arXiv:2603.04218v1 [math.CO] 4 Mar 2026

排列中的箭头模式避免：结构与枚举

Kassie Archer[1] 和 Robert P. Laudone[1]

[1]美国海军学院数学系，马里兰州安纳波利斯 21402 邮箱：karcher@usna.edu, laudone@usna.edu

摘要

Berman 和 Tenner 将箭头模式作为 vincular 模式的一种推广引入。他们指出，箭头模式有望弥合排列的循环记法与单行记法之间的鸿沟；为此，他们运用箭头回避对浅排列和循环浅排列进行枚举。近期，321-避免循环排列完全根据箭头回避得到了重新刻画。受这些结果启发，我们开始对箭头回避进行系统研究。本文证明了关于箭头模式的结构性结果，包括定义箭头-Wilf 等价，并枚举了若干箭头避免类。最后，我们研究成对箭头模式的避免，重点关注那些会排除底层排列中不动点的情形。

1 引言

箭头模式最初在 [4]中作为相邻模式的推广被引入，作者借此通过模式避免来刻画浅排列。当时，他们观察到，箭头模式有望弥合排列的循环记法与单行记法之间的鸿沟。近年来，这一鸿沟日益成为研究焦点。该领域的一个核心问题是枚举其单行记法避免特定模式的循环排列。例如， [1, 3] 的作者对避免一对排列的所有循环排列进行了计数，但 (132，213) 这一对除外。对于这一尚未解决的情形， [7]中给出了界限。尽管取得了这些进展，枚举其单行记法避免任意一个三阶模式的循环排列这一问题仍未解决。

为支持 [4], 中的论断，本文第二作者最近从箭头模式避免的角度，证明了一个关于 321-避免循环排列的新刻画 [8]。这消除了将模式避免与循环性视为两个独立条件的必要，从而将问题重新表述为纯粹的避免问题。鉴于 [4, 8], 中的结果，很有理由相信，对于其他同时考察排列的单行形式与代数结构的排列集合，也能以类似方式加以描述。

受这一潜力的启发，我们开始系统研究箭头回避。我们首先在第2节证明有关箭头模式的结构性结果，定义箭头-Wilf 等价，并

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号05A05

Keywords: 箭头模式；模式避免；排列

将特定的箭头模式与相邻模式联系起来。在第3、4、5节中，我们枚举了所有但两个箭头避免类；这些类对应于大小为3、底层字符串大小至多为2且包含一个箭头的箭头模式。在第6节中，我们考察对两个箭头模式的回避，其中一个模式对应于禁止底层排列中的不动点。过程中出现了若干著名数列，我们在表1中加以总结。最后，我们在第7节提出一些开放问题和猜想。

1.1 定义与记号

令 $\mathcal{S}_n$ 表示 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ 在 $n\geq 1$. 下的排列集合。排列 $\pi\in\mathcal{S}_n$ 可写成单行表示 $\pi=\pi_1\pi_2\ldots\pi_n$，其中 $\pi_i:=\pi(i)$。此外，也可以将其写成标准循环表示，即若干不相交循环的乘积，其中每个循环都以其最大元开头，且各循环按照最大元的大小排列。例如， $\sigma=413526987$ 的单行记法对应的标准循环表示为 $\sigma=$(3)(5214)(6)(8)(97)。

基本双射 $\theta:\mathcal{S}_n\to\mathcal{S}_n$ （见 [9, 第 30] 页）同时使用排列的单行表示和标准循环记法。对于排列 $\sigma\in\mathcal{S}_n$，我们通过将 σ 写成标准循环记法，再去掉括号，得到新排列 $\theta(\sigma)$。例如，考虑与上一段相同的例子， θ(413526987) $=352146897$。显然，此映射可逆，因此正如其名称所示，它确实是一个双射。本文将经常关注排列在此双射下的原像，因此为方便记号，我们令 $\hat{}\pi=\theta^{-1}(\pi)$。在我们的例子中，若 $\pi=352146897$，则 $\hat{}\pi=413526987$.

我们称正整数列表 $a_1a_2\ldots a_k$ 与排列 $\tau\in\mathcal{S}_k$ 序同构，如果对所有 r、 s，当且仅当 $\tau_r<\tau_s$ 时有 $a_r<a_s$ 。在此情形下，我们定义约化 $\mathrm{red}(a_1\ldots a_k)=\tau$. 我们称以单行记法写出的排列 $\pi=\pi_1\cdots\pi_n$ 包含模式 $\tau=\tau_1\tau_2\ldots\tau_k$，如果存在下标 $i_1<i_2<\cdots<i_k$ 使得 $\mathrm{red}(\pi_{i_1}\ldots\pi_{i_k})=\tau$ （即 π 的一个子序列与 τ 序同构）。如果 π 不包含 τ，我们称 π 回避 τ。我们将大小为 n 且回避排列集合 $\{\tau_1,\ldots,\tau_\ell\}$ 的排列集合记为 $\mathcal{S}_n(\tau_1,\ldots,\tau_\ell)$。两组模式 S 与 T 称为Wilf等价，如果 $|\mathcal{S}_n(S)|=|\mathcal{S}_n(T)|$。例如，众所周知，当 $\tau\in\mathcal{S}_3$ 时，我们有 $|\mathcal{S}_n(\tau)|=C_n$，即第 n 个卡特兰数，因此所有 $\tau\in\mathcal{S}_3$ 属于同一个Wilf等价类。

模式包含和模式避免的概念可以推广。相邻模式是一种排列 ν，其中某些相邻项带有标记。我们用上划线表示这些带标记的项。若排列 $\pi\in\mathcal{S}_n$ 包含一个相对次序与 ν 相同的子排列，且子排列中对应于 ν 中带标记项的项必须在 π 中连续出现，则称 $\pi\in\mathcal{S}_n$ 包含一个相邻模式。例如，考虑相邻模式 $\nu=132$。那么，$\pi=35241$ 避免 ν，因为 π 中 132 模式唯一的一次出现是 $\pi_1\pi_2\pi_4=354$，但项 $\pi_2=5$ 和 $\pi_4=4$ 并非连续出现。下面的引理给出当 ν 是一个带有两个标记项的 3 阶排列时， $\mathcal{S}_n(\nu)$ 的枚举结果。

引理1.1 ([6])。对于 $n\geq 1$,

$$|\mathcal{S}_n(\nu)|=\begin{cases}B_n & \text{if } \nu\in\{1\overline{23},3\overline{21},\overline{12}3,\overline{32}1,1\overline{32},3\overline{12},\overline{21}3,\overline{23}1\}\\ C_n & \text{if } \nu\in\{2\overline{13},2\overline{31},\overline{13}2,\overline{31}2\}\end{cases}$$

给定 $\pi\in\mathcal{S}_n$ 和 $\pi=\pi_1\ldots\pi_n$， π 的反转 记作 π^r，为 $\pi_n\pi_{n-1}\ldots\pi_2\pi_1$。 π 的补 记作 π^c，为 $(n-\pi_1+1)(n-\pi_2+1)\cdots(n-\pi_{n-1}+1)(n-\pi_n+1)$。注意，这两种运算可交换，因此 $\pi^{rc}=\pi^{cr}$。例如，若 $\pi=623154$，则 $\pi^r=451326$,

$\pi^c = 154623$，且 $\pi^{rc} = 326451$。假设 $S \subseteq [n]$ 是 π中元素的一个子集。那么， π 相对于 S的补记作 $c_S(\pi)$，是通过将 π 中第 j小的元素替换为 $S^c = [n] \setminus S$中第 j大的元素而得到的排列。因此，我们固定 S 中的元素，并对其余元素取补。注意， $c_\varnothing(\pi) = \pi^c$，即通常意义下的补，并且 $c_{[n]}(\pi) = \pi$。

例如，若 $\pi = 6\mathbf{23}1\mathbf{54}$ 且 $S = \{1, 6\}$，使得 $S^c = \{2, 3, 4, 5\}$，则 $c_S(\pi) = 6\mathbf{54}1\mathbf{23}$。本文稍后将用到的一个例子是 $c_{\{1\}}(\pi)$，我们将其记作 $c_1(\pi)$，并称其为 π 的 1-补。这等于 $((n+2) - \pi_1)((n+2) - \pi_2) \dots ((n+2) - \pi_{j-1})1((n+2) - \pi_{j+1}) \dots ((n+2) - \pi_n)$。若 $\pi = \mathbf{623}1\mathbf{54}$，则 $c_1(\pi) = \mathbf{265}1\mathbf{34}$。B´ona 在 [2] 中使用了这一补定义的一个变体，以研究排列中的交替游程。

最后，本文还出现了许多著名和/或带有名称的数列。表1中列出了这些数列的名称、记号和 OEIS 编号，以供参考。

符号	Name	枚举说明	OEIS
d_n	错排数	$[n]$的错排	A000166
B_n	贝尔数	$[n]$的集合划分	A000110
$\left\{ {n \atop k} \right\}$	第二类斯特林数	$[n]$的k块集合划分	A008277
C_n	卡特兰数	半长为 n 的 Dyck 路径	A000108
r_n	Riordan数	由 $[n]$构成的无单元素非交叉划分	A005043
G_n	古尔德数	$\mathcal{S}_n(1\overline{23})$ 以 21 开头的排列	A040027
S_n	大施罗德数	可分排列 $[n]$	A006318

表1：记号 以及本文所用著名组合数列的描述 .

2 箭头模式

我们将大小为 k的箭头模式 $\alpha = (\nu; H)$ 定义为一串正整数 $\nu = a_1 \dots a_m$以及一个（可能为空的）箭头集合 $H = \{b_i \to c_i \mid 1 \le i \le h\}$，使得出现在 ν或 H中的互异整数构成集合 $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$。我们将所有大小为 k 的箭头模式的集合记为 $\mathcal{A}_k$。

给定排列 $\pi \in \mathcal{S}_n$以及箭头模式 $\alpha = (\nu; H) \in \mathcal{A}_k$，其中 $\nu = a_1 \dots a_m$且 $H = \{b_i \to c_i \mid 1 \le i \le h\}$，若存在某个集合$X = \{x_1 < \dots < x_k\} \subseteq [n]$使得，则称 π 包含箭头模式 α

- 存在某个 $t_1 < \dots < t_m$使得 $\pi_{t_1} \dots \pi_{t_m} = x_{a_1} \dots x_{a_m}$，并且
- 如果 $\hat{}\pi = \theta^{-1}(\pi)$，那么对于每个 $1 \le i \le h$，都有 $\hat{}\pi(x_{b_i}) = x_{c_i}$。

我们称 π 避免 α，如果它不包含该模式。例如，考虑箭头模式 $\alpha = (231;\ 1 \to 4)$，以及排列 $\pi = 639245781$，其 $\hat{}\pi = (6,3)(9,2,4,5,7,8,1)$。排列$\pi$ 在经典意义下包含多个 231模式的出现，例如 392 和 241。在这两个选项中，只有 241 属于箭头模式 α的一次出现。在此情形下 $X = \{1, 2, 4, 9\}$，因为 $\hat{}\pi(1) = 9$，并且确实是 α 的一次出现，因为 9 是 X中的最大元，因此是该模式中的“4”。另一方面，392 不可能属于 α 的一次出现，因为 $\hat{}\pi(2) = 4 < 9$。再举一例， $\pi = 3627154$ 避免 $\alpha = (231;\ 1 \to 4)$。尽管 231模式有多次出现$x_2x_3x_1$，但没有一次满足以下性质：对于每个 $1 \le i \le 3.$， $x_4 = \hat{}\pi(x_1)$ 都大于 x_i

令 $\mathcal{S}_n(\alpha)$ 表示避免箭头模式 $\alpha = (\nu; H)$ 的排列集合，并令$a_n(\alpha) = |\mathcal{S}_n(\alpha)|$. 。注意，如果 H 为空，那么在模式避免的经典意义下， $\mathcal{S}_n(\alpha) = \mathcal{S}_n(\nu)$。

α	$a_n(\alpha)$	OEIS	定理
$(1; 1 \to 1)$	d_n	A000166	命题 2.1
$(i; j \to j)$	$d_n + d_{n-1}$	A000255	定理 2.2
$(i; i \to j)$	1	A000012	命题 2.3
$(j; i \to j)$			
$(a; b \to c)$	2^{n-1}	A000079	定理 2.4

表 2: 在 $\mathcal{A}_1$ 或 $\mathcal{A}_2$ where$|\nu| = |H| = 1$ 中避免模式 $\alpha = (\nu; H)$ 的排列枚举。这里， d_n 表示第 n 个错排数。此外， $\{i, j\} = \{1, 2\}$，以及$\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$.

我们先来枚举在 $\mathcal{A}_1$ 或 $\mathcal{A}_2$ where$|\nu| = 1$ 中避免模式 $\alpha = (\nu; H)$ 的排列。这些结果汇总于表 2。注意，在 $\mathcal{A}_1$ 中恰有两种箭头模式，即 $(1; \varnothing)$ 和 $(1; 1 \to 1)$。第一种情况等价于避免经典模式 1，因此 $|\mathcal{S}_n((1; \varnothing))| = 0$ 对于 $n \geq 1$。第二种情况将在下面的命题中讨论。

命题 2.1. 对于 $n \geq 1$, $a_n(1; 1 \to 1) = d_n$ ，其中 d_n 是第 n 个错排数 $r.$

证明。 避免 $(1; 1 \to 1)$ 的排列显然是那些满足 π 且 $\hat{}\pi$ 没有不动点的排列。由于第 n 个错排数恰好等于没有不动点的排列数，因此结论成立。

□

现在我们考虑所有满足 $|\nu| = 1$ 的元素 $(\nu; H) \in \mathcal{A}_2$ 。首先注意，如果 $H = \varnothing$, 这就是对一个大小为 2 的模式 ν 进行经典模式避免，此时对所有 n， $a_n(\nu) = 1$ 。下面我们考虑 $|H| = 1$ 的情形。所有 $|H| > 1$ 的情形都可以很容易地归结为这些情形之一，或上面的情形之一，即 $(1; 1 \to 1)$ 或 $(1; \varnothing)$。

定理 2.2。对于 $n \geq 2$， $a_n(1; 2 \to 2) = a_n(2; 1 \to 1) = d_n + d_{n-1}$。

证明。 如果 $\pi \in \mathcal{S}_n(1; 2 \to 2)$，那么 $\hat{}\pi$ 要么没有不动点，要么如果存在不动点，则只能是 $\pi_1 = 1$，因为任何其他更大的不动点都必然形成一个 $(1; 2 \to 2)$ 模式，这是由于该不动点会大于某个元素。没有不动点的排列有 d_n 个，而仅以 1 为不动点的排列有 d_{n-1} 个。对于避免 $(2; 1 \to 1)$ 的情况，同样的论证也成立，但此时 $\hat{}\pi$ 要么是错排，要么仅以 n 为不动点。

□

命题 2.3。 对于 $n \geq 1$, $a_n(i; \ i \to j) = a_n(j; \ i \to j) = 1$ 对于任意 $i, j \in \{1, 2\}$ ，满足 $i \neq j.$

证明。 在 $\hat{}\pi$ 的任何长度至少为 2 的循环中，都会有一个较小元素映射到一个较大元素，同时也会有一个较大元素映射到一个较小元素。因此，避免这种情况的唯一方法是让 $\pi = \hat{}\pi$ 成为仅由不动点构成的排列。

□

定理 2.4。对于 $n \geq 1$， $a_n(a; \ b \to c) = 2^{n-1}$，其中 $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$。

证明。 设 $\pi \in \mathcal{S}_n(a; b \to c)$。需要考虑三种情形，其中两种几乎完全相同：$a$ 是最大元， a 是中间元，或 a是最小元。首先，假设 a大于 b 和 c。在这种情况下，注意到如果 $\hat{}\pi$ 中有两个大小大于一的循环，我们就会自动得到一个 $(a; b \to c)$ 模式。事实上，假设这些循环分别以 π_i、 π_k 开始，并以 π_j、 π_ℓ 结束，其中 $i < j < k < \ell$，因此 $\pi_k > \pi_i > \pi_j$。如果 $b < c$，$(\pi_k; \pi_j \to \pi_i)$ 是一个 $(3; 1 \to 2)$ 模式。如果 $b > c$，$(\pi_k; \pi_i \to \pi_{i+1})$ 是一个 $(3; 2 \to 1)$ 模式。

此外，如果一个循环的大小大于一，那么它必定是包含 n 的循环；若 $b < c$，该循环中的元素必须按递减顺序排列，若 $b > c$，则必须按递增顺序排列。这意味着，要构造这样的 π，我们只需选出与 n 一同出现在循环中的元素，其余元素都将是不动点。共有 2^{n-1} 种选法。当 a 是最小元素时，同样的论证也适用。

如果 a 是中间元素，我们则得到与 n 的组合的一个双射。我们考虑 $b < a < c$ 的情形，因为另一种情形 $c < a < b$ 完全相同。首先我们断言，每个循环 $(\pi_i \pi_{i+1} \cdots \pi_{i+k})$ 都必须具有 $\pi_{i+1} < \pi_{i+2} < \cdots < \pi_{i+k} < \pi_i$。如果存在某个下降，比如 $\pi_j > \pi_{j+1}$，那么要么有 $\pi_{j+2} > \pi_j$，此时 $(\pi_j; \pi_{j+1} \to \pi_{j+2})$ 是一个 $(2; 1 \to 3)$ 模式；要么有 $\pi_{j+2} < \pi_j$。接着我们可以重复这一论证，考察 $\pi_{j+\ell} < \pi_j$ 是否成立，直到最终得到 π_{i+k}。如果 $\pi_{i+k} < \pi_j$，那么 $(\pi_j; \pi_{i+k} \to \pi_i)$ 是一个 $(2; 1 \to 3)$ 模式；如果 $\pi_{i+k} > \pi_j$，那么 $(\pi_j; \pi_{i+k-1} \to \pi_{i+k})$ 是一个 $(2;\ 1 \to 3)$ 模式。

设 $\epsilon_k = k123\cdots(k-1)$，我们断言，对于 $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$，$\pi = \epsilon_{k_1} \oplus \epsilon_{k_2} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{k_m}$ 是 n的一个组合。否则，这意味着在 π 中存在某个 π_j，它小于 π、π_{ℓ_1} 和 π_{ℓ_2}中至少两个从左到右极大值，且满足 $\ell_1 < \ell_2 < j$。与上一段中的论证类似，可以证明要么（π_{ℓ_1}；$\pi_j \to \pi_{j+1}$）是一个（2；$1 \to 3$），要么最终会得到一个（2；$1 \to 3$）模式，其中（π_{l_1}；$\pi_{j+k} \to \pi_{\ell_2}$）。这表明，这类 π 与 n的组合之间存在双射，而后者也由 2^{n-1}计数。 □

如下面的引理所述，某些箭头模式自然地属于相邻模式。请注意，模式中两个相邻元素上方的横线表示，在排列中该模式的一次出现中，这两个元素彼此相邻。

引理 2.5. 给定 $\nu = \nu_1 \ldots \nu_{k-1}$，若对任意 j 有 $b \in [k]$ 且 $b \neq \nu_j$，并对某个 i 有 $b > \nu_i$，则

$$\mathcal{S}_n(\nu; b \to \nu_i) = \mathcal{S}_n(\nu_1 \ldots \nu_{i-1} \overline{b\nu_i} \nu_{i+1} \ldots \nu_k).$$

证明. 回顾在 $\hat{}\pi$，每个循环以其最大元开始，且这些元素是 π. 中的从左到右极大值。若 $b \to \nu_i$，这意味着 b 与 ν_i 位于 $\hat{}\pi$ 的同一循环中。于是有两种情形需要考虑：要么 b 是其所在循环的末项，要么不是。第一种情形不可能发生。事实上，若 b 是其所在循环的末项，则意味着 ν_i 是同一循环的首项，因而大于 b。这与 $b > \nu_i$ 的假设相矛盾。

在第二种情形中，由于 b 不是其所在循环的末项，为了得到 $b \to \nu_i$，我们必须有 ν_i 是 π 中 b 右侧的项。这证明了该结果。 □

例如，避免箭头模式 $\alpha = (341; 2 \to 1)$ 等价于避免相邻模式 3421，因为在 $\hat{}\pi$ 中，每个循环都以其最大元素开头。因此，若要让“2”映射到 $\hat{}\pi$ 中的“1”，就需要“1”在循环形式中紧接在“2”之后（而不是绕回循环开头）。

我们称两个箭头模式 α 和 β 为箭头-*Wilf* 等价，如果 $|\mathcal{S}_n(\alpha)| = |\mathcal{S}_n(\beta)|$。下面给出一个箭头-Wilf 等价的一般例子。回顾一下， $c_1(\pi)$是 π的 1-补，其中除 1 以外的每个元素都取补。

命题 2.6。 设 $n \geq 1$ 和 $k \geq 1$。若 $\alpha = (\nu; k \to 1) \in \mathcal{A}_k$ 且 $\nu \in \mathcal{S}_{k-1}$，则

$$a_n(\nu; k \to 1) = a_n(c_1(\nu^r); k \to 1).$$

证明。 首先，如果 $\nu = \underline{\nu_1}\nu_2 \dots \nu_{j-1}1\nu_{j+1} \dots \nu_{k-1}$，根据引理 2.5，避免 $(\nu;\ k \to 1)$ 等价于避免 $\nu' = \nu_1 \dots \nu_{j-1}k1\nu_{j+1} \dots \overline{\nu_{k-1}}$。

因此，通过取反向补，$|\mathcal{S}_n(\nu')| = |\mathcal{S}_n((\nu')^{rc})|$。然而，注意到

$$(\nu')^{rc} = (k+1-\nu_{k-1})(k+1-\nu_{k-2}) \dots (k+1-\nu_{j+1})\overline{k1}(k+1-\nu_{j-1}) \dots (k+1-\nu_1).$$

但根据引理 2.5，避免这个模式恰好等价于避免

$$((k+1-\nu_{k-1})(k+1-\nu_{k-2}) \dots (k+1-\nu_{j+1})1(k+1-\nu_{j-1}) \dots (k+1-\nu_1); k \to 1),$$

它等于 $(c_1(\nu^r);\ k \to 1)$。总之，我们得出 $a_n(\nu; k \to 1) = |\mathcal{S}_n(\nu')| = |\mathcal{S}_n((\nu')^{rc})| = a_n(c_1(\nu^r); k \to 1)$。 □

例如，考虑箭头模式 $\alpha = (24153; 6 \to 1)$。根据引理 2.5，避免这个模式等价于避免 $\nu' = \underline{24}6153$。通过取通常的反向补，$|\mathcal{S}_n(246153)| = |\mathcal{S}_n(426135)|$，因为 $(\nu')^r = 351642$，所以 $(\nu')^{rc} = 426135$。避免这个模式等价于避免箭头模式 $(42135; 6 \to 1)$，但注意 $42135 = c_1((24153)^r)$。因此，$\alpha = (24153; 6 \to 1)$ 和 $\beta = (42135; 6 \to 1)$ 是箭头-Wilf 等价的。

3 避免$(12; b \to c)$的排列

本节讨论避免箭头模式 $\alpha = (12; b \to c)$ 的排列，其中 b 或 c （或两者）包含在 $\{1, 2\}$ 中。表 3 总结了本节的结果：

ν	H	$a_n(\nu;\ H)$	OEIS	定理
12	$1 \to 1$	$d_n + d_{n-1}$	A000255	命题 3.1
	$2 \to 2$	$n! - d_n$	A002467	定理 3.2
	$1 \to 2$	B_n	A000110	定理 3.3
	$2 \to 1$	$n!$	A000142	命题 3.4
	$1 \to 3$	S_{n-1}	A006318	定理 3.5
	$3 \to 1$	C_n	A000108	命题 3.7
	$2 \to 3$	$2B_{n-1}$	A186021	定理 3.8
	$3 \to 2$	B_n	A000110	命题 3.10

表 3：对某些 H，避免箭头模式 $\alpha = (12; H)$ 的那些排列的枚举。这里 B_n 表示第 n个贝尔数，d_n 表示第 n 个错排数，S_n 表示第 n 个大 Schr¨oder 数，C_n 表示第 n 个卡特兰数。

命题 3.1. 对于 $n \geq 2$，$a_n(12; 1 \to 1) = d_n + d_{n-1}$

证明。 只需注意到，对于 $\pi \in \mathcal{S}_n(12; 1 \to 1)$，如果 $\hat{}\pi$ 有一个小于 n 的不动点，它必然会出现在 π 中 n 之前，因此会形成一个 $(12; 1 \to 1)$ 模式。这意味着 $\hat{}\pi$ 要么没有不动点，要么只有 n 这一个不动点。第一种情况由 d_n 计数，第二种情况由 d_{n-1} 计数。 □

接下来我们考虑不动点是一次上升中较大元素的情况,

定理 3.2。对于 $n \geq 1$, $a_n(12;2\to 2) = n! - d_n$。

证明。只需证明 $a_n = (n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$。设 $\pi \in \mathcal{S}_n(12;2\to 2)$，我们不可能有$\pi_n = n$。满足 $\pi_{n-1} = n$ 的这类 π 的数量恰好是（$n-1$）a_{n-2}。事实上，我们可以在任意一个 $\tau \in \mathcal{S}_{n-2}(12;2\to 2)$ 的末尾添加一个大小为 nk 且满足 $1 \leq k \leq n-1$的循环，并对所有元素作适当平移，从而得到所有这类排列。由于 τ 避免了 $(12;2\to 2)$，且我们添加了一个大小为 2 的循环，因此不可能产生 $(12;2\to 2)$ 模式。反过来，从 π 的末尾移除 nk，必然会得到一个 $\tau \in \mathcal{S}_{n-2}(12;2\to 2)$的排列。

π 中满足 $\pi_k = n$ 且 $1 \leq k \leq n-2$ 的数量为（$n-1$）a_{n-1}。事实上，考虑任意一个$\tau \in \mathcal{S}_{n-1}(12;\ 2\to 2)$，通过将 τ中的 $n-1$替换为 n，并将 r连同 $1 \leq r \leq n-1$ 插入到 n右侧，同时相应地将其他项的值加大，从而构造一个新排列 $\tau' \in \mathcal{S}_n$。例如，若 $\tau = 25143$，我们将 5 替换为 6，并可将 $r = 3$ 放在 6 的右侧，得到 $\tau' = 263154 \in \mathcal{S}_6(12;\ 2\to 2)$。所得排列 τ'必然避免 $(12;\ 2\to 2)$，因为 τ原本就避免该模式，而且我们在 n 右侧添加了一项，不会引入不动点。此外，$\tau'_k = n$ 对于 $1 \leq k \leq n-2$成立，因为我们知道 $n-1$ 不在 τ的第 $n-1$ 个位置。这个过程很容易逆转，因此可以得到所有满足 $\pi_k = n$ 且 $1 \leq k \leq n-2$的 $\pi \in \mathcal{S}_n(12;2\to 2)$，其数量因而为（$n-1$）$a_{n-1}$。这涵盖了 n的所有可能位置，因此如所需，$a_n =$ （$n-1$）（$a_{n-1}+a_{n-2}$）。 □

定理 3.3。对于 $n \geq 1$, $a_n(12;1\to 2) = B_n$，即第 n 个贝尔数。

证明。在 $\hat{}\pi$ 的任意循环 $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 中，我们必须有 $c_1 > c_2 > \cdots > c_m$。确实，若对于某个 i, 有$c_i < c_{i+1}$，那么 $c_i c_{i+1}$ 就是 π 中的一个 12 模式，而 $\hat{}\pi(c_i) = c_{i+1}$，因此它也是箭头模式 $(12, 1\to 2)$ 的一次出现。由于 $\hat{}\pi$ 中的每个循环都必须按递减顺序书写，这类排列的数量恰好等于 $[n]$ 的集合划分数，即第 n 个贝尔数。 □

命题 3.4。对于 $n \geq 1$, $a_n(12;2\to 1) = n!$

证明。12 的一次出现不可能同时满足 $2\to 1$。确实，假设对于$i < j$ 和 $\pi_j \to \pi_i$，有 $\pi_i < \pi_j$。注意，π_i 不可能在 $\hat{}\pi$ 中以包含 π_j 的循环开头，因为每个循环的起始元素都是该循环的最大元。这就迫使 $i = j+1$，从而产生矛盾。 □

定理 3.5. 对于 $n \geq 1$, $a_n(12;1\to 3) = S_{n-1}$，对应第 $(n-1)$ 个大 *Schr¨oder* 数。

证明。记 $a_n := a_n(12;1\to 3)$。只需证明 a_n 满足大 Schr¨oder 递推关系：

$$a_n = a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}.$$

首先注意，避免 $(12;1\to 3)$ 且以 n 结尾的排列数等于a_{n-1}，因为移除或添加作为不动点的 n 不会引入 $(12;1\to 3)$ 模式。

接下来，我们考虑那些不以 n 结尾的排列。如果 $\tau \in \mathcal{S}_k(12;1\to 3)$ 且$\eta \in \mathcal{S}_{n-k}(12;\ 1\to 3)$，那么若 $\tau = \tau_1 \ldots \tau_i k \tau_{i+2} \ldots \tau_k$，我们可以定义一个排列

$$\pi = \tau_1 \ldots \tau_i \eta'_1 \ldots \eta'_{n-k} \tau_{i+2} \ldots \tau_k k$$

其中 $\eta_i' = \eta_i + k.$。我们断言 $\pi \in \mathcal{S}_n(12;\ 1 \to 3)$。确实，若 π 具有一个 $(12;\ 1 \to 3)$ 模式，那么其中的“1”必定是某个 τ_i，而“3”必定是某个 j。然而，在这种情况下，唯一能使 $1 \to 3$ 成立的方式是让 k 充当“1”。但这样一来，就不可能存在 12 模式。

我们来说明这个过程总是可逆的。取满足 $\pi_n = k$ and$\pi_j = n$ 的 $\pi \in \mathcal{S}_n(12; 1 \to 3)$。如果存在任何满足 $\pi_m < k$ 的 $m > j$，那么 $\pi_m,\ \pi_{m+1},\ \ldots,\ \pi_{n-1}$ 都必须小于 k，否则就会出现一个 $(12; 1 \to 3)$ 模式。同理，如果存在一个满足 $\pi_r < k$ 的 $r < j$，那么 $\hat{}\pi$ 中与 π_r 位于同一个循环里的所有元素也都必须小于 k，否则就会出现一个 $(12; 1 \to 3)$ 模式。因此，π 的形式为

$$\pi = \tau_1 \ldots \tau_i \eta_1' \ldots \eta_{n-k}' \tau_{i+2} \ldots \tau_k k$$

其中必然有 $\eta \in \mathcal{S}_{n-k}$ and $\tau = \tau_1 \ldots \tau_i k \tau_{i+1} \ldots \tau_k \in \mathcal{S}_k(12;\ 1 \to 3)$。因此，递推关系成立，定理得证。 □

例3.6。考虑 $\pi = 23\mathbf{6879}145 \in \mathcal{S}_9(12; 1 \to 3)$。这对应于排列$\tau = 23514 \in \mathcal{S}_5(12; 1 \to 3)$ 和 $\eta = 1324 \in \mathcal{S}_4(12;\ 1 \to 3)$。这里，将 η 中的各项都加上 5，插入到粗体位置（即 5 位于 τ 中的位置），并将 5 移到排列的末尾。

还要注意，η 是一个最大元素位于末尾的排列的例子，它对应于排列 $132 \in \mathcal{S}_3(12; 1 \to 3)$。

命题 3.7. 对于 $n \geq 1$, $a_n(12; 3 \to 1) = C_n$，第 n 个卡特兰数 .

证明。首先，注意到 $\mathcal{S}_n(12; 3 \to 1) = \mathcal{S}_n(\overline{3}12)$，由引理 2.5 可知。但由引理1.1，$|\mathcal{S}_n(312)| = C_n$，由此得证。 □

定理 3.8. 对于 $n \geq 2$, $a_n(12; 2 \to 3) = 2B_{n-1}$ 和 $a_1(12; 2 \to 3) = 1$。

证明。设 $n \geq 3$ 且 $\pi \in \mathcal{S}_n(12; 2 \to 3)$。令 b_n 表示这些排列中满足$\pi_n = 1$的排列数量。首先，注意到 $a_n = a_{n-1} + b_n$。事实上，$\pi \in \mathcal{S}_n(12; 2 \to 3)$要么具有 $\pi_n = n$，要么具有 $\pi_n = 1$。否则，对于某个 $2 \leq k \leq n-1$，有 $\pi_n = k$。设 $\pi_j = 1$ 且 $\pi_\ell = n$，则 $(\pi_j \pi_n; \pi_n \to \pi_\ell)$ 是一个 $(12;\ 2 \to 3)$ 模式。满足 $\pi_n = n$ 的此类排列有 a_{n-1} 个，根据定义，满足$\pi_n = 1$的排列有 b_n 个。

现在我们来为 b_n 找出一个递推关系。因此，目前我们只考虑满足 $\pi_n = 1$ 的 $\pi \in \mathcal{S}_n(12; 2 \to 3)$。我们将这些排列分成两组。第一组以 $n > \pi_{i_1} > \pi_{i_2} > \ldots > \pi_{i_k} > 1$ 结尾。第二组在 n 和 1 之间有一个上升。

为了对第一组计数，我们可以从 $2, \ldots, n-1$ 中任意选取 k 个元素，作为 n 和 1 之间的递减部分。然后，n 之前的元素可以有 a_{n-k-2} 种排列方式。因此，第一组排列的计数为 $\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} a_{n-k-2}$。

为了对第二组计数，考虑发生在 n 和 1 之间的最后一个上升。设这个上升为 $i < j$，使得 $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_m i j \pi_{m+3} \cdots \pi_n$，其中 $\pi_{m+3} > \cdots > \pi_n = 1.$。为了避免 $(12;\ 2 \to 3)$，所有小于 i 的元素都必须出现在 j 的右侧。否则，存在某个元素 $k < i$ 位于 j 的左侧，因此 i，于是 $(ki; i \to j)$ 就是一个 $(12;\ 2 \to 3)$ 模式。注意，这只有在必然有 $i \to j$ 的情况下才成立，因为该上升出现在 n 之后。但由于 $i < j$ 是 π 中的最后一个上升，j 之后的所有元素都按递减排列，所以 π 必须以 $(i-1)(i-2)\ldots21$ 结尾。

如果我们固定开始该上升的 $2 \leq i \leq n-2$，就可以通过选择 π中位于 i 与 $i-1$ 之间的元素来计数这些排列；这些元素必须递减、非空，并且属于$\{i+1, \ldots, n-1\}$。若有 k个这样的元素，则可用 $\binom{n-i-1}{k}$种方式选取它们。i左侧的元素由 $b_{n-i-k+1}$ 计数，因为red$(\pi_1 \cdots \pi_m i)$必须属于 $\mathcal{S}_n(12;\ 2 \to 3)$，且 i约化为1。

例如，排列 $784\mathbf{65}321 \in \mathcal{S}_7(12;2\to 3)$的最后一个上升以 $i=4$开始，随后我们选择6和5出现在4之后，并且被迫以321结束该排列。在移除 i 右侧的所有元素并约化之后，我们发现red$(784) = 231 \in \mathcal{S}_3(12;2\to 3)$的末项为1。

对 i的所有取值求和，可得

$$\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{k=1}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{k}b_{n-i-k+1}$$

这样的排列数。这意味着

$$b_n=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}a_{n-k-2}+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{k=1}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{k}b_{n-i-k+1}.$$

我们可以化简第一项和第二项求和，得到:

$$b_n=-a_{n-2}+a_1+\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}a_j+\sum_{m=2}^{n-2}\left[\binom{n-2}{m-1}\right]b_m.$$

由于 $b_n=a_n-a_{n-1}$，我们可以将其表示为关于 a_n 的递推关系，

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}-a_{n-2}+a_1+\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}a_j+\sum_{m=2}^{n-2}\binom{n-2}{m-1}(a_m-a_{m-1})\\&=1+\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n-2}{m-1}a_m\end{aligned}$$

这个递推关系推出了所需的结果。 □

注 3.9。 鉴于这个递推关系如此简单，若能找到一种更直接的方法来证明这一结果，将会很有意思。

命题 3.10。对于 $n\geq 1,\quad a_n(12;3\to 2)=B_n$。

证明。 首先注意到，根据引理 2.5，避免箭头模式 $(12;3\to 2)$ 等价于避免相邻模式 132。但根据引理 1.1，这一点 B_n 。 □

4 避免$(21;b\to c)$的排列

本节将讨论对于某个 $b,\quad c\in\{1,2,3\}$. 而避免箭头模式 $(21;b\to c)$ 的排列

ν	H	$a_n(\nu;\ H)$	OEIS	结果
21	$1 \to 1$	$n!$	A000142	命题 4.1
	$2 \to 2$	$d_n + \sum_{i=1}^{n} d_{n-i}a_{i-1}(21; 2 \to 2)$	A259870	定理 4.2
	$1 \to 2$ $2 \to 1$	1	A000012	命题 4.4
	$1 \to 3$	2^{n-1}	A000079	定理 4.5
	$3 \to 1$	C_n	A000108	命题 4.6
	$2 \to 3$	$\lvert\mathcal{S}_n(\overline{41\ 32},\ \overline{32\ 41})\rvert$	A074664	定理 4.7
	$3 \to 2$	B_n	A000110	命题 4.10

表 4：对于某些 H，避免箭头模式 $\alpha = (21; H)$ 的排列的枚举。这里 B_n 表示第 n个贝尔数， d_n 表示第 n 个错排数，而 C_n 表示第 n 个卡特兰数。

命题 4.1。对于 $n \geq 1$，我们有

$$a_n(21; 1 \to 1) = n!$$

证明。 由于 $\hat{}\pi$ 中的任何不动点都必须是 π 中的从左到右最大值，因此模式 $(21; 1 \to 1)$ 不可能出现，所以每个排列都避开该模式。 □

定理 4.2。对于 $n \geq 1$，我们有

$$a_n(21; 2 \to 2) = d_n + \sum_{i=1}^{n} d_{n-i}a_{i-1}(21; 2 \to 2).$$

证明。 首先注意，如果 $\hat{}\pi$ 是一个错排，那么 π 避开 $(21; 2 \to 2)$，因为我们从未有$2 \to 2$。现在考虑 $\hat{}\pi$ 至少有一个不动点的情形。为了使 π 避开 $(21; 2 \to 2)$，我们必须使不动点左侧的每个元素都小于不动点右侧的每个元素。事实上，如果 i 是 $\hat{}\pi$ 的一个不动点，那么 i 是 π 中的从左到右最大值，因此所有大于 i 的元素必然都出现在它的右侧。然而，如果任何小于 i 的元素出现在它的右侧，它就会与 i 形成一个 $(21; 2 \to 2)$ 模式。

假设 i 是 $\hat{}\pi$ 中最大的 不动点。那么它右侧的元素可以是大小为 $n - i$ 的任意错排。 i 左侧的元素由 a_{i-1} 计数，因为它们也必须避免 $(21; 2 \to 2)$。由此得到所需的递推关系。

□

注记 4.3. 我们注意到，这个 OEIS 数列的原始递推关系为

$$a_n = na_{n-1} + (n-2)a_{n-2} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j a_{n-j}.$$

定理 4.2 表明，OEIS 数列可以用错排数表示为：

$$a_n = d_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{n-1-i}a_i.$$

命题 4.4。对于 $n \geq 1$，我们有 $a_n(21;1 \to 2) = a_n(21;2 \to 1) = 1$.

证明。在这两种情况下，只有递增置换满足要求 . □

定理 4.5。对于 $n \geq 1$， $a_n(21;1 \to 3) = 2^{n-1}$.

证明。我们将证明这些排列与 n 的合成构成双射。令 $\pi \in \mathcal{S}_n(21;1 \to 3)$。首先，若 $\hat{}\pi = c_1 c_2 \cdots c_k$ 中的每个 c_i 都是一个循环，我们断言，对于 $i = 1,\ldots,k-1$， c_i 中的元素都小于 c_{i+1} 中的元素。否则，考虑这两个循环 $(a_1,\ldots,a_m)$ 和 $(b_1,\ldots,b_\ell)$。若有 $a_j > b_i$，那么如果 $i < \ell$ 且 $b_{i+1} > a_j$， $a_j b_i b_{i+1}$ 就会构成一个 $(21;1 \to 3)$ 模式。因此，这意味着若 $i < \ell$，则 $a_j > b_{i+1}$。重复这一论证，直到 $i = \ell$，从而 $a_j > b_\ell$。然而，此时 $a_j b_\ell; b_\ell \to b_1$在 π 中构成一个 $(21;1 \to 3)$ 模式。

现在考虑 $\hat{}\pi$ 中的任意一个循环（a_1， a_2， $\ldots$， a_k）。为了避免 $(21;\ 1 \to 3)$，必须有 $a_2 < a_3 < \cdots < a_k < a_1$。根据定义， a_1 是极大的。如果不满足 $a_2 < a_3 < \cdots < a_k$，循环中就会出现某个下降。按照与上一段相同的论证，这个下降会产生一个 $(21;1 \to 3)$ 模式。

前两段立即表明，要构造 $\pi \in \mathcal{S}_n(21;1 \to 3)$，我们只需指定 $\hat{}\pi$ 中每个循环的大小，这由 n 的一个组合给出。例如，(3，2， 4) 对应于 $\hat{}\pi$ =(312)(54)(9678)。这就证明了该结果。

□

命题 4.6。对于 $n \geq 1$， $a_n(21;3 \to 1) = C_n$。

证明。这可由命题 3.7 和命题 2.6 立即推出，因为 $C_n = a_n(12;3 \to 1) = a_n(21;3 \to 1)$。

□

定理 4.7。对于 $n \geq 1$， $a_n(21;2 \to 3) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_{n-k}$ 其中 $f_n = B_n - \sum_{k=1}^{n} f_{k-1} B_{n-k}$.

证明。首先注意到， $\pi \in \mathcal{S}_n(21;2 \to 3)$ 中 $\hat{}\pi$ 没有不动点，当且仅当 $\pi \in \mathcal{S}_n(231)$ 中 $\hat{}\pi$ 没有不动点。事实上，假设 π 包含由 $(ba;b \to c)$ 实现的一个 $(21;\ 2 \to 3)$ 模式。如果 c 不是 π中的从左到右最大值，那么这当且仅当 π 包含 bca时成立，而后者是一个 231模式。如果 c 是 π中的从左到右最大值，这意味着 b出现在 $\hat{}\pi$中某个循环的末尾，但它不可能是 π 中的最后一个元素，因为 a 出现在它之后。因此，b右侧的元素（记作 d）是 π中的另一个从左到右最大值。在这种情况下， bda 是 π中的一个 231模式。反过来，如果这样的 π 包含一个由 bda 实现的 231模式，其中 d 是 π中的从左到右最大值，由于 b 出现在一个大小至少为 2 的循环中，存在某个 $c > b$ 使得 $b \to c$，因此 $(ba;b \to c)$ 是 π中的一个 $(21;2 \to 3)$ 模式。

因此，要找出所有 $\pi \in \mathcal{S}_n(21;2 \to 3)$，只需以所有可能的方式向排列$\pi \in \mathcal{S}_k(231)$中添加不动点，其中$\hat{}\pi$ 没有不动点。然而请注意，向任意一个避免231模式的$\hat{}\pi$ 中添加任何不动点，都不会产生$(21;2 \to 3)$模式。事实上，该不动点是 π中的从左到右最大值，因此不能作为$(21;2 \to 3)$中的1；又因为它在$\hat{}\pi$中是不动点，所以不能作为2或3。因此，如果 f_n 表示$\hat{}\pi$ 没有不动点的 $\pi \in \mathcal{S}_n(231)$的数量，这就意味着

$$a_n(21;2 \to 3) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_{n-k}.$$

这就证明了我们结果的第一部分。现在我们必须求出 f_n。为此，首先注意到，根据引理1.1，$|\mathcal{S}_n(231)| = \overline{B_n}$。现在我们来计算至少含有一个不动点的避免231模式的排列的数量，并将它们剔除。设 π 是这样一个排列，并假设 a 是$\hat{}\pi$的第一个不动点，其中 $\pi_k = a$，因此$\hat{}\pi = \sigma(a)\tau$，其中 σ 不含不动点。

为了避免$\overline{231}$模式， τ 中的所有元素都必须大于 a。否则，存在某个τ_i 满足 $\tau_i < a$，但这样一来，$a\tau_1\tau_i$ 就是一个$\overline{231}$模式。此外，由于 a 是一个从左到右最大值， a 左侧不可能有任何大于 a的元素。这意味着 $\{\tau_1, \ldots, \tau_{n-a}\} =\{a+1, a+2, \ldots, n\}$ 且 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{a-1}\} = \{1, \ldots, a-1\}$。由于 σ 不含任何不动点，并且$\mathbf{red}(\tau)$可以是任意避免231模式的排列，我们得出，至少含有一个不动点的避免231模式的排列数量为 $\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}B_{n-k}$，因此

$$f_n = B_n - \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}B_{n-k}.$$

□

例4.8。 我们来看看，确实可以在 $\pi \in \mathcal{S}_k(231)$ 中添加不动点，而 $\hat{}\pi$ 没有不动点。取 $\pi = 412635 \in \mathcal{S}_6(231)$，可以看到这个排列具有这样的性质：$\hat{}\pi =(412)(635)$ 没有不动点。现在选择一组不动点添加进去，并注意到所得排列仍然避开箭头模式 $(21; 2 \to 3)$。选取 2， 6， 和 8 作为不动点。接着相应地将 $\hat{}\pi$ 中的元素移至 (513)(947)，再添加这些不动点，得到 (2)(513)(6)(8)(947)，从而得到一个新的排列 $\pi' = 251368947 \in \mathcal{S}_n(21; 2 \to 3)$。

注4.9。 我们注意到， $\mathcal{S}_n(231) \subset \mathcal{S}_n(21; 2 \to 3)$ 一般都成立；如果去掉 $\mathcal{S}_n(21; 2 \to 3)$ 中含有不动点的排列，则等号成立。前面的证明并不需要这么一般的结论。

此外，似乎 $|\mathcal{S}_n(21;\ 2 \to 3)| = |\mathcal{S}_n(41\ 32, 3\overline{2\ 41})|$。这些是没有任何嵌套下降的排列。若能找到一个双射就好了。此外，似乎 f_n 满足 $f_n + f_{n-1} = s_{n+1}$，其中 s_n 是 $n+1$ 的不含单元素集合的不可分解集合划分的个数。在这里找到一个双射也会很有趣。

命题 4.10. 对于 $n \geq 1$, $a_n(21; 3 \to 2) = B_n$。

证明。根据引理 2.5， $a_n(21; 3 \to 2) = |\mathcal{S}_n(\overline{321})|$。但根据引理1.1，这等于 B_n。 □

5 避免$(13; b \to c)$的排列

在本节中，我们枚举那些避免 $\alpha = (13; b \to c) \in \mathcal{A}_3$. 的排列。本节结果的摘要可见于表5。

ν	H	$a_n(\nu;\ H)$	OEIS	定理
13	$1 \to 2$	B_n	A000110	定理5.1
	$2 \to 1$			定理5.2
	$3 \to 2$			命题5.3
	$2 \to 3$	复杂递推关系	N/A	定理5.4
	$2 \to 2$	$d_n + d_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(d_{n-k} + d_{n-k-1})(k-1)!$	N/A	定理 5.6

表5：对某些 H，避开箭头模式 $\alpha = (13; H)$ 的排列的枚举。此处， B_n 表示第 n个贝尔数， d_n 表示第 n 个错排数，而 $\left\{ {n \atop k} \right\}$ 表示第二类斯特林数。

前三个定理都非常直接。

定理5.1。对于 $n \geq 1,\quad a_n(13;1\to 2) = B_n$。

证明。给定 $\pi \in \mathcal{S}_n(13;\ 1\to 2)$，考虑 n的位置。如果 $\pi_k = n$，那么 $\pi_1 < \pi_2 < \cdots < \pi_{k-1}$。否则，在 $\hat{}\pi$ 中会存在一个大小至少为二的循环，该循环不包含 n（因此出现在 π 中的 n 之前）。分别令 $\pi_i > \pi_j$ 为该循环的首项和末项。在这种情况下，$(\pi_j n;\pi_j \to \pi_i)$ 在 π 中构成一个 $(13;\ 1\to 2)$ 模式。

这意味着 $\pi = \sigma n \tau$，其中 $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_{k-1}$ 且 $\mathrm{red}(\tau) \in \mathcal{S}_{n-k}(123)$。对于 σ 有$\binom{n-1}{k-1}$ 种选择，并且由于根据引理1.1，$|\mathcal{S}_{n-k}(123)| = B_{n-k}$，因此 τ 有 B_{n-k} 种选择。对 n 的所有位置求和可得

$$a_n(13;1\to 2) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k},$$

这等于 B_n. □

定理5.2。对于 $n \geq 1,\quad a_n(13;2\to 1) = B_n$。

证明。这个证明与定理5.1的证明几乎完全相同。通过类似的推理，我们可以得出，对于 $\pi \in \mathcal{S}_n(13;\ 2\to 1)$ 且 $\pi_k = n$, $\pi = \sigma n \tau$，其中 $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_{k-1}$，但这次 $\mathrm{red}(\tau) \in \mathcal{S}_{n-k}(213)$。根据引理1.1，$|\mathcal{S}_n(213)| = B_n$，因此结论成立。 □

命题5.3。对于 $n \geq 1,\quad a_n(13;3\to 2) = B_n$。

证明。根据引理2.5和引理1.1，$a_n(13;3\to 2) = |\mathcal{S}_n(\overline{132})| = B_n$。 □

下一个定理更复杂，并依赖于 [6, 推论 1] 中的结果：大小为 n、具有 m 个从左到右最小值的避免123的排列的数量等于第二类斯特林数，记为 $\left\{ {n \atop m} \right\}$.

定理5.4。对于 $n \geq 1$ 和 $a_n := a_n(13;2\to 3)$,

$$a_n = a_{n-1} + b_n + \sum_{r=2}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-r-1} \binom{n-r-1}{k} b_{n-k-r+1} c_{r,k}$$

其中

$$b_n = \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n-3}{n-i-1} (b_i + a_{i-1}) \quad \text{and} \quad c_{r,k} = \sum_{m=2}^{r-1} \left\{ {r-2 \atop m-1} \right\} m^k.$$

证明。在本证明中，记作 $a_n := a_n(13;2\to 3)$，并用 b_n 表示那些避免$(13;2\to 3)$且以1结尾的排列。

我们先考虑 $\pi \in \mathcal{S}_n(13;2\to 3)$ 以 $\pi_n = 1$ 结尾的情况。首先，假设在 $\pi.$ 中，2 位于 n 之前。那么，由于 π 避免 $(13;2\to 3)$，n 与 1 之间的任何元素都必须按递减顺序排列；否则，对某个 $r < s$ 而言，$(2s;r\to s)$ 就会是该模式的一次出现。此外，出现在 n 之后的元素可以是 2 与 n 之间的任意元素；若 n 位于第 $2 \leq i \leq n-1$ 个位置，则排列 $\mathrm{red}(\pi_1 \ldots \pi_{i-1})$ 可以是任意一个避免箭头模式 $(13;2\to 3)$ 的排列。因此，对于任意 $2 \leq i \leq n-1$，满足 $\pi_i = n$ 的此类排列共有 $\binom{n-3}{n-i-1} a_{i-1}$ 个。反之，若在 π 中，2 位于 n 之后，那么 2 与 1 之间的任何元素都必须

按递减顺序排列，理由类似。此外，移除 2 之后的所有元素后，剩下的是一个以 1 结尾且避免 (13; $2 \to 3$) 的排列。若 2 在 $2 \le i \le n-1$ 中位于第 i 个位置，则此类排列恰有 $\binom{n-3}{n-i-1} b_i$ 个。因此

$$b_n = \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n-3}{n-i-1} (b_i + a_{i-1}).$$

现在考虑那些末尾不是 1 的排列。要么是 $\pi_n = n$，这种情况下显然有 a_{n-1} 个这样的排列；要么是 $\pi_n = r$，其中某个 $2 \le r \le n-1$. 。注意，对于所有 $j < r$， j都必须出现在 n之后。否则，($jn; r \to n$) 就会是一个 (13; $2 \to 3$) 模式。此外，元素 $\{1, \ldots, r-1\}$ 必须以避免 123. 的顺序出现。如果存在 123 的一次出现，例如 $\pi_{i_1}\pi_{i_2}\pi_{i_3}$，且其元素仅来自 $[r-1]$，那么 ($\pi_{i_1}\pi_{i_2+1}$; $\pi_{i_2} \to \pi_{i_2+1}$) 就会是 (13; $2 \to 3$) 的一次出现，因为要么 $i_2 + 1 = 3$，要么 $\pi_{i_2+1} > r$. 。设由 $[r-1]$ 中的元素构成的排列为 σ。任何出现在某个元素 $j \in [r-1]$第一次出现之后的其他元素，都只能出现在相应排列 σ 的一个从左到右最小值之后，并且这些片段中的元素都必须递减。最后，σ 必须以 1 结尾，否则 ($1r; \pi_{n-1} \to r$) 就会是一个 (13; $2 \to 3$) 模式。

例如，如果 $r = 6$和 $\sigma = 45231$，那么 π必定具有 $\pi = \ldots n \ldots 4 \ldots 52 \ldots 31 \ldots 6$.的形式。事实上，5 和 2 之间不可能有任何元素 m，因为 ($4m; 5 \to m$) 会构成一个 (13; $2 \to 3$) 模式。此外，为了避免 (13; $2 \to 3$)，4 和 5 之间或 2 和 3 之间的任何元素都必须按递减顺序排列。

考虑到这一点，假设在某个元素 $j \in [r-1]$. 第一次出现之后，有 k 个大于 r 的元素出现。那么，由 $[r-1]$中的元素组成的避免123的排列 σ 以 1 结尾。此类排列中，具有 m 个从左到右最小值（包括末尾的 1）的排列有 $\left\{ {r-2 \atop m-1} \right\}$ 个； r 和 n之间的 k 个元素有 $\binom{n-r-1}{k}$ 种选择；将这些元素分配到任意从左到右最小值之后，有 m^k 种方法。最后，删去元素 $j \in [r-1]$的所有出现，仅保留其第一次出现，我们得到一个以 1 结尾、大小为$n-k-r+1$.的避免 (13; $2 \to 3$) 的排列。

综上所述，我们得到

$$a_n = a_{n-1} + b_n + \sum_{r=2}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-r-1} \binom{n-r-1}{k} b_{n-k-r+1} \sum_{m=2}^{r-1} \left\{ {r-2 \atop m-1} \right\} m^k.$$

□

注5.5。 $c_{r,\,k}$ 是序列 $a_m = (m+1)^k$ 在固定 k 时的斯特林变换。例如，对于 $k = 0$， 1， 2，3，相应的值依次为 $c_{r,\,1} = B_{r-2}$， $c_{r,\,2} = B_{r-1}$,$c_{r,\,3} = B_r - B_{r-2}$ 和 $c_{r,\,4} = B_{r+1} - 3B_{r-1} - B_{r-2}$。

定理 5.6。对于 $n \ge 3$,

$$a_n(13; 2 \to 2) = d_n + d_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n-k} + d_{n-k-1})(k-1)!.$$

证明。 给定 $\pi \in \mathcal{S}_n$(13; $2 \to 2$)，我们首先注意到，$\hat{}\pi$ 中的不动点只能出现在 π 的第一个或最后一个元素处。事实上，如果 $\hat{}\pi$ 中曾有一个不动点，且其左右两侧在

π 中都有元素，这意味着 π_k 和 π_{k+1} 是 π 中的从左到右极大值，且具有 $k > 1$，那么 $\pi_1\pi_k\pi_{k+1}$ 就是 π 中的一个 $(13;2 \to 2)$ 模式。需要考虑四种情况。

首先，如果 $\hat{}\pi$ 中没有不动点，那么显然不可能在 π. 中出现 $2 \to 2$ 。这些情况由错排数 d_n 计数。接下来，如果唯一的不动点出现在 π 的末尾，那么 $\pi_n = n$，此时这样的排列有 d_{n-1} 个，因为没有其他不动点。

如果 $\hat{}\pi$ 中唯一的不动点出现在 π 的开头，那么为了避免出现 $(13;2 \to 2)$ 模式，所有小于该不动点的元素都必须以任意顺序出现在 π 的末尾。如果 k 是不动点，我们可以用 d_{n-k} 种方式排列所有大于 k 的元素，并用 $(k-1)!$ 种方式将小于 k 的元素排列在 π 的末尾。对所有 k 求和，得到 $\sum_{k=1}^{n-1} d_{n-k}(k-1)!$ 种可能。

最后，如果 π 的开头和末尾各有一个不动点，根据相同的论证，有 $\sum_{k=1}^{n-1} d_{n-k-1}(k-1)!$ 种可能。唯一的区别是，小于第一个不动点的元素不在排列末尾，而是紧挨着 $\pi_n = n$ 的左侧。

由于这涵盖了所有可能情况，将这些情形相加即可得到所需结果。 □

6 避免成对箭头模式

本节中，我们枚举避免箭头模式 $\alpha = (12; b \to c) \in \mathcal{A}_3$ 和 $\beta = (1; 1 \to 1) \in \mathcal{A}_1$的排列，这意味着 $\hat{}\pi$ 也没有不动点。我们用 $a_n(\alpha, \beta)$ 表示同时避免箭头模式 α 和 β的排列数量。结果汇总见表 6。

ν	H	$a_n((\nu; H), (1; 1 \to 1))$	OEIS	定理
12	$1 \to 2$	$B_{n\geq 2}$	A000296	定理 6.1
	$1 \to 3$	$\sum_{i=1}^{n-1}(a_i + a_{i-1})(a_{n-i} + a_{n-i-1})$	A052705	定理 6.2
	$3 \to 1$	r_n	A005043	定理 6.4
	$2 \to 3$	G_{n-2}	A040027	定理 6.6
	$3 \to 2$	$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_k((12; 3 \to 2), (1; 1 \to 1))$	A032347	定理 6.7

表6： $\mathcal{S}_n(\alpha, \beta)$中排列的枚举，对应箭头模式 $\alpha = (12; b \to c)$和$\beta = (1; 1 \to 1)$。这里 G_n 表示第 n个Gould数， r_n 表示第 n个Riordan 数，而$B_{n\geq 2}$ 表示第 n个二阶关联贝尔数。

定理 6.1. 对 于 $n \geq 1$, $a_n((12; 1 \to 2), (1; 1 \to 1)) = B_{n\geq 2}$，第 n 个2-关联贝尔数。

证明。 我们在定理 3.3 中证明了 $a_n(12; 1 \to 2) = B_n$ ，方法是说明 $\hat{}\pi$ 中的所有循环都必须按递减顺序排列其元素。因此，$\hat{}\pi$ 的循环分解对应于 n 的一个集合划分。额外要求避免 $(1; 1 \to 1)$ 意味着不能有任何不动点。由此可知，每个 $\pi \in \mathcal{S}_n((12; 1 \to 2), (1; 1 \to 1))$ 都与 n 的一个不含单元素集合的集合划分一一对应。这恰好由 2-关联贝尔数计数。 □

定理 6.2. 设 $a_n := a_n((12; 1 \to 3), (1; 1 \to 1))$。对于 $n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k + a_{k-1})(a_{n-k} + a_{n-k-1})$。

证明。 回顾在定理 3.5 的证明中，我们曾证明：满足 $\pi_n \neq n$ 的 $\pi \in \mathcal{S}_n(12;3 \to 1)$ 是通过选取 $\tau \in \mathcal{S}_k(12;3 \to 1)$ 与 $\eta \in \mathcal{S}_{n-k}(12;3 \to 1)$，并令 $\pi_{\tau,\eta} = \tau_1 \cdots \tau_i \eta'_1 \cdots \eta'_j n \eta'_{j+2} \cdots \eta'_{n-k} \tau_{i+2} \cdots \tau_k k$（其中 $\tau_{i+1} = k$、$\eta_{j+1} = n-k$、$\eta'_i = \eta_i + k$）构造而成的。

由于 $\pi \in \mathcal{S}_n((12;\ 3 \to 1),(1;\ 1 \to 1))$不可能有 $\pi_n = n$，因此只需考虑哪些 τ和 η对应于$\pi_{\tau,\eta}$，其中$\hat{}\pi_{\tau,\eta}$ 避免不动点。

在$\pi_{\tau,\eta}$中，不动点唯一可能出现的位置是在 n之前，也就是$\tau_1 \cdots \tau_i \eta'_1 \cdots \eta'_j$中。此后，$\hat{}\pi$ 必然避免不动点，因为 k 总是出现在 n之后。注意，这意味着$\hat{}\pi_{\tau,\eta}$恰好在 τ 和 η 都避免$(1;1 \to 1)$或仅有其最大项是不动点时，才会避免不动点。否则，如果其中任一个包含非最大不动点，它必定出现在 τ 中的 k 之前，或 η 中的 n 之前，因此在$\tau_1 \cdots \tau_i \eta'_1 \cdots \eta'_j$中仍会是不动点。

这意味着，允许的 $\tau \in \mathcal{S}_k((12;\ 1 \to 3),(1;\ 1 \to 1))$由 $a_k + a_{k-1}$计数；类似地，允许的 η 由 $a_{n-k} + a_{n-k-1}$计数。在这两个求和式中，第二项对应于 τ 或 η 的最大点是不动点的情形。

对 τ 的所有可能大小求和，我们得到

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + a_{k-1})(a_{n-k} + a_{n-k-1})$$

其中 $a_0 = 1$。 □

例6.3。 在例3.6中，我们考察了 $\pi = 236879145$，并发现这对应于$\tau = 23514$ 和 $\eta = 1324$。在这种情况下，τ 和 η 都具有非最大不动点，并且它们全部在 $\pi_{\tau,\ \eta}$ 中仍是不动点。例如，$\eta_1 = 1$，这意味着 $\hat{}\pi_6 = 6$。

如果我们改为考察 $\tau = 32415$ 和 $\eta = 2143$, $\pi_{\tau,\ \eta} = 3241\mathbf{7698}5 \in \mathcal{S}_9((12;\ 1 \to 3),\ (1;1 \to 1))$，则 $\hat{}\pi =$ (32)(41)(76)(985) 没有不动点。注意，在这种情况下，$\hat{}\tau_5 = 5$ 是不动点，但插入 η 后，5 会成为与 9 同属一个循环的一部分，因此不再是不动点。

定理 6.4. 对于 $n \geq 1$，$a_n((12;\ 3 \to 1),\ (1;1 \to 1)) = r_n$，第 n 个 *Riordan* 数。

证明. 在本证明的其余部分，我们令 $a_n := a_n((12;\ 3 \to 1),(1;\ 1 \to 1))$。由引理 2.5，避免 $(12;3 \to 1)$ 等价于避免 312，而这又等价于避免 312。因此考虑$\pi \in \mathcal{S}_n(312)$，其中 $\hat{}\pi$ 没有不动点。我们断言这些排列满足递推关系

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} + a_{k-2}) a_{n-k},$$

其中 $a_0 = 1$。为看出这一点，考虑 1 在 π 中的位置。我们不能有 $\pi_1 = 1$，否则这意味着 $\hat{}\pi_1 = 1$，而这是一个不动点。若 $\pi_k = 1$，则为避免 312，1 左侧的所有元素都必须小于其右侧的元素。这意味着 $\pi = \tau 1 \sigma$，且 $\tau < \sigma$。因此，1 右侧的元素是一个从左到右最大值，从而在 $\hat{}\pi$ 中开启一个新的循环。

为了使 $\hat{}\pi$ 避免任何不动点，red(σ) 也必须避免出现不动点。这意味着 red(σ) $\in \mathcal{S}_{n-k}(312;(1;1 \to 1))$，因此由 a_{n-k} 计数；在 $n = k$ 的情况下，我们令$a_0 = 1$。

同样，red(τ) 可以没有不动点，也可以将末尾的点固定，因为 1 会扩展这个循环，并消除 π 中的不动点。然而，这是 red(τ) 唯一可能有的不动点，否则 σ 会有一个不动点。如果 red(τ) 没有不动点，则有 a_{k-1} 种选择。如果它在末尾有一个不动点，则有 a_{k-2} 种选择。在 $k = 2$ 的情况下，有一种选择

即对于 τ，red(τ) $= 1$；这个以 π 开头为 21 的特殊情形给出 $(a_1 + a_0)a_{n-2} = a_{n-2}$ 种总选择数。对所有位置 k 求和，即得所述递推关系。

解出生成函数后，我们得到 $A(x) = \frac{1+x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x\ 1+x}$ ()，这正是 Riordan 数的生成函数。

□

注 6.5. 在 [5], 中，作者的动机是用排列回避来寻找 Riordan 数的组合解释。这为 Riordan 数提供了一个基于箭头回避的新刻画。为了了解它与莫茨金数的关系，我们注意到 $M_n = r_{n+1} + r_n$, 其中 r_n 是 Riordan 数。Riordan 数通常用卷积 $r_n = \sum_{k=2}^{n} M_{k-2}r_{n-k}$表示。代入 $M_{k-2} = r_{k-1} + r_{k-2}$ 即可恢复我们的递推关系。

定理6。 **6.** 对于 $n \geq 2$, $a_n((12;\ 2 \to 3), (1; 1 \to 1)) = G_{n-2}$, $(n-2)$-*nd Gould* 数 $r.$

证明。 在本证明的其余部分，我们令 $a_n := a_n((12;\ 2 \to 3), (1; 1 \to 1))$。仿照定理 3.8 的证明，由于 $\pi \in \mathcal{S}_n(12; 2 \to 3)$，我们必有 $\pi_n = n$ 或 $\pi_n = 1$。然而，由于 $\hat{}\pi$ 也避免不动点，我们必有 $\pi_n = 1$。现在我们再次考虑两种可能情形： n 与 1 之间没有上升，或者在 π中 n与 1 之间存在某个上升。在第一种情形中，和之前一样，有 $\binom{n-2}{k}a_{n-k-2}$ 种选择。我们选取出现在 n 与 1 之间的元素，其余元素则以仍避免 $(12; 2 \to 3)$ 和 $(1; 1 \to 1)$ 的任意方式排列。

在第二种情形中，我们再次得到与定理 3.8 的证明中相同的和。然而，现在由于 $\mathcal{S}_n((12;\ 2 \to 3), (1; 1 \to 1))$ 中的所有排列都必然具有 $\pi_n = 1$，我们发现有$\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{k=1}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{k}a_{n-i-k+1}$ 个这样的排列。事实上，我们再次对以 $i \in \{2, \ldots, n-2\}$ 开头、且最后一个上升位于 n 与 1 之间的 π 进行计数。我们可以再次选取 i 与 $i-1$ 之间的 k 个元素，但现在在去掉 i 右侧的项之后，剩余元素由 $a_{n-i-k+1}$ 计数。综上，我们得出，

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}a_{n-k-2} + \sum_{i=2}^{n-2}\sum_{k=1}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{k}a_{n-i-k+1}$$

这可简化为，

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}a_{k+1}.$$

□

与定理 3.8 一样，若能找到一种更简单的构造来得到相同的递推关系，将会很有意思。

定理 6.7. 对于 $n \geq 2$, $a_n := a_n((12;\ 3 \to 2), (1; 1 \to 1))$ 满足

$$a_n = \sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}(a_{k-1} + a_{k-2}) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_k$$

其中 $a_0 = 1$ 和 $a_1 = 0$。

证明。 首先，根据引理 2.5，避免 $(12; 3 \to 2)$ 等价于避免 132。因此，为了计数$\pi \in \overline{\mathcal{S}_n}(132, (1; 1 \to 1))$，我们首先注意到 n 不能出现在 1 的右侧。这是因为所有

1 右侧的元素都必须递增排列才能避免 132，因此如果 $\overline{n}$ 出现在 1 的右侧，就意味着$\pi_n = n$，这又意味着 $\hat{}\pi_n = n$，而这是不允许的。

现在，考虑满足 $\pi_k = 1$ 的排列。如上所述，我们必须有 $\pi_{k+1} < \pi_{k+2} < \cdots < \pi_n$ 以避免出现 $\overline{132}$。考虑由 1 左侧的元素构成的排列，$\pi' = \mathrm{red}(\pi_1\pi_2\cdots\pi_{k-1})$。那么 π' 仍必须避免 132，并且要么没有不动点，要么有 $\overline{\pi_{k-1}} = k-1$，因为 1 会在 π 中消除这个不动点。这意味着这样的排列有 $a_{k-1} + a_{k-2}$ 个。因此，要构造满足 π 且具有 $\pi_k = 1$ 的排列，我们先选出除 n 之外的前 $k-2$ 个元素，再以 $a_{k-1} + a_{k-2}$ 种方式排列这些元素。1 后面的元素必须按递增顺序排列。对 1 所有可能出现的位置求和，得到：

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2}(a_{k-1} + a_{k-2}).$$

化简这个和，得到所述的第二个递推关系。 □

备注6.8。 我们注意到，这个递推关系与贝尔数所满足的递推关系相同，区别在于 $a_1((12;\ 3 \to 2),\ (1;1 \to 1)) = 0$，而 $B_1 = 1$。这也意味着，如果考虑_$B_n - a_n((12;\ 3 \to 2),\ (1;\ 1 \to 1))$，即包含不动点的避免 132 模式的排列，它们也满足相同的递推关系。

7 猜想与未解问题

未来有许多可能的研究方向。在本文中，我们已对所有带有 $k \in \{1,2,3\}$、$|\nu| \in \{1,2\}$ 和 $|H| = 1$ 的 $\alpha = (\nu;\ H) \in \mathcal{A}_k$ 的 $\mathcal{S}_n(\alpha)$ 进行了计数，但 $\alpha = (12;\ 3 \to 3)$ 或 $\alpha = (21;\ 3 \to 3)$ 的情况除外，这些情况仍有待解决。我们还对 $\mathcal{S}_n(\alpha, \beta)$ 进行了计数，其中 $\alpha = (12;\ H) \in \mathcal{A}_2$ 或 $\mathcal{A}_3$ 与 $|H| = 1$ 及 $\beta = (1; 1 \to 1)$。显然，仍有许多尚未研究的情况，而这些情况可能会产生有趣的结果。特别是，本文未涉及任何 $|\nu| > 2$ 的情况，也未涉及 $|H| > 2$ 的情况。

此外，箭头模式避免可以与经典模式避免结合起来。在这些情况下，似乎会出现一些有趣的数列。例如，我们提出如下猜想。

猜想7.1. 对于 $n \geq 2$,

- $a_n(123, (12; 1 \to 3)) = 2^n - n$,
- $a_n(321, (12; 1 \to 3)) = F_{2n-1}$, *and*
- $a_n(321, (12; 1 \to 2)) = M_n$,

其中 F_n 是第 n个斐波那契数，M_n 是第 n个莫茨金数。

在第2节中，我们定义了箭头-Wilf 等价的概念。如本文所示，我们有以下属于同一箭头-Wilf 等价类的箭头模式：

$$\{(12; 1 \to 2), (12; 3 \to 2), (21; 3 \to 2), (13; 1 \to 2), (13; 2 \to 1), (13; 3 \to 2)\}.$$

命题 2.6 无法解释这些现象。如果存在能够解释某些一般性箭头-Wilf 等价的定理，发现更多此类定理将会很有意思。

最后，正如引言中所述，某些排列集合可以用箭头模式避免来刻画，例如浅排列或 321-避免循环排列。其他一些排列集合似乎也可以用类似方式描述，其中排列的单行表示和代数结构都发挥作用。发展计数避免箭头排列的排列的技巧，或许有助于我们更好地理解这些排列集合，并有可能对 321-避免循环排列进行计数；目前我们对这类排列还不甚了解。

参考文献

[1] K. Archer 和 S. Elizalde，由带符号移位实现的循环排列。*J. Comb.*，5（2014），1–30。[2]M. B´ona，关于交替游程的排列生成函数。*S´eminaire Lotharingien de Combinatoire*，85（2021），文章 B85b。[3] M. B´ona 和 M. Cory，避免长度为三的模式对的循环排列。*DiscreteMath. Theor. Comput. Sci.*，21(2)（2019），第 8 号论文，共 15 页。[4] Y. Berman 和 B. Tenner，模式函数、统计量与浅排列。*Electron.J. Combin.*，29（2022），P4.43。[5] W.Y.C. Chen、E.Y.P. Deng 和 L.L.M. Yang，Riordan 路径与错排。*DiscreteMath.*，308(11)（2008），2222–2227。[6] A. Claesson，广义模式避免。*European J. Combin.*，22(7)（2001），961–971。[7] B. Huang，(132,213)-避免循环排列数量的上界。*DiscreteMath.*，342(6)（2019），1762–1771。[8] R.P. Laudone，通过关联模式刻画循环中的避免。*European J. Combin.*，132（2026），104249。[9] R. P. Stanley，*Enumerative Combinatorics, Volume 1*，第 2 版。剑桥高等数学丛书，剑桥大学出版社，2011。[10] OEIS Foundation Inc.，在线整数数列百科全书，2023 年。以电子形式发表于 https://oeis.org。[11] Sage Developers，SageMath，即 Sage 数学软件系统（9.5.0 版），2022 年。https://www.sagemath.org。

The views expressed in this paper are those of the authors and do not reflect the official policy or position of the U.S. Naval Academy, Department of the Navy, the Department of Defense, or the U.S. Government.