机噪声下的统计稳定性 .9

4 形状灵敏度分析 **11**

5 通过拓扑梯度进行重建 **13**5.1 拓扑识别算法和计算设置 .135.2 使用拓扑梯度的数值算例 .145.3 接触区域的统计检测 .18

*EMI，FST，苏丹穆莱·斯利曼大学，贝尼迈拉勒，摩洛哥 (l.afraites@usms.ma)
†多学科 факультет，伊本·佐赫尔大学，阿加迪尔，摩洛哥 (aissamhadri20@gmail.com)
‡莫纳斯提尔大学，数学系，莫纳斯提尔，突尼斯 (mourad-hrizi@hotmail.fr)§数学与物理学院，金泽大学，日本 (jfrabago@gmail.com)

6 通过形状优化进行重建 216.1 界面变分的数值算法 .216.2 使用形状梯度信息的数值算例 .226.3 自由参数的影响 β .23

7 结论 **23**

A 引理 1.4 **25**

1 引言

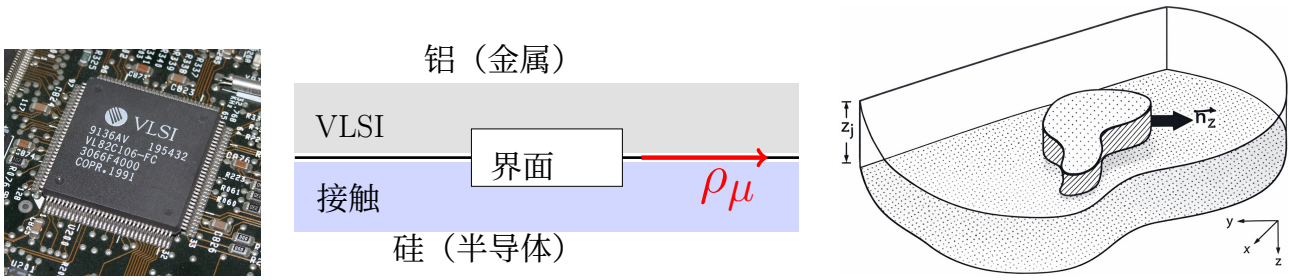
1.1 接触电阻率问题

在超大规模集成（VLSI）电路（图1a）中，电接触构成半导体器件与金属互连线之间的关键界面。随着器件尺寸缩小至深亚微米领域，寄生接触电阻日益成为限制整体电学性能的因素（图1b）。在最简单的近似下，接触电阻可表示为

$$R_\mu = \frac{\rho_\mu}{A},$$

其中 A 为接触面积，ρ_μ 为比接触电阻率。由于 A 通常随最小特征尺寸的平方 λ缩放，该模型预言了理想缩放定律 $R_\mu \propto \lambda^{-2}$ (例如，参见 [45, 46])。

实际上，由于接触边缘附近的电流注入不均匀，这种理想缩放会失效，这一现象称为 电流拥挤。电流扩展的空间范围由转移长度l_t表征。当接触的横向尺寸接近或小于 l_t时，电流拥挤加剧，导致有效接触电阻的增加速度快于几何缩放的预测值。这一效应最终对先进集成技术中的接触微型化设定了一个基本物理极限。图1b示意性地展示了一个简化的金属-半导体接触结构。在深度



(a) (b) (c)

图1: （a）一个 VLSI 电路；（b）简化的金属/半导体接触；（c）一个二维薄层接触模型，其界面位于 $z = 0$，扩散层厚度为 z_j。改编自 [46]。

在规模不断扩大的集成电路中，接触电阻率决定着器件性能，因此对其进行精确表征至关重要。然而，接触界面埋藏于器件结构内部，无法进行局部探测，因而直接测量从根本上受到限制。因此，研究人员采用间接方法：利用预设的边界电流和测量电势数据，推断内部接触特性。这类反问题，即根据边界观测恢复内部参数的问题，已得到广泛研究；奠基性研究为接触电阻率的测定确立了数学基础 [45, 46]。半导体器件相关的逆问题见 [13, 14, 24] 及其中的参考文献。

1.2 数学表述

尽管实际的金属-半导体接触系统本质上是三维（3D）的，但现代超大规模集成电路工艺中极浅的结深，使采用有效的二维（2D）约化成为合理选择。如图 1c所示，接触界面被理想化为与z轴正交的平面，而厚度为 z_j 的半导体扩散区呈现随深度变化的电导率分布$\sigma = \sigma(z)$，且该分布在(x, y)平面内横向均匀。这一假设得到了当代制造技术的充分支持：离子注入和扩散会在接触窗口范围内形成近乎平面的掺杂分布。

遵循 Loh 等人提出的薄膜约化， [46], 我们考虑垂直与横向纵横比趋于零的渐近区域。对三维电流连续性方程进行垂直积分，可得到有效的方块电阻

$$R_s = \left(\int_0^{z_j} \sigma(z)\, \mathrm{d}z \right)^{-1} > 0,$$

用于表征横向电流输运。这种平均化将三维电势 $v(x,\ y,\ z)$ 映射为有效的二维电势

$$u(x,y) = R_s \int_0^{z_j} \sigma(z)\, v(x,y,z)\, \mathrm{d}z.$$

约化模型描述开有界半导体区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 中的电势 $u = u(x,\ y)$，其中 $\omega \Subset \Omega$ 是表示金属-半导体接触的开有界子区域。在接触区域之外，即 $\Omega \setminus \omega$，横向电流扩散但不发生垂直传输，且 u 在 $\Omega \setminus \omega$ 中满足 $\Delta u = 0$，此时二维电流密度 $\mathbf{J} = -R_s^{-1} \nabla u$ 为纯二维形式。在接触区域 ω 内，垂直电流注入引入一个反应项，且 u 在 ω 中满足 $\Delta u - l_t^{-2} u = 0$，其中转移长度 $l_t = \sqrt{\rho_\mu / R_s}$ 表征电流穿透的深度。

在接触边界处 $\partial\omega$，电势连续性和法向电流通量守恒条件为 $u_{|\partial\omega_-} = u_{|\partial\omega_+}$ 和 $R_{sk}^{-1}\, n_z \cdot \nabla u_{|\partial\omega_-} = R_s^{-1}\, n_z \cdot \nabla u_{|\partial\omega_+}$，其中 n_z 表示垂直于接触边界且与 $(x,\ y)$ 平面相切的单位向量（参见图 1c），而 R_{sk} 表示接触正下方的方块电阻。

汇集各支配关系后，完全约化的边值问题可紧凑地写为

$$-\Delta u + \mu_0\, \chi_\omega\, u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = g \geq 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \qquad (g \not\equiv 0),$$

其中， $\mu_0 := 1/l_t^2 = R_s/\rho_\mu$, χ_ω 为接触区域的特征函数， g 表示给定的边界电流密度， $\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu$ 表示外法向通量，而 ν 为 $\partial\Omega$的单位外法向量。项$(1/l_t^2)\chi_\omega u$ 刻画金属-半导体界面处的垂直电流交换。转移长度 l_t 控制电流拥挤：在由接触下方的垂直注入过渡到半导体中的横向输运时，电流在接触边缘附近集中，从而产生强烈非均匀的电流密度，并主导现代器件几何结构中的有效接触电阻。

1.3 几何反问题

一般反问题旨在同时恢复接触区域 $\omega \Subset \Omega$ 与参数 $\mu_0 > 0$，依据柯西边界数据(g, f)。该问题严重不适定，因为不同的配对(χ_ω, μ_0) 可产生相同的测量数据 [37]。在本工作中，我们采用标准假设，即 μ_0 先验已知，从而将问题归结为根据边界数据对接触区域 ω （或等价地 χ_ω）进行几何识别。我们隐含地假设存在一个精确的接触区域 $\omega^\star$ 生成这些测量数据。

除非另有说明，全文中， $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是具有 Lipschitz边界的有界区域，而$\omega \Subset \Omega$ 是具有 Lipschitz边界的有界开子区域。

问题1.1. 设 $\mu_0 > 0$ 为给定常数。给定非平凡的柯西边界数据 $(g, f) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，求子域 ω 及函数 $u \in H^1(\Omega)$，使得

$$-\Delta u + \mu_0 \chi_\omega u = 0 \ \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = g, \quad u = f \ \text{on } \partial\Omega. \tag{1}$$

T这一约化逆问题的分析自然涉及三个密切相关的方面：

(i) 可识别性。 一个基本问题是，边界数据$(g, f) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$是否能唯一确定接触区域 ω。对于某些类别的容许子域，唯一性已得到证明 [22, 41, 42]。值得注意的是，Kim [42] 证明了凸区域的整体唯一性结果。

(ii) 稳定性。 另一个关键问题是 ω 对边界数据扰动的连续依赖性。已有局部稳定性估计 [19, 22]。特别是，[22], Fang 和 Cumberbatch 借助单点边界测量建立了一项稳定性结果。另一方面，Choulli [19] 利用额外的诺伊曼测量，在区域扰动较小时给出了定量界，说明稳定性具有条件性。

(iii) 识别。 尽管解具有唯一性和条件稳定性，但对 ω 进行数值重建仍是不适定的。一种常见方法是将问题重新表述为

$$\min_{\omega \in \mathcal{U}} J(\omega),$$

其中 J 是数据失配泛函，而 $\mathcal{U}$ 表示容许区域。由于 $\mathcal{U}$ 并非向量空间，通常采用形状优化和拓扑优化技术 [23, 25, 35, 47]。在这些研究中，J 要么是经典最小二乘泛函，仅使用边界测量数据；要么是 Kohn–Vogelius 型泛函，用于量化两个辅助边值问题之间的差异：一个由测得的边界数据驱动，另一个由指定的边界激励驱动。

在本文中，我们重点研究从边界数据中对 ω 进行数值重建，并以已确立的可识别性与稳定性结果为基础。我们的主要贡献是提出一种 β加权的耦合复边界框架（见（2）），该框架统一了形状优化与拓扑优化，并结合了具有$n^{-1/2}$ 收敛性的统计拓扑梯度（定理 3.4）。该方法在含噪测量下提供了稳健的初始化和基于置信度的检测（小节 5.3），同时 β 提高了重建精度，能够捕捉 ω 的位置、大小和几何形状，并滤除噪声（小节 6.3）。

在检测逆问题的背景下，[1, 10, 12, 15, 16, 17, 27, 28, 33], 拓扑导数方法已被广泛认为是一种高效且精确的非迭代优化工具，通常无需额外的正则化即可稳定重建过程。尽管这些研究中的数值研究表明该方法对于含噪数据具有稳健性，但完整的理论论证仍然有限。相比之下，在成像文献中，Ammari 等人 [6, 7] 对拓扑导数在检测小型声学异常方面的有效性给出了严格的解析解释，其中包括存在介质噪声和测量噪声时的稳定性与分辨率分析。受这一研究方向的启发，本文基于可分希尔伯特空间中的中心极限定理，对拓扑梯度建立了严格的统计稳定性分析，从而为随机噪声下基于置信度的重建提供理论基础。

1.4 符号约定

我们使用勒贝格空间 $L^2(\Omega)$ 和 $L^2(\partial\Omega)$，而 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 表示 $H^1(\Omega)$ 的迹空间。除非另有说明，相同的记号也适用于实值和复值函数；有时使用 $X(\Omega;\mathbb{C})$ 来强调复值函数。对于复值函数，$H^1(\Omega)$ 内积为 $(u,v)1,\Omega :=(\nabla u, \nabla v)0,\Omega +(u,v)0,\Omega$其中 $(u,v)0,\Omega := \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$，范数为$\|u\|^2_{1,\Omega} := (u,u)1,\Omega = \|\nabla u\|^2_{0,\Omega} + \|u\|^2_{0,\Omega}$。显然，$\|\nabla u\|^2_{0,\Omega} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^d}$ $(d = 2)$。表示复共轭的上横线 $(\cdot)$，在上下文明确时省略。$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 与 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 之间的对偶配对记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$；若两个自变量都属于 $L^2(\partial\Omega)$，则该记号与 $L^2(\partial\Omega)$ 内积 $(\cdot,\cdot)0,\partial\Omega$ 一致。我们对标量值函数和向量值函数的范数采用统一记号。对于复值函数 u，记作 $u = u_r + \boldsymbol{i}\,u_i :=\mathrm{Re}\{u\} + \boldsymbol{i}\mathrm{Im}\{u\}$，其中 $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$，$\mathrm{Re}\{u\}$ 和 $\mathrm{Im}\{u\}$ 分别表示实部和虚部。全文中，$C > 0$ 表示一般常数，其取值可能随行而变。最后，当需要强调变量或表达式对某些参数（例如系数 μ 或边界数据 f）的依赖关系时，我们根据上下文使用方括号记号，例如 $u[\mu, f]$、$u[\mu]$ 或 $u[f]$；不存在歧义时则省略这种依赖关系。

本文中，为方便起见，接触区域和夹杂这两个术语将在数学和数值讨论中互换使用，但需注意，它们的物理含义有所不同。 he

1.5 优化框架

为解决问题1.1，我们采用一种基于耦合复边界法（简称 CCBM）的基于优化的公式。CCBM 最初由 [18] 为反源问题提出，此后已发展为一个灵活的框架，适用于广泛的反问题与几何识别问题。其有效性已在电导率重建 [31], 椭圆系统的参数识别 [60], 和形状重建问题 [3], 以及几何反源公式 [5]中得到验证。近期研究进一步将基于 CCBM 的公式拓展至日益复杂的情形，包括外部伯努利型问题 [50], 自由表面流 [55], 斯托克斯系统的反柯西问题 [49],黏性流中的障碍物识别 [52], 肿瘤定位 [51], 时间分数阶偏微分方程中的源近似 [36], 和生物发光断层成像 [59]。

半导体器件建模中产生的几何反问题已在[22, 23, 41, 42]中得到广泛研究。这些研究着重于根据边界电压和电流测量数据识别金属–半导体接触区域和接触电阻率参数，研究动机来自其在晶体管建模中的应用。在对接触区域施加适当的几何与正则性假设后，研究确立了关于可识别性和条件稳定性的基本结果。

本研究在 CCBM 框架下重新审视半导体接触识别问题。我们的目标是利用早期基于 CCBM 的研究所报告的良好稳定性与精度性质，特别是在自由边界和自由表面问题中 [50, 55], 同时保持与 Kohn–Vogelius 型公式相当的计算成本 [50, 55]。

遵循 CCBM 的理念，问题1.1 中的超定边界条件被替换为单一的复值Robin条件。对于固定的调节参数 $\beta \in \mathbb{R}^+$，我们考虑如下复值问题

$$-\Delta u + \mu_0 \chi_\omega \, u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u + \boldsymbol{i}\, \beta \, u = g + \boldsymbol{i}\, \beta \, f \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{2}$$

写出 $u = u_r + \boldsymbol{i}\, u_i$，可见问题1.1 成立当且仅当 $u_i = 0$ 属于 Ω。这促使我们将反问题重新表述为对系数 $\mu = \mu_0 \chi_\omega$ 的识别，使得相应的解满足 $u_i[\mu] = \mathrm{Im}\{u[\mu]\} = 0$ 于 Ω （问题1.6）。

注1.2. 自由参数 β 在（2）中的引入，是对传统*CCBM*公式的一种新颖扩展。尽管类似参数已出现在先前工作 *[30]* 中，用于源条件下的收敛分析，但此处 β 用于不同目的：它为界面敏感性提供了额外控制，并显著增强形状重构，尤其是在含噪测量下，如第*6.3*节所示。

因此，我们引入系数 μ的容许集，记为 $\mathcal{U}$。设 ω 为Lebesgue可测集。我们将容许集定义为

$$\mathcal{U} := \Big\{ \mu \in L^\infty(\Omega) \;\Big|\; \mu = \mu_0 \chi_\omega,\ \omega \Subset \Omega,\ |\omega| > 0 \Big\} \subset L^\infty_+(\Omega), \qquad \mu_0 > 0,$$

其中 $|\omega|$ =meas(ω)表示 ω的Lebesgue测度。

问题1.3。 给定 $\mu \in \mathcal{U}$，(2) 的弱形式如下：求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3}$$

其中半双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 和线性形式 $F(\cdot)$ 定义为

$$a(w, v) = (\nabla w, \nabla v)_{0,\Omega} + (\mu\, w, v)_{0,\Omega} + \boldsymbol{i}\, \beta \, \langle w, v \rangle, \qquad F(v) = \langle g, v \rangle + \boldsymbol{i}\, \beta \, \langle f, v \rangle.$$

以下引理对于证明 $a(\cdot, \cdot)$ 的强制性至关重要，而这又确保了问题 1.3 解的存在唯一性，正如命题 1.5 所述。证明依赖于复Lax–Milgram引理 [20, 第 376] 页（另见 [57, 引理 2.1.51，第 40]页）。

引理 1.4。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, 为有界*Lipschitz*区域，且 $\omega \Subset \Omega$ 可测并满足 $|\omega| > 0$。则存在常数 $C(\Omega) > 0$，使得对所有 $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\|\varphi\|^2_{1,\Omega} \leq C(\Omega) \|\varphi\|^2_*, \qquad \|\varphi\|_* := \Big(\|\nabla \varphi\|^2_{0,\Omega} + \|\varphi\|^2_{0,\omega} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

证明见附录A。

命题1.5。设 $\mu \in \mathcal{U}$和$(g,\ f) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 为给定的非平凡柯西数据。则问题*1.3* 存在唯一弱解 $u = u[\mu] \in H^1(\Omega)$ 满足

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C \|(g, f)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}, \quad \|(g, f)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} := \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \tag{4}$$

其中， $C > 0$ 仅取决于 Ω。

证明。连续性　半双线性形式 $a(\cdot,\ \cdot)$和线性形式 $F(\cdot)$是标准结论，故略去。我们重点　　us
讨论关键的相　的强制性 $a(\cdot,\ \cdot)$。

设 $u = u_r + \boldsymbol{i}\, u_i \in H^1(\Omega)$。根据 a 的定义，并且由于 $\mu = \mu_0\, \chi_\omega \in \mathcal{U}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{a(u,u)\} &= (\nabla u_r, \nabla u_r)_{0,\Omega} + (\mu\, u_r, u_r)_{0,\Omega} + (\nabla u_i, \nabla u_i)_{0,\Omega} + (\mu\, u_i, u_i)_{0,\Omega} \\ &= \big(\|\nabla u_r\|^2_{0,\Omega} + \mu_0 \, \|u_r\|^2_{0,\omega} \big) + \big(\|\nabla u_i\|^2_{0,\Omega} + \mu_0 \, \|u_i\|^2_{0,\omega} \big). \end{aligned}$$

应用引理1.4，存在常数 $C(\Omega) > 0$ 使得

$$\mathrm{Re}\{a(u,u)\} \geq \frac{\min\{1, \mu_0\}}{C(\Omega)} \Big(\|u_r\|^2_{1,\Omega} + \|u_i\|^2_{1,\Omega} \Big) \equiv \frac{\min\{1, \mu_0\}}{C(\Omega)} \, \|u\|^2_{1,\Omega}. \tag{5}$$

因此，半双线性形式 $a(\cdot,\ \cdot)$ 是 $H^1(\Omega)$-椭圆的。结合 a 和 F的标准连续性，即可保证问题1.3 的唯一可解性以及稳定性估计（4）。 □

问题 1.3 的适定性确保映射 $\mu \mapsto u[\mu]$ 从 $\mathcal{U}$ 到 $H^1(\Omega)$ 定义良好。这使我们能够表述以下识别问题。

问题 1.6。 设 $(g,\ f)\in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 为给定的非平凡柯西边界数据。求 $\mu\in\mathcal{U}$ 使得问题 *1.3* 的唯一弱解 $u=u[\mu]\in H^1(\Omega;\ \mathbb{C})$ 满足

$$u_i[\mu]=0 \quad in\ \Omega.$$

等价地，这可以表述为形状优化问题

$$\min_{\mu\in\mathcal{U}} J(\mu) \coloneqq \min_{\mu\in\mathcal{U}} (u_i[\mu],u_i[\mu])_{0,\Omega} \qquad subject\ to \quad (3). \tag{6}$$

为求解此优化问题（6），我们将采用拓扑灵敏度分析方法 [8, 11, 29,48, 58]。该方法研究引入电阻率的小型拓扑扰动时，代价泛函 J 如何变化。

2 拓扑敏感性分析

本节将推导泛函 J（定理 2.2）关于电阻率区域无穷小扰动的拓扑敏感性。对于给定的 $\mu\in\mathcal{U}$，我们引入一个小夹杂，从而得到扰动后的电阻率

$$\mu_\xi^\varepsilon(x)=\begin{cases}\mu_0, & x\in B_\xi^\varepsilon,\\ 0, & x\in\Omega\setminus\overline{B_\xi^\varepsilon},\end{cases} \tag{7}$$

其中，$B_\xi^\varepsilon=\xi+\varepsilon B$、$\xi\in\Omega$、$0<\varepsilon\ll 1$和 $B\subset\mathbb{R}^2$ 是一个包含原点的有界开参考区域。下文中，除非另有说明，我们均假设 $\mu\in\mathcal{U}$。

我们的目标是获得扰动后泛函的渐近展开 :

$$J(\mu+\mu_\xi^\varepsilon)=J(\mu)+\phi(\varepsilon)\,\delta J[\mu](\xi)+\mathrm{o}(\phi(\varepsilon)),\quad \forall\xi\in\Omega,$$

其中，$\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是一个当 $\varepsilon\to 0$时趋于零的缩放函数，而 $\delta J[\mu]$ 表示拓扑梯度。为简洁起见，我们有时记作 $\tilde{\mu}^\varepsilon=\mu+\mu_\xi^\varepsilon$，并在上下文明确时省略对 ξ或 μ的显式依赖。

由（6）可得，扰动后的泛函为

$$J(\tilde{\mu}^\varepsilon)=(u_i[\tilde{\mu}^\varepsilon],u_i[\tilde{\mu}^\varepsilon])_{0,\Omega},$$

其中 $u[\tilde{\mu}^\varepsilon]=u_r[\tilde{\mu}^\varepsilon]+\boldsymbol{i}\,u_i[\tilde{\mu}^\varepsilon]\in H^1(\Omega)$满足

$$-\Delta u[\tilde{\mu}^\varepsilon]+\tilde{\mu}^\varepsilon\,u[\tilde{\mu}^\varepsilon]=0\ \ \text{in}\ \Omega,\qquad \partial_\nu u[\tilde{\mu}^\varepsilon]+\boldsymbol{i}\,\beta u[\tilde{\mu}^\varepsilon]=g+\boldsymbol{i}\,\beta f\ \ \text{on}\ \partial\Omega. \tag{8}$$

注 2.1。 为使代价泛函 J最小化，Ω 中电阻率扰动 μ_ξ^ε 的最优位置由拓扑梯度 $\delta J[\mu]$的符号决定。更确切地说，$\delta J[\mu](\xi)<0$ 的区域表示泛函的下降方向。事实上，若 $\delta J[\mu](\xi)<0$，则对充分小的 $\varepsilon>0$，

$$J(\mu+\mu_\xi^\varepsilon)<J(\mu),$$

这意味着在 ξ 处引入一个小夹杂会降低代价泛函。

本节的主要结果由以下定理陈述，该定理给出了拓扑梯度的表达式。

T定理 2.2. 设 $u\in H^1(\Omega)$ 求解问题 *1.3*，并设 $v\in H^1(\Omega)$ 求解伴随变量问题 m

$$-\Delta v+\mu\,v=-2\,u_i\quad in\ \Omega,\qquad \partial_\nu v-\boldsymbol{i}\,\beta\,v=0\quad on\ \partial\Omega. \tag{9}$$

对于扰动电阻率 (7)，该泛函具有渐近展开

$$J(\tilde{\mu}^\varepsilon)=J(\mu)+\varepsilon^2\mu_0|B|\,\delta J[\mu](\xi)+o(\varepsilon^2),\quad \varepsilon\to 0, \tag{10}$$

其中 $\xi\in\Omega$ 是小夹杂的中心，并且

$$\delta J[\mu](x)\coloneqq u_i[\mu](x)\,v_r[\mu](x)-u_r[\mu](x)\,v_i[\mu](x),\quad x\in\Omega, \tag{11}$$

定义了 拓扑梯度关于 J。

T为确定缩放 $\phi(\varepsilon)$和拓扑梯度 $\delta J[\mu]$，我们分解变分a s

$$J(\tilde{\mu}^\varepsilon)-J(\mu)=\underbrace{\int_\Omega\left(u_i[\tilde{\mu}^\varepsilon]-u_i[\mu]\right)^2}_{:=J_1(\varepsilon)}+\underbrace{2\int_\Omega u_i[\mu]\left(u_i[\tilde{\mu}^\varepsilon]-u_i[\mu]\right)}_{:=J_2(\varepsilon)}. \tag{12}$$

分别估计 $J_1(\varepsilon)$ 和 $J_2(\varepsilon)$，即可提取首阶项和拓扑梯度。定理 2.2 的结论随即由引理 2.3 和 2.4得出。

2.1 $J_1(\varepsilon)$ 的估计

下一个引理给出了式（12）中第一项的估计。

引理 2.3。 设 $u[\tilde{\mu}^\varepsilon] \in H^1(\Omega)$ 和 $u = u[\mu] \in H^1(\Omega)$ 分别满足 (8) 和 (3)。存在一个常数$C > 0$，与 ε无关，使得

$$\|u[\tilde{\mu}^\varepsilon] - u\|_{1,\Omega} \le C\,\varepsilon^{4/3}.$$

因此， $J_1(\varepsilon) = \mathrm{o}(\varepsilon^2)$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时。

证明。 令 $w := u[\tilde{\mu}^\varepsilon] - u$。 则 w 满足

$$-\Delta w + \tilde{\mu}^\varepsilon\, w = -\mu_\xi^\varepsilon\, u \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu w + \boldsymbol{i}\,\beta w = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

以 $w \in H^1(\Omega)$ 为测试函数，并应用 (5)，得到

$$\|w\|_{1,\Omega}^2 \le C \Big| \int_\Omega \mu_\xi^\varepsilon\, u\, \overline{w}\, \mathrm{d}x \Big|. \tag{13}$$

根据 Hölder不等式、Sobolev嵌入 $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ （在二维情形下成立；参见 [2, 定理 4.12，第 85页），以及先验估计 (4)，可得

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega \mu_\xi^\varepsilon\, u\, \overline{w}\, \mathrm{d}x \Big| &\le \|\mu_\xi^\varepsilon\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|u\|_{L^6(\Omega)} \|w\|_{L^6(\Omega)} \\ &\le C\, \|\mu_\xi^\varepsilon\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|u\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \\ &\le C\, \|\mu_\xi^\varepsilon\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|(g,f)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \|w\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \tag{14}$$

由（7）和恒等式 $|B_\xi^\varepsilon| = \varepsilon^2 |B|$，可得 $\|\mu_\varepsilon\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \le C\,\varepsilon^{\frac{4}{3}}$。将此界代入（14），并结合（13），即可得到所需估计，其中常数 $C > 0$依赖于 Ω、 μ_0、 B 和 $\|(g,f)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}$，但与 ε 无关。因此，我们还有 $J_1(\varepsilon) = \mathrm{o}(\varepsilon^2)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时成立。 □

2.2 $J_2(\varepsilon)$ 的估计

在本小节中，我们证明以下引理。

引理 2.4。我们有

$$J_2(\varepsilon) = \varepsilon^2 \mu_0 |B| \Big(u_i(\xi) v_r(\xi) - u_r(\xi) v_i(\xi) \Big) + \mathrm{o}(\varepsilon^2). \tag{15}$$

证明。 令 $q :=u[\tilde{\mu}^\varepsilon] - u$。用 q 对（9）的变分形式进行测试，得到

$$(\nabla v, \nabla q)_{0,\Omega} + (\mu\, v, q)_{0,\Omega} - \boldsymbol{i}(\beta v, q)_{0,\partial\Omega} = -2(u_i, q)_{0,\Omega}. \tag{16}$$

函数 $q \in H^1(\Omega)$ 满足

$$-\Delta q + \mu\, q = -\mu_\xi^\varepsilon\, u[\tilde{\mu}^\varepsilon] \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu q + \boldsymbol{i}\,\beta\, q = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

并用 v 检验其变分形式，得到

$$\underbrace{(\nabla q, \nabla v)_{0,\Omega} + (\mu\, q, v)_{0,\Omega} + \boldsymbol{i}(\beta\, q, v)_{0,\partial\Omega}}_{:=\tilde{z}} = -(\mu_\xi^\varepsilon\, u[\tilde{\mu}^\varepsilon], v)_{0,\Omega}. \tag{17}$$

合并（16）和（17），并利用 $\tilde{z} + \bar{\tilde{z}} = 2$实部$\{\tilde{z}\}$，得到

$$2\,\mathrm{Re}\{\tilde{z}\} = -(\mu_\xi^\varepsilon\, u[\tilde{\mu}^\varepsilon], v)_{0,\Omega} - 2(u_i, q)_{0,\Omega}.$$

写出 $u = u_r + \boldsymbol{i}\, u_i$ 和 $v = v_r + \boldsymbol{i}\, v_i$，比较虚部可得

$$\begin{aligned} J_2(\varepsilon) &= \int_\Omega \mu_\xi^\varepsilon \big(u_i[\tilde{\mu}^\varepsilon]\, v_r - u_r[\tilde{\mu}^\varepsilon]\, v_i \big)\, \mathrm{d}x \\ &= \varepsilon^2 \mu_0 |B| \big(u_i(\xi)\, v_r(\xi) - u_r(\xi)\, v_i(\xi) \big) + \sum_{j=1}^4 J_{2,j}(\varepsilon), \end{aligned}$$

with

$$J_{2,1}(\varepsilon) = \int_\Omega \mu_\xi^\varepsilon\, (u_i[\tilde{\mu}^\varepsilon] - u_i)\, v_r\, \mathrm{d}x, \qquad J_{2,2}(\varepsilon) = -\int_\Omega \mu_\xi^\varepsilon\, (u_r[\tilde{\mu}^\varepsilon] - u_r)\, v_i\, \mathrm{d}x,$$

$$J_{2,3}(\varepsilon) = \int_\Omega \mu_\xi^\varepsilon\, (u_i - u_i(\xi))\, v_r\, \mathrm{d}x, \qquad J_{2,4}(\varepsilon) = -\int_\Omega \mu_\xi^\varepsilon\, (u_r - u_r(\xi))\, v_i\, \mathrm{d}x.$$

按照引理 2.3 证明中的论证，并利用 u 在 ξ附近的正则性，可得 $J_{2,\,j}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ 对所有$j = 1$，……，4。因此，项 $J_2(\varepsilon)$ 满足（15）。 □

定理2.2 的结论由引理2.3 和2.4得证。

3 含噪测量下拓扑梯度的稳定性

我们研究含噪 Dirichlet边界测量下拓扑梯度 δJ 的稳定性。目标是量化测得的狄利克雷数据中的扰动如何影响重构的拓扑梯度，尤其是给出严格的界，以保证拓扑方法在实际测量误差下的稳健性。在本节中，我们省略对 μ 的显式依赖，因为 μ 固定不变，而我们只关注边界数据 f 的扰动。

3.1 含噪边界测量数据与受扰系统

我们回顾一下， $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 表示精确的诺伊曼边界数据， $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 表示相应的狄利克雷测量。测量误差在完备概率空间 $(\Omega_{\text{prob}},\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 上由一个中心化高斯随机变量建模

$$\epsilon : \Omega_{\text{prob}} \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \qquad \epsilon \in L^2(\Omega_{\text{prob}}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)),$$

其协方差为

$$\mathbb{E}[\epsilon(x)\epsilon(y)] = \sigma_\epsilon^2\, \mathcal{K}(x,y), \quad x,y \in \partial\Omega,$$

其中， $\mathbb{E}[\cdot]$ 表示期望， $\sigma_\epsilon^2 > 0$ 表示噪声强度， $\mathcal{K}$ 是一个对称半正定核。含噪测量定义为

$$f^\epsilon(\eta) = f + \epsilon(\eta), \qquad \mathbb{P}\text{-a.e. } \eta \in \Omega_{\text{prob}}.$$

对于每个事件 $\eta \in \Omega_{\text{prob}}$，含噪状态 $u^\epsilon := u^\epsilon(\cdot;\eta) \in H^1(\Omega)$ 和伴随变量 $v^\epsilon = v^\epsilon(\cdot;\eta) \in H^1(\Omega)$ 是以下方程的解

$$-\Delta u^\epsilon + \mu\, u^\epsilon = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u^\epsilon + \boldsymbol{i}\,\beta\, u^\epsilon = g + \boldsymbol{i}\,\beta f^\epsilon \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{18}$$

$$-\Delta v^\epsilon + \mu\, v^\epsilon = -2\, u_i^\epsilon \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu v^\epsilon - \boldsymbol{i}\,\beta\, v^\epsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{19}$$

我们将实部和虚部分别记为 $u_r^\epsilon := \mathrm{Re}(u^\epsilon)$、 $u_i^\epsilon := \mathrm{Im}(u^\epsilon)$、 $v_r^\epsilon := \mathrm{Re}(v^\epsilon)$ 和 $v_i^\epsilon := \mathrm{Im}(v^\epsilon)$。对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 η，噪声下对应的拓扑梯度定义为

$$\delta J^\epsilon(x) = u_i^\epsilon(x)\, v_r^\epsilon(x) - u_r^\epsilon(x)\, v_i^\epsilon(x), \quad x \in \Omega,$$

因此

$$\delta J^\epsilon \in L^2\big(\Omega_{\text{prob}}; L^2(\Omega)\big).$$

3.2 拓扑梯度的利普希茨稳定性

为了证明稳　　定性，我们首先考虑与任意狄利克雷边界　　ry 数据 $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

设 $u := u[f] \in H^1(\Omega)$ 和 $v := v[f] \in H^1(\Omega)$ 分别为状态系统和伴随系统的解

$$-\Delta u + \mu\, u = 0, \qquad \partial_\nu u + \boldsymbol{i}\,\beta u = g + \boldsymbol{i}\,\beta f \qquad \text{on } \partial\Omega, \tag{20}$$

$$-\Delta v + \mu\, v = -2\, u_i, \qquad \partial_\nu v - \boldsymbol{i}\,\beta\, v = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \tag{21}$$

其实部和虚部分别为 u_r， u_i， v_r， v_i。因此，拓扑梯度为

$$\delta J(x) = u_i(x)\, v_r(x) - u_r(x)\, v_i(x), \quad x \in \Omega.$$

下一个定理表明，拓扑梯度关于狄利克雷边界数据呈利普希茨连续依赖关系，并给出了严格界限，确保其在含噪测量下的鲁棒性（即在含噪测量下的稳定性）。

为简洁起见，给定两组边界数据 f_1 和 f_2，我们引入如下记号

$$X^1 := X[f_1], \qquad X^2 := X[f_2],$$

对于任意依赖于边界数据的量 X 。

The定理 3.1. 存在一个常数 $C = C(\Omega,\mu,\beta) > 0$，使得对于任意 $f_1, f_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，

$$\left\|\delta J^1 - \delta J^2\right\|_{L^2(\Omega)} \le C \left\|f_1 - f_2\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

特别是，对于含噪测量，

$$\mathbb{E}\Big[\left\|\delta J[f^\epsilon] - \delta J[f]\right\|_{L^2(\Omega)}\Big] \le C\, \mathbb{E}\Big[\left\|\epsilon\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big].$$

注记3.2（拓扑梯度的稳定性）。定理 *3.1* 表明映射 $f \longmapsto \delta J[f]$ 是从 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的利普希茨连续映射，即

$$\|\delta J[f_1] - \delta J[f_2]\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

换言之，狄利克雷边界测量数据中的微小扰动对 δJ 的影响至多为常数因子 C，从而确保能够可靠地检测电阻区域或夹杂域，并在含噪测量下保持数值稳定性。

为证明定理3.1，我们首先陈述正向解和伴随解关于 Dirichlet边界数据的 Lipschitz连续性。此性质直接源于状态对边界数据的连续依赖（见命题1.5），伴随解的情况也可通过类似论证得到。

引理3.3。存在常数 $C = C(\Omega,\ \mu,\ \beta) > 0$，其与边界数据无关，使得对于任意$f_1,\ f_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，方程(20)和(21) 的解满足

$$\left\|u^1 - u^2\right\|_{1,\Omega} + \left\|v^1 - v^2\right\|_{1,\Omega} \leq C\left\|f_1 - f_2\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

定理*3.1*的证明。令 $f^1,\ f^2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，并将相应的状态解和伴随解记为 $u^m,\ v^m \in H^1(\Omega)$，其中 $m = 1,\ 2$；其各自的实部和虚部分别为 $u_r^m,\ u_i^m,\ v_r^m,\ v_i^m$。于是

$$\delta J^1 - \delta J^2 = (u_i^1 - u_i^2)\, v_r^1 + u_i^2\,(v_r^1 - v_r^2) - (u_r^1 - u_r^2)\, v_i^1 - u_r^2\,(v_i^1 - v_i^2).$$

在二维情形下应用指数为 4 的 Hölder不等式，可估计上述右端的第一个乘积项为

$$\left\|(u_i^1 - u_i^2)\, v_r^1\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|u_i^1 - u_i^2\right\|_{L^4(\Omega)} \left\|v_r^1\right\|_{L^4(\Omega)}.$$

利用 Sobolev嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$（在二维情形下成立；见 [2, 定理 4.12，第 85页），可得

$$\left\|u_i^1 - u_i^2\right\|_{L^4(\Omega)} \leq C\left\|u_i^1 - u_i^2\right\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \left\|v_r^1\right\|_{L^4(\Omega)} \leq C\left\|v_r^1\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

因此，

$$\left\|(u_i^1 - u_i^2)\, v_r^1\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left\|u_i^1 - u_i^2\right\|_{H^1(\Omega)} \left\|v_r^1\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

$\delta J^1 - \delta J^2$ 中的其余项可用类似的方法估计。

由引理3. 3，解关于边界数据在 $H^1(\Omega)$上具有利普希茨连续依赖性，并且剩余均匀有界。结合这些估计可得

$$\left\|\delta J^1 - \delta J^2\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left\|f_1 - f_2\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

其中，$C > 0$ 仅取决于 Ω、μ、β以及解的均匀 $H^1(\Omega)$ 界。这证明了拓扑梯度的Lipschitz连续性。

□

3.3 随机噪声下的统计稳定性

确定性稳定性估计（定理3.1）保证，单次含噪测量产生的扰动拓扑梯度误差与噪声幅度成正比。现在，我们将这一结果扩展到统计框架，以量化存在多个独立测量数据时的收敛性和不确定性；见定理3.4。

令 $\{f_i^\epsilon\}_{i=1}^n \subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 表示关于狄利克雷数据的 n 个独立边界测量数据，其模型为

$$f_i^\epsilon = f + \epsilon_i,$$

其中 f 是精确的（无噪声）数据，而 $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$（如第 3.1 小节所定义）是在 $L^2(\Omega_{\text{prob}};\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ 中相互独立同分布（独立同分布）的随机场，满足

$$\mathbb{E}[\epsilon_i] = 0, \qquad \mathbb{E}\left[\left\|\epsilon_i\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right] < \infty.$$

对于每个实现 f_i^ϵ，我们计算相应的拓扑梯度 $\delta J[f_i^\epsilon] \in L^2(\Omega)$。经验（样本平均）梯度定义为

$$\overline{\delta J_n} := \mathcal{S}_i^n\{\delta J[f_i^\epsilon]\}, \qquad \mathcal{S}_i^n\{\cdot\} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \cdot.$$

我们的分析，尤其是定理 3.4 的证明，依赖于可分希尔伯特空间中的弗雷歇中心极限定理（中心极限定理）。设 H 为可分希尔伯特空间，且设 $\{X_i\}_{i=1}^n \subset H$ 为独立同分布的中心化随机元，并满足 $\mathbb{E}\Big[\|X_i\|_H^2\Big] < \infty$。那么

$$\mathcal{S}_i^n\{X_i\} \xrightarrow{d} Z \quad \text{in } H,$$

其中 Z 是 H 中的中心化高斯随机元，其协方差算子由 X_i 的共同分布决定（参见，例如 [44]）。

我们将此结果以 $H = L^2(\Omega)$ 应用于涨落变量

$$Y_i := \delta J[f_i^\epsilon] - \delta J[f],$$

它们表示含噪测量相对于其平均响应的偏差。

下面的定理建立了拓扑梯度的统计稳定性。

定理 3.4. 假设定理 *3.1*的条件成立，且 $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ 为独立同分布、具有零均值和有限方差。进一步假设噪声强度满足

$$\mathbb{E}\Big[\|\epsilon_i\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big] = o(1/\sqrt{n}). \tag{22}$$

则当 $n \to \infty$ 时，

$$\sqrt{n}\Big(\overline{\delta J_n} - \delta J[f]\Big) \xrightarrow{d} Z \quad in\ L^2(\Omega), \tag{23}$$

其中， Z 是一个协方差为

$$\mathrm{Cov}(Z(x), Z(y)) = \mathbb{E}\Big[Y_1(x)Y_1(y)\Big].$$

对于任意 $\Psi \in L^2$（Ω），

$$\sqrt{n}\left\langle \overline{\delta J_n} - \delta J[f], \Psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma_\Psi^2),$$

其方差满足

$$\sigma_\Psi^2 \le C^2\sigma_\epsilon^2 |\partial\Omega| \|\Psi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

推论 3.5。 在定理 *3.4*的假设下，定义

$$S_n := \left\langle \overline{\delta J_n} - \delta J[f],\ \Psi \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Then

$$\sqrt{n}\, S_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma_\Psi^2).$$

因此，对于任意置信水平 $1-\alpha \in$ （0，1），$\langle \delta J[f], \Psi\rangle_{L^2(\Omega)}$ 的渐近 （$1-\alpha$）置信区间为

$$\left[\left\langle \overline{\delta J_n},\ \Psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_\Psi}{\sqrt{n}},\ \left\langle \overline{\delta J_n},\ \Psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_\Psi}{\sqrt{n}}\right],$$

其中，$z_{1-\alpha/2}$ 表示标准正态分布的 $(1-\alpha/2)$ 分位数。

注 3.6. 推论*3.5* 提供了一种统计方法，用以确定投影拓扑梯度的符号，从而检测金属-半导体接触。具体而言，由经验平均 $\langle \delta J_n, \Psi\rangle_{L^2(\Omega)}$可得到$\langle \delta J[f], \Psi\rangle_{L^2(\Omega)}$ 的渐近$(1-\alpha)$ 置信区间。这使得如下假设检验成为可能

$$(\mathcal{H}_0): \quad \langle \delta J[f], \Psi\rangle_{L^2(\Omega)} \ge 0,$$

该检验仅当整个置信区间严格位于零以下时，才能在水平 α 下被拒绝。在此情形下，负的投影梯度可被解释为拓扑变化的统计显著证据，而非由测量噪声引起的波动。此外，中心极限定理所蕴含的 $n^{-1/2}$ 收敛速率表明，样本平均是一种有效的方差缩减策略，从而提高所推断接触区域的可靠性。

为证明定理 3.4，我们首先建立解算子关于边界数据的 Fréchet 可微性。

引理 3.7. 映射 $f \longmapsto u[f]$ 从 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 到 $H^1(\Omega)$ 是 ***Fréchet*** 可微的。此外，若 $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 是测量边界数据，且 $\tilde{\epsilon} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 是任意扰动，则

$$D_f u[f](\tilde{\epsilon}) = u[\tilde{\epsilon}].$$

引理 3.8. 映射 $f \longmapsto v[f]$ 从 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 到 $H^1(\Omega)$ 是 *Fréchet* 可微的。导数$D_f v[f](\tilde{\epsilon}) = \psi[\tilde{\epsilon}]$ 求解

$$-\Delta\psi + \mu\,\psi = -2\,u_i[\tilde{\epsilon}] \quad in\ \Omega, \qquad \partial_\nu\psi - \boldsymbol{i}\,\beta\,\psi = 0 \quad on\ \partial\Omega. \tag{24}$$

定义双线性算子 $b(w,v) \coloneqq w_2 v_1 - w_1 v_2$，对任意 $w = w_1 + \boldsymbol{i}\,w_2, v = v_1 + \boldsymbol{i}\,v_2 \in H^1(\Omega)$。于是

$$\delta J[f] = b(u[f], v[f]).$$

由于 b 是有界双线性算子，且解映射是 Fréchet 可微的，因此映射 $f \longmapsto \delta J[f]$ 是 Fréchet 可微的，其导数为

$$D_f \delta J[f](\tilde{\epsilon}) = b\big(u[\tilde{\epsilon}], v[f]\big) + b\big(u[f], \psi[\tilde{\epsilon}]\big). \tag{25}$$

有了上述结果，我们现在可以证明定理 3.4。

定理 *3.4* 的证明。令 $H = L^2(\Omega)$，并定义 $Y_i = \delta J[f_i^\epsilon] - \delta J[f]$。根据定理 3.1，$\|Y_i\|_H \le C\|\epsilon_i\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$。因此，$\mathbb{E}\Big[\|Y_i\|_H^2\Big] < \infty$。在 f 处作泰勒展开，得到 $Y_i = D_f\delta J[f](\epsilon_i) + R(\epsilon_i)$，其中 $\|R(\tilde{\epsilon})\|_H \le C\|\tilde{\epsilon}\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$。由于噪声是零均值的，

$$\|\mathbb{E}[Y_i]\|_H \le C\mathbb{E}\Big[\|\epsilon_i\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big] \overset{(22)}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

设 $\widetilde{Y}_i = Y_i - \mathbb{E}[Y_i]$ 表示中心化随机变量。它们在 H 中独立同分布且具有有限二阶矩，因此希尔伯特空间中心极限定理给出

$$\mathcal{S}_i^n\{\widetilde{Y}_i\} \xrightarrow{d} Z.$$

最后，

$$\mathcal{S}_i^n\{Y_i\} = \mathcal{S}_i^n\{\widetilde{Y}_i\} + \sqrt{n}\,\mathbb{E}[Y_i],$$

且偏差项由(22)消失，从而证明(23)。 □

我们以如下注记结束本节。

注 3.9. 中心极限定理为拓扑梯度关于测量噪声的稳健性提供了严格的统计学依据。

(i) 收敛(23) 表明经验均值收敛于真实梯度，从而证实了重建的渐近无偏性。

(ii) 对独立测量取平均的收敛速率 $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ 是最优的，并表明统计不确定性随样本数量增加而降低。

(iii) 小噪声条件 (22) 保证在极限 $n \to \infty$下非线性偏差项可以忽略，因此随机波动主导渐近行为。

4 形状敏感性分析

本节研究代价泛函 J的形状敏感性。拓扑梯度指出添加或移除小夹杂物最能降低泛函的区域，但无法捕捉界面形变的影响。形状敏感性分析对此进行补充，描述界面的平滑变化，从而实现更准确的几何重建。结合使用这两种方法可形成高效的优化策略：拓扑梯度识别潜在的拓扑变化，形状导数则进一步优化界面，以提高精度和收敛性。

令 $\mathcal{A}$ 表示子域的容许集：

$$\mathcal{A} \coloneqq \Big\{\omega \Subset \Omega \;\Big|\; |\omega| > 0,\ \partial\omega \in C^{1,1}\Big\},$$

并令 $\Omega_\circ \Subset \Omega$ 为一个固定的利普希茨子域，其选取足够大以包含所有容许夹杂物，即对于所有 $\omega \in \mathcal{A}$，$\omega \Subset \Omega_\circ \Subset \Omega$ 。这确保了 $\partial\omega$ 与 $\partial\Omega$ 之间存在统一的正距离，因此， ω 的容许形变由向量场给出

$$\Theta \coloneqq \{\theta \in C^{1,1}(\mathbb{R}^d)^d \mid \mathrm{supp}(\theta) \subset \Omega_\circ\}.$$

对于 $\theta \in \Theta$，扰动区域为 $\omega_t := T_t(\omega)$，其中 $T_t := \mathrm{Id} + t\,\theta$ 对恒等映射 $\mathrm{Id}: \Omega \to \Omega$ 进行扰动。由于 θ 是在 $\Omega_\circ \subset \Omega$ 中具有紧支撑的 $C^{1,1}$，当 $t > 0$ 足够小时，映射 T_t 是一个 $C^{1,1}$ 微分同胚，并保持 $\partial\Omega$ 不变；扰动界面为 $\partial\omega_t := T_t(\partial\omega)$。$\theta$ 在界面处的法向分量记为 $\theta_\nu := \langle \theta, \nu \rangle$。

以下结果刻画了状态 u在界面 $\partial\omega$的可容许扰动下的形状导数。

定理 4.1. 设 $\omega \in \mathcal{A}$ 和 $\theta \in \Theta$。则状态 $u \in H^1(\Omega)$ *((2)的解)* 在方向 θ上形状可微，其形状导数 $u' \in H^1(\Omega)$ 满足传输问题

$$\begin{cases} \Delta u' = \mu_0\, u' & \text{in } \omega, \\ \Delta u' = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{\omega}, \\ [\![u']\!] = 0, \qquad [\![\partial_\nu u']\!] = \mu_0\, u\, \theta_\nu & \text{on } \partial\omega, \\ \partial_\nu u' + \boldsymbol{i}\,\beta\, u' = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{26}$$

$[\![\cdot]\!]$ 表示跨越 $\partial\omega$的跳跃。等价地，在弱形式下，$u' \in H^1(\Omega)$ 满足问题 *4.2*。

问题 4.2. 给定状态 $u \in H^1(\Omega)$，求形状导数 $u' \in H^1(\Omega)$，使得 t

$$\hat{a}(u', w) = \hat{F}(w), \quad \forall w \in H^1(\Omega), \tag{27}$$

其中半双线性形式 $\hat{a}(\cdot,\cdot)$ 和线性形式 $\hat{F}(\cdot)$ 定义如下

$$\begin{aligned} \hat{a}(u', w) &:= (\nabla u', \nabla w)_{0,\Omega\setminus\overline{\omega}} + (\nabla u', \nabla w)_{0,\omega} + (\mu_0\, u', w)_{0,\omega} + \boldsymbol{i}\,\beta\,\langle u', w\rangle_{0,\partial\Omega}, \\ \hat{F}(w) &:= \int_{\partial\omega} [\![\partial_\nu u']\!]\,\overline{w}\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\omega} \mu_0\, u\, \theta_\nu\, \overline{w}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

问题 4.2 的适定性由复Lax–Milgram引理得出，定理 4.1 的证明与 [4] 中的证明思路相同，因此省略。

以下引理刻画了代价泛函 J 的一阶形状导数 .

引理 4.3。 令 $u = u_r + \boldsymbol{i}\,u_i \in H^1(\Omega)$ 为状态问题 (2) 在柯西数据 $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$和 $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$下的解。则代价泛函[1] $^-$

$$\mathcal{J}(\omega) := J(\mu_0\chi_\omega) = \int_\Omega u_i^2\,\mathrm{d}x$$

是形状可微的。其沿方向 $\theta \in \Theta$ 的形状导数为

$$d\mathcal{J}(\omega)[\theta] = \int_{\partial\omega} G\,\theta_\nu\,\mathrm{d}s, \tag{28}$$

其中 $G = \mu_0\,(u_i\,\vartheta_r - u_r\,\vartheta_i)$ 和 $\vartheta = \vartheta_r + \boldsymbol{i}\,\vartheta_i \in H^1(\Omega)$ 是伴随问题的解

$$\begin{cases} -\Delta\vartheta + \mu_0\,\vartheta = -2\,u_i & \text{in } \omega, \\ -\Delta\vartheta = -2\,u_i & \text{in } \Omega\setminus\overline{\omega}, \\ [\![\vartheta]\!] = 0, \quad [\![\partial_\nu\vartheta]\!] = 0 & \text{on } \partial\omega, \\ \partial_\nu\vartheta - \boldsymbol{i}\,\beta\,\vartheta = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{29}$$

(29) 的弱形式如下：

问题 4.4。 给定状态 $u \in H^1(\Omega)$，求 $\vartheta \in H^1(\Omega)$ 使得

$$a^\dagger(\vartheta, w) = F^\dagger(w), \quad \forall w \in H^1(\Omega), \tag{30}$$

其中，半双线性形式 $a^\dagger(\cdot,\cdot)$ 和线性形式 $F^\dagger(\cdot)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} a^\dagger(\vartheta, w) &:= (\nabla\vartheta, \nabla w)_{0,\Omega\setminus\overline{\omega}} + (\nabla\vartheta, \nabla w)_{0,\omega} + (\mu_0\,\vartheta, w)_{0,\omega} - \boldsymbol{i}\,\beta\,\langle\vartheta, w\rangle, \\ F^\dagger(w) &:= (-2\,u_i, w)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

问题 4.4 的适定性可由复数情形下的 Lax–Milgram 引理得出。

[1] $\Omega = \omega \cup \Omega\setminus\omega$ $\omega \cap \Omega\setminus\omega = \varnothing$ $\int_{\omega\cup\Omega\setminus\omega} \cdot = \int_\Omega \cdot$ $\int_\Omega \cdot = \int_\omega \cdot + \int_{\Omega\setminus\omega} \cdot$ $\int_\Omega \cdot =$ 由于 () 和 $\int_\Omega \chi_\omega + \chi_{\Omega\setminus\omega}$ · () ，我们有 () ，等价地， ，并且还有 () 。

引理的证明 4.3。由于代价泛函的支集与固定边界严格分离 $\partial\Omega$，扰动区域不会与 $\partial\Omega$相交。因此 $\mathcal{J}$ 是形状可微的。

应用形状导数的链式法则，我们得到

$$d\mathcal{J}(\omega)[\theta] = \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} 2\,u_i\,u_i'\,\mathrm{d}x + \int_{\omega} 2\,u_i\,u_i'\,\mathrm{d}x.$$

为将其表示为边界积分，我们用伴随解 ϑ检验（26）。在每个子区域上进行分部积分可得

$$(\nabla u', \nabla\vartheta)_{0,\Omega\setminus\overline{\omega}} + (\nabla u', \nabla\vartheta)_{0,\omega} + (\mu_0\,u', \vartheta)_{0,\omega} + \int_{\partial\omega} [\![\partial_\nu u']\!]\,\overline{\vartheta}\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{i}\,\langle u', \vartheta\rangle = 0, \tag{31}$$

其中，$\partial\Omega$ 上的边界项解释为 $H^{-\frac{1}{2}}$–$H^{\frac{1}{2}}$ 对偶配对。

类似地，取 u' 作为（30）中的试验函数，并应用分部积分，我们得到

$$a^\dagger(\vartheta, u') = F^\dagger(u'). \tag{32}$$

从（32）中减去方程（31）的复共轭，并使用 $[\![\partial_\nu u']\!] = \mu_0\,u\,\theta_\nu$在 $\partial\omega$上的跳跃条件，可得

$$\int_{\Omega} 2\,u_i\,u_i'\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{Im}\Big\{\int_{\partial\omega} \mu_0\,\overline{u}\,\vartheta\,\theta_\nu\,\mathrm{d}s\Big\} = \int_{\partial\omega} \mu_0\,(u_i\,\vartheta_r - u_r\,\vartheta_i)\,\theta_\nu\,\mathrm{d}s,$$

从而得到边界表达式（28）。 □

注 4.5。 上述推导假设 $\partial\omega \in C^{1,1}$ 且 $\theta \in C^{1,1}_c(\Omega_\circ)$，这保证了法向量和扰动界面是逐点定义的。对于弱形式，只需满足 $\partial\omega$ 是利普希茨的，且 $\theta \in W^{1,\infty}_c(\Omega_\circ)^d$，从而 $T_t = \mathrm{Id} + t\theta$ 是双利普希茨映射，且形状导数在弱意义下有定义。在这些最小假设下，可通过重排方法严格地求得代价泛函的形状导数 [38, 39]。

注 4.6。 与拓扑梯度的表达式 (11)类似，形状梯度 (28)的结构不依赖于自由参数 $\beta > 0$。不过，该参数可以改善重建效果，尤其是在采用形状优化时。在以下各节所呈现的数值实验中，除非另有说明，我们取 $\beta = 200$。

5 基于拓扑梯度的重建

我们通过具体的数值算例展示问题 1.6，并利用拓扑梯度（11）通过非迭代的单次算法（算法 1）重建未知区域。

5.1 拓扑识别算法与计算设置

该算法从空配置 $\omega = \emptyset$ 开始，对应于 $\mu = 0$。

算法 1 单次拓扑识别算法

0. 具体 fy 区域 Ω、夹杂系数 μ_0、柯西数据（f，g）以及噪声水平 δ（如适用）

1. 求解状态问题：

$$-\Delta u[0] = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u[0] + \boldsymbol{i}\beta\,u[0] = g + \boldsymbol{i}\beta\,f \quad \text{on } \partial\Omega.$$

2. 求解伴随问题：

$$-\Delta v[0] = -2\,u_i[0] \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu v[0] - \boldsymbol{i}\beta\,v[0] = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

3. 计算拓扑梯度：

$$\delta J[0](\xi) := u_i[0](\xi)\,v_r[0](\xi) - u_r[0](\xi)\,v_i[0](\xi), \qquad \xi \in \Omega.$$

4. 定位 $\delta J[0]$ 的负局部极小值，以估计接触区域。

一般计算设置如下。计算域为单位正方形 $[-0.5, 0.5]^2$。通过使用精确的夹杂几何ω求解正问题，生成合成柯西数据（g， f）。为避免逆问题犯罪（见 [43, 第 154] 页），正问题使用 $\mathbb{P}_2$ 有限元在细 200×200 网格 $\mathcal{T}_h^\star$ 上求解，而反演则在较粗的 100×100 网格 $\mathcal{T}_h$ 上使用 $\mathbb{P}_1$ 个单元进行。通过扰动正问题的解来引入噪声，以评估鲁棒性： $u^\delta = \big(1 + \delta \mathrm{g。n.}\big)u$，其中"g.n"表示零均值、标准差为 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 的高斯噪声，而 δ 表示噪声水平。相应的含噪边界测量为 $f|_{\partial\Omega} = u^\delta|_{\partial\Omega}$。所有计算均使用 FreeFem++[32] 完成，运行于配备 Apple M1 芯片和 16 GB 内存的 MacBook Pro 上。

备注5.1. 采用一次性拓扑梯度算法估计未知接触区域ω。将 ω 的位置取为 $\xi^\star = \mathrm{argmin}_{\xi\in\Omega}\, \delta J[0](\xi)$，对应于拓扑梯度的最负值；而重建区域的大小则根据 $\delta J[0]$的适当水平集推断。需要强调的是，这种方法是一种启发式方法：它无需迭代优化，即可简单且高效地估计位置和大小。类似的拓扑梯度方法已成功应用于多种反演检测问题 *[9, 26, 34, 40, 56]*。

极小值区域的检测与可视化。 在非结构化三角剖分上计算分布式拓扑梯度，并通过算法将候选极小值识别为严格为负、局部极小且相对于网格上有限环邻域严格凸的节点值。采用并查集激活策略，以确保检测过程中连通分量的一致性，并减少伪极小值。

检测到的接触区域中心通过对已识别局部极小值的位置取平均来近似估计。根据这些极小值相对于拓扑梯度全局范围的深度差异，以启发式方式推断有效半径；该半径应视为尺寸的定性指标，而非精确的几何估计。

为便于可视化，显示了拓扑梯度的一组密集等值线。此外，对于每个检测到的极小值，将最低等值区域——由极小值和第一个等值线级别所界定——填充颜色，从而突出相应的吸引盆，同时保留整体等值线结构。

5.2 使用拓扑梯度的数值示例

图 2 中的结果表明，拓扑梯度法能够在不同半径和位置下可靠地定位单个圆形接触区域。黑色曲线表示真实的接触区域边界，洋红色标记表示检测到的拓扑梯度局部极小值。在所有情况下，全局最小值都非常接近真实中心，证实了定位步骤的稳健性。青色等值区域描绘了与各极小值相关联的吸引盆，并提供了一种实用的接触区域尺寸估计方法。不过，尺寸估计的准确性取决于所选阈值（见图 2(g)–(h)），尤其是对于非常小的接触区域或位于边界附近的接触区域。

图 3 展示了电阻率对比度对拓扑梯度分布的影响。对比度越高，极小值越深且局部化越明显；对比度越低，曲线越平坦，检测能力也越弱。此前已在 [51, 53] 等热成像和阻抗成像模式中采用这种夹杂定位策略。在本研究中，我们将这一方法用于推断接触区域的位置，并改进多个接触区域的算法初始化。一维切片进一步表明，极小值的深度与接触区域强度相关，但无法据此唯一确定接触区域尺寸。

图 4–6考察了多个子区域的检测。对于两个中等大小的接触区域（图 4），两个清晰分离的极小值与真实子区域明确对应，而显著极小值的数量可可靠地估计接触区域的数量。当接触区域变得极小时（图 5），相应的极小值更浅，也更容易受到边界效应影响。在这种情况下，边界输入的选择起着重要作用：空间变化激励（例如 $g = |x|$）可能提高特定区域的灵敏度，并改善彼此相邻的小型接触区域的分离效果。

尺寸不等会引入额外的不对称性（图6）。较大的接触区域会在梯度场中产生更深、更宽的势阱，而较小的接触区域则产生较弱的特征。靠近边界可能会扭曲梯度景观，并使表观极小值略微向内偏移，这表明在定量解读时必须考虑边界相互作用。

图中展示了扩展至三个接触区域的情形 7。对于尺寸不等的情况，梯度景观呈现出三个深度明显不同的极小值，反映了尺寸差异。对于三个尺寸相等的中等大小接触区域，仍可见三个彼此清晰分离的势阱，表明该方法能够较好地扩展至中等规模的多区域情形。然而，当接触区域尺寸相等且较小时，极小值变得不那么明显，盆地开始重叠。尽管仍可识别出三个局部极小值，但它们之间的分离程度降低，合并的风险随之增加。这些结果表明，尽管

主导极小值的数量通常与接触区域的数量相关，但随着尺寸减小或接触区域彼此靠近，这种对应关系会减弱。

图8 评估了在 10% 受污染测量下的稳健性。梯度场的整体结构得以保留，对于大小不等且中等尺寸的接触区域，仍能检测到主要极小值。然而，噪声会引入伪振荡和浅局部极值，尤其是在边界附近。对于较小的接触区域，真实极小值与噪声诱发伪影之间的对比度显著降低，使识别变得更加困难。尽管有所退化，主要势阱仍位于真实子区域附近，表明该方法对中等程度测量噪声具有令人满意的稳定性。

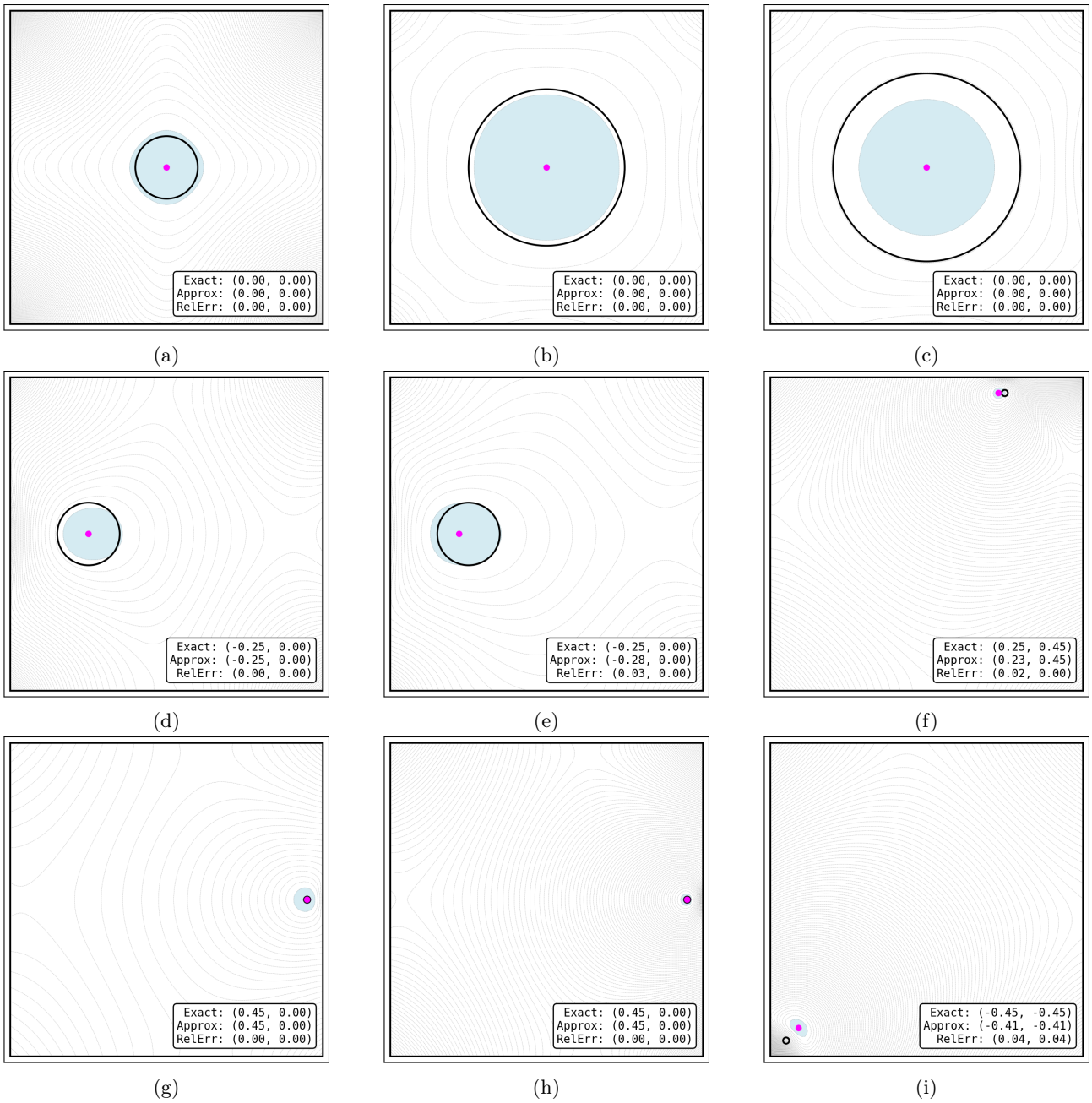


图2：(a)–(i)：九个具有 $g = 1$ 的代表性简单情形。

总之，数值实验表明，拓扑梯度是一种可靠且计算高效的初步定位工具。在尺寸和对比度适中的配置中，显著极小值的数量通常反映接触区域的数量。然而，这种对应关系并非严格一一对应：接触区域之间的距离、尺寸差异、边界效应、激励选择和测量噪声都可能导致极小值合并、变形或变弱。因此，尽管拓扑梯度能够提供稳健的定性定位，但在复杂或噪声较大的多区域情形中，要准确计数并确定尺寸，仍需借助补充信息或后续细化程序。

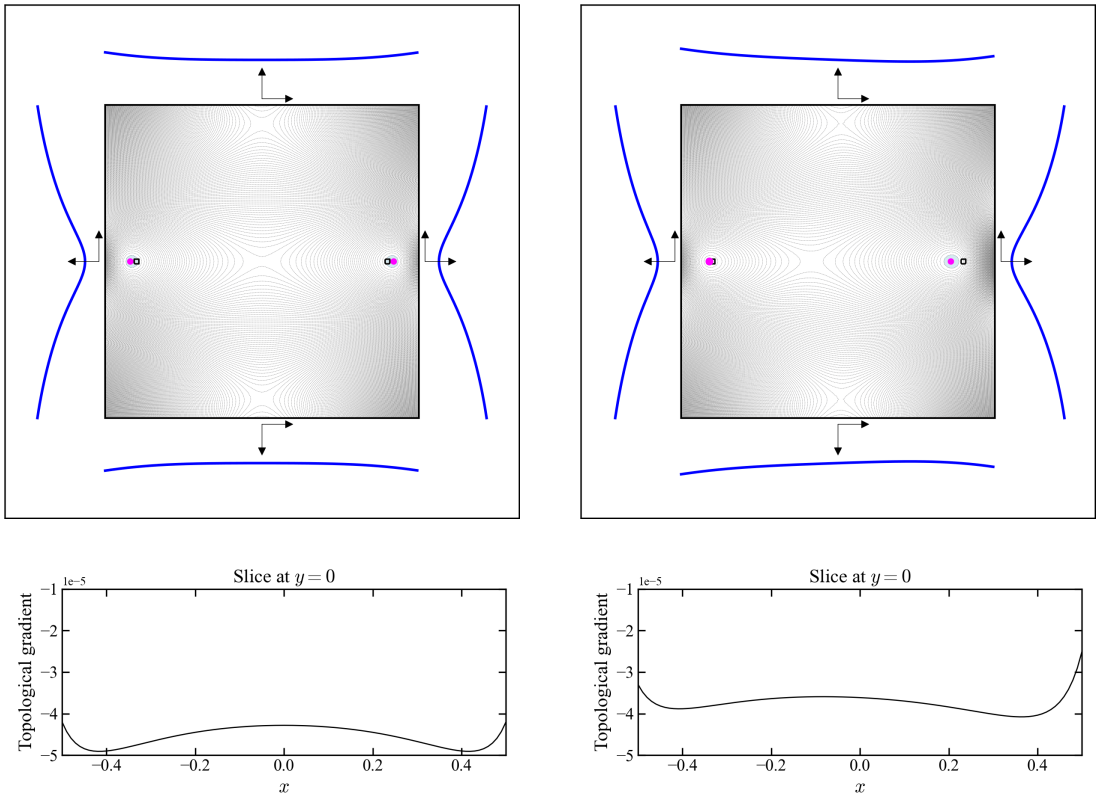


图3：电阻率对拓扑梯度分布的影响

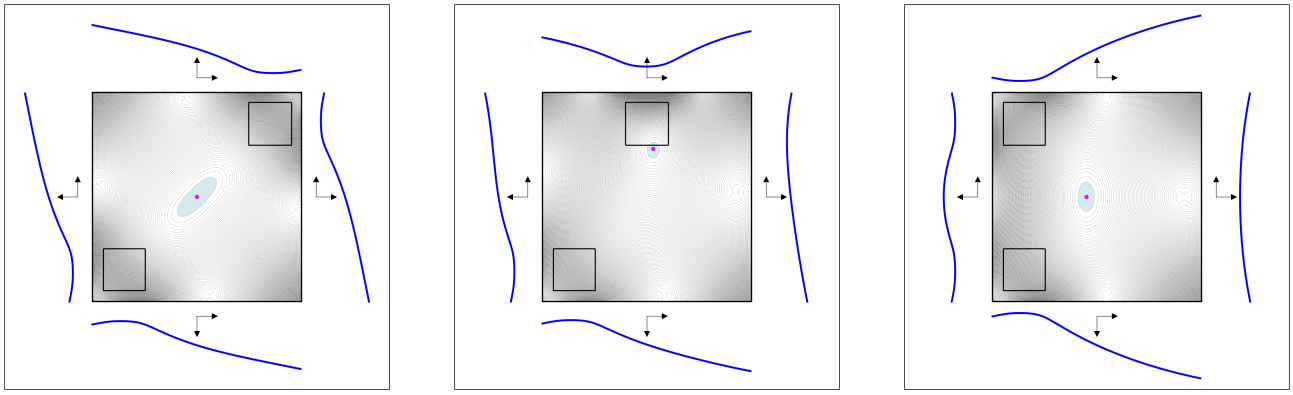


图4：使用 $g = 1$ 检测两个中等大小的子区域。蓝色曲线表示测得的边界电势；正 x 方向和正 y 方向由直角箭头标示。

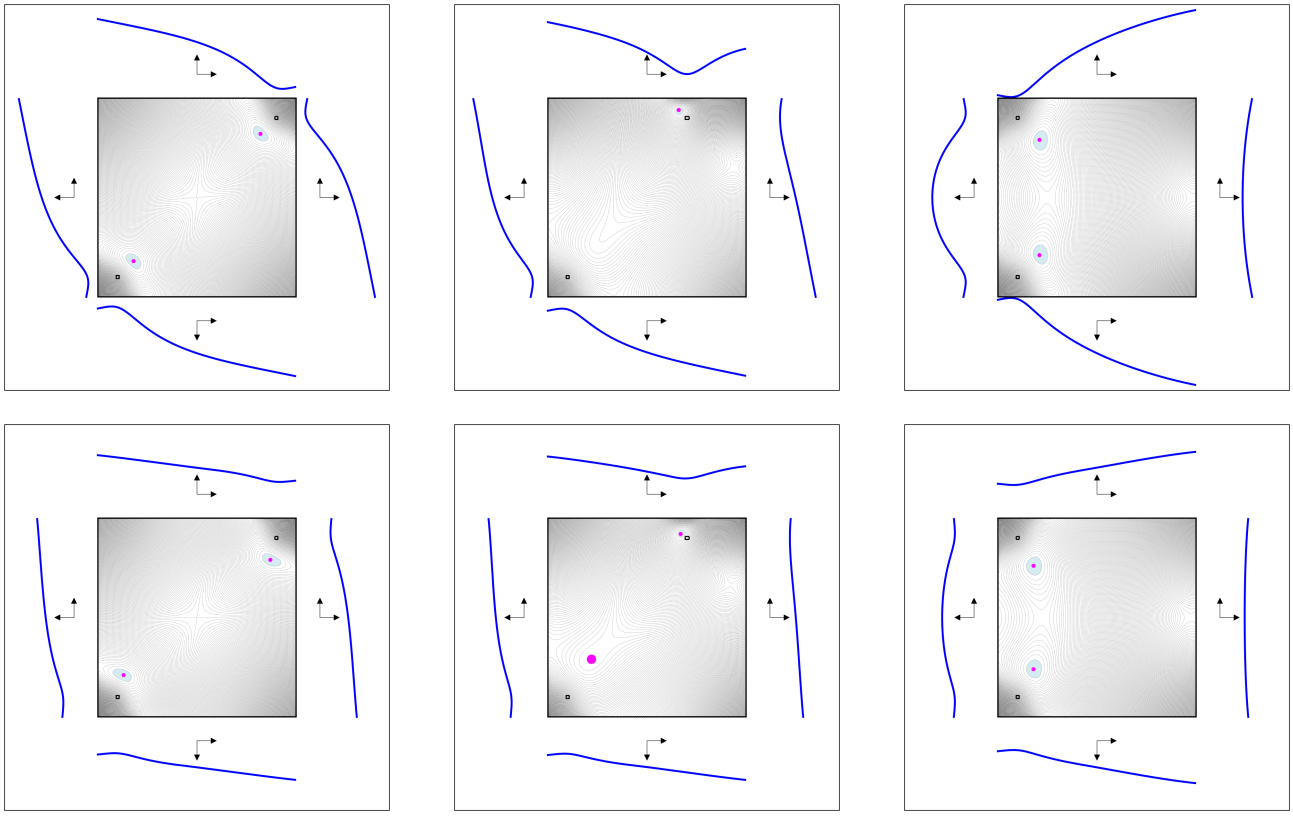


图5：使用 $g = 1$ （上）和 $g = |x|$（下）对两个极小尺寸子区域的检测比较。

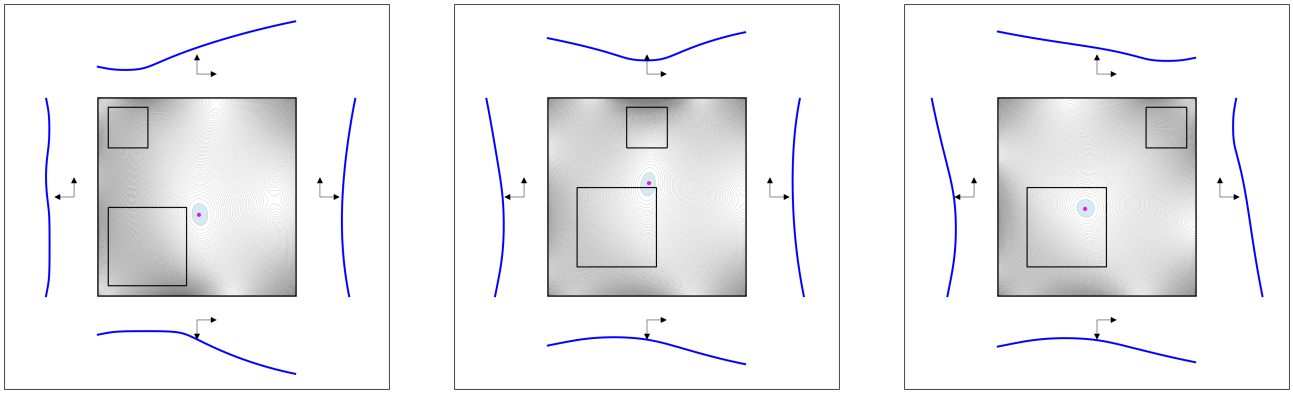


图6：使用 $g = 1$ （上）对尺寸不等的子区域的检测比较。

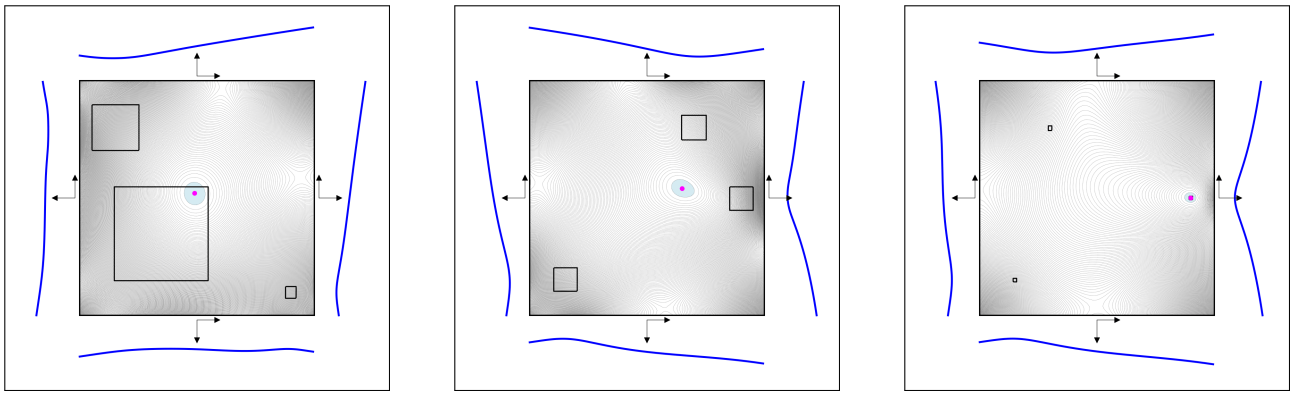


图7：使用 $g = 1$对三个子区域的检测比较。

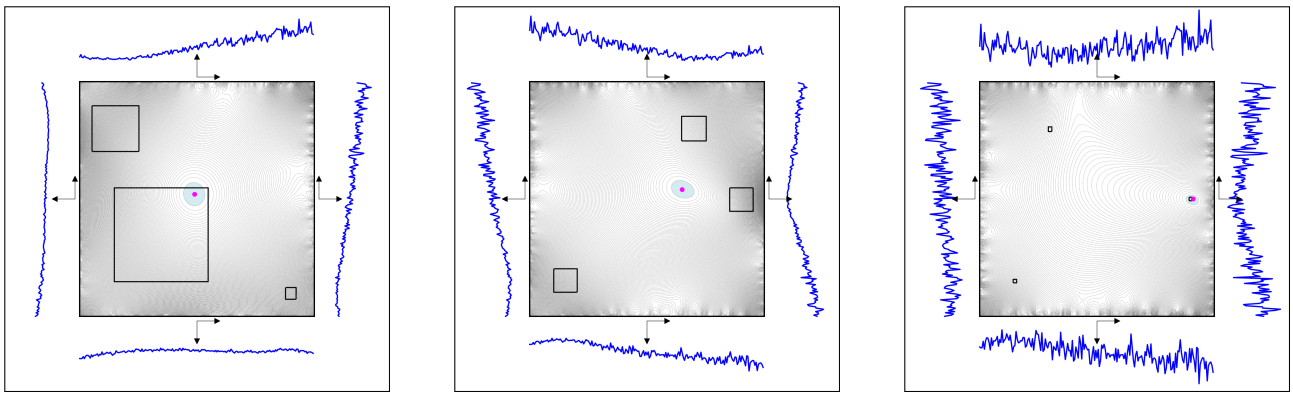


图8：使用 $g = 1$ （上图）检测三个子区域的结果对比，测量数据中含有10%的污染。

5.3 接触区域的统计检测

我们提出了一种数值框架，用于在存在测量噪声的情况下对接触区域进行统计识别 $\omega \Subset \Omega$ 。该方法结合拓扑梯度的计算与根据推论3.5导出的统计决策准则。

主要思路是在每个候选点（x_i， y_j） $\in \Omega$处，评估局部化投影的符号

$$\langle \delta J, \Pi_{i,j} \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

负值表明在该位置引入一个小夹杂会降低代价泛函，这被视为存在接触的证据。

相应的统计假设检验为

$$(\mathcal{H}_0) : \langle \delta J, \Pi_{i,j} \rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0, \qquad (\mathcal{H}_1) : \langle \delta J, \Pi_{i,j} \rangle_{L^2(\Omega)} < 0.$$

因此，拒绝 $(\mathcal{H}_0)$ 表明在 $(x_i,\ y_j)$ 处存在接触，且具有指定的置信水平。由于只能获得梯度的含噪实现，因此采用蒙特卡罗抽样进行检验。

数值过程包括以下步骤。

步骤 *1*：初始化。

- 生成计算网格 $\mathcal{T}_h$ 和 $\mathcal{T}_h^\star$。

- 指定参考接触区域 ω 和物理参数。

步骤 *2*：参考计算（无噪声情形）。我们计算与边界数据 f 对应的参考正向场和伴随场，基本遵循算法 1 的步骤 1–3。

步骤 *3*：含噪数据下的蒙特卡罗抽样。为量化测量噪声引起的变异性，我们生成具有指定标准差的独立扰动 ϵ^n 。对于每个实现$n = 1,\ \ldots,\ N_{\mathrm{mc}}$:

- 使用扰动边界数据 $f + \epsilon^n$ 求解状态问题。

- 求解相应的伴随问题。

- 计算含噪拓扑梯度

$$\delta J_n = u_i[f + \epsilon^n]\, v_r[f + \epsilon^n] - u_r[f + \epsilon^n]\, v_i[f + \epsilon^n].$$

这会生成一族随机场 $\{\delta J_n\}$，用于近似梯度的分布。步骤 *4*：局部统计评估。我们引入一组扫描点

$$\{(x_i, y_j)\}_{i,j=1}^{N_{\mathrm{scan}}} \subset \Omega,$$

并定义局部化试验函数

$$\Pi_{i,j}(x, y) = \exp\Big(- \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_j)^2}{\varsigma^2} \Big),$$

其中 ς 控制空间分辨率。

对于每个 (x_i, y_j):

- Compute projections $\delta J_n^{(i,j)} = \int_\Omega \delta J_n \, \Pi_{i,j} \, \mathrm{d}x$.

- 计算经验均值和标准差

$$\overline{\delta J}^{(i,j)} = \frac{1}{N_{\mathrm{mc}}} \sum_{n=1}^{N_{\mathrm{mc}}} \delta J_n^{(i,j)}, \qquad s^{(i,j)} = \sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{mc}}-1} \sum_{n=1}^{N_{\mathrm{mc}}} \left(\delta J_n^{(i,j)} - \overline{\delta J}^{(i,j)}\right)^2}.$$

- 构造渐近置信区间

$$\mathrm{CI}_{1-\alpha}^{(i,j)} = \left[\overline{\delta J}^{(i,j)} - z_{1-\alpha/2} \frac{s^{(i,j)}}{\sqrt{N_{\mathrm{mc}}}}, \quad \overline{\delta J}^{(i,j)} + z_{1-\alpha/2} \frac{s^{(i,j)}}{\sqrt{N_{\mathrm{mc}}}}\right].$$

步骤 *5*：统计决策与可视化。当置信上界为负时，拒绝原假设：

$$\overline{\delta J}^{(i,j)} + z_{1-\alpha/2} \frac{s^{(i,j)}}{\sqrt{N_{\mathrm{mc}}}} < 0.$$

满足此条件的点被归类为接触，置信水平为 $1-\alpha$。

该图

$$(x_i, y_j) \longmapsto \overline{\delta J}^{(i,j)} + z_{1-\alpha/2} \frac{s^{(i,j)}}{\sqrt{N_{\mathrm{mc}}}}$$

因此提供了 ω 位置的空间置信指标。

备注 5.2。高斯检验函数

$$\Pi_{i,j}(x,y) = \exp\Big(-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_j)^2}{\varsigma^2}\Big)$$

用于在每个扫描点周围实现平滑的空间定位。通过对拓扑梯度进行局部平均，这一选择提高了数值稳定性，并降低了对噪声的敏感性。

所提出的流程通过结合确定性拓扑梯度与蒙特卡洛抽样来考虑测量噪声，从而稳健地识别接触区域 ω。对于每个网格点 $\{(x_i,\ y_j)\}_{i,\ j=1}^{N_{\mathrm{scan}}}$，根据中心极限定理构造置信区间。置信上界

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{upper}}^{(i,j)} = \overline{\delta J}^{(i,j)} + z_{1-\alpha/2} \frac{s^{(i,j)}}{\sqrt{N_{\mathrm{mc}}}} \tag{33}$$

为负的点表示在置信水平 $1-\alpha$ 下检测到接触的位置。因此，所得检测图能够识别 ω 的可能位置，同时量化相关的不确定性。

通过重建图 2a所示的接触区域，评估所提出的统计拓扑梯度的性能。该区域为一个圆，圆心位于 $(0,\ 0)$，半径为 0.1。更具体地说，为了勾勒出最显著的接触区域，即“置信区域”，我们识别所有统计拓扑梯度为负的点。在这些位置，原假设 $(\mathcal{H}_0)$在 95% 置信水平下被拒绝（即$\alpha = 0.05$），对应于标准正态分布的临界值 $z_{1-\alpha/2} = 1.96$。在这一子集中，与全局最小值相差不超过5%的点构成“最负红色区域”，突出显示接触最强的区域。所得结果如图 9所示。

图 10 展示了投影拓扑梯度的蒙特卡洛收敛。为量化收敛情况，我们将每个扫描点 $(x_i,\ y_j)$ 处的误差定义为

$$\mathrm{Err}_{i,j}(n) = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \langle \delta J_k, \Pi_{i,j} \rangle - \langle \delta J, \Pi_{i,j} \rangle \right|.$$

从理论角度来看，中心极限定理预测，该误差以 $N_{\mathrm{mc}}^{-1/2}$ 的速率递减，因为经验均值的方差按 $1/N_{\mathrm{mc}}$ 的比例缩放。从数值结果来看，计算得到的误差曲线证实了这一规律：它在双对数尺度上近乎线性递减，并与参考斜率平行。两者高度吻合，表明该数值过程具有统计稳定性，且蒙特卡罗平均以理论预期的速率收敛。

更多统计检测实验见图 11–13。这些图展示了采用 $(\delta,\ N_{\mathrm{mc}},\ N_{\mathrm{scan}}) = (0.1,\ 100,\ 40)$得到的检测图。根据备注 5.1中概述的检测原理，高亮区域（以浅蓝色显示）对应于满足上置信$(x_i,\ y_j)$ 的扫描点

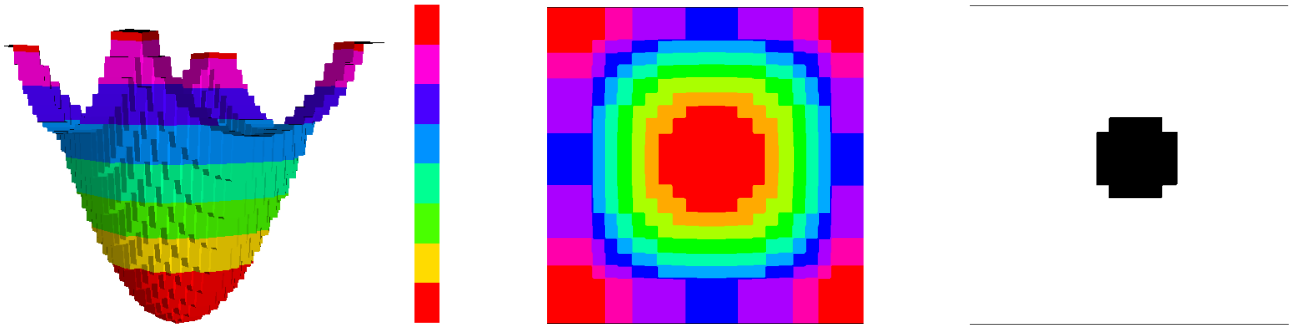


图 9：接触区域的统计检测 ω：(a) 拓扑梯度最负的点，(b) 排除 ($\mathcal{H}_0$) 的置信区域，以及 (c) 突显最强接触的筛选后的红色区域。此处，$\delta = [0., 0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1]$ 和 $(N_{\mathrm{mc}},\ N_{\mathrm{scan}}) = (100,\ 20)$。

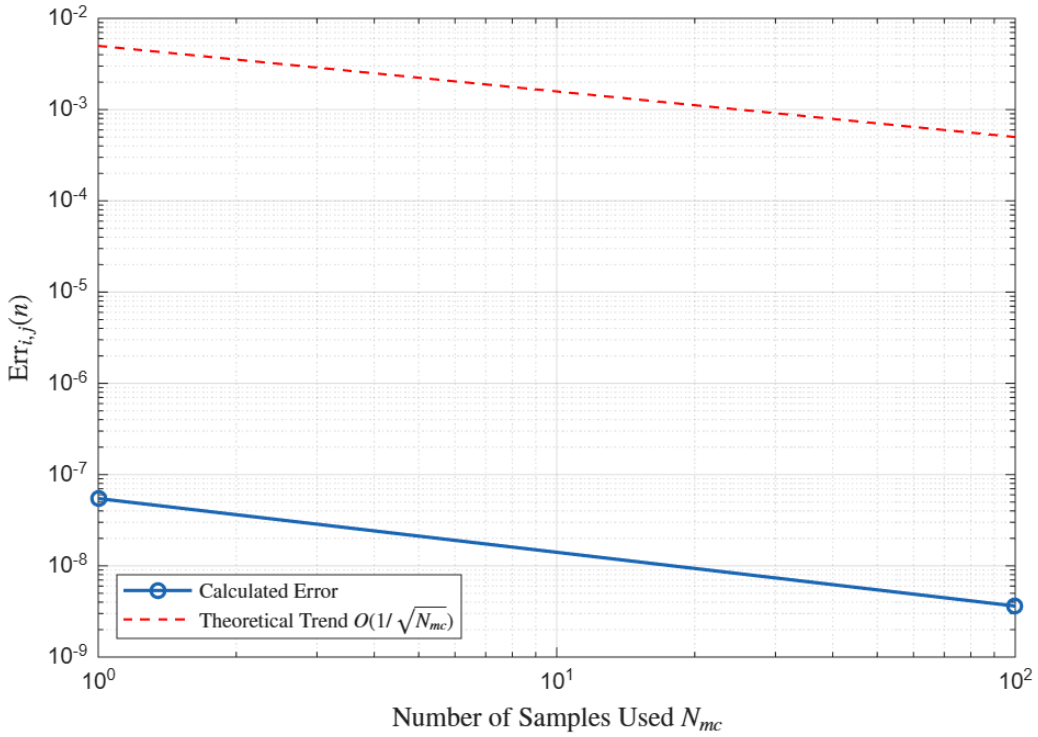


图 10：投影拓扑梯度的蒙特卡洛收敛。

界（33）为负值，即在置信水平 $1-\alpha$下检测到接触的位置。拓扑梯度的最负值以洋红色点标示。在存在多个局部极小值的配置中，可能会出现多个等值区域，反映出极值点的多重性。

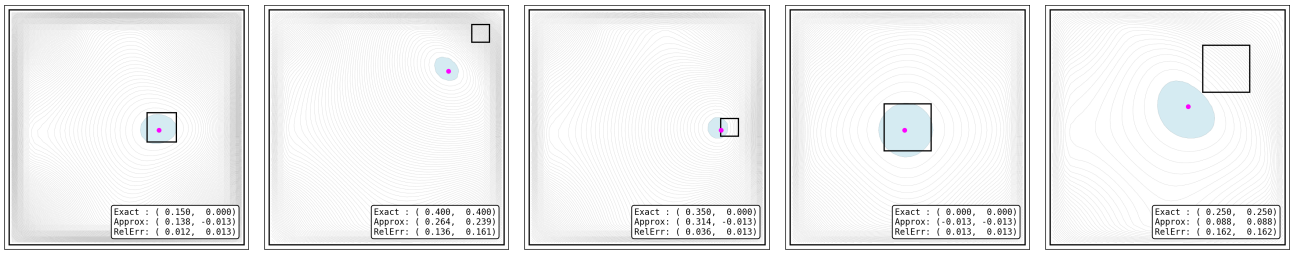
在图 11中，子图 11a–11e显示，该方法能够在不同位置和尺寸下正确定位单个接触区域。对于位于中心的夹杂物（例如图 11a、11d），置信区域紧凑且近乎对称。当正方形向边界移动时（例如图 11b 和 11e），定位质量会下降，拓扑梯度的极值不再出现在夹杂物的真实位置。在这些配置中，极小值会偏离精确位置；这种现象在无噪声情况下也已观察到，因此似乎源于几何效应，而非统计方差。

图12，子图12a–12e表明，该流程能够识别多个彼此分离的接触区。当夹杂物相距较远时（例如，图12c、12d），会出现两个不同的置信区域，分别位于相应方形附近。随着夹杂物间距减小（例如，图12a、12b），检测到的区域会出现部分相互作用，但仍明显呈双峰分布。这一行为与投影拓扑梯度的线性特性一致，也证实尽管存在全局场相互作用，统计检验仍在局部发挥作用。

在图13中，针对日益不对称的布局考察了三个接触区。对于间隔适中的配置（例如，图13a–13b），该方法能够分辨出三个具有统计显著性的独立区域。当夹杂物靠近边界或位于角落附近时（例如，图13d–13e），检测到的区域仍保持局部性，但会沿底层灵敏度场的方向呈各向异性拉长。未观察到系统性过度检测，这表明蒙特卡罗方差估计足以支持 N_{mc} =100 在噪声水平 $\delta = 0.1$下。

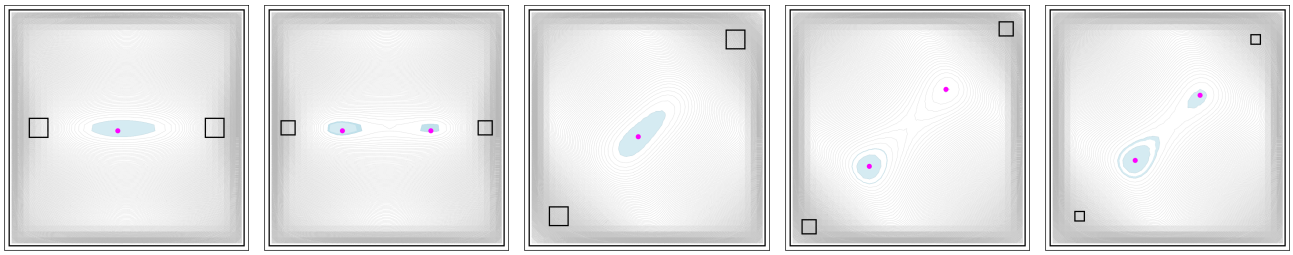
在测试的各种配置中，该方法能够识别出数量正确且彼此充分分离的接触分量，以符合扫描网格分辨率（$N_{\mathrm{scan}} = 40$）的空间精度对其进行定位，并在中等程度的加性噪声下保持稳健。

置信区域的大小反映了高斯投影与估计梯度的统计变异性的综合影响。结果与基于中心极限定理的统计决策规则一致，并表明所提出的框架能够为所考虑场景中的接触检测提供具有空间分辨率的不确定性信息。



(a) (b) (c) (d) (e)

图 11：单正方形构型的结果，其中 $(\delta,\ N_{\mathrm{mc}},\ N_{\mathrm{scan}}) = (0.1,\ 100,\ 40)$。



(a) (b) (c) (d) (e)

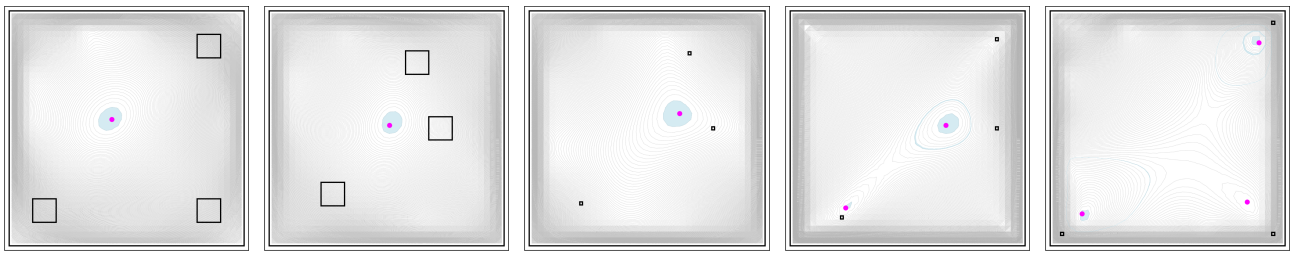
图 12：双正方形构型的结果，其中 $(\delta,\ N_{\mathrm{mc}},\ N_{\mathrm{scan}}) = (0.1,\ 100,\ 40)$。

6 通过形状优化进行重建

6.1 界面变分的数值算法

区域 ω 通过界面变分进行更新，遵循标准形状优化流程 [21]。为稳定边界更新并抑制振荡，我们计算形状梯度的里斯表示 G 通过求解

$$(\nabla\theta, \nabla\varphi)_{\Omega} + (\theta, \varphi)_{\Omega} = -\langle G\nu, \varphi\rangle_{\partial\omega}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)^d. \tag{34}$$



(a) (b) (c) (d) (e)

图 13：三方形配置（δ，N_{mc}，N_{scan}）=（0.1，100，40）的结果。

由此得到光滑化的索博列夫梯度 $\theta \in H_0^1(\Omega)^d$，其支撑于 $\partial\omega$ 并延拓至整个区域。该延拓使计算网格能够自然变形，从而使边界节点与内部节点一致地移动。

设 $\Omega_h^{[k]}$ 表示第 k 次迭代时的当前三角剖分域，网格尺寸为 h。通过沿变形场 $\theta^{[k]}$移动每个网格节点，得到更新后的区域 $\Omega_h^{[k+1]}$，即

$$\Omega_h^{[k+1]} := \left\{ x + t_h^{[k]} \theta^{[k]}(x) \;\middle|\; x \in \Omega_h^{[k]} \right\},$$

其中，$t_h^{[k]} > 0$ 是第 k 次迭代的步长。该步长通过回溯线搜索计算，并在每个伪时间步开始时以 [54] 作为初始值

$$t_h^{[k]} = s \, \frac{\mathcal{J}(\omega_h^{[k]})}{\|\theta^{[k]}\|^2_{H^1(\Omega)^d}},$$

其中，$s > 0$ 是预设的缩放因子。根据需要进一步调整步长 $t_h^{[k]}$，以防止网格反转或退化。该更新应用于所有网格节点，包括边界节点和内部节点，从而确保三角网格平滑变形。

需要指出的是，形状优化重建以拓扑梯度为初始条件，拓扑梯度提供了接触区域的初步定位；同时结合各边界部分上测量电势的分布，这也表明了接触区域可能的数量及其大致位置。这些信息相结合可改善收敛，并降低遗漏或合并小型子区域的风险。参见备注 6.1。

在此框架中，形状优化本质上属于拉格朗日方法，因为网格节点的位置充当更新区域的控制变量。

在我们的数值实验中，没有进行自适应重新网格化或显式重新网格划分，因为对于所研究的问题，直接进行网格移动已足够。不过，我们注意到，对于其他配置或更具挑战性的几何形状，每隔几次迭代进行重新网格划分可能有助于提高精度，尽管在我们的案例中并无必要。

当 $t_h^{[k]} < t_0$ 时，迭代停止；其中 $t_0 > 0$ 是预设容差，用于防止网格发生过度变形并确保数值稳定性；或者，当达到最大迭代次数时停止。尽管在特定应用中其他停止准则可能更合适，但这一简单选择已能得到合理的重建结果，而且在实践中，迭代会收敛到稳态形状。该过程为一阶形状优化提供了稳定且网格一致的区域更新。

注释6.1。 在当前的重建过程中，采用拉格朗日框架，根据形状梯度更新网格节点。因此，区域的拓扑得以保持，不会发生拓扑变化（例如夹杂物的生成或合并）。为了估计夹杂物的数量，可以辅以额外分析。除拓扑梯度外，还会考察测量势的一维边界剖面。夹杂物可能会在与其内部位置对齐的边界点附近引起局部极值（通常为极小值）。对于检测到的每个极小值，考虑边界的内法线，并分析这些法线在区域内的交点。交点簇可能指示候选夹杂物位置：单个交点簇可能表明存在一个夹杂物，而多个不同的交点簇则可能表明存在多个夹杂物。

6.2 使用形状梯度信息的数值示例

现在，我们通过涉及单个和多个接触区域的配置，展示所提出的形状梯度方法在精确测量和含噪测量下的表现。

对于单个接触区域（图14a–d），在精确测量数据（$\delta = 0$）下，界面得以准确重建。在含噪测量（$\delta = 0.1$）下，重建结果仍接近真实界面，

仅表现出轻微的边界扰动。非恒定边界数据 $g = |x|$ 与 $g = 1$相比，定位效果略有改善。

对于两个大小相等的对称接触区域（图 14e–h），两个组分均得到正确识别并实现分离。当 $\delta = 0$时，重建界面与精确形状高度吻合；在含噪测量下仍能保持良好的定位，仅出现轻微的边界平滑。

对于两个大小不等的接触区域（图14i–l），在无噪声情况下，两个组分均得到良好重建。在含噪测量下（$\delta = 0.1$），较大的区域能够被准确恢复，而较小的区域偏差更大，这反映出小型几何特征对噪声具有更高的敏感性。

对于三个接触区域（图14m–p），该方法从不同的初始猜测出发，均收敛到三个相互独立的组分。

总体而言，在所有配置下，该方法均保持了正确的拓扑结构和接触区域分离性，维持了平滑的界面，并在无需重新网格划分的情况下实现稳定收敛，展现出对中等噪声的鲁棒性。

6.3 自由参数 β 的影响

图 15 和 16 中的数值结果展示了自由参数 β、初始构型、几何复杂性与测量噪声之间的相互作用。尽管 β 对拓扑优化阶段的影响可以忽略，但其在后续的形状优化步骤中发挥着重要作用，并会影响最终的几何精度。

在 $\beta = 1$ （图 15）的精确测量条件下，重建结果并不理想。尽管有时能够检测到接触区域的大致位置，但其尺寸和边界形状仍存在显著偏差。尤其是，凹形特征难以准确解析，这表明即使没有噪声，较小的 β 值也不足以实现精确的几何重建（$\delta = 0$）。

对于 $\delta = 0.1$ 且 $\beta = 200$ （图 16）的含噪测量，不同配置下的整体重建质量均有所提高。特别是，与 $\beta = 1$ 的情况相比，重建出的形状更接近真实几何形状（例如，参见图 16a 和 16b 与图 15b的对比）。在若干示例中，界面的凹陷部分解析得更加清晰，这与含噪测量条件下重建质量的提高有关。

图15和16清楚地显示了初始构型的影响。当初始猜测位于接触区域附近或完全处于其内部时（例如，图15a、16a–16c以及16n），重建形状的位置和结构与目标更加吻合。相反，当初始形状偏离较远时（例如，参见图 15a–16m 和16o），重建误差会更大。对于包含多个组成部分的配置，这种影响尤为明显，因为此类问题本身更为复杂。

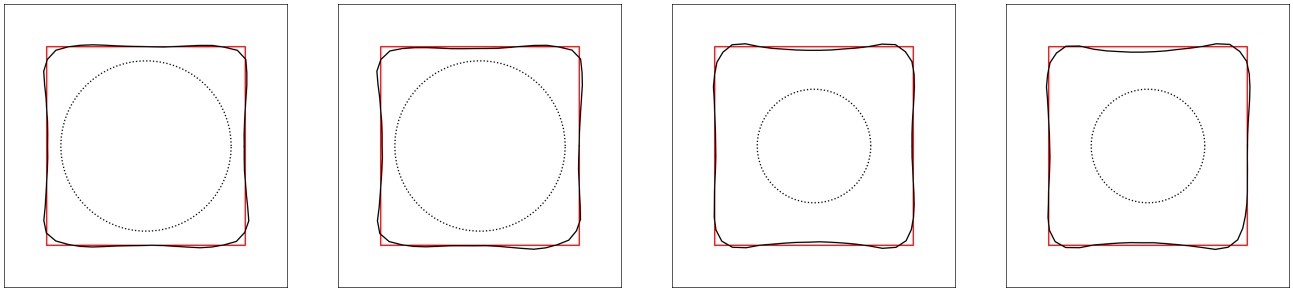
凹区域更难以恢复，这符合预期。在图 15中，内凹角往往会发生畸变，或只能得到部分解析。在图16中的若干配置（例如图16a–16c和 16m–16n）中，边界的回入部分表现得更为清晰。不过，在这两种设置下，非常尖锐或尺度很小的凹陷仍难以精确捕捉。

重建质量还取决于接触区域的大小。较大的区域（如图 16a–16c 和16f–16g所示）与真实几何形状更为吻合，而较小的夹杂物（例如图 16c、16d、16j–16l）则呈现出相对更大的形状偏差。总体而言，特征尺度越小，偏差越明显。

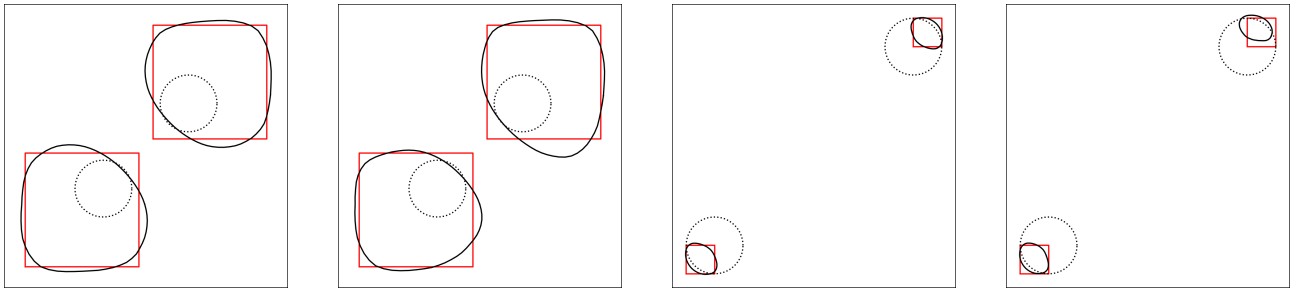
综合来看，图 15 和 16 表明，重建对参数β有显著依赖性，且在含噪测量条件下敏感性更高。

7 结论

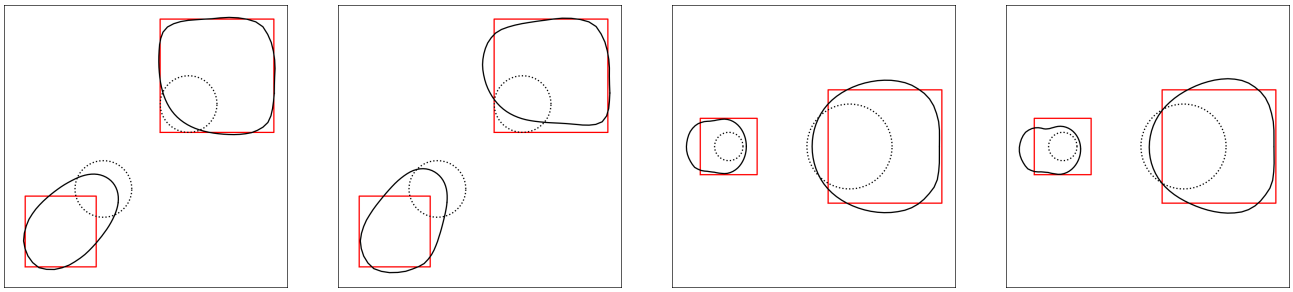
我们提出了一种具有统计稳健性的框架，利用拓扑梯度重建金属-半导体接触区域。该方法结合了确定性分析与统计分析：研究表明，拓扑梯度对测量噪声具有稳定性，而经验梯度的中心极限定理则使得能够构造用于接触检测的置信区间并进行假设检验。蒙特卡洛采样捕捉了梯度的平均行为及其变异性，提供空间分辨的置信区域，并凸显接触最强的区域。随后，采用索博列夫正则化梯度进行形状优化，以细化重建结果，从而得到平滑、精确且符合底层几何形状的界面。CCBM公式中的自由参数 β 进一步提升了形状优化阶段的效果，改善了几何精度和复杂界面特征的分辨能力，尤其是在含噪测量条件下。数值实验表明，这种集成方法能够可靠地识别夹杂物的位置、尺寸和拓扑，同时有效地区分真实结构特征与噪声诱发伪影。



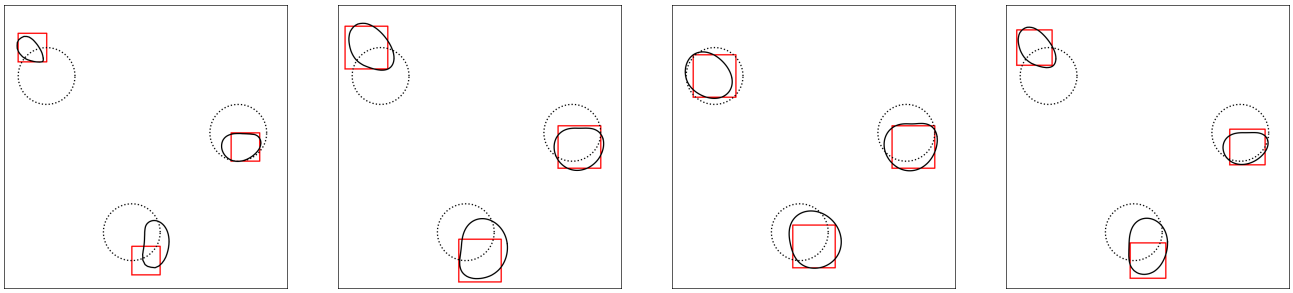
(a) $\delta = 0, \quad g = 1$ (b) $\delta = 0.1, \quad g = 1$ (c) $\delta = 0, \quad g = |x|$ (d) $\delta = 0.1, \quad g = |x|$



(e) $\delta = 0$ (f) $\delta = 0.1$ (g) $\delta = 0$ (h) $\delta = 0.1$

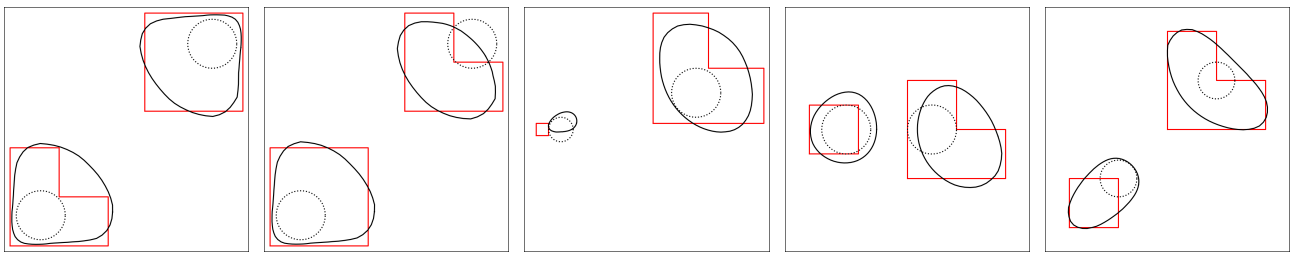


(i) $\delta = 0$ (j) $\delta = 0.1$ (k) $\delta = 0$ (l) $\delta = 0.1$



(m) $\delta = 0.1$ (n) $\delta = 0.1$ (o) $\delta = 0.1$ (p) $\delta = 0.1$

图14：不同噪声水平和边界数据条件下单个及多个接触区域的重建结果。



(a) (b) (c) (d) (e)

图15：精确测量条件下以及使用 $\beta = 1$ 时的重建结果。

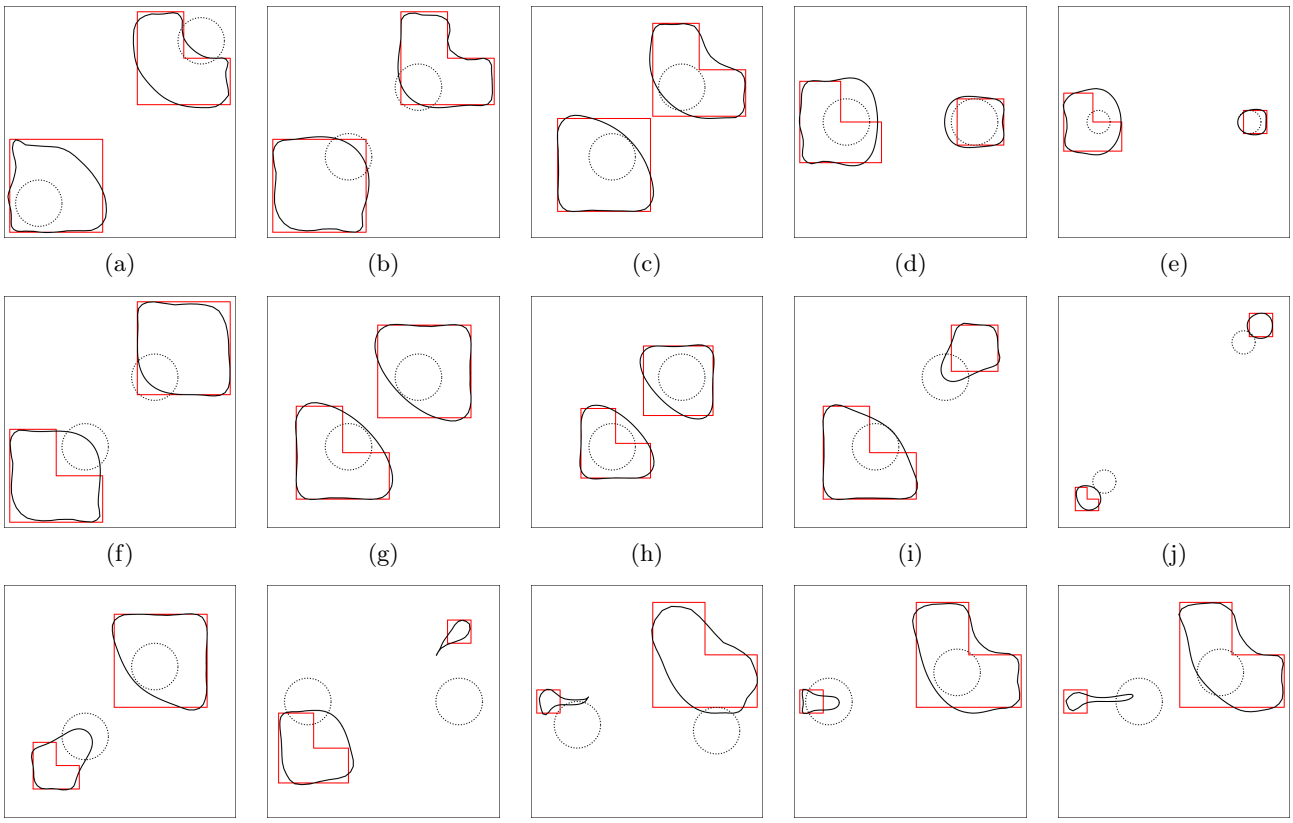


图16：含噪测量下的重建结果（$\delta = 0.1$），其中 $\beta = 200$。

引理1.4的证明

首先，$\|\cdot\|_*$ 是 $H^1(\Omega)$上的一个范数：若 $\|\varphi\|_* = 0$，则 $\nabla\varphi = 0_{\mathbb{R}^d}$ 属于 Ω 且 $\varphi = 0$ 属于 ω。因此，φ 在 Ω上为常数，并且在 ω上消失，所以 $\varphi \equiv 0$ 属于 Ω。

假设该不等式不成立。则存在一个序列 $\{\varphi_n\} \subset H^1(\Omega)$，使得

$$\|\varphi_n\|_{1,\Omega} = 1, \quad \|\varphi_n\|_* \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

由紧嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$，存在一个子序列（仍记为 φ_n），使得 $\varphi_n \to \varphi$ 属于$L^2(\Omega)$，且 $\nabla\varphi_n \rightharpoonup \nabla\varphi$ 在 $L^2(\Omega)^d$ 中弱收敛。收敛$\|\nabla\varphi_n\|_{0,\ \Omega} \to 0$ 意味着 $\nabla\varphi = 0_{\mathbb{R}^d}$，因此 φ 为常数。此外，$\|\varphi_n\|_{0,\ \omega} \to 0$ 意味着 $\varphi = 0$ 属于 ω，因此 $\varphi \equiv 0$ 属于 Ω，这与$\|\varphi_n\|_{1,\ \Omega} = 1$矛盾。因此，存在 $C(\Omega) > 0$ 使得$\|\varphi\|_{1,\ \Omega} \leq C(\Omega)\|\varphi\|_*$，证毕。

致谢

JFTR的工作得到日本学术振兴会海外特别研究员项目（资助编号JP24KF0221）的支持，并部分得到日本学术振兴会青年研究者科研费（资助编号JP23K13012）和日本科学技术振兴机构CREST项目（资助编号JPMJCR2014）的支持。

参考文献

[1] A. Abda, M. Hassine, M. Jaoua, and M. Masmoudi，斯托克斯流中小空腔定位的拓扑敏感性分析，SIAM控制与优化期刊，48（2009），第2871–2900页。

[2] R. A. Adams与J. J. F. Fournier，索伯列夫空间，纯粹与应用数学第140卷，学术出版社，阿姆斯特丹，2003年。

[3] L. Afraites，一种用于障碍物反问题的新型耦合复边界法（*CCBM*），离散连续动力系统系列 S，15（2022年），第23–40页。

[4] L. Afraites、M. Dambrine 和 D. Kateb，单次测量传输问题的形状方法，Numer. Funct. Anal. Optim.，28（2007），第 519—551 页。

[5] L. AFraites, C. MAsnaoui, 以及 M. NAchaoui, *Sh*$^{Ape\ op}$ *timizati*$^{on\ me}$ *thod f*$^{or\ an}$ *i*逆向几何 *tri*源问题及临界形状处的稳定性，离散连续动力系统系列 *S*，*15*（*2022*年），第 *1–21* 页。[6] *H. Ammari*、*E. Bretin*、*J. Garnier*、*W. Jing*、*H. Kang* 和 *A. Wahab*，《弹性力学中基于拓扑导数的成像泛函的定位、稳定性与分辨率》，*SIAM*成像科学期刊，*6*（*2013*年），第 *2174–2212* 页。[7] *H. Ammari*、*J. Garnier*、*V. Jugnon* 和 *H. Kang*，《基于拓扑导数的成像泛函的稳定性与分辨率分析》，*SIAM*控制与优化期刊，*50*（*2012*年），第 *48–76* 页。[8]*H. Ammari* 和 *H. Kang*，《边界测量中的小型非均匀体重建》，*Springer*，*2004*年。[9] *S. Amstutz* 和 *H. Andrä*，《一种使用水平集方法进行拓扑优化的新算法》，计算物理学期刊，*216*（*2006*年），第 *573–588* 页。[10] *S. Amstutz*、*I. Horchani* 和 *M. Masmoudi*，《基于拓扑梯度法的裂纹检测》，控制与控制论，*34*（*2005*年），第 *81–101* 页。[11] *P. Baumann*、*P. Gangl* 和 *K. Sturm*，《二维和三维中 *l2* 与 *h1* 跟踪型代价泛函的完整拓扑渐近展开》，微分方程期刊，*412*（*2024*），第 *568–612* 页。[12] *E. Beretta*、*C. Cavaterra*、*M. Cerutti*、*A. Manzoni* 和 *L. Ratti*，《源于心脏电生理学的半线性抛物方程反问题》，逆问题，*33*（*2017*年），第 *105008* 页。[13] *M. Burger*、*H. Engl*、*P. A. Markowich* 和 *P. Pietra*，《半导体器件中掺杂分布的识别》，逆问题，*17*（*2001*年），第 *1765–1795* 页。[14] *S. Busenberg* 和 *W. Fang*，《半导体接触电阻率的识别》，应用数学季刊，*49*（*1991*），第 *639–649* 页。[15] *A. Carpio*、*M. Pena* 和 *M. Rapún*，《通过拓扑导数方法处理二维和三维菲涅耳实验数据库》，逆问题，*37*（*2021*年），第 *105012* 页。[16] *F. Caubet* 和 *M. Dambrine*，《斯托克斯流中小障碍物的定位》，逆问题，*28*（*2012*），第 *105007* 页。[17] *S. Chaabane*、*M. Masmoudi* 和 *H. Meftahi*，《用于求解几何逆问题的拓扑梯度与形状梯度策略》，数学分析与应用期刊，*400*（*2013*年），第 *724–742* 页。[18] *X. L. Cheng*、*R. F. Gong*、*W. Han* 和 *X. Zheng*，《一种用于求解反源问题的新型耦合复边界法》，逆问题，（*2014*），第 *055002* 号文章。[19] *M. Choulli*，《椭圆方程中非均匀体的确定》，应用分析，*85*（*2006*年），第 *693–699* 页。[20] *R. Dautray* 和 *J.-L. Lions*，《科学与技术的数学分析和数值方法》，第 *2* 卷，*Springer*，*1998*年。[21] *G. Dovgan*、*P. Morin*、*R. Nochetto* 和 *M. Verani*，《用于形状优化的离散梯度流及其应用》，计算方法、应用力学与工程，*196*（*2007*），第 *3898–3914* 页。[22] *W. Fang* 和 *E. Cumberbatch*，《金属氧化物半导体场效应晶体管接触电阻率的反问题》，*SIAM*应用数学期刊，*52*（*1992*），第 *699–709* 页。[23] *W. Fang* 和 *K. Ito*，《通过水平集方法识别半导体晶体管中的接触区域》，计算与应用数学期刊，*159*（*2003*），第 *399–410* 页。[24] *W. Fang*、*K. Ito* 和 *D. Redfern*，《通过 *LBIC*成像识别半导体二极管的参数》，*SIAM*应用数学期刊，*62*（*2002*），第 *2149–2174* 页。[25] *W. Fang* 和 *S. Zeng*，《椭圆微分方程中由边界测量恢复界面》，高级计算数学，*36*（*2012*），第 *201–220* 页。[26] *J. Ferchichi*、*M. Hassine* 和 *H. Khenous*，《使用拓扑算法检测斯托克斯流中的点力位置》，应用数学与计算，*219*（*2013*），第 *7056–7074* 页。

[27] *L. Fernandez*、*A. Novotny* 和 *R. Prakash*，《修正亥姆霍兹方程建模的反势问题的非迭代重建方法》，*Numer. Funct. Anal. Optim.*，（*2018*年），第 *1–30* 页。[28] *P. Gangl* 和 *K. Sturm*，《曲面上的偏微分方程的拓扑导数》，*SIAM*《控制与优化杂志》，*60*（*2022*年），第 *81–103* 页。[29]*S. Garreau*、*P. Guillaume* 和 *M. Masmoudi*，《偏微分方程组的拓扑渐近：弹性问题》，*SIAM* 控制与优化期刊，*39* （*2001* 年），第 *1756–1778* 页。[30] *R. Gong*、*X. Cheng* 和 *W. Han*，《用于生物发光断层成像的新型耦合复边界法》，*Commun. Comput. Phys.*，*19*（*2016*年），第 *226–250* 页，*https://doi.org/10.4208/cicp.230115. 150615a*，*https://doi.org/10.4208/cicp.230115.150615a*。[31] *R. Gong*、*X. Cheng* 和 *W. Han*，《仅用一次测量求解反电导率问题的耦合复边界法》，应用分析，*96*（*2017*年），第 *869–885* 页。[32] *F. Hecht*，《*FreeFem++*的新进展》，*J. Numer. Math.*，*20*（*2012*年），第 *251–265* 页。[33] *M. Hintermüller* 和 *A. Laurain*，《受椭圆变分不等式约束的最优形状设计》，*SIAM*控制与优化期刊，*49*（*2011*年），第 *1015–1047* 页。[34] *M. Hrizi* 和 *M. Hassine*，《几何反源问题的单次迭代重建算法》，*J. Elliptic Parabol. Equ.*，*4*（*2018*年），第 *177–205* 页。[35] *M. Hrizi* 和 *M. Hassine*，《使用 *Dirichlet-Neumann* 代价泛函方法重建半导体晶体管中的接触区域》，应用分析，*100*（*2021*年），第 *893–922* 页。[36] *M. Hrizi*、*R. Prakash* 和 *A. A. Novotny*，《通过最优源逼近时间分数阶偏微分方程中的未知源并重建未知源》，*Comput. Math. Appl.*，*200*（*2025*年），第 *117–144* 页。[37] *V. Isakov*，《偏微分方程反问题》，第 *127* 卷，*Springer*，*2006*年。[38] *K. Ito*、*K. Kunisch* 和 *G. Peichl*，《一类伯努利问题的形状导数变分方法》，*J. Math. Anal. Appl.*，*314*（*2006*年），第 *126–149* 页。[39] *K. Ito* 、 *K. Kunisch* 和 *G. Peichl*，《形状导数的变分方法》，*ESAIM Control Optim. Calc. Var.*，*14*（*2008*年），第 *517–539* 页。[40] *M. Jleli*、*B. Samet* 和 *G. Vial*，《孔洞边界满足阻抗条件时修正亥姆霍兹方程的拓扑敏感性分析》，*J. Math. Pures Appl.*，*103*（*2015*年），第 *557–574* 页。[41] *H. Kang*、*K. Kwon* 和 *K. Yun*，《椭圆方程中非均匀体的恢复》，逆问题，*17*（*2001*年），第 *25* 页。[42] *S. Kim*，《椭圆方程中非均匀体的唯一确定》，逆问题，*18*（*2002*年），第 *1325* 页。[43] *R. Kress* 和 *D. Colton*，《反声学与电磁散射理论》，应用数学科学第 *93* 卷，*Springer*，纽约，第 *3* 版，*1998*年。[44] *M. Ledoux* 和 *M. Talagrand*，《巴拿赫空间中的概率：等周理论与随机过程》，*Springer Science & Business Media*，*2013*年。[45] *W. Loh*、*K. Saraswat* 和 *R. Dutton*，《用于提取比接触电阻率的开尔文电阻器分析与缩放》，*IEEE Electron Device Lett.*，*6*（*1985*年），第 *105–108* 页。[46] *W. Loh*、*S. Swirhun*、*T. Schreyer*、*R. Swanson* 和 *K. Saraswat*，《接触电阻的建模与测量》，*IEEE Trans. Electron Devices*，*34*（*1987*年），第 *512–524* 页。[47] *L. Marin*、*L. Elliott*、*D. Ingham* 和 *D. Lesnic*，《使用边界元法数值恢复椭圆方程中的圆形非均匀体》，*Eng. Anal. Bound. Elem.*，*28*（*2004*年），第 *413–419* 页。[48] *A. Novotny* 和 *J. Sokołowski*，《形状优化中的拓扑导数》，*Springer Science & Business Media*，*2012*年。[49] *H. Ouaissa*、*A. Chakib*、*A. Nachaoui* 和 *M. Nachaoui*，《求解反柯西–斯托克斯问题的数值方法》，*Appl. Math. Optim.*，*85*（*2022*年），第 *37* 页。

[50] *J. F. T. Rabago*，《形状优化框架中用于求解定常自由边界问题的新型耦合复边界法》，*Math. Control Relat. Fields*，*13*（*2023*），第*1362–1398*页。[51] *J. F. T. Rabago*，《通过一种非常规数值形状优化技术定位肿瘤》，*Appl. Numer. Math.*，*217*（*2025*），第*135–171*页。[52] *J. F. T. Rabago*、*L. Afraites* 和 *H. Notsu*，《利用耦合复边界法检测 *Stokes* 流中的浸没障碍物》，*SIAM*控制与优化期刊，*63*（*2025*），第*822–851*页。[53] *J. F. T. Rabago* 和 *H. Azegami*，《通过部分边界测量和对流边界条件进行缺陷形状识别的形状优化方法》，*Japan J. Indust. Appl. Math.*，*31*（*2018*），第*131–176*页。[54] *J. F. T. Rabago* 和 *H. Azegami*，《利用新型边界代价泛函求解外部*Bernoulli*自由边界问题的二阶形状优化算法》，*Comput. Optim. Appl.*，*77*（*2020*），第*251–305*页。[55] *J. F. T. Rabago* 和 *H. Notsu*，《形状优化框架下利用耦合复边界法数值求解 *Stokes*方程的自由边界问题》，*Appl. Math. Optim.*，*89*（*2024*），第*2*篇。[56] *B. Samet*、*S. Amstutz* 和 *M. Masmoudi*，《*Helmholtz*方程的拓扑渐近》，*SIAM*控制与优化期刊，*42*（*2003*），第*1523–1544*页。[57] *S. A. Sauter* 和 *C. Schwab*，《边界元方法》，*Springer-Verlag*，柏林、海德堡，*2011*年。[58] *J. Sokolowski* 和 *A. Zochowski*，《关于形状优化中的拓扑导数》，*SIAM*控制与优化期刊，*37*（*1999*），第*1251–1272*页。[59] *Q. Wu*、*R. Gong*、*W. Gong*、*Z. Zhang* 和 *S. Zhu*，《基于复值模型的形状优化方法在生物发光断层成像中的应用》，*arXiv*预印本 *arXiv:2509.09533*，（*2025*），*https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.09533*。[60] *X. Zheng*、*X. Cheng* 和 *R. Gong*，《椭圆问题中用于参数识别的耦合复边界法》，*Int. J. Comput. Math.*，*97*（*2020*），第*998–1015*页。