arXiv:2603.04229v1 [math.CO] 4 Mar 2026

$p^{(k)}$斐波那契数：对于每个奇素数 p 和整数 $k \geq 0$的 p Bratteli图

M. Parvathi、A. Tamilselvi 和 D. Hepsi 拉马努金
高等数学研究所 马德拉斯大学 金奈-600 005 印度
tamilselvi.riasm@gmail.com

摘要

我们研究与钩分拆相关的 pBratteli图中的路径，其中p 是一个奇素数。通过比较路径上的块，我们定义了逆序和下降。我们证明，由逆序得到的符号平衡在该图的每个顶点处都为零。利用下降，我们引入 $p^{(k)}$斐波那契数，并推导出它们的递推关系。当 $k = 0$时，我们得到OEIS序列A391520；而对于 $k \geq 1$ ，我们获得了新的斐波那契型序列族。

1 引言

研究人员最初引入Bratteli图是为了研究有限维 C^*-代数；后来，数学家将其作为群与代数表示理论中的一种重要组合工具。当顶点按分拆进行标记时，Bratteli图能够清晰且可计算地描述表示如何从一个层级演化到下一个层级。

本文聚焦于 $[6,\ 7]$ 中针对奇素数 p引入的 p-Bratteli图。其偶数层由顶点组成，这些顶点由钩分拆标记，并对应于群代数 KG_r的一组完备互不等价不可约表示；其奇数层则由顶点组成，这些顶点由钩分拆标记，并对应于某些子代数 KSG_r的一组完备互不等价不可约表示。除了在表示论方面的重要性之外， p-Bratteli图还具有丰富且规整的组合结构。

斐波那契数是经典的整数序列，由比萨的列奥纳多在《计算之书》中首次提出。它们出现在数学的许多领域，人们也对若干推广形式进行了广泛研究，例如 k-斐波那契数和 q-斐波那契数；例如参见 $[1,\ 2,\ 3,\ 5]$。这些推广形式往往反映出更深层的组合或代数结构。

本文的主要动机是，斐波那契型行为自然地源于 p-Bratteli图的路径结构。我们研究顶点以钩分拆为索引的路径，并将每条路径描述为向一个分拆中添加一系列块。通过比较大小相同的块的水平部分和垂直部分，我们为此类路径定义逆序和下降。这些概念是经典排列统计量 [4, p. 221]的自然类比。

在对逆序的研究中，我们根据每条路径上的逆序数为其赋予一个符号，并将顶点处的符号平衡定义为所有终止于该顶点的路径的符号之和。我们证明，在p-Bratteli图的每个顶点处，这种符号平衡都为零，展现出强烈的抵消现象。

我们的主要成果是引入一族新的整数，称为 $p^{(k)}$-斐波那契数。对于 $s \geq 1$，我们将这些数定义为终止于某个固定顶点的所有路径上的下降总数

$$\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big).$$

我们将这个数记为 $\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;\quad (x_{(2s,k)},\quad x_{(s,k)} + l)\ \big)\Big)$。我们在定理 29 中说明了$p^{(k)}$-斐波那契数这一术语的合理性。通过研究 p-Bratteli图的局部结构，我们证明这些数满足斐波那契型递推关系。

在 $k = 0$的情形下，我们得到一个闭式公式，并在定理 22 中确定了所得序列；该序列在在线整数数列百~~科全书~~中列为 A391520。对于$k \geq 1$，我们在定理 23、25、26 和 27 中得到若干个由 p元组序列组成的无限族；据我们所知，这些序列都是新的。这为 p-Bratteli图上的下降统计量与斐波那契型序列之间建立了系统联系。我们相信，这些序列将在未来的研究中带来进一步的应用与发展。

我们使本文自成体系，在需要处回顾必要的背景，并按如下方式组织。在第2节中，我们引入记号与基本定义。第3节描述 p-Bratteli图的构造。第4节引入逆序与下降，并证明符号平衡的消失。第5节研究 $p^{(k)}$-斐波那契数、它们的递推关系以及例子。在第6节中，我们讨论 $p^{(k)}$-斐波那契数序列$\big(\mathcal{M}\big(\lambda\big(2r$的生成函数；对每一个奇素数 p 以及每一个 $k \geq 0$，讨论$(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)\big)\big)_{s=k+2}^{\infty}$。

2 记号与定义

记号 1。

1. 在本文中， p 表示一个奇素数。符号

$$a,\ b,\ i,\ i^{'},\ j,\ k,\ l,\ l^{'},\ l_1,\ l_2,\ m,\ n,\ t,\ t_1,\ t_2,\ t^{'},\ t^{''}, \alpha,\ \beta,\ \iota,\ \mu,\ \theta$$

表示非负整数。符号 r、 s 表示正整数。符号 m_i和 n_i表示非负整数，其中 $i = 1$、2、.....、 $2r - 1$。

$_{k-1}$2. $j_t^k = t\sum p^i$，其中 $0 \le t \le p-1$
和 $k \ge 1$。$_{i=0}$

3. $[a, a+1\ldots, b]$表示从 a到 b的非负整数。

4. $x_{(a,k)} = p^k(ap-(a+1))$, $a \ge 1$ and $k \ge 0$.

定义 2. [4,第 2]页。令 λ_1、 λ_2、…、 λ_l为非负整数。 n的一个分拆是一个序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$，其中 λ_i弱递减，且 $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i = n$。

定义 3. [4,第 58]页。令 λ_1、 λ_2、…、 λ_l以及 μ_1、 μ_2、…、 μ_m为非负整数。设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$和 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$是 n的分拆。那么，若 λ支配 μ，记作 $\lambda \trianglerighteq \mu$，则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \ge \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$$

对所有 $i \ge 1$均成立。若 $i > l$（分别为 $i > m$），则令 λ_i（分别为 μ_i）为零。

定义 4. 若分拆 λ满足 $\lambda = (n-i, 1^i)$，其中$0 \le i < n$，则称其为钩分拆。若此类钩分拆出现在第 c层，则记作 $\lambda(c; (n,i))$。对应的杨图由 $n-i$ 个水平节点和 i 个垂直节点组成。

记号 5。

1. $B(i; (m,n))$表示钩分拆 λ（大小为 $m+n$）中的第 i个块，该块在水平方向包含m 个节点，在垂直方向包含 n 个节点；这里垂直节点指第一列中除第一行以外的节点。特别地， $B(i; (0,0))$表示空块。

2. $\lambda \overset{B}{_{(i;(m,n))}\hookrightarrow}$ μ表示分拆 μ，它是将第 i个块 $B(i;(m,n))$添加到 λ后得到的。
3. $\lambda \overset{B}{_{(i;(m,n))}\hookleftarrow}$ μ表示分拆 μ，它是从 λ 中移除第 i个块 $B(i; (m,n))$后得到的。

3 p-Bratteli图

在本节中，我们以不同于 [7]的另一种形式定义 p-Bratteli图的顶点和边。钩分拆对应于顶点。我们还说明这些顶点在 p-Bratteli图中的排序与排列。我们详细讨论 p-Bratteli图中的每条路径，并引入一种用于表示此类路径的简化记法。此外， p-Bratteli图中的每条路径都对应于一个标准 p-杨表，其定义见 [7, 定理3.4、3.5]。

对于 $r \ge 1$， p-Bratteli图由位于第 $2r$层的集合 V^{2r} 中的顶点和位于第 $(2r-1)$层的集合 W^{2r-1} 中的顶点，以及下文定义的相应边组成。

3.1 p-Bratteli图的顶点集

当 $r \geq 1$ 时，第 $(2r-1)$ 层上的顶点：

$$W^{2r-1} = \bigcup_{k=0}^{r-1} W_k^{2r-1}$$

其中

- $W_{r-1}^{2r-1} = \{\lambda\big(2r-1; (p^{r-1}(p-1)\ \ i)\big) | 0 \leq i < p^{r-1}(p-1)\}$.
- $W_k^{2r-1} = \left\{\lambda\big(2r-1; (x_{(2(r-k)-1,k)}\ \ x_{(r-k-1,k)} + l')\big) \ \middle|\ 0 \leq l' < p^{k+1}\right\},\ |W_k^{2r-1}| = p^{k+1}$, 对所有 $0 \leq k \leq r-2,\ r \geq 2$，其中 l' 也可写成 $l' = l + p^k t$，且$0 \leq l < p^k$ 与 $0 \leq t \leq p-1$。

顶点子集按以下顺序排列：

$$W_{r-1}^{2r-1},\ W_{r-2}^{2r-1},\ W_{r-3}^{2r-1}, \ldots,\ W_1^{2r-1},\ W_0^{2r-1}.$$

每个顶点子集 W_k^{2r-1} 中的顶点按照支配序排列，其中 l' 对应于顶点的位置。

$r \geq 1$的第 $2r$ 层上的顶点：

$$V^{2r} = \bigcup_{k=0}^{r} V_k^{2r}$$

其中

- $V_r^{2r} = \{\lambda\big(2r; (p^{r-1}(p-1), i)\big) | 0 \leq i < p^{r-1}(p-1)\}$.
- $V_k^{2r} = \left\{\ \lambda\big(2r; (x_{(2(r-k),k)},\ x_{(r-k,k)} + l)\big) \ \middle|\ 0 \leq l < p^k\ \right\},\ |V_k^{2r}| = p^k$, for all $0 \leq k \leq r-1$.

顶点子集按以下顺序排列：

$$V_r^{2r},\ V_{r-1}^{2r},\ V_{r-2}^{2r}, \ldots,\ V_1^{2r},\ V_0^{2r}.$$

每个顶点子集 V_k^{2r}中的顶点按照支配序排列，其中 l 对应于顶点的位置。

注 6. [7]

1. 对于 $r \geq 1$，V_r^{2r} $\big($或 $W_{r-1}^{2r-1}\big)$ 中的元素对应于群代数类 KG_r （或子代数KSG_r）所有一维表示的索引集。

2. 具有 $0 \leq k \leq r-1$ （或 $0 \leq k \leq r-2$）的 V_k^{2r} $\big($或 $W_k^{2r-1}\big)$ 的元素，分别对应于群代数类 KG_r（或子代数 KSG_r）中维数为 $p^{r-k-1}(p-1)$ $\big($或 $p^{r-k-2}($ $p-1)\big)$ 的全部两两不等价不可约表示的指标集，其中 $r \geq 1$ （或 $r \geq 2$）。

3.2 p-Bratteli图的边集

我们将 p-Bratteli 图中相邻两层的两个顶点之间的边定义如下:

从第$(2r-2)$层到第$(2r-1)$层的边:

• 设 $\lambda\big(2r-2;(p^{r-2}(p-1)\ i)\big)\in V_{r-1}^{2r-2}$和 $\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1)\ pi+t)\big)\in W_{r-1}^{2r-1}$，则对于所有 $0\le t\le p-1$，通过添加块$B(2r-2;(a_t,b_t))$，两个顶点之间存在一条边，如图1所示

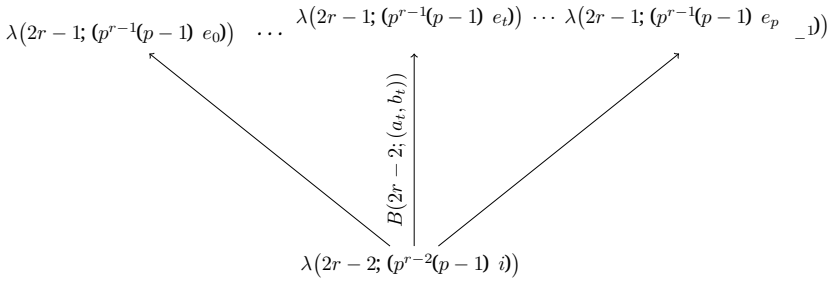

图1

其中 $e_t=pi+t$, $a_t=p^{r-2}(p-1)^2-(i(p-1)+t)$, $b_t=i(p-1)+t$。

$$\lambda\big(2r-2;(p^{r-2}(p-1),i)\big)\overset{B(2r-2;(a_t,b_t))}{\hookrightarrow}\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1),pi+t)\big)$$

• 令 $\lambda\big(2r-2;(x_{(2(s-1),k)}\ x_{(s-1,k)}+l)\big)\in V_k^{2(r-1)}$ 和 $\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)}\ x_{(s-1,k)}+(pl+t))\big)\in W_k^{2r-1}$，则对所有 $0\le t\le p-1$，通过添加块 $B(2r-2;(a_t,b_t))$，两个顶点之间存在一条边，如图2所示,

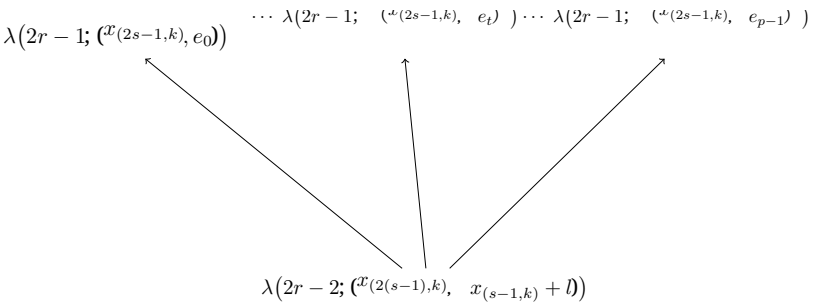

图2

其中 $s=r-k$, $e_t=x_{(s-1,k)}+(pl+t)$, $a_t=p^k(p-1)-((p-1)l+t)$, $b_t=(p-1)l+t$, $0\le l<p^k$，以及 $x_{(a,k)}$ 均如记号1(4)所述。

$$\lambda\big(2r-2;(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\overset{B(2r-2;(a_t,b_t))}{\hookrightarrow}\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)},x_{(s-1,k)}+(pl+t))\big)$$

从$(2r-1)$层到 $2r$层的边：

• 设 $\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1)\ i)\big)\in W_{r-1}^{2r-1}$ 和 $\lambda\big(2r;(p^{r-1}(p-1)\ i)\big)\in V_r^{2r}$，则通过添加空块 $B(2r-1;(0,0))$，这两个顶点之间存在一条边，

$$\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1),i)\big)\overset{B(2r-1;(0,0))}{\hookrightarrow}\lambda\big(2r;(p^{r-1}(p-1),i)\big)$$

• 令 $\lambda\big(2r-1\ \ p^{r-1}\ p-1\ \ i\ \big)\in W_{r-1}^{2r-1}$ $p^{r-1}t\le i<p^{r-1}\ t+1$ $0\le t\le p-2$；$(\ (\ )\ )$，其中$(\ )$，其中，且令；$(_{(,)}(\ )\ )$。那么，在通过添加块 $B(2r-1;(p^{r-1}t,p^{r-1}(p-2-t)))$得到的顶点之间存在一条边，$\lambda\big(2r-1;(x_{(2,r-1)}\ x_{2\,r-1}\ \ i+p^{r-1}\ p-2-t\ \big)\in V_{r-1}^{2r}$

$$\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1),i)\big)\overset{B(2r-1;(p^{r-1}t,p^{r-1}(p-2-t)))}{\hookrightarrow}\lambda\big(2r;(x_{(2,r-1)},i+p^{r-1}(p-2-t))\big).$$

• 令 $\lambda\big(2r-1;\ (x_{(2s-1,k)}\ x_{(s-1,k)}+(l+p^kt))\big)\in W_k^{2r-1}$ 且 $\lambda\big(2r;\ (x_{(2s,k)}\ x_{(s,k)}+l)\big)\in V_k^{2r}$。那么，对于 $0\le t\le p-1$，在通过添加块 $B(2r-1;(p^kt,p^k(p-1-t)))$得到的顶点之间存在一条边，

$$\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)},x_{(s-1,k)}+(l+p^kt))\big)\overset{B(2r-1;(p^kt,p^k(p-1-t)))}{\hookrightarrow}\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)$$

其中 $s=r-k$、$0\le l<p^k$ 和 $x_{(a,k)}$ 如记号1(4)所示。

从第 $2r$ 层到第 $(2r-1)$ 层的边：

• 设 $\lambda\big(2r;(p^{r-1}(p-1)\ i)\big)\in V_r^{2r}$ 和 $\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1)\ i)\big)\in W_{r-1}^{2r-1}$，则通过移除空块 $B(2r-1;(0,\ 0))$，两个顶点之间有一条边，

$$\lambda\big(2r;(p^{r-1}(p-1),i)\big)\overset{B(2r-1;(0,0))}{\hookleftarrow}\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1),i)\big)$$

• 设 $\lambda\big(2r\ \ x_{2\,r-1}\ \ x_{1\,r-1}+l\ \big)\in V_{r-1}^{2r}$ $\lambda\big(2r-1\ \ p^{r-1}\ p-1\ \ x_{1\,r-1}+l-;(_{(,\ )(,\ )})\big)$ 和；$p^{r-1}\ p-2-t\ \big)\in W_{r-1}^{2r-1}$ $0\le t\le p-2$ $(\ (\ )_{(,\ )}(\ )\ )$，则对于，通过移除块 $B(2r-1;(a_t,\ b_t))$ 得到的两个顶点之间有一条边，如图 3 所示，

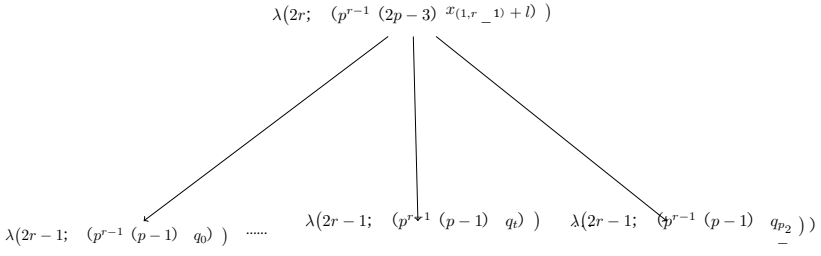

图3

其中 $q_t=x_{(1,r-1)}+l-p^{r-1}(p-2-t)$、$a_t=p^{r-1}t,\ b_t=p^{r-1}(p-2-t)$、$0\le l<p^k$ 以及 $x_{(1,r-1)}=p^{r-1}(p-2)$。

$$\lambda\big(2r;(x_{(2,r-1)},x_{(1,r-1)}+l)\big)\overset{B(2r-1;(a_t,b_t))}{\hookleftarrow}\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1),x_{(1,r-1)}+l-p^{r-1}(p-2-t))\big)$$

• 设 $\lambda\big(2r\ \ x_{2s\,k}\ \ x_{s\,k}+l\ \big)\in V_k^{2r}$ $\lambda\big(2r-1\ \ x_{2s-1\,k}\ \ x_{s-1\,k}+\ l+p^kt\ \ \big)\in$；$W_k^{2r-1}$ $0\le t\le p-1$ (,)(,) 与；(,)(,)( ))，则对于通过移除块 $B(2r;(a_t,b_t))$ 得到的顶点之间存在一条边，如图4所示，

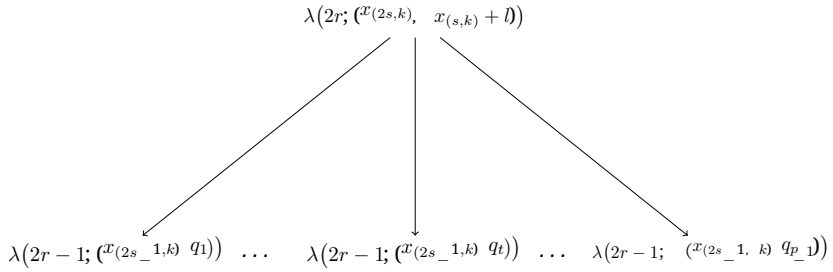

图4

其中，$s=r-k$、$q_t=x_{(s-1,k)}+(l+p^kt)$、$a_t=p^kt$、$b_t=p^k(p-1-t)$、$0\le l<p^k$和$x_{(a,k)}$ 与记号1(4)中相同。

$$\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\overset{B(2r;(a_t,b_t))}{\hookleftarrow}\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)},x_{(s-1,k)}+(l+p^kt))\big)$$

从第$(2r-1)$层到第$2(r-1)$层的边：

• 设 $\lambda\big(2r-1\ \ p^{r-1}\ p-1\ \ i\ \big)\in W_{r-1}^{2r-1}$ $\bar{i}p\le i<\bar{i}+1\ p$ $0\le\bar{i}<$;(( ))，其 $p^{r-2}\ p-1$ $\lambda\big(2r-2\ \ p^{r-2}\ p-1\ \ \bar{i}\ \big)\in V_{r-1}^{2r-2}$ 中( )，且( )，并设;(( ))。那么，移除块 $B(2r-2;(p^{r-2}(p-1)^2-(i-\bar{i}),(i-\bar{i})))$ 后得到的顶点之间有一条边，

$$\lambda\big(2r-1;(p^{r-1}(p-1),i)\big)\overset{B(2r-2;(p^{r-2}(p-1)^2-(i-\bar{i}),(i-\bar{i})))}{\hookleftarrow}\lambda\big(2r-2;(p^{r-2}(p-1),\bar{i})\big).$$

• 设 $\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)}\ x_{(s-1,k)}+(l+p^kt))\big)\in W_k^{2r-1}$，且 $\lambda\big(2r-2;(x_{(2(s-1)\,k)}\ x_{(s-1,k)}+($ $\alpha+p^{k-1}t\ \ \big)\in V_k^{2r-2}$ $\lambda\big(2r-$))，那么，通过移 $1\ \ x_{2s-1\,k}\ \ x_{s-1\,k}+\ l+p^kt\ \ \big)$ $\lambda\big(2r-2\ \ x_{2\,s-1\ k}\ \ x_{s-1\,k}+$ 除下方给出的块，从顶点;((,) (,) ( )) 到顶点;((( )) (,) ($\alpha+$ $p^{k-1}t\ \ \big)$)) 恰有一条边：

$$\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)},x_{(s-1,k)}+(l+p^kt))\big)\overset{B(2r-2;(p^k(p-1)-(p-1)(\alpha+p^{k-1}t)-\beta,(p-1)(\alpha+p^{k-1}t)+\beta))}{\hookleftarrow}\lambda\big(2r-2;(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t))\big)$$

这里 $s=r-k$, $0\le l<p^k$和 $l=\alpha p+\beta$，其中 $0\le\alpha<p^{k-1}$, $0\le\beta\le p-1$, $0\le t\le p-1$ 和 $x_{(a,k)}$ 与记号1(4)中的定义相同。

注 7. 对于 $0 \le t \le p-1$, 第 $(2r-2)$ 层上的顶点 $\lambda\big(2r-2;(x_{(2(s-1),k)}, x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t))\big)$ 称为第 $(2r-1)$ 层上顶点 $\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)}, x_{(s-1,k)}+(l+p^k t))\big)$的投影。整数 α 称为整数 l的投影。

注8。

1. 本文只关注定义在两个大小相同的相邻块之间的下降。但每条路径都是通过添加不同大小的块$p^{j-1}(p-1)^2$, $j \ge 1$得到的，如下所述

$$\lambda\big(1;(p-1,i_1)\big) \overset{B(1;(0,0))}{\hookrightarrow} \lambda\big(2;(p-1,i_1)\big) \overset{B(2;(m_2,n_2))}{\hookrightarrow} \lambda\big(3;(p(p-1),i_2)\big)$$
$$\overset{B(3;(0,0))}{\hookrightarrow} \lambda\big(4;(p(p-1),i_2)\big) \overset{B(4;(m_4,n_4))}{\hookrightarrow} \lambda\big(5;(p^2(p-1),i_3)\big)\cdots$$
$$\overset{B(2k;(m_{2k},n_{2k}))}{\hookrightarrow} \lambda\big(2k+1;(p^k(p-1),i_{k+1})\big)$$

其中 $0 \le i_1 < p-1$, 且 $i_j = i_1 + n_2 + n_4 + \cdots + n_{2(j-1)}$, $m_{2(j-1)} = p^{j-2}(p-1)^2 - ((p-1)i_{2j-3} + t_j)$, $n_{j-1} = (p-1)i_{2j-3} + t_j$, 对于 $0 \le t_j \le p-1$, 对所有 $2 \le j \le k+1$, 以及 $k \ge 0$。

我们约定，通过添加这些块得到的路径没有下降，因为 $m_{2(j-1)} < m_{2j}$ 和 $n_{2(j-1)} \le n_{2j}$, 对所有 $2 \le j \le k+1$。

2. 对于 $k \ge 0$ 和 $r \ge k+1$, 设 $r-k = s$。我们定义一条从 $\lambda(2r$ 开始的向下路径；$(x_{(2s,k)}$, $x_{(s,k)} + l))$, 其中 $0 \le l < p^k$, 并在 $\lambda(1$ 处结束；$(p-1, i_1))$, 其中$0 \le i_1 < p-1$ ，如下所示:

$$\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big) \overset{f_1}{\hookleftarrow} \lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)}, x_{(s-1,k)}+(l+p^k t_k))\big) \overset{f_2}{\hookleftarrow}$$
$$\lambda\big(2r-2;(x_{(2s-2,k)}, x_{(s-1,k)}+l_1)\big) \overset{f_3}{\hookleftarrow} \cdots \lambda\big(2k+3;(x_{(3,k)}, x_{(1,k)}+(l_{s-2}+p^k t_{r-3}))\big)$$
$$\overset{f_{2(r-k)-2}}{\hookleftarrow} \lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)}, x_{(1,k)}+l_{s-1})\big) \overset{f_{2(r-k)-1}}{\hookleftarrow} \lambda\big(2k+1;(p^k(p-1),i_{k+1})\big) \hookleftarrow \cdots$$
$$\overset{f_{2r-1}}{\hookleftarrow} \lambda\big(1;(p-1,i_1)\big)$$

其中 $f_d = B(2r-d;(m_{2r-d}, n_{2r-d}))$, $1 \le d \le 2r-1$。

对于满足 $0 \le t_i \le p-1$ （$0 \le i \le k-1$）的整数 t_i，整数 l 可写作$_{k-1}$ $l = \sum_{i=0} p^i t_i$。于是，对于每个 l，存在满足 $0 \le t_i \le p-1$ （$i=0 k \le i \le r-2$）的整数 t_i，以及 $0 \le t_{r-1} \le p-2$, 使得对应的路径在 $\lambda(1$ 处结束；$(p-1, t_{r-1})$)。

$_{k-1}$令 α_1 为 l 的投影（如注7所述），即 $\alpha_1 = \sum_{i=1} p^{i-1} t_i$。则：

- $l_j = \alpha_j + p^{k-1} t_{k-1+j}$, $1 \le j \le s-1$, and $\alpha_j = \sum_{i=j}^{k+j-2} p^{i-j} t_i$ for $2 \le j \le s-1$, where α_{j+1} is the projection of l_j (as in Remark 7).

• 对于 $k \geq 1$、 $k+1 \leq j \leq r-1$和 $0 \leq t_{k+r-j-1} \leq p-1$,

$$\begin{aligned} m_{2j+1} &= p^k t_{k+r-j-1}, & n_{2j+1} &= p^k(p-1-t_{k+r-j-1}) \\ m_{2j} &= p^k(p-1) - n_{2j-1}, & n_{2j} &= (p-1)(\alpha_{r-j} + p^{k-1}t_{k+r-j-1}) + t_{r-j-1} \end{aligned}$$

and

$$m_{2k+1} = p^k t_{r-1}, \qquad n_{2k+1} = p^k(p-1-t_{r-1}),\ 0 \leq t_{r-1} \leq p-2.$$

• $i_{k+1} = l_{s-1} + p^k t_{r-1} = \sum_{i=r-k-1}^{r-1} p^{i-(r-k-1)} t_i$ and for $1 \leq j \leq k$,

$$i_j = \sum_{i=r-j}^{r-1} p^{i-(r-j)} t_i \text{ is the projection of } i_{j+1} = \sum_{i=r-j-1}^{r-1} p^{i-(r-j-1)} t_i.$$

• 对于 $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned} m_{2j-1} &= 0, & n_{2j-1} &= 0 \\ m_{2j} &= p^{k-1}(p-1)^2 - n_{2j}, & n_{2j} &= (p-1)i_j + t_{r-j-1} \end{aligned}$$

In 特别地，当 $k=0$时，我们有 $l=0$和 $l_j=0$，对所有 $1 \leq j \leq r-1$均成立。此外 r,

$$\begin{aligned} m_{2j+1} &= t_{k+r-j-1}, & n_{2j+1} &= p-1-t_{k+r-j-1} \\ m_{2j} &= p-1-t_{k+r-j-1}, & n_{2j} &= t_{r-j-1} \text{ and} \\ m_1 &= t_{r-1}, & n_1 &= p-1-t_{r-1},\ 0 \leq t_{r-1} \leq p-2. \end{aligned}$$

上述定义的向下路径与形状为 $\lambda\big(2r$ 的标准 p-杨表相同；$(x_{(2s,k)},\ x_{(s,k)}+l)\big)$ 如 [7] 中所定义。
对于 $k \geq 0$ 和给定的 l，该路径由整数 t_i （ $0 \leq i \leq r-1$）确定。为简单起见，我们将上述路径改写为

$$\big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big), m_{2r-1}, m_{2r-2}, \ldots, m_1, \lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)\big)$$

其中 $i_1 = t_{r-1}$。

3. 令 $P_l^{2r}{}_{,\ m_{2r-1},\ \ldots,\ m_1,\ t_{r-1}}$ 表示路径

$$\big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big), m_{2r-1}, \ldots, m_1, \lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)\big)$$

如上所定义。令 $P_l^{2r}{}_{,t_{r-1}}$ 表示所有以顶点$\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)$为起点、以顶点 $\lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)$, $0 \leq t_{r-1} < p-1$,$p-2$为终点的路径集合，这些路径是通过依次移除各块得到的。令 $P_l^{2r} = \bigcup_{t_{r-1}=0} P_l^{2r}{}_{,t_{r-1}}$。

4 逆序与路径下降

本节中，我们利用沿路径添加的块，定义 p-Bratteli图中路径的逆序和下降的概念。逆序（或下降）由比较大小相同的块的水平节点或垂直节点确定，即$B(i;(m_i,n_i))$ 和 $B(j;(m_j,n_j))$（或 $B(i+1;(m_{i+1},n_{i+1})$）），其中 $i<j$。除以下情形外，我们不比较大小不同的块。

对于大小分别为 $p^k(p-1)^2$ 和$p^k(p-2)$ 的块 $B(2k;(m_{2k},\ n_{2k}))$ 和 $B(2k+1;(m_{2k+1},\ n_{2k+1}))$，由于相应块的大小不同，我们引入一个特定的约定，

(c1) 考虑路径 $\lambda\big(2k+2;(\ x_{(2,k)}\ 1\ \ l+p^kt\ )\ \ 0\le t\le p-2$ $2k\quad p-$ $,\ \ x_{(1,k)}+l)\big)^B$ $^{(2k+1;(p^kt,\ p^k(p-2-t)))}\hookleftarrow$ $\lambda\big(2k+1;(p^k(\ )\ ),$ ，如果该路径是通过移除块 $B(2k+1;(p^kt,\ p^k(p-2-t)))$ 得到的，我们就称路径在 处有一个下降（或逆序），其中$0\le t<\frac{p-1}{2}$；否则，就没有下降（或逆序）。当 $k=0$ 时，第零块是钩分拆 $\lambda(1;(p-1,\ t_{r-1}))$，其中 $0\le t_{r-1}\le p-2.$

(c2) 由于块 $B(2k+1;\ m_{2k+1},n_{2k+1}))$ 和 $B(2k+2;(m_{2k+2},n_{2k+2}))$ 的大小不同，分别为 $p^k(p-2)$ 和 $p^k(p-1)$，因此它们不可比较；所以在块 $2k+1$ 处不存在下降（或逆序）。

定义 9。对于 $k\ge0$ 和 $2k+2\le i<j$，若 $m_i>m_j$ 且 $n_i<n_j$，其中 $m_i+n_i=m_j+n_j$，则记 $B(i;(m_i,n_i))>B(j;(m_j,n_j))$。

4.1 路径的逆序与符号平衡

定义 10。设 $k\ge0$，并设 P 为路径

$$\big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big),m_{2r-1},m_{2r-2},\dots,m_1,\lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)\big)$$

如注 8(2) 所示。此外，设块 $B(i;(m_i,n_i))$、$B(j;(m_j,n_j))$ 是沿路径 P 添加的，其中 $i<j$。

路径的逆序 P 定义如下：

$$Inv(P)=\begin{cases}\{(i,j):\ i<j\text{ but }B(i;(m_i,n_i))>B(j;(m_j,n_j))\}, & \text{for } i\ge 2k+2;\\ \text{inversion as in }\mathbf{(c1)}\text{ and }\mathbf{(c2)}, & \text{for } i=2k,\ 2k+1\end{cases}$$

其中 $m_i+n_i=m_j+n_j$ 对 $i\ge2k+2$ 和 $inv(P)=|Inv(P)|$。

定义 11. 我们将路径的符号 P定义为 $sgn(P)=(-1)^{inv(P)}$。

这种符号平衡是 p-Bratteli图中路径的一种结构性质。

定义 12. 给定一个分拆 λ，将其符号平衡定义为

$$I_\lambda=\sum_{P\in P_l^{2r}}sgn(P),$$

其中 $\lambda=\lambda\big(2r;\ (x_{(2s,k)},\ \ x_{(s,k)}+l)\big)$ 以及 P_l^{2r}，如注 8(3) 中所定义。

以下定理为我们的约定 **(c1)** 提供了动机。

定理 13. 设 $k \geq 0, r \geq 1$ 满足 $s = r - k$. 形状为$\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big) \in V_k^{2r}$的每个顶点的符号平衡均为零。

证明. 设 P 为一条路径

$$\big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big), m_{2r-1}, m_{2r-2}, \ldots, m_1, \lambda\big(1; (p-1, t_{r-1})\big)\big)$$

如注 8(2) 中所定义，并令 j 表示路径 P 从块 $2k+2$ 到块 $2r-2$的逆序总数。

根据约定 **(c1)**，从块 $2k$出发的路径的逆序总数 is

$$\begin{cases} j+1, & \text{if } m_{2k+1} = p^k t,\ 0 \leq t < \frac{p-1}{2}; \\ j, & \text{if } m_{2k+1} = p^k t,\ \frac{p-1}{2} \leq t \leq p-2. \end{cases}$$

因此，当 j 为奇数时，

$$(-1)^{inv(P)} = \begin{cases} 1, & \text{if } m_{2k+1} = p^k t,\ 0 \leq t < \frac{p-1}{2}; \\ -1, & \text{if } m_{2k+1} = p^k t,\ \frac{p-1}{2} \leq t \leq p-2. \end{cases}$$

而当 j 为偶数时，

$$(-1)^{inv(P)} = \begin{cases} -1, & \text{if } m_{2k+1} = p^k t,\ 0 \leq t < \frac{p-1}{2}; \\ 1, & \text{if } m_{2k+1} = p^k t,\ \frac{p-1}{2} \leq t \leq p-2. \end{cases}$$

因此，

$$\sum_{P \in P_l^{2r}} sgn(P) = \sum_{P \in P_l^{2r}} (-1)^{inv(P)} = 0.$$

□

4.2 路径的下降

定义14。 设 $k \geq 0$，并设 P 为路径

$$\big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big), m_{2r-1}, m_{2r-2}, \ldots, m_1, \lambda\big(1; (p-1, t_{r-1})\big)\big)$$

如注 8(2)所示。另外，设 $B(i; (m_i, n_i))$、 $B(i+1; (m_{i+1}, n_{i+1}))$ 为沿路径 P 添加的块。我们将 P 的下降集定义如下：

$$Des(P) = \begin{cases} \{i : \ B(i; (m_i, n_i)) > B(i+1; (m_{i+1}, n_{i+1}))\}, & \text{for } i \geq 2k+2; \\ \text{descent as in } \mathbf{(c1)} \text{and } \mathbf{(c2)}, & \text{for } i = 2k,\ 2k+1 \end{cases}$$

其中 $m_i + n_i = m_{i+1} + n_{i+1}$对于 $i \geq 2k+2$和 $des(P) = |Des(P)|$。如果 $i \in Des(P)$，则称路径 P 的第 i 个块处有一次下降。等价地， $Des(P)$ 包含路径 P 的前（$2r-2$）个块中的下降。

引理15. 设 $k \geq 0$，并设

$$P = \left(\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)}, x_{(1,k)}+l)\big), m_{2k+1}, m_{2k}, \ldots, m_1, \lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)\right),$$

and

$$P' = \left(\lambda\big(2k+3;(x_{(3,k)}, x_{(1,k)}+l')\big), m_{2k+2}, m_{2k+1}, \ldots, m_1, \lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)\right)$$

是 p-*Bratteli*图中的路径，其中 $0 \leq l < p^k$ 且 $0 \leq l' < p^{k+1}$。则

$$des(P) = \begin{cases} 1, & when\ m_{2k+1} = p^k t,\ 0 \leq t < \frac{p-1}{2}; \\ 0, & when\ m_{2k+1} = p^k t,\ \frac{p-1}{2} \leq t \leq p-2. \end{cases}$$

此外，$des(P') = des(P)$ 对于相同的 m_{2k+1}。而且，终止于顶点 $\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)}, x_{(1,k)}+l)\big)$（以及 $\lambda\big(2k+3;(x_{(3,k)}, x_{(1,k)}+l')\big)$）的所有路径的下降总数为 $\frac{p-1}{2}$。

证明。终止于顶点 $\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)}, x_{(1,k)}+l)\big)$ 的路径如图5所示

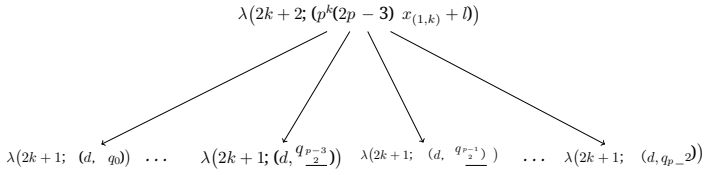

图5

其中 $d = p^k(p-1)$ 和 $q_t = x_{(1,k)} + l - p^k(p-2-t)$，$0 \leq t \leq p-2$。

顶点之间在块 $2k$ 处的下降遵循约定(c1)。因此，$des(P)$ 或为 1，或为 0。根据定义14，$des(P')$ 也与 $des(P)$ 相同，因此$des(P')$ 或为 1，或为 0。

所有以给定顶点为终点的路径的下降总数为 $\frac{p-1}{2}$。因此证明得证。 —— □

引理16. *1.* 为得到分拆 $\lambda\big(2r-1;(x_{(2s+1,k)}, x_{(s,k)}+l')\big)$，添加到分拆 $\lambda\big(2r-2;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)$ 中的块满足以下不等式

$$B(2r-2;(p^k(p-1)-l_1, l_1)) > B(2r-2;(p^k(p-1)-l_2, l_2)),\ \forall\ 0 \leq l_1 < l_2 \leq p^k(p-$$

其中 $0 \leq l < p^k$, $0 \leq l' < p^{k+1}$ 对所有整数 $s \geq 1$，$k \geq 0$ 均成立，且 $x_{(a,k)}$ 如记号 *1(4)*所示。

2. 为得到分拆 $\lambda\big(2r-1;\ (x_{(2s-1,k)}, x_{(s-1,k)}+l')\big)$ 而添加到分拆 $\lambda\big(2r;\ (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)$ 中的块满足以下不等式

$$B(2r-1;(p^k t_1, p^k(p-1-t_1))) < B(2r-1;(p^k t_2, p^k(p-1-t_2))),\ \forall\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq p-$$

其中，对于所有 $s \geq 2$ 和$x_{(a,k)}$， $0 \leq l < p^k$, $0 \leq l' < p^{k+1}$均如记号*1(4)*所述。

证明。 1. 由于 $l_1 < l_2$, $p^k(p-1) - l_1 > p^k(p-1) - l_2$。因此，第一个块的第一个坐标大于第二个块的第一个坐标。根据定义14，块按照其第一个坐标排序。因此，第一个块大于第二个块。

2. 证明与第（1）部分类似。

□

下面的引理和定理将有助于确定 p-Bratteli图中每条路径的下降。

我们只考虑层 $2r$， $2r-1$ 和 $2r-2$ for $r \geq 2$ 的顶点。

引理 17。 对于 $k \geq 1$ 和 $0 \leq t \leq p-1$，令 P_l^{2r}表示路径

$$\big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big), m_{2r-1}, \ldots, m_1, \lambda\big(1; (p-1, t_{r-1})\big)\big),$$

如备注 *8(2)*中所定义，对于 $1 \leq j \leq k$，其中 $m_{2d+1} = p^k t$，以及对于 $k+1 \leq d \leq r-1$的 $m_{2d} = p^k(p-1-t)$。则路径 P_l^{2r}满足以下条件

- 如果 $0 \leq t < \frac{p-1}{2}$，则路径 P_l^{2r}在第 $(2r-2)$ 个块处有下降，而在第 $(2r-3)$ 个块处没有下降。
- 如果 $t = \frac{p-1}{2}$，则对于每个 s，路径 P_l^{2r}在块 $2r-2$ 和 $2r-3$ 处都没有下降。
- 如果 $\frac{p-1}{2} < t \leq p-1$，则路径 P_l^{2r}在第 $(2r-2)$ 个块处没有下降，而在第 $(2r-3)$ 个块处有下降。

这里有 $l = j_t^k$。

证明。 • 当 $0 \leq t < \frac{p-1}{2}$ 时，我们有 $m_{2r-2} > m_{2r-1}$ 和 $m_{2r-3} < m_{2r-2}$。因此，路径 P_l^{2r}在第（$2r-2$）个块处有下降，而在第（$2r-3$）个块处没有下降。

• 当 $t = \frac{p-1}{2}$ 时，我们有 $m_{2r-2} = m_{2r-1}$ 和 $m_{2r-3} = m_{2r-2}$。因此，路径 P_l^{2r}在块 $2r-2$ 和 $2r-3$处没有下降。

• 当 $\frac{p-1}{2} < t \leq p-1$时，我们有 $m_{2r-2} < m_{2r-1}$ 和 $m_{2r-3} > m_{2r-2}$。因此，路径 P_l^{2r}在第 $(2r-2)$ 个块处没有下降，并在第 $(2r-3)$ 个块处有一次下降。

□

上述路径是 p-Bratteli图的**特殊路径**，有助于确定任意路径的下降。

对于 $k = 0$ 和 $r \geq 2$，令 $P^{2r}_{0\,t',,t''}$ 表示 p-Bratteli图中的任意一条路径，该路径从 $\lambda\big(2r;\ (x_{(2r,0),}\, x_{(r,0)})\big)$ 出发，终止于 $\lambda\big(1;\ (p-1, t_{r-1})\big)$，其中 $0 \leq t_{r-1} \leq p-2$ 由按照注 8(2)所述移除块后得到。

将这条路径记作

$$(\lambda\big(2r;(x_{(2r,0)},x_{(r,0)})\big),t',p-t'-1,t'',m_{2r-4},\dots,m_1,\lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)).$$

也就是说， $m_{2r-3}=t''$、 $m_{2r-2}=p-1-t'$ 和 $m_{2r-1}=t'$，其中 $0\le t'$， $t''\le p-1$。

对于具有 $s=r-k\ge 2$ 的 $k\ge 1$ 和 $r\ge 3$，令 $P^{2r}_{l\,t',,t''}$ 为 p-Bratteli图 中从 $\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)$ 出发并在 $\lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)$结束的任意路径，其中 $0\le t_{r-1}\le p-2$ 通过移除注 8(2) 中所述的块得到。

这样的路径记作

$$\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big),p^kt',p^k(p-1)-(\alpha+p^{k-1}t')(p-1)+\beta,p^kt'',m_{2r-4},\dots,m_1,\lambda\big(1;(p-1,t_{r-1})\big)\Big)$$

即

- $m_{2r-1}=p^kt'$
- $m_{2r-2}=p^k(p-1)-(\alpha+p^{k-1}t')(p-1)+\beta$
- $m_{2r-3}=p^kt''$.

这里， $l=\alpha p+\beta$、 $0\le\alpha<p^{k-1}$ 和 $0\le\beta,t',t''\le p-1$。记号 $x_{(a,k)}$ 的定义见记号1(4)。

图 6 展示了几条从顶点 $\lambda\big(2r$ 出发、跨越三层的路径；$(x_{(2s,k)},\ x_{(s,k)}+l)\big)$ 位于第 $2r$层。

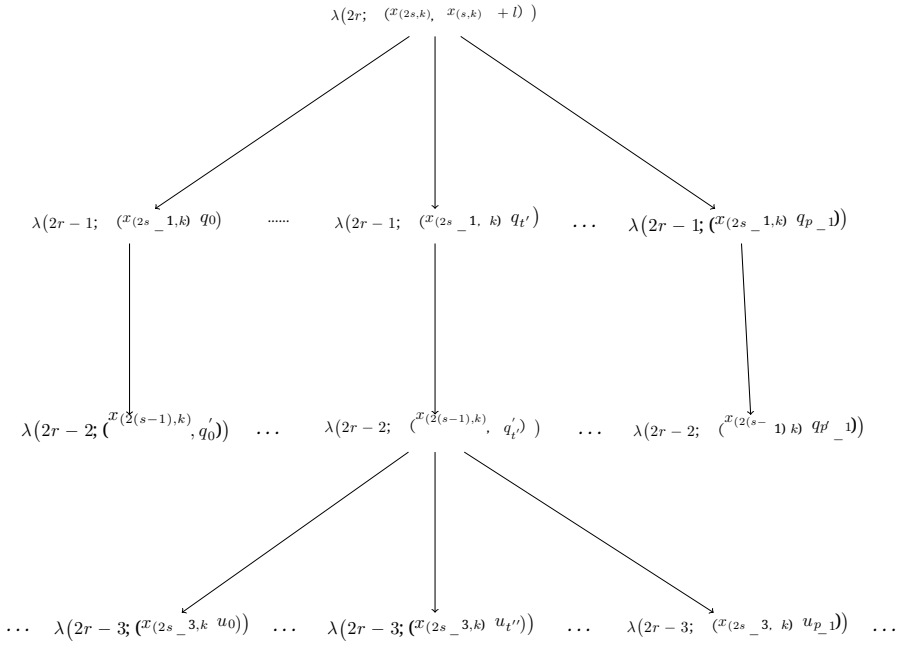

图 6

对于 $0 \le t' \le p-1$,

$$
\begin{aligned}
q_{t'} &= x_{(s-1,k)} + (l + p^k t'),\\
q_{t'}^{'} &= x_{(s-1,k)} + (\alpha + p^{k-1} t'),\\
a_{t'} &= p^k t',\ b_{t'} = p^k (p-1-t'),\\
c_{t'} &= p^k (p-1) - (\alpha + p^{k-1} t')(p-1) + \beta,\\
d_{t'} &= (\alpha + p^{k-1} t')(p-1) + \beta,
\end{aligned}
$$

且对于 $0 \le t'' \le p-1$,

$$
\begin{aligned}
u_{t''} &= x_{(s-2,k)} + (\alpha + p^{k-1} t' + p^k t'')\\
e_{t''} &= p^k t'',\ f_{t''} = p^k (p-1-t'').
\end{aligned}
$$

定义18. 对于 $k \ge 1$, 顶点 $\lambda\big(2r-2; (x_{(2(s-1),k)}, x_{(s-1,k)} + (\alpha + p^{k-1}t'))\big), 0 \le t' \le p-1$ 称为顶点 $\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)$的分量，其中这些分量的位置恰为 $\alpha + p^{k-1}t'$。

定理19. 对于 $r \ge 2$, 令 $P^{2r}_{l\,t'\,,,t''}$ 表示上文定义的路径。则以下结论成立:

1. 若 $l < \frac{p^k-1}{2}$ 且 $k \ne 0$, 则路径 $P^{2r}_{l\,t'\,,,t''}$ 仅当$0 \le t' \le \frac{p-1}{2}$和 $0 \le t'' \le p-1$时才在块 $2r-2$ 处有下降。 *2.* 若 $l \ge \frac{p^k-1}{2}$ 且 $k \ne 0$, 则路径 $P^{2r}_{l\,t'\,,,t''}$ 仅当 $0 \le t' \le \frac{p-3}{2}$和 $0 \le t'' \le p-1$时才在块 $2r-2$ 处有下降。 *3.* 若 $j^k_{t-1} < l \le j^k_t$, $k \ne 0$且 $\overline{1 \le} t \le p-1$, 则路径 $P^{2r}_{l\,t'\,,,t''}$ 仅当 $0 \le t' \le t-1$ 和 $p-1-t' \le \overline{t''} \le p-1$时才在块$2r-3$ 处有下降。 *4.* 若 $j^k_{t-1} < l \le j^k_t$, $k \ne 0$且 $1 \le t \le p-1$, 则路径 $P^{2r}_{l\,t'\,,,t''}$ 仅当 $t \le t' \le p-1$ 和 $p-t' \le t'' \le p-1$时才在块 $2r-3$ 处有下降。 *5.* 若 $l = j^k_0$ 且 $k \ne 0$, 则路径 $P^{2r}_{l\,t'\,,,t''}$ 仅当$1 \le t' \le p-1$ 和 $p-t' \le t'' \le p-1$时才在块 $2r-3$ 处有下降。对于 $t' = 0$, 无论 $0 \le t'' \le p-1$ 为何，路径在块 $2r-3$ 处都没有下降。 *6.* 若 $k = 0$ 且 $0 \le t' \le \frac{p-3}{2}$, 则路径 $P^{2r}_{0\,t'\,,,t''}$ 在块 $2r-2$处有下降。 *7.* 若 $k = 0$ 且 $1 \le t' \le p-1$, 则路径 $P^{2r}_{0\,t'\,,,t''}$ 仅当 $p-t' \le t'' \le p-1$时才在块 $2r-3$ 处有下降。当 $t' = 0$时，路径在块 $2r-3$处没有下降。

—

证明。 1. 当 $l < \frac{p^k-1}{2}$ 时, 对于 $0 \le t' \le \frac{p-1}{2}$, 我们有 $l + p^k t' < \frac{p^{k+1}-1}{2}$; 也就是说,

$$\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)},x_{(s-1,k)}+(l+p^kt^{'}))\big)$$
$$\trianglerighteq \lambda\left(2r-1;\left(x_{(2s-1,k)},x_{(s-1,k)}+\left(\frac{p^{k+1}-1}{2}\right)\right)\right)$$

由引理16可得

$$m_{2r-2}=p^k(p-1)-(\alpha+p^{k-1}t^{'})(p-1)+\beta>\frac{p^k(p-1)}{2}\geq p^kt^{'}=m_{2r-1},$$

对于 $0\leq t^{'}\leq\frac{p-1}{2}$。

因此，路径$P^{2r}_{l\,t^{'},,t^{''}}$仅当 $0\leq t^{'}\leq {}^{p-1}_{2}$时在块 $2r-2$处具有下降。

2. 当 $l\geq {}^{p^k-1}_{2}$时，对于 $0\leq t^{'}<{}^{p-1}_{2}$我们有 $l+p^kt^{'}<{}^{p^{k+1}-1}_{2}$（即）

$$\lambda\big(2r-1;(x_{(2s-1,k)},x_{(s-1,k)}+(l+p^kt^{'}))\big)\trianglerighteq\lambda\left(2r-1;\left(x_{(2s,k)},x_{(s-1,k)}+\left(\frac{p^{k+1}-1}{2}\right)\right)\right)$$

由引理16，我们有

$$m_{2r-2}=p^k(p-1)-(\alpha+p^{k-1}t^{'})(p-1)+\beta>\frac{p^k(p-1)}{2}\geq p^kt^{'}=m_{2r-1},$$

当 $0\leq t^{'}\leq {}^{p-3}_{2}$时。

因此，路径$P^{2r}_{l\,t^{'},,t^{''}}$仅当$0\leq t^{'}\leq {}^{p-3}_{2}$时在块 $2r-2$处具有下降。对于层 $2r-1$中的 $j^k_{t-1}<l\leq j^k_t,\ 1\leq t\leq p-1$和 j^{k+1}_t，下列关系成立：

当 $0\leq t^{'}\leq t-1$时，

$$\begin{aligned}j^k_t+p^kt^{'}<l+p^kt^{'}\leq j^k_{t+1}+p^kt^{'}\\ j^{k+1}_{t^{'}}<l+p^kt^{'}<j^{k+1}_{t^{'}+1}\end{aligned}\tag{1}$$

当 $t\leq t^{'}\leq p-1$时，

$$\begin{aligned}j^k_t+p^kt^{'}<l+p^kt^{'}\leq j^k_{t+1}+p^kt^{'}\\ j^{k+1}_{t^{'}-1}<l+p^kt^{'}\leq j^{k+1}_{t^{'}}\end{aligned}\tag{2}$$

注意，

$$j^{k+1}_{t-1}<l+p^k(t-1),\ l+p^kt\leq j^{k+1}_t.$$

由于$l\leq j^k_t$，因此可得 $l+p^kt\leq j^k_t+p^kt=j^{k+1}_t$。

3. 当 $j^k_{t-1}<l\leq j^k_t$和 $0\leq t^{'}\leq t-1$时，方程 (1) 和引理16表明

$$\begin{aligned}B(2r-2;(p^k(p-1-t^{'}),p^kt^{'}))&>B(2r-2;(c_{t^{'}},d_{t^{'}}))\\&>B(2r-2;(p^k(p-2-t^{'}),p^k(t^{'}+1)))\end{aligned}\tag{3}$$

$$B(2r-3;(p^k t'', p^k(p-1-t''))) \geq B(2r-2;(p^k(p-1-t'), p^k t')) \\ > B(2r-2;(c_{t'}, d_{t'}))$$

上述不等式在 $t'' = p-1,\quad p-2,$ ……，$p-1-t'$ 时成立。

因此，对于这样的 t' 和 t''，路径 $P^{2r}_{l\,t',,t''}$ 在块 $2r-3$ 处有一次下降。

4. 当 $j^k_{t-1} < l \leq j^k_t$ 和 $t \leq t' \leq p-1$ 时，方程 (2) 和引理16意味着

$$\begin{aligned} B(2r-2;(p^k(p-t'), p^k(t'-1))) &> B(2r-2;(c_{t'}, d_{t'})) \\ &> B(2r-2;(p^k(p-1-t'), p^k t')) \end{aligned} \tag{4}$$

$$B(2r-3;(p^k t'', p^k(p-1-t''))) \geq B(2r-2;(p^k(p-t'), p^k(t'-1))) \\ > B(2r-2;(c_{t'}, d_{t'}))$$

上述不等式在 $t'' = p-1,\ p-2, \ldots, p-t'$ 时成立。

因此，对于这样的 t' 和 t''，路径 $P^{2r}_{l\,t',,t''}$ 在块 $2r-3$ 处有一次下降。

5. 当 $l = j^k_0$ 且 $t' = 0$ 时，我们有 $l + p^k t' = j^{k+1}_0$，并且添加到该顶点的相应第 $(2r-2)$ 个块为 $B(2r-2;(p^k(p-1),0))$。不存在形如 …… 的块满足 $B(2r-3;(p^k t'', p^k(p-1-t'')))$ 满足

$$B(2r-3;(p^k t'', p^k(p-1-t''))) > B(2r-2;(p^k(p-1),0)),\ \text{for all } 0 \leq t'' \leq p-1.$$

因此，路径$P^{2r}_{l\,t',,t''}$ 在块 $2r-3$处没有下降。

当 $l = j^k_0$且 $1 \leq t' \leq p-1$时，对方程(2)、(4)作代换 $\alpha = 0$、$\beta = 0$，得到

$$B(2r-3;(p^k t'', p^k(p-1-t''))) \geq B(2r-2;(p^k(p-t'), p^k(t'-1))) \\ > B(2r-2;(p^k(p-1) - p^{k-1}t'(p-1), p^{k-1}t'(p-1)))$$

当 $t'' = p-1,\ p-2, \ldots, p-t'$时，上述不等式成立。

因此，对于 t'和 t''的这些取值，路径$P^{2r}_{l\,t',,t''}$ 在块$2r-3$处有一个下降。

6. 当 $0 \leq t' \leq \frac{p-3}{2}$ 时，我们有

$$m_{2r-2} = p-1-t' > t' = m_{2r-1}.$$

因此，路径$P^{2r}_{0\,t',,t''}$ 在块 $2r-2$处有一个下降。

7. 当 $1 \leq t' \leq p-1$ 时，我们有

$$m_{2r-3} = t'' > p-1-t' = m_{2r-2}$$

仅当 $p-t^{'}\leq t^{''}\leq p-1$ 时。因此，对于 $t^{'}$ 和 $t^{''}$ 的这些取值，路径 $P^{2r}_{0\,t^{'},,t^{''}}$ 在块 $2r-3$ 处有一个下降。

当 $t^{'}=0$ 时，我们有

$$m_{2r-2}=p-1\geq t^{''}=m_{2r-3},\ 0\leq t^{''}\leq p-1.$$

因此，路径 $P^{2r}_{0\,t^{'},,t^{''}}$ 在块 $2r-3$ 处没有下降。

□

推论 20。 设路径如定理*19*所述。则：

1. 所有终止于顶点$\lambda\big(2r;(^{x_{(2s,k)}}, x_{(s,k)}+l)\big)$ 的路径，在第$(2r-2)$块处的下降总数为

$$\begin{aligned}
&p^{s-1}(p-1)\left(\frac{p+1}{2}\right) \quad when \quad 0\leq l<\frac{p^k-1}{2},\ k\geq 1,\\
&p^{s-1}(p-1)\left(\frac{p-1}{2}\right) \quad when \quad \frac{p^k-1}{2}\leq l<p^k,\ k\geq 1,\\
&p^{s-1}(p-1)\left(\frac{p-1}{2}\right) \quad when \quad k=0.
\end{aligned}$$

2. 所有终止于顶点$\lambda\big(2r;(^{x_{(2s,k)}}, x_{(s,k)}+l)\big)$ 的路径，在第$(2r-3)$块处的下降总数为

$$p^{s-2}(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}+t\right) \quad when \quad j^k_{t-1}<l\leq j^k_t,\ 1\leq t\leq p-1,\ k\geq 1,$$

and

$$p^{s-2}(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}\right) \quad when \quad l=j^k_0,\ k\geq 0.$$

证明。 块 $2r-2$ 和 $2r-3$ 处的下降仅取决于每条路径 $P^{2r}_{l\,t^{'},,t^{''}}$ 的块 $B(2r-3;(m_{2r-3}, n_{2r-3}))$，$B(2r-2;(m_{2r-2}, n_{2r-2}))$，$B(2r-1;(m_{2r-1}, n_{2r-1}))$。

直到第 $2r-2$ 个块，连接到顶点 $\lambda\big(2r;\ (^{x_{(2s,k)}}, x_{(s,k)}+l)\big)$ 的路径有 $p^{s-1}(p-1)$ 条。同理，直到第 $2r-3$ 个块，连接到同一顶点的路径有 $p^{s-2}(p-1)$ 条。因此，块 $2r-2$ 和 $2r-3$ 处的下降会沿着所有这些从顶点 $\lambda\big(2r;\ (^{x_{(2s,k)}}, x_{(s,k)}+l)\big)$ 到顶点 $\lambda\big(1;\ (p-1, t_{r-1})\big)\ 0\leq t_{r-1}<p-1$ 的不同路径重复计算。

根据定理19，对于 $k\geq 1$，第 $2r-2$ 个块处的下降数在 $0\leq l<\frac{p^k-1}{2}$ 时等于 $\binom{p+1}{2}$，在 $\frac{p^k-1}{2}\leq l<p^k$ 时等于 $\binom{p-1}{2}$。对于 $k=0$，第 $2r-2$ 个块处的下降数始终等于 $\binom{p-1}{2}$。因此，结论 (1) 得证。

同理，对于 $k\geq 0$，由定理19可知，第（$2r-3$）个块中的下降数在 $t^{'}\leq t-1$ 时等于 $t^{'}+1$，在 $t^{'}\geq t$ 时等于 $t^{'}$，其中 $0\leq t^{'}\leq p-1$。因此，第（$2r-3$）个块中的下降总数等于 $\binom{p(p-1)}{2}+t\Big), 0\leq t\leq p-1$，这就证明了（2）。

□

5 $p^{(k)}$-斐波那契数

本节中，我们为集合 V_k^{2r} 中的每个顶点定义 $p^{(k)}$-斐波那契数，其中$0 \leq k \leq r-1$ 且 $r \geq 1$。我们使用数学归纳法计算 $p^{(k)}$-斐波那契数。此外，我们确定顶点集 V_k^{2r} 中使 $p^{(k)}$-斐波那契数保持不变的子类。

定义21. 对于 $0 \leq k \leq r-1$ 和 $r \geq 2$，令 $s = r-k$。我们将 $p^{(k)}$-斐波那契数 定义为 P_l^{2r} 中所有路径直至第$(2r-2)$个块的下降总数（如注 8(3)所定义）。我们将该数记为 $\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;\ (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$；即，

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)\Big) = \sum_{P^{2r}_{l,m_{2r-1},\ldots,m_1,t_{r-1}} \in P_l^{2r}} des(P^{2r}_{l,m_{2r-1},\ldots,m_1,t_{r-1}}).$$

我们可以将该量改写为顶点$\lambda\big(2r;\ (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)$（如定义18所述）的各分量直至 $P^{2r-2}_{\alpha+p^{k-1}t'}$，$0 \leq t' \leq p-1$中所有路径的第$(2r-4)$个块的全部下降之和，再加上 P_l^{2r}中所有路径在第$(2r-2)$个块和第$(2r-3)$个块处出现的下降。由推论 20，我们得到下列公式:

对于 $s=2$ **和** $k=0$：

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(4;(x_{(4,0)}, x_{(2,0)})\big)\Big) = \sum_{t'=0}^{p-1} \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2;(x_{(2,0)}, x_{(1,0)})\big)\Big) + \frac{p-1}{2}(p-1) \tag{5}$$

对于 $s=2$ **和** $k \geq 1$：

Case $0 \leq l < \frac{p^k-1}{2}$ ：

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+4;(x_{(4,k)}, x_{(2,k)}+l)\big)\Big)\\ &\quad= \sum_{t'=0}^{p-1} \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)}, x_{(1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t'))\big)\Big) + \frac{p+1}{2}(p-1)\end{aligned} \tag{6}$$

情形 $\frac{p^k-1}{2} \leq l < p^k$：

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+4;(x_{(4,k)}, x_{(2,k)}+l)\big)\Big)\\ &\quad= \sum_{t'=0}^{p-1} \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)}, x_{(1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t'))\big)\Big) + \frac{p-1}{2}(p-1)\end{aligned} \tag{7}$$

对于 $s \geq 3$ **和** $k=0$：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,0)}, x_{(s,0)})\big)\Big) &= p\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r-2;(x_{(2s-2,0)}, x_{(s-1,0)})\big)\Big)\\ &\quad + p^{s-2}\left(\frac{(p-1)^2}{2}\right) + p^{s-3}(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

对于 $s \geq 3$ **和** $1 \leq k \leq r-1$：

情形 $l = 0$：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+0)\big)\Big)&\\ =\sum_{t'=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r-2;(x_{(2s-2,k)},x_{(s-1,k)}+p^{k-1}t')\big)\Big)&\\ +p^{s-2}\left(\frac{p^2-1}{2}\right)+p^{s-3}(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)&\end{aligned} \tag{9}$$

情形 $1 \leq l < \frac{p^k-1}{2}$ **和** $j_{t-1}^k < l \leq j_t^k$，$1 \leq t \leq \frac{p-1}{2}$ **和** $l \neq j_{\frac{p-1}{2}}^k$：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)&\\ =\sum_{t'=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r-2;(x_{(2s-2,k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t'))\big)\Big)&\\ +p^{s-2}\left(\frac{p^2-1}{2}\right)+p^{s-3}(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}+t\right)&\end{aligned} \tag{10}$$

情形 $\frac{p^k-1}{2} \leq l < p^k$ **和** $j_{t-1}^k \leq l \leq j_t^k$，$\frac{p+1}{2} \leq t \leq p-1$：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)&\\ =\sum_{t'=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r-2;(x_{(2s-2,k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t'))\big)\Big)&\\ +p^{s-2}\left(\frac{(p-1)^2}{2}\right)+p^{s-3}(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}+t\right)&\end{aligned} \tag{11}$$

定理 22。 对于 $r \geq 1$，顶点 $\lambda\big(2r;(x_{(2s,0)},x_{(s,0)})\big)$ 处的 $p^{(0)}$-斐波那契数为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2;(x_{(2,0)},x_{(1,0)})\big)\Big)&=\frac{p-1}{2},\\ \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,0)},x_{(s,0)})\big)\Big)&=\frac{p-1}{2}(2(s-1)p^{s-1}-(2s-3)p^{s-2}),\ s\geq 2\end{aligned}$$

其中 $r = s$。

证明。 我们对 s 使用数学归纳法证明该定理。

对于 $s = 1$，由引理15可得

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2;(x_{(2,0)},x_{(1,0)})\big)\Big)=\frac{p-1}{2}.$$

对于 $s = 2$，再次由引理15可知，集合 th 中任何路径的 1st 块都没有下降 e

集 P_0^4。由方程 (5)，顶点 $\lambda\big(4$ 处的 $p^{(0)}$-斐波那契数；$(x_{(4,0)}, x_{(2,0)})\big)$ 为

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(4;(x_{(4,0)},x_{(2,0)})\big)\Big)=p\left(\frac{p-1}{2}\right)+(p-1)\frac{p-1}{2}=\frac{p-1}{2}(2p-1).$$

假设该定理对 $s-1$成立，即

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),0)},x_{(s-1,0)})\big)\Big)=\frac{p-1}{2}(2(s-2)p^{s-2}-(2s-5)p^{s-3}). \tag{12}$$

现在我们证明该定理对 s成立。将方程(12)中的 $p^{(0)}$-斐波那契数代入定义21的方程(8)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,0)},x_{(s,0)})\big)\Big)&=p\left(\frac{p-1}{2}\left(2(s-2)p^{s-2}-(2s-5)p^{s-3}\right)\right)\\&\quad+2p^{s-2}(p-1)\left(\frac{p-1}{2}\right)\\&=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(2(s-1)\cdot p^{s-1}-(2s-3)p^{s-2}\right)\end{aligned}$$

因此，该公式对所有 $s\geq 2$成立。 □

定理23. 对于 $r\geq 2$，顶点 $\lambda\big(2r;(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+l)\big)$处的 $p^{(1)}$-斐波那契数，其中 $l=j_t^1=t$ 与 $0\leq l\leq p-1$，并且其中 l 表示该顶点在 V_1^{2r}中的位置，如下

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(4;(x_{(2,1)},x_{(1,1)}+t)\big)\Big)=\frac{p-1}{2},0\leq t\leq p-1,$$

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(6;(x_{(4,1)},x_{(2,1)}+t)\big)\Big)=\begin{cases}\dfrac{p-1}{2}(2p+1), & 0\leq t<\dfrac{p-1}{2};\\ \dfrac{p-1}{2}(2p-1), & \dfrac{p-1}{2}\leq t\leq p-1,\end{cases}$$

以及对 $s\geq 3$

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+t)\big)\Big)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{p^{s-3}(p-1)}{2}(2(s-1)p^2+2t-(2s-5)), & 0\leq t<\dfrac{p-1}{2};\\ \dfrac{p^{s-3}(p-1)}{2}(2(s-1)p^2+2t-2p-(2s-5)), & \dfrac{p-1}{2}\leq t\leq p-1.\end{cases}$$

证明。 我们通过对 s使用数学归纳法来证明该定理。

对于 $s=1$，由引理15可得

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(4;(x_{(2,1)},x_{(1,1)}+t)\big)\Big)=\frac{p-1}{2},\ \forall\ 0\leq t\leq p-1. \tag{13}$$

对于 $s=2$，再次根据引理15，在 3rd 块处没有下降。将方程 (13) 中的$p^{(1)}$-斐波那契数代入定义21的方程 (6)，我们得到

对于 $0 \le t < \frac{p-1}{2}$，

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(6;(x_{(4,1)},x_{(2,1)}+t)\big)\Big) = p\left(\frac{p-1}{2}\right)+\left(\frac{p+1}{2}\right)(p-1) = \frac{p-1}{2}(2p+1) \tag{14}$$

同样，将方程 (13) 中的 $p^{(1)}$-斐波那契数代入定义21中的方程 (7)，对于 $\frac{p-1}{2} \le t \le p-1$，

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(6;(x_{(4,1)},x_{(2,1)}+t)\big)\Big) = p\left(\frac{p-1}{2}\right)+\left(\frac{p-1}{2}\right)(p-1) = \frac{p-1}{2}(2p-1) \tag{15}$$

对于 $s=3$，将方程 (14) 和 (15) 中的 $p^{(1)}$-斐波那契数代入定义21中的方程 (10)，对于 $0 \le t < \frac{p-1}{2}$，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(8;(x_{(6,1)},x_{(3,1)}+t)\big)\Big)\\
&\quad= \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{(p-1)(2p+1)}{2}+\frac{(p+1)(2p-1)}{2}+p(p+1)+p(p-1)+2t\right)\\
&\quad= \left(\frac{p-1}{2}\right)(4p^2+2t-1).
\end{aligned}$$

同样，将方程 (14) 和 (15) 中的 $p^{(1)}$-斐波那契数代入定义21中的方程（11），对于 $\frac{p-1}{2} \le t \le p-1$，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(8;(x_{(6,1)},x_{(3,1)}+t)\big)\Big)\\
&\quad= \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{(p-1)(2p+1)}{2}+\frac{(p+1)(2p-1)}{2}+p(p-1)+p(p-1)+2t\right)\\
&\quad= \left(\frac{p-1}{2}\right)(4p^2+2t-2p-1).
\end{aligned}$$

假设定理对 $s-1$ 成立。也就是说，对于 $0 \le t < \frac{p-1}{2}$，

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),1)},x_{(s-1,1)}+t)\big)\Big) = \frac{p^{s-4}(p-1)}{2}\big(2(s-2)p^2+2t-(2s-7)\big). \tag{16}$$

对于 $\frac{p-1}{2} \le t \le p-1$，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),1)},x_{(s-1,1)}+t)\big)\Big)\\
&\qquad= \frac{p^{s-4}(p-1)}{2}\big(2(s-2)p^2+2t-2p-(2s-7)\big).
\end{aligned} \tag{17}$$

现在我们来证明定理对 s 成立。

将方程 (16) 和 (17) 中的 $p^{(1)}$-斐波那契数代入定义21中的方程 (10)，对于 $0 \le t < \frac{p-1}{2}$，

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+t)\big)\Big)$$

$$=\sum_{t'=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),1)},x_{(s-1,1)}+t')\big)\Big)+p^{s-2}\left(\frac{p^2-1}{2}\right)$$
$$+p^{s-3}(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}+t\right)$$

$$=\left(\frac{p^{s-4}(p-1)}{2}\right)\left(\sum_{t'=0}^{\frac{p-3}{2}}2(s-2)p^2+2t'-(2s-7)+p^2(p-1)\left(\frac{p+1}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{t'=\frac{p-1}{2}}^{p-1}2(s-2)p^2+2t'-2p-(2s-7)+p(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}+t\right)\right)$$

$$=\frac{p^{s-3}(p-1)}{2}\big(2(s-1)p^2+2t-(2s-5)\big)$$

同样，将方程 (16) 和 (17) 中的 $p^{(1)}$-斐波那契数代入定义21中的方程（11），对于 $\frac{p-1}{2}\le t\le p-1$,

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+t)\big)\Big)=\sum_{t'=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),1)},x_{(s-1,1)}+t')\big)\Big)$$
$$+p^{s-2}\left(\frac{(p-1)^2}{2}\right)+p^{s-3}(p-1)\left(\frac{p(p-1)}{2}+t\right)$$
$$=\frac{p^{s-3}(p-1)}{2}(2(s-1)p^2+2t-2p-(2s-5)).$$

因此，b y数学归纳法，该结果对所有 $s\ge 3$成立。 □

例24. 顶点 $\lambda\big(2(s+1);(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+l)\big)$处的 5^1-斐波那契数，其中 $3\le s\le 9$，由下式给出

1. 对于 $l=0$，我们有

$$\{\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(s+1);(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+0)\big)\Big)\mid 3\le s\le 10\}$$
$$=\{198,1470,9750,60750,363750,2118750,12093750\}.$$

2. 对于 $l=1$，我们有

$$\{\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(s+1);(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+1)\big)\Big)\mid 3\le s\le 10\}$$
$$=\{202,1490,9850,61250,366250,2131250,12156250\}.$$

3. 对于 $l=2$，我们有

$$\{\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(s+1);(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+2)\big)\Big)|\ 3\le s\le 10\}$$
$$=\{186,1410,9450,59250,356250,2081250,11906250\}.$$

4. 对于 $l=3$, 我们有

$$\{\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(s+1);(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+3)\big)\Big)|\ 3\le s\le 10\}$$
$$=\{190,1430,9550,59750,358750,2093750,11968750\}.$$

5. 对于 $l=4$, 我们有

$$\{\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(s+1);(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+4)\big)\Big)|\ 3\le s\le 10\}$$
$$=\{194,1450,9650,60250,361250,2106250,12031250\}.$$

定理25。 设 $2\le k\le r-1$ 和 $1\le s\le 3$ (其中 $r-k=s$)。则顶点 $\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)$, $0\le l<p^k$ 处的 $p^{(k)}$-斐波那契数为

对于 $s=1$:

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)},x_{(1,k)}+l)\big)\Big)=\frac{p-1}{2},\ \forall\ 0\le l\le p^k-1.$$

对于 $s=2$:

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+4;(x_{(4,k)},x_{(2,k)}+l)\big)\Big)=\begin{cases}\frac{p-1}{2}(2p+1), & for\ 0\le l\le\frac{p^k-1}{2};\\ \frac{p-1}{2}(2p-1), & for\ \frac{p^k-1}{2}\le l<p^k.\end{cases}$$

对于 $s\ge 3$: $\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+6;\ (x_{(6,k)},\ x_{(3,k)}+l)\big)\Big)$

$$=\begin{cases}\frac{p-1}{2}(4p^2+1), & for\ l=0;\\ \frac{p-1}{2}(4p^2+2t-1), & for\ l\in[(t-1)\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota+1,\dots,t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota],\ 1\le t\le\frac{p-3}{2};\\ \frac{p-1}{2}(4p^2+1+p-1), & for\ l\in[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota+1,\dots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=1}^{k-1}p^\iota-1];\\ \frac{p-1}{2}(4p^2-1+p-1), & for\ l\in[\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=1}^{k-1}p^\iota,\dots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota-1];\\ \frac{p-1}{2}(4p^2-1-p-1), & for\ l=\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota;\\ \frac{p-1}{2}(4p^2-1+2(t-p)), & for\ l\in[(t-1)\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota+1,\dots,t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota],\\ & \frac{p+1}{2}\le t\le p-1.\end{cases}$$

证明。 **情形1: 对于** $s=1$

根据引理15, 我们有

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)},x_{(1,k)}+l)\big)\Big)=\frac{p-1}{2},\ \forall\ 0\le l\le p^k-1 \tag{18}$$

情况2：对于 $s=2$

由引理15可知，第$(2k+1)$个块处没有下降。将方程（18）中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21的方程（6），对于$0 \leq l < \frac{p^k-1}{2}$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+4;(x_{(4,k)},x_{(2,k)}+l)\big)\Big) &= \sum_{t'=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)},x_{(1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t^{'}))\big)\Big)\\ &\quad+\frac{p+1}{2}(p-1)=\frac{p-1}{2}\left(2p+1\right).\end{aligned} \tag{19}$$

类似地，将方程（18）中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21的方程7，对于 $\frac{p^k-1}{2} \leq l \leq p^k-1$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+4;(x_{(4,k)},x_{(2,k)}+l)\big)\Big) &= \sum_{t'=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+2;(x_{(2,k)},x_{(1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t^{'}))\big)\Big)\\ &\quad+\frac{p-1}{2}(p-1)=\frac{p-1}{2}\left(2p-1\right).\end{aligned} \tag{20}$$

情形3：对于 $s=3$

我们得到顶点 $\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+6$处的 $p^{(k)}$-斐波那契数；$(x_{(6,k)},\ x_{(3,k)}+0)\big)\Big)$，方法是将方程（19）和（20）中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21的方程（9）。对于 $l=0$，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+6;(x_{(6,k)},x_{(3,k)}+0)\big)\Big)\\ &\quad=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{(p+1)(2p+1)}{2}+\frac{(p-1)(2p-1)}{2}+p(p+1)+p(p-1)\right)\\ &\quad=\left(\frac{p-1}{2}\right)(4p^2+1).\end{aligned}$$

同样，将方程 (19) 和 (20) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入$_{k-1}$定义21中的方程 (10)，可得，对于$1 \leq t \leq \frac{p-3}{2}$ 和 $l \in [(t-1)\sum_{\iota=0}^{k-1} p^{\iota}+1,\ldots,t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}]$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+6;(x_{(6,k)},x_{(3,k)}+l)\big)\Big)\\ &\quad=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{(p+1)(2p+1)}{2}+\frac{(p-1)(2p-1)}{2}+p(p+1)+p(p-1)+2t\right)\\ &\quad=\left(\frac{p-1}{2}\right)(4p^2+2t-1).\end{aligned}$$

接下来，将方程 (19) 和 (20) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定$_{k-1}$ $_{k-1}$义21中的方程 (10)，可得，对于 $l \in [\frac{p-3}{2}\sum p^{\iota}+1,\ldots,\frac{p-1}{2}\sum p^{\iota}-1]$，$_{\iota=0}$ $_{\iota=1}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+6;(x_{(6,k)},x_{(3,k)}+l)\big)\Big)\\&=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{(p+1)(2p+1)}{2}+\frac{(p-1)(2p-1)}{2}+p(p+1)+p(p-1)+2\left(\frac{p-1}{2}\right)\right)\\&=\left(\frac{p-1}{2}\right)(4p^2+1+p-1).\end{aligned}$$

同样，将方程 (19) 和 (20) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入$_{k-1}$ $_{k-1}$定义21中的方程 (10)，可得，对于 $l \in [\frac{p-1}{2}\sum p^{\iota},\ldots,\frac{p-1}{2}\sum p^{\iota}-1]$，$_{\iota=1}$ $_{\iota=0}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+6;(x_{(6,k)},x_{(3,k)}+l)\big)\Big)\\&=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{(p-1)(2p+1)}{2}+\frac{(p+1)(2p-1)}{2}+p(p+1)+p(p-1)+2\left(\frac{p-1}{2}\right)\right)\\&=\left(\frac{p-1}{2}\right)(4p^2-1+p-1).\end{aligned}$$

同样，将方程 (19) 和 (20) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入$_{k-1}$定义21中的方程（11），可得，对于 $l=\frac{p-1}{2}\sum p^{\iota}$，$_{\iota=0}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+6;(x_{(6,k)},x_{(3,k)}+l)\big)\Big)\\&=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{(p-1)(2p+1)}{2}+\frac{(p+1)(2p-1)}{2}+p(p-1)+p(p-1)+2\left(\frac{p-1}{2}\right)\right)\\&=\left(\frac{p-1}{2}\right)(4p^2-1-p-1).\end{aligned}$$

将方程 (19) 和 (20) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入方程
定义21中的（11），可得，对于 $\frac{p+1}{2}\leq t\leq p-1$和 $l\in[\ (t-1)\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}+1,\ \ldots,\ t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}]$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2k+6;(x_{(6,k)},x_{(3,k)}+l)\big)\Big)\\&=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{(p-1)(2p+1)}{2}+\frac{(p+1)(2p-1)}{2}+p(p-1)+p(p-1)+2t\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{p-1}{2}\right)(4p^2 - 1 + 2t - 2p).$$

□

定理 26. 对于 $2 \le k \le r-1$ 和 $3 \le s < k+2$ (其中 $r-k=s$)，顶点 $\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)$处的 $p^{(k)}$-斐波那契数，其中 $0 \le l < p^k$ 和 l 对应于 V_k^{2r}中该顶点的位置，为

(a) 如果 $l=0$，那么

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}(2(s-1)p^{s-1}+1)$$

(b) 对于 $1 \le t \le \frac{p-3}{2}$，

(i) If $l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1} p^\iota + p^i, \ldots, (t-1)\sum_{\iota=i+1}^{k-1} p^\iota + p^{i+1} - 1\right]$, $0 \le i \le s-4$, $s \neq 3$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)p^{s-1}+1+2t\sum_{j=0}^{s-3}p^j - 2\sum_{\mu=0}^{s-i-4}p^\mu\Big)$$

(ii) If $l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=s-3}^{k-1} p^\iota + p^{s-3}, \ldots, t\sum_{\iota=0}^{k-1} p^\iota\right]$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)p^{s-1}+1+2t\sum_{j=0}^{s-3}p^j\Big)$$

(c) 对于 $t = \frac{p-1}{2}$，

(i) If $l \in \left[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=i}^{k-1} p^\iota + p^i, \ldots, \frac{p-3}{2}\sum_{\iota=i+1}^{k-1} p^\iota + p^{i+1} - 1\right]$, $0 \le i \le s-4$, $s \neq 3$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)p^{s-1}+1+(p-1)\sum_{j=0}^{s-3}p^j - 2\sum_{\mu=0}^{s-i-4}p^\mu\Big)$$

(ii) If $l \in \left[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=s-3}^{k-1} p^\iota + p^{s-3}, \ldots, \frac{p-1}{2}\sum_{\iota=s-2}^{k-1} p^\iota - 1\right]$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}(2(s-1)p^{s-1}+1+p^{s-2}-1)$$

(iii) If $l \in \left[\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=i'}^{k-1} p^{\iota}, \ldots, \frac{p-1}{2}\sum_{\iota=i'-1}^{k-1} p^{\iota} - 1\right],\ 1 \le i' \le s-2,$ *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)p^{s-1} - 1 - p^{s-2} - 2\sum_{\theta=1}^{s-3} p^{\theta} + 2\sum_{\mu=s-i'-1}^{s-2} p^{\mu} - 1\Big)$$

(iv) If $l = \frac{p-1}{2}\sum_{\iota=0}^{k-1} p^{\iota}$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)p^{s-1} - 1 - p^{s-2} - 2\sum_{\theta=1}^{s-3} p^{\theta} - 1\Big)$$

(d) 对于 $\frac{p+1}{2} \le t \le p-1$,

(i) If $l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1} p^{\iota} + p^{i}, \ldots, (t-1)\sum_{\iota=i+1}^{k-1} p^{\iota} + p^{i+1} - 1\right],\ 0 \le i \le s-4,\ s \ne 3,$ *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)p^{s-1} - 1 + (2t-2p)\sum_{j=0}^{s-3} p^{j} - 2\sum_{\mu=0}^{s-i-4} p^{\mu}\Big)$$

(ii) If $l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=s-3}^{k-1} p^{\iota} + p^{s-3}, \ldots, t\sum_{\iota=0}^{k-1} p^{\iota}\right]$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)p^{s-1} - 1 + (2t-2p)\sum_{j=0}^{s-3} p^{j}\Big)$$

证明。 我们对 s 应用数学归纳法来证明该定理。

根据定理25，对于 $s = 3$，给定公式成立。

根据归纳假设，我们假设该定理对于 $s-1$ 成立，其中$3 \le s-1 < k+1$；也就是说，

1. 当 $l = 0$ 时，我们有

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1); (x_{(2(s-1),k)}, x_{(s-1,k)})\big)\Big) = \frac{p-1}{2}(2(s-2)p^{s-2} + 1)$$

2. (i) 对于 $l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1} p^{\iota}+p^{i},\ldots,(t-1)\sum_{\iota=i+1}^{k-1} p^{\iota}+p^{i+1}-1\right]$, $0 \le i \le s-5$, $s-1 \neq 3$, $1 \le t \le \frac{p-3}{2}$，我们有

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}+1+2t\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}-2\sum_{\mu=0}^{s-i-5}p^{\mu}\Big)$$

(ii) 对于 $l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=s-4}^{k-1} p^{\iota}+p^{s-4},\ \ldots\ldots,\ t\sum_{\iota=0}^{k-1} p^{\iota}\right]$, $1 \le t \le \frac{p-3}{2}$，我们有

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}+1+2t\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}\Big)$$

3. 对于 $t=\frac{p-1}{2}$：

(a) For $l \in \left[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=i}^{k-1} p^{\iota}+p^{i},\ldots,\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=i+1}^{k-1} p^{\iota}+p^{i+1}-1\right]$, $0 \le i \le s-5$, $s-1 \neq 3$, we have

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}+1+(p-1)\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}-2\sum_{\mu=0}^{s-i-5}p^{\mu}\Big)$$

(b) For $l \in \left[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=s-4}^{k-1} p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=s-3}^{k-1} p^{\iota}-1\right]$, we have

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}(2(s-2)p^{s-2}+1+p^{s-3}-1)$$

(c) If $l \in \left[\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=i'}^{k-1} p^{\iota},\ldots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=i'-1}^{k-1} p^{\iota}-1\right]$, $1 \le i' \le s-3$, then

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}-1-p^{s-3}-2\sum_{\theta=1}^{s-4}p^{\theta}+2\sum_{\mu=s-i'-2}^{s-3}p^{\mu}-1\Big)$$

(d) 如果 $l=\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=0}^{k-1} p^{\iota}$，那么

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}-1-p^{s-3}-2\sum_{\theta=1}^{s-4}p^{\theta}-1\Big)$$

4. 对于 $\frac{p+1}{2}\le t\le p-1$：

(i) For $l\in\left[(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1}p^{\iota}+p^{i},\ldots,(t-1)\sum_{\iota=i+1}^{k-1}p^{\iota}+p^{i+1}-1\right]$, $0\le i\le s-5$, $s-1\neq 3$, we have

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}-1+(2t-2p)\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}-2\sum_{\mu=0}^{s-i-5}p^{\mu}\Big)$$

(ii) For $l\in\left[(t-1)\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}\right]$, we have

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+l)\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}-1+(2t-2p)\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}\Big)$$

现在我们证明该定理对 s 成立。

(a) 当 $l=0$ 时，根据定义18，顶点 $\lambda\big(2r$ 的分量；$(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+0)\big)$ 由 $\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+p^{k-1}t')\big)$ 给出，其中 $0\le t'\le p-1$。利用定义21中的方程(9)，并代入 $\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+p^{k-1}t')\big)\Big)$ 的值，其中 $0\le t'\le p-1$，我们得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)})\big)\Big)=\frac{p-1}{2}\left(2(s-1)\cdot p^{s-1}+1\right)$$

其中

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+p^{k-1}t')\big)\Big)$$

$$=\begin{cases}\frac{p-1}{2}\left(2(s-2)p^{s-2}+1\right), & \text{when } t'=0;\\ \frac{p-1}{2}\big(2(s-2)p^{s-2}+1+2t'\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}\big), & \text{when } 1\le t'\le\frac{p-3}{2};\\ \frac{p-1}{2}\left(2(s-2)p^{s-2}+1+p^{s-3}-1\right), & \text{when } t'=\frac{p-1}{2};\\ \frac{p-1}{2}\big(2(s-2)p^{s-2}+1+(2t'-2p)\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}\big), & \text{when } \frac{p+1}{2}\le t'\le p-1.\end{cases}$$

(b) (i) 设 $l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1} p^{\iota}+p^{i},\ldots,(t-1)\sum_{\iota=i+1}^{k-1} p^{\iota}+p^{i+1}-1\right]$，其中 $0 \le i \le s-4$，$s \neq 3$，以及 $1 \le t \le \frac{p-3}{2}$。然后我们计算顶点 $\lambda\big(2r$ 处的 $p^{(k)}$-斐波那契数；$(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\big)$ 如下：

对于 $l \in [1,\ldots,p-1]$，顶点 $\lambda\big(2r;\ (x_{(2s,k)},\ x_{(s,k)}+l)\big)$ 的分量与顶点 $\lambda\big(2r;\ (x_{(2s,k)},\ x_{(s,k)}+0)\big)$的分量相同。将对应分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21中的方程 (10)，得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)\cdot p^{s-1}+1+2\sum_{j=0}^{s-3}p^{j}-2\sum_{\mu=0}^{s-4}p^{j}\Big)$$

接下来，对于 $l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1} p^{\iota}+p^{i},\ \ldots\ldots,\ (t-1)\sum_{\iota=i+1}^{k-1} p^{\iota}+p^{i+1}-1\right]$，$0 \le i \le s-4$,$1 \le t \le \frac{p-3}{2}$，附加条件为 $i \neq 0$ 当 $t=1$ 时，这些分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数如下：

$_{k-1}$设 $l=(t-1)\sum p^{\iota}+p^{i}$。根据定义18，与$_{\iota=i}$这些分量对应的整数为

$$\alpha + p^{k-1}t' = (t-1)\sum_{\iota=i-1}^{k-2} p^{\iota}+p^{i-1}+p^{k-1}t' \tag{21}$$

$_{k-2}$其中 $\alpha=(t-1)$

$\sum p^{\iota}+p^{i-1}$。$_{\iota=i-1}$

当 $0 \le t' \le t-2$ 时，方程（21）可重写为

$$\alpha + p^{k-1}t' = t'\sum_{\iota=i-1}^{k-1} p^{\iota}+p^{i-1}+(t-1-t')\sum_{\iota=i-1}^{k-2} p^{\iota} \tag{22}$$

注意到

$$(p-t')\sum_{\iota=i-1}^{s-5} p^{\iota} < (t-1-t')\sum_{\iota=i-1}^{k-2} p^{\iota} < (p-t')\sum_{\iota=i-1}^{s-5} p^{\iota}+t'\sum_{\iota=0}^{s-5} p^{\iota}+\sum_{\iota=s-5}^{k-1} p^{\iota}$$

$_{s-5}$其中 $(p-t')\ \sum p^{\iota}$ 是这些区间长度的总和$_{\iota=i-1}$

$$\left[t'\sum_{\iota=j-1}^{k-1} p^{\iota}+p^{j-1},\ldots,t'\sum_{\iota=j}^{k-1} p^{\iota}+p^{j}\right],\ i \le j \le s-4$$

$_{\iota=0}^{s-5}$ $_{\iota=s-5}^{k-1}$而 $t^{'}\sum p^{\iota}+\sum p^{\iota}$ 是该区间的长度

$$\left[t^{'}\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,(t^{'}+1)\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}\right].$$

因此，与该分量对应的位置 $\alpha+p^{k-1}t^{'}$ 位于区间内

$$\left[t^{'}\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,(t^{'}+1)\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}\right]$$

其对应的 $p^{(k)}$-斐波那契数（ $0\leq t^{'}\leq t-2$ ）为

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t^{'}))\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\big(2(s-2)p^{s-2}+1+2(t^{'}+1)\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}\big). \tag{23}$$

当 $t^{'}=t-1$时，方程（21）可改写为

$$\alpha+p^{k-1}(t-1)=(t-1)\sum_{\iota=i-1}^{k-1}p^{\iota}+p^{i-1} \tag{24}$$

与该分量对应的位置 $\alpha+p^{k-1}$（$t-1$）位于区间内

$$\left[(t-1)\sum_{\iota=i-1}^{k-1}p^{\iota}+p^{i-1},\ldots,(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1}p^{\iota}+p^{i}\right].$$

因此，对应于 $t^{'}=t-1$ 的 $p^{(k)}$-斐波那契数为

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t^{'}))\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}+1+2t\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}-2\sum_{\mu=0}^{s-i-4}p^{\mu}\Big). \tag{25}$$

接下来，当 $t\leq t^{'}\leq\frac{p-3}{2}$和 $\frac{p+1}{2}\leq t^{'}\leq p-1$时，方程（21）可改写为

$$\alpha+p^{k-1}t^{'}=t^{'}\sum_{\iota=i-1}^{k-1}p^{\iota}+p^{i-1}-(t^{'}-(t-1))\sum_{\iota=i-1}^{k-2}p^{\iota} \tag{26}$$

注意到

$$(p-t^{'})\sum_{\iota=0}^{i-2}p^{\iota}<(t^{'}-(t-1))\sum_{\iota=i-1}^{k-2}p^{\iota}<(p-t^{'})\sum_{\iota=0}^{i-2}p^{\iota}+(t^{'}-1)\sum_{\iota=0}^{s-5}p^{\iota}+\sum_{\iota=s-5}^{k-1}p^{\iota}$$

其中$(p-t^{'})\sum_{\iota=i-1}^{s-5}p^{\iota}$是这些区间长度之和

$$\left[t^{'}\sum_{\iota=j-1}^{k-1}p^{\iota}+p^{j-1},\ldots,t^{'}\sum_{\iota=j}^{k-1}p^{\iota}+p^{j}\right],\ 1\leq j\leq i-1$$

且$(t^{'}-1)\sum_{\iota=0}^{s-5}p^{\iota}+\sum_{\iota=s-5}^{k-1}p^{\iota}$是该区间的长度

$$\left[(t^{'}-1)\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,t^{'}\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}\right].$$

因此，与该分量对应的位置 $\alpha+p^{k-1}t^{'}$ 位于该区间内

$$\left[(t^{'}-1)\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,t^{'}\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}\right].$$

因此，对于 $t\leq t^{'}\leq\frac{p-3}{2}$，对应的 $p^{(k)}$-斐波那契数为

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t^{'}))\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}+1+2t^{'}\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}\Big).\tag{27}$$

而对于 $\frac{p-1}{2}\leq t^{'}\leq p-1$，则为

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t^{'}))\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}+1+(2t^{'}-2p)\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}\Big).\tag{28}$$

当 $t^{'}=\frac{p-1}{2}$ 时，方程（21）可改写为

$$\alpha+p^{k-1}t^{'}=(t-1)\sum_{\iota=i-1}^{k-2}p^{\iota}+p^{i-1}+\left(\frac{p-1}{2}\right)p^{k-1}$$

注意到

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)p^{k-1}\in\left[\left(\frac{p-3}{2}\right)\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,\left(\frac{p-1}{2}\right)\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}-1\right].$$

此外，$\binom{p-1}{2}p^{k-1}$ 与 $\binom{p-1}{2}\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}$ 之差为 $\binom{p-1}{2}\sum_{\iota=s-3k-2}^{k-2}p^{\iota}$，大于 $(t-1)\sum_{\iota=i-1}^{i-1}p^{\iota}+p^{i-1}$。

因此，与该分量对应的位置 $\alpha+p^{k-1}\binom{p-1}{2}$ 位于区间

$$\left[\left(\frac{p-3}{2}\right)\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,\left(\frac{p-1}{2}\right)\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}-1\right]$$

其对应的 $t'=\binom{p-1}{2}$ 的 $p^{(k)}$-斐波那契数为

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}t'))\big)\Big)$$
$$=\frac{p-1}{2}\big(2(s-2)p^{s-2}+1+p^{s-3}-1\big).\tag{29}$$

将方程 (23)、(25)、(27)、(28) 和 (29) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21中的方程 (10)，我们得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$
$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)\cdot p^{s-1}+1+2t\sum_{j=0}^{s-3}p^{j}-2\sum_{\mu=0}^{s-i-4}p^{\mu}\Big)$$

(ii) 令 $l\in\left[(t-1)\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-3},\ \ldots\ldots,\ t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}\right]$，$1\le t\le\frac{p-3}{2}$。各分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数与方程 (23)、(27)、(28)、(29) 中给出的相同，但 $t'=t-1$ 情形除外。与满足 $t'=t-1$ 的位置 $\alpha+p^{k-1}t'$ 对应的分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数为，

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r-1);(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+(\alpha+p^{k-1}(t-1)))\big)\Big)$$
$$=\frac{p-1}{2}\big(2(s-2)p^{s-2}+1+2t\sum_{j=0}^{s-4}p^{j}\big).\tag{30}$$

由方程 (25) 和 (30) 可知，区间

$$\left[(t-1)\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}\right]$$

在第 2$(r-1)$ 层被分成两个子区间

$$\left[(t-1)\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,(t-1)\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-3}-1\right]$$

and

$$\left[(t-1)\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-3},\ldots,t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}\right]$$

对于每个 $1\le t\le\frac{p-3}{2}$，由于分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数在位置 $\alpha+p^{k-1}(t-1)$ 处变化。

将方程 (23)、(27)、(28)、(29) 和 (30) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21的方程 (10)，我们得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)\cdot p^{s-1}+1+2t\sum_{j=0}^{s-3}p^{j}\Big)$$

(c) (i) 令 $l\in\left[\underline{\ }\sum_{\iota=i}^{k-1}p^{\iota}+p^{i},\ \ldots,\ \underline{\ }\sum_{\iota=i+1}^{k-1}p^{\iota}+p^{i+1}-1\right]$，$0\le i\le s-4$，$s\neq 3$。分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数与情形 (b)(i) 中的相同，取 $t=\frac{p-3}{2}$。将 $p^{(k)}$-斐波那契数的相应取值代入定义21的方程 (10)，我们得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$
$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)p^{s-1}+1+(p-1)\sum_{j=0}^{s-3}p^{j}-2\sum_{\mu=0}^{s-i-4}p^{\mu}\Big)$$

特别地，当 $t'=\frac{p-1}{2}$ 时，与该分量对应的位置 $\alpha+\underline{\ }p^{k-1}\left(\frac{p-1}{2}\right)$ 位于区间内

$$\left[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}-1\right]$$

其中 $\alpha=\underline{\ }\sum_{\iota=i-1}^{k-2}p^{\iota}+p^{i-1}$，其对应的 $p^{(k)}$-斐波那契数为 $\frac{p-3}{2}$

$$\mathcal{M}\left(\lambda\Big(2(r-1);\Big(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+\Big(\alpha+\Big(\frac{p-1}{2}\Big)p^{k-1}\Big)\Big)\Big)\right)$$
$$=\frac{p-1}{2}\left(2(s-2)p^{s-2}+1+p^{s-3}-1\right). \tag{31}$$

(ii) 设 $l \in \left[\underline{\frac{p-3}{2}} \sum_{\iota=s-3}^{k-1} p^{\iota} + p^{s-3}, \ldots, \underline{\frac{p-1}{2}} \sum_{\iota=s-2}^{k-1} p^{\iota} - 1\right]$。这些分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数与情形 (b)(i) 中的相同，但情形$_{k-1}$$t' = \frac{p-1}{2}$ 除外。设 $l = \frac{p-3}{2} \sum p^{\iota} + p^{s-3}$。那么根据定义18，与该分量对应的位置$_{\iota=s-3}$为

$$\alpha + p^{k-1}\left(\frac{p-3}{2}\right) = \frac{p-3}{2} \sum_{\iota=s-4}^{k-1} p^{\iota} + p^{s-4}$$

$_{k-1}$其中 $\alpha = \frac{p-3}{2} \sum \overline{p^{\iota}}$。$_{\iota=s-4}$ 因此，与该分量对应的位置 $\alpha + p^{k-1}\left(\frac{p-1}{2}\right)$ 位于区间

$$\left[\frac{p-3}{2} \sum_{\iota=s-4}^{k-1} p^{\iota} + p^{s-4}, \ldots, \frac{p-1}{2} \sum_{\iota=s-3}^{k-1} p^{\iota} - 1\right]$$

其 $p^{(k)}$-斐波那契数为

$$M\left(\lambda\Big(2(r-1); \Big(x_{(2(s-1),k)}, x_{(s-1,k)} + \Big(\alpha + p^{k-1}\Big(\frac{p-1}{2}\Big)\Big)\Big)\Big)\right) = \frac{p-1}{2}\left(2(s-2)p^{s-2} + 1 - p^{s-3} - 1\right). \tag{32}$$

将方程 (23)、(28) 和 (32) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21的方程 (10)，得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)\Big) = \frac{p-1}{2}\left(2(s-1)\cdot p^{s-1} + 1 + p^{s-2} - 1\right)$$

(iii) 设 $l \in \left[\underline{\frac{p-1}{2}} \sum_{\iota=i'}^{k-1} p^{\iota}, \ldots, \underline{\frac{p-1}{2}} \sum_{\iota=i'-1}^{k-1} p^{\iota} - 1\right]^2$，$2 \le i' \le s-2$。对于每个 i'，分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数与情形 (b)(i) 中的相同，$_{k-1}$但情形 $t' = \frac{p-1}{2}$ 除外。设 $l = \frac{p-1}{2} \sum p^{\iota}$。那么根据定义18，我们有$_{\iota=i'}$

$$\alpha + p^{k-1}\left(\frac{p-1}{2}\right) = \frac{p-1}{2} \sum_{\iota=i'-1}^{k-1} p^{\iota}$$

$_{k-2}$其中 $\alpha = \frac{p-1}{2} \sum p^{\iota}$。因此，$\alpha + p^{k-1}\left(\frac{p-1}{2}\right)$ 对应于$_{\iota=i'-1}$的位置

分量位于区间内

$$\left[\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=i'-1}^{k-1}p^{\iota},\ldots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=i'-2}^{k-1}p^{\iota}-1\right].$$

该分量对应的 $p^{(k)}$-斐波那契数为

$$M\left(\lambda\Big(2(r-1);\Big(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+\Big(\alpha+p^{k-1}\Big(\tfrac{p+1}{2}\Big)\Big)\Big)\Big)\right)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)\cdot p^{s-2}-1-p^{s-3}-2\sum_{\theta=0}^{s-4}p^{\theta}+\sum_{\mu=s-i'-1}^{s-3}p^{\mu}-1\Big)\qquad(33)$$

将方程 (23)、(28) 和 (33) 中的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21中的方程 (10)，得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)\cdot p^{s-1}-1-p^{s-2}-2\sum_{\theta=0}^{s-3}p^{\theta}+\sum_{\mu=s-i'-1}^{s-2}p^{\mu}-1\Big).$$

接下来，对于 $i'=1$，令 $l\in\left[\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=1}^{k-1}p^{\iota},\ \ldots\ldots,\ \frac{p-1}{2}\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}-1\right]$。由方程 (10)，得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)\cdot p^{s-1}-1-p^{s-2}-2\sum_{\theta=0}^{s-3}p^{\theta}+\sum_{\mu=s-2}^{s-2}p^{\mu}-1\Big).$$

这里，$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2\ (r-1)\ ;\ \ (x_{(2(s-1),k)},\ x_{(s-1,k)}+\ (\alpha+p^{k-1}t')\ )\ \big)\Big)$ 与情形 **(b)** (i) 相同，唯独情形$t'=\frac{p-1}{2}$ 除外。该分量对应的 $p^{(k)}$-斐波那契数为

$$\mathcal{M}\left(\lambda\Big(2(r-1);\Big(x_{(2(s-1),k)},x_{(s-1,k)}+\Big(\alpha+p^{k-1}\Big(\tfrac{p+1}{2}\Big)\Big)\Big)\Big)\right)$$

$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-2)p^{s-2}-1-p^{s-3}-2\sum_{\theta=0}^{s-4}p^{\theta}-1\Big).\qquad(34)$$

由方程（31）、（32）和（33）可知，区间

$$\left[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}-1\right]$$

在第 2($r-1$) 层被划分为三个子区间:

$$\left[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=s-4}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-4},\ldots,\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-3}-1\right],$$

$$\left[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}+p^{s-3},\ldots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=s-2}^{k-1}p^{\iota}-1\right],$$

and

$$\left[\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=s-2}^{k-1}p^{\iota},\ldots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=s-3}^{k-1}p^{\iota}-1\right].$$

细分之所以发生，是因为当$t'=\frac{p-1}{2}$时，各分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数在位置 $\alpha+p^{k-1}t'$ 发生变化。

(iv) 对于 $l=\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=0}^{k-1}p^{\iota}$，各分量具有与带有 $i'=1$的前一情形相同的 $p^{(k)}$-斐波那契数，因为相应的分量是相同的。将各分量相应的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入定义21中的方程（11），我们得到

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$
$$=\frac{p-1}{2}\Big(2(s-1)\cdot p^{s-1}-1-p^{s-2}-2\sum_{\theta=0}^{s-3}p^{\theta}-1\Big)$$

（d）论证过程与情形**（b）**相同，区别在于我们将各分量的 $p^{(k)}$-斐波那契数代入方程（11）。

□

定理27. 对于 $2\le k\le r-1$ 和 $s\ge k+2$（其中 $r-k=s$），顶点 $\lambda\big(2r;\ (x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)$处的 $p^{(k)}$-斐波那契数，其中 $0\le l<p^k$，由下式给出

(a) 若 $l=0$，则

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3)$$

(b) 对于 $1\le t\le\frac{p-3}{2}$，

(i) If $l\in\left[(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1}p^{\iota}+p^{i},\ldots,(t-1)\sum_{\iota=i+1}^{k-1}p^{\iota}+p^{i+1}-1\right]$, $0\le i\le k-2$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$
$$=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\Big(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3+2t\sum_{j=0}^{k-1}p^j-2\sum_{\mu=0}^{k-i-2}p^\mu\Big)$$

(ii) If $l\in\Big[tp^{k-1},\ldots,t\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota\Big]$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$
$$=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\Big(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3+2t\sum_{j=0}^{k-1}p^j\Big)$$

(c) 当 $t=\frac{p-1}{2}$,

(i) If $l\in\Big[\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=i}^{k-1}p^\iota+p^i,\ldots,\frac{p-3}{2}\sum_{\iota=i+1}^{k-1}p^\iota+p^{i+1}-1\Big]$, $0\le i\le k-2$ *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$
$$=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\Big(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3+(p-1)\sum_{j=0}^{k-1}p^j-2\sum_{\mu=0}^{k-i-2}p^\mu\Big)$$

(ii) If $l\in\Big[\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=i'}^{k-1}p^\iota,\ldots,\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=i'-1}^{k-1}p^\iota-1\Big]$, $1\le i'\le k-1$ *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\Big(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3$$
$$-p^k-2\sum_{\theta=1}^{k-1}p^\theta+2\sum_{\mu=k-i'+1}^{k}p^\mu-1\Big)$$

(iii) If $l=\frac{p-1}{2}\sum_{\iota=0}^{k-1}p^\iota$, *then*

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)},x_{(s,k)}+l)\big)\Big)$$
$$=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\Big(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3-p^k-2\sum_{\theta=1}^{k-1}p^\theta-1\Big)$$

(d) 对于 $\frac{p+1}{2}\le t\le p-1$,

$$(i)\ \textit{If } l \in \left[(t-1)\sum_{\iota=i}^{k-1} p^{\iota} + p^{i}, \ldots, (t-1)\sum_{\iota=i+1}^{k-1} p^{\iota} + p^{i+1} - 1\right],\ 0 \le i \le k-2\ \textit{then}$$

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)\Big) = \frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\Big(2(s-1)p^{k+1} - 2(s-k) + 3 + 2(t-p)\sum_{j=0}^{k-1} p^{j} - 2\sum_{\mu=0}^{k-i-2} p^{\mu}\Big)$$

$$(ii)\ \textit{If } l \in \left[tp^{k-1}, \ldots, t\sum_{\iota=0}^{k-1} p^{\iota}\right],\ \textit{then}$$

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r; (x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + l)\big)\Big) = \frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\Big(2(s-1)p^{k+1} - 2(s-k) + 3 + (2t-2p)\sum_{j=0}^{k-1} p^{j}\Big)$$

证明。 我们通过反复应用方程 (9)、(10) 和 (11)，用数学归纳法证明这一结果。

□

例28。 我们讨论从顶点 $\lambda\big(10$ 出发的路径；$(x_{(6,2)},\ x_{(3,2)} + 9)\big)$ 并在顶点 $\lambda\big(1$ 处结束的路径；$(p-1,\ i)\big)$，其中 $0 \le i \le p-2$，使用带有 $p = 5$ 的 p-Bratteli图。这里有 $r = 5$、$s = 3$、$x_{(6,2)} = 575$、$x_{(3,2)} = 275$ 和 $l = 9$。此外，我们计算了这些路径上各顶点处的 $p^{(k)}$-斐波那契数。

从第 10th 层到第 6th 层的路径如图7所示。

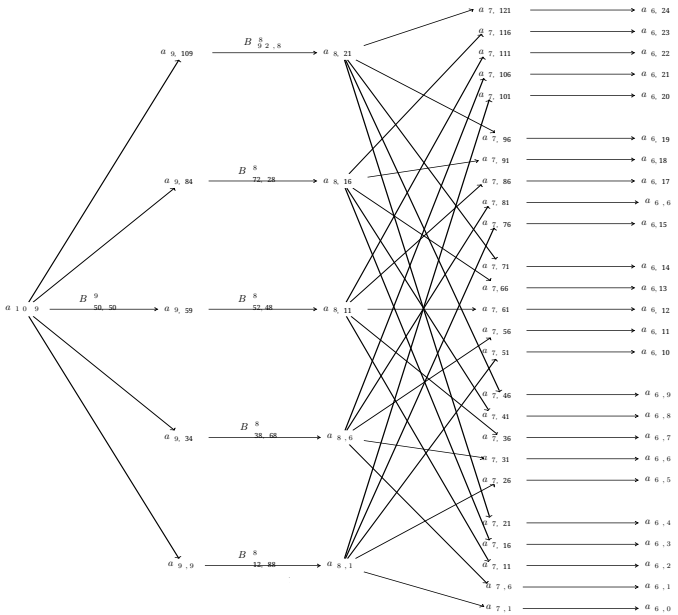

图7

这里，$a_{r,\ j}$ 表示第 r^{th} 层第 j^{th} 个位置的顶点，并且

- $a_{10,\ 9} = \lambda\big(10;\ \ (575,\ 275+9)\ \big)$。

- $a_{9,\ 9} = \lambda\big(9; (475,\ 175+9)\big)$, $a_{9,\ 34} = \lambda\big(9; (475,\ 175+34)\big)$, $a_{9,\ 59} = \lambda\big(9; (475,\ 175+59)\big)$, $a_{9,\ 84} = \lambda\big(9; (475,\ 175+84)\big)$, $a_{9,\ 109} = \lambda\big(9; (475,\ 175+109)\big)$。

- $a_{8,\ 1} = \lambda\big(8;\ \ (375,\ 175+1)\ \big)$, $a_{8,\ 1} = \lambda\big(8;\ \ (375,\ 175+6)\ \big)$, $a_{8,\ 1} = \lambda\big(8;\ \ (375,\ 175+11)\ \big)$, $a_{8,\ 1} = \lambda\big(8;\ \ (375,\ 175+16)\ \big)$, $a_{8,\ 1} = \lambda\big(8;\ \ (375,\ 175+21)\ \big)$。

- $a_{7,\ l'} = \lambda\big(7;\ \ (275,\ 75+l')\ \big)$, 其中 $l' = 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31,\ 36,\ 41,\ 46,\ 51,\ 56,\ 61,\ 66,\ 71,\ 76,\ 81,\ 86,\ 91,\ 96,\ 101,\ 106,\ 111,\ 116,\ 121$。

- $a_{6,\ l''} = \lambda\big(6;\ \ (175,\ 75+l'')\ \big)$, 其中 $0 \le l'' \le 24$。

从第 6th 层的一个特定顶点 $\lambda\big(6;\ \ (175,\ 75+5)\ \big)$ 到第 1st 层各顶点的路径如图8所示：

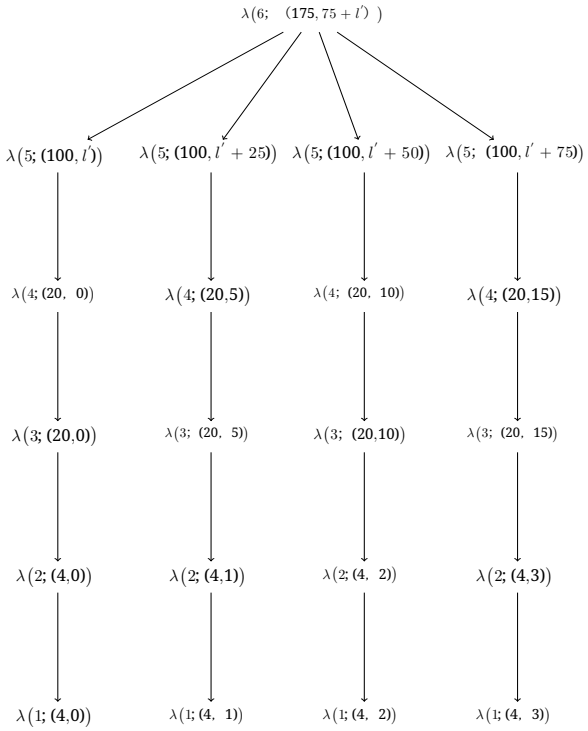

图8

同样，我们也为其他顶点构造从 6th 层到 1st 层的路径。顶点的定义与第3.1节相同，而边则通过移除块来获得，如第3.2节所述。

这些顶点处的 $p^{(k)}$-斐波那契数如下：

- $\mathcal{M}\big(\lambda\big(6; (175, 75+l'')\big)\big) = 2$ for all $0 \le l'' \le 24$ (By Theorem 25).

- $\mathcal{M}(\lambda(8;\ (\ 375\ 175+1\ ))=22\ \ \mathcal{M}(\lambda(8\ \ 375\ 175+6\ ))=22\ \ \mathcal{M}(\lambda(8\ \ 375\ 175+,\ ),\ ;\ (,\ ),\ ;\ (,\ )))=22$, $\mathcal{M}(\lambda(8;\ (,\ )))=18$, $\mathcal{M}(\lambda(8;\ (,\ )))=18$（根据定理25）。
- $\mathcal{M}\big(\lambda\big(10;(575,\ \ 275+9)\big)\big)=210$（根据定理 26）。

以下定理为这一名称提供了依据（$p^{(k)}$-**斐波那契数**）。

定理 29. 对于每个 $k\geq 0$和 $s\geq k+2$（其中 $r-k=s$），$p^{(k)}$-斐波那契数满足以下递推关系：

1. *When* $k=0$,

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+2);(x_{(2(s+2),0)},x_{(s+2,0)})\big)\Big)$$

$$=b_s+p\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,0)},x_{(s,0)})\big)\Big)+(p-1)\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),0)},x_{(s+1,0)})\big)\Big)$$

where $b_s=2p^{s-1}(p-1)\left(\frac{p^2-1}{2}\right)$.

2. 当 $k=1$时，

(a) *For* $0\leq t<\frac{p-1}{2}$

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+2);(x_{(2(s+2),1)},x_{(s+2,1)}+j_t^1)\big)\Big)$$

$$=b_s+\sum_{t_2=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+j_{t_2}^1)\big)\Big)+\sum_{t_1=1}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),1)},x_{(s+1,1)}+j_{t_1}^1)\big)\Big),$$

其中 $b_s=p^{s-1}(p-1)(p^2+p+t)$。

(b) 对于 $\frac{p-1}{2}\leq t\leq p-1$

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+2);(x_{(2(s+2),1)},x_{(s+2,1)}+j_t^1)\big)\Big)$$

$$=b_s+\sum_{t_2=0}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,1)},x_{(s,1)}+j_{t_2}^1)\big)\Big)+\sum_{t_1=1}^{p-1}\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),1)},x_{(s+1,1)}+j_{t_1}^1)\big)\Big),$$

其中 $b_s=p^{s-1}\ (p-1)\ \ (p^2+t)$ 。

3. 当 $k \geq 2$,

(a) For $j_{t-1}^k < l < j_t^k,\ 1 \leq t \leq \frac{p-1}{2}$ *and* $l = j_t^k,\ 0 \leq t < \frac{p-1}{2}$

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+2);(x_{(2(s+2),k)}, x_{(s+2,k)}+l)\big)\Big)$$

$$= b_s + \sum_{t_2=0}^{p-1} \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + (\alpha^{'} + p^{k-1}t_2))\big)\Big) +$$

$$\sum_{t_1=1}^{p-1} \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),k)}, x_{(s+1,k)} + (\alpha + p^{k-1}t_1))\big)\Big),$$

其中 $b_s = p^{s-1}(p-1)(p^2+p+t)$。

顶点 $\lambda\big(2\ r+1 \quad x_{(2(s+1),k)}\ x_{(s+1,k)} +\ \alpha + p^{k-1}t_1\ \big)$ $0 \leq t_1 \leq ()$;
$p-1$ $\lambda\big(2\ r+2 \quad x_{(2(s+2),k)}\ x_{(s+2,k)} + l\ \big)$
(,()), 其中是();(,)的分量，以及顶点$\lambda\big(2r;(^{x_{(2s,k)}}, x_{(s,k)} + (\alpha^{'} + p^{k-1}t_2))\big)$, 其中 $0 \leq t_2 \leq p-1$ 是 $\lambda\big(2(r+1);(^{x_{(2(s+1),k)}}, x_{(s+1,k)} + \alpha)\big)$的分量。

(b) 对于 $j_{t-1}^k \leq l \leq j_t^k$, $\frac{p+1}{2} \leq t \leq p-1$

$$\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+2);(x_{(2(s+2),k)}, x_{(s+2,k)}+l)\big)\Big)$$

$$= b_s + \sum_{t_2=0}^{p-1} \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)} + (\alpha^{'} + p^{k-1}t_2))\big)\Big) +$$

$$\sum_{t_1=1}^{p-1} \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),k)}, x_{(s+1,k)} + (\alpha + p^{k-1}t_1))\big)\Big),$$

其中 $b_s = p^{s-1}(p-1)(p^2+t)$。

顶点 $\lambda\big(2\ r+1 \quad x_{(2(s+1),k)}\ x_{(s+1,k)} +\ \alpha + p^{k-1}t_1\ \big)$ $0 \leq t_1 \leq ()$;
$p-1$ $\lambda\big(2\ r+2 \quad x_{(2(s+2),k)}\ x_{(s+2,k)} + l\ \big)$
(,()), 其中 是();(,)的分量，顶点$\lambda\big(2r;(^{x_{(2s,k)}}, x_{(s,k)} + (\alpha^{'} + p^{k-1}t_2))\big)$, 其中 $0 \leq t_2 \leq p-1$ 是 $\lambda\big(2(r+1);(^{x_{(2(s+1),k)}}, x_{(s+1,k)} + \alpha)\big)$的分量。

证明。**1.** 由方程 **(8))**，我们有

$$\mathcal{M}\big(\lambda\big(2(r+2);(x_{(2(s+2),0)}, x_{(s+2,0)})\big)\big)$$

$$= p\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),0)}, x_{(s+1,0)})\big)\Big) + 2p^s(p-1)\left(\frac{p-1}{2}\right)$$

$$= \mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),0)}, x_{(s+1,0)})\big)\Big)$$

$$+ (p-1)\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),0)}, x_{(s+1,0)})\big)\Big) + 2p^s(p-1)\left(\frac{p-1}{2}\right)$$

$$= b_s + p\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2r;(x_{(2s,0)}, x_{(s,0)})\big)\Big) + (p-1)\mathcal{M}\Big(\lambda\big(2(r+1);(x_{(2(s+1),0)}, x_{(s+1,0)})\big)\Big)$$

其中 $b_s = 2p^{s-1}(p-1)\binom{p^2-1}{2}$。

（2a）、（2b）、（3a）和（3b）的证明由定义21中的方程（9）、（10）和（11）得出。

□

6 生成函数

最后，我们通过给出 $p^{(k)}$-斐波那契数列 $\left(\mathcal{M}\left(\lambda\left(2r;(x_{(2s,k)},\ x_{(s,k)}+l)\right)\right)\right)_{s=k+2}^{\infty}$ 对于每个 $k \geq 0$ 和 $0 \leq l < p^k$ 的生成函数，来总结本研究，并解释为什么这些数被称为 $p^{(k)}$-斐波那契数。

定义30。对于 $k \geq 0$，我们将 $p^{(k)}$-斐波那契数列 $(a_s)_{s=k+2}^{\infty}$ 的生成函数定义为

$$F(x) = \sum_{s=k+2}^{\infty} a_s x^{s-(k+2)}.$$

定理31。 $p^{(0)}$-斐波那契数列 $a_s = \mathcal{M}\left(\lambda\left(2r;\ \ (x_{(2s,0)},\ x_{(s,0)})\ \right)\right)$，$s \geq 2$ 的生成函数为

$$F(x) = \frac{p-1}{2}\left(\frac{2p-2px}{(1-px)^2} - \frac{1}{1-px}\right),\ |x| < \frac{1}{p}.$$

定理32。序列 $p^{(1)}$-斐波那契数 $a_{s,\ t} = \mathcal{M}\left(\lambda\left(2r;(x_{(2s,1)}, x_{(s,1)} + j_t^1)\right)\right)$ 的生成函数为

$$F_t(x) = \frac{p-1}{2}\left(\frac{2p^2+2t-1}{1-px} + \frac{2p^2-2px}{(1-px)^2}\right),\ |x| < \frac{1}{p},\ 0 \leq t < \frac{p-1}{2},$$
$$F_t(x) = \frac{p-1}{2}\left(\frac{2p^2+2t-2p-1}{1-px} + \frac{2p^2-2px}{(1-px)^2}\right),\ |x| < \frac{1}{p},\ \frac{p-1}{2} \leq t \leq p-1.$$

定理33。对于定理27中的每个区间，序列 $p^{(k)}$-斐波那契数 $a_s = \mathcal{M}\left(\lambda\left(2r;(x_{(2s,k)}, x_{(s,k)}+l)\right)\right)$ 的生成函数如下：

1. 若 $a_s = \frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\left(2(s-1)p^{k+1} - 2(s-k) + 3\right)$ 则

$$F(x) = \frac{p-1}{2}\left(\frac{2kp^{k+1}-1}{1-px} + \frac{2p^{k+1}-2px}{(1-px)^2}\right),\ |x| < \frac{1}{p}.$$

2. (a) 如果 $a_s = b_{s,t,i}$

$$= \frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\left(2(s-1)p^{k+1} - 2(s-k) + 3 + 2t\sum_{j=0}^{k-1} p^j - 2\sum_{\mu=0}^{k-i-2} p^{\mu}\right)$$

then

$$F_{t,i}(x)=\frac{p-1}{2}\left(\Big(2t\sum_{j=0}^{k-1}p^j-2\sum_{\mu=0}^{k-i-2}p^\mu+2kp^{k+1}-1\Big)\frac{1}{1-px}+\frac{2p^{k+1}-2px}{(1-px)^2}\right)$$

其中 $|x|<\frac{1}{p}$, $1\le t\le\frac{p-1}{2}$ 和 $0\le i\le k-2$。

(b) 若 $a_s=b_{s,t,i}$

$$=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\left(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3+2(t-p)\sum_{j=0}^{k-1}p^j-2\sum_{\mu=0}^{k-i-2}p^\mu\right)$$

那么 $F_{t,i}(x)$ 是

$$\frac{p-1}{2}\left(\Big(2(t-p)\sum_{j=0}^{k-1}p^j-2\sum_{\mu=0}^{k-i-2}p^\mu+2kp^{k+1}-1\Big)\frac{1}{1-px}+\frac{2(p^{k+1}-px)}{(1-px)^2}\right)$$

其中 $|x|<\frac{1}{p}$, $\frac{p+1}{2}\le t\le p-1$ 和 $0\le i\le k-2$。

3. (a) 若 $a_s=b_{s,t}=\underbrace{p^{s-2-k}\binom{p-1}{2}}\left(2)(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3+2t\sum_{j=0}^{k-1}p^j\right)$ 那么

$$F_t(x)=\frac{p-1}{2}\left(\Big(2t\sum_{j=0}^{k-1}p^j+2kp^{k+1}-1\Big)\frac{1}{1-px}+\frac{2p^{k+1}-2px}{(1-px)^2}\right),\ |x|<\frac{1}{p}$$

其中 $1\le t\le\frac{p-3}{2}$。

(b) If $a_s=b_{s,t}=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\left(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3+(2t-2p)\sum_{j=0}^{k-1}p^j\right)$, *then*

$$F_t(x)=\frac{p-1}{2}\left(\Big((2t-2p)\sum_{j=0}^{k-1}p^j+2kp^{k+1}-1\Big)\frac{1}{1-px}+\frac{2p^{k+1}-2px}{(1-px)^2}\right),$$

其中 $|x|<\frac{1}{p}$ 和 $\frac{p+1}{2}\le t\le p-1$。

4. 若 $a_s=b_{s,i'}$

$$=\frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\Big(2(s-1)p^{k+1}-2(s-k)+3-p^k-2\sum_{\theta=1}^{k-1}p^\theta+2\sum_{\mu=k-i'+1}^{k}p^\mu-1\Big),$$

则 $F_{i'}(x)$ 为

$$= \frac{p-1}{2}\left(\left(2kp^{k+1} - p^k - 2\sum_{\theta=1}^{k-1} p^\theta + 2\sum_{\mu=k-i'+1}^{k} p^\mu - 2\right)\frac{1}{1-px} + \frac{2(p^{k+1}-px)}{(1-px)^2}\right)$$

其中 $1 \le i' \le k-1$ 和 $|x| < \frac{1}{p}$。

5. *If* $a_s = \frac{p^{s-2-k}(p-1)}{2}\left(2(s-1)p^{k+1} - 2(s-k) + 3 - p^k - 2\sum_{\theta=1}^{k-1} p^\theta - 1\right)$ *then*

$$F(x) = \frac{p-1}{2}\left(\left(2kp^{k+1} - 2 - p^k - 2\sum_{\theta=1}^{k-1} p^\theta\right)\frac{1}{1-px} + \frac{2p^{k+1}-2px}{(1-px)^2}\right),\ |x| < \frac{1}{p}$$

注 34。 定理 31、32 和 33 的证明可通过直接计算得出，既可以手工完成，也可以使用 Maple 或 Sage 等数学软件。由于计算过程属于标准方法，故省略细节。

7 致谢

第三作者感谢印度科学与工业研究理事会（CSIR）以 CSIR-SRF 的形式提供的经费支持（档案编号：09/0115(16295)/2023-EMR-I），使本研究得以开展。

参考文献

[1] Abdullah Alsoboh 等，探索几何函数论中的 q-斐波那契数：单叶性与壳状星形曲线，数学，13(2025)，第1294期。[2] K. Gueth 和 L. Szalay，带权 k-斐波那契数的丢番图方程，*Sã*<style id='12>o Paulo 数学科学杂志，18(2024)，48–62。[3] Miriam Farber 和 Abraham Berman，关于斐波那契数与矩阵理论之间联系的研究，《*Involve*》数学杂志，8 (2014)，第3期，491–501。[4] B. E. Sagan，对称群表示、组合算法与对称函数，第二版，Springer，2001。[5] P. Susanth 和 P. Sunitha，斐波那契数的权威应用：一项研究，《国际数学及其应用杂志》，2(2014)，第4期，83–94。

[6] A. Tamilselvi 和 D. Hepsi，群代数KG_r 和 KSG_r的矩阵单位研究，《印度科学与技术杂志》，17(2024)，第48期，5119–5129。

[7] M. Parvathi、A. Tamilselvi 和 D. Hepsi，群代数 $KG_r$and KSG_r的 p-杨表、R-S对应及稀疏柯西恒等式研究（已投稿）。

2020 数学学科分类号：主要分类 05E10；次要分类 05A15、05E16。关键词：Bratteli图、钩分拆、逆序、下降、斐波那契数。（涉及数列 A391520。）