arXiv:2603.04248v1 [cond-mat.mes-hall] 4 Mar 2026

人工平带系统的进展：分类、扰动与应用

C. Danieli[a] 和 S. Flach[b]

[a] 意大利国家研究委员会复杂系统研究所（ISC-CNR），Via dei Taurini 19，罗马，00185，意大利；萨莱诺大学“E.R. Caianiello”物理系，Via Giovanni Paolo II, 132，I-84084 菲夏诺（SA），意大利

[b]复杂系统理论物理中心，基础科学研究院，大田 34126，韩国；韩国科学技术院（UST）基础科学项目，大田 34113，韩国；新西兰高等研究院（NZIAS）理论化学与物理中心，梅西大学奥尔巴尼校区，奥克兰 0745，新西兰。

文章历史
编制于2026年3月5日

摘要
我们重点介绍人工平带系统研究的最新进展，着眼于三个方面。首先，我们讨论单粒子平带物理；随着各种平带生成器的设计，这一领域取得了长足进展。这些生成器以紧致局域态为基础，对平带进行分类；紧致局域态是构成平带的基本单元。与此相关的一项进展，是对平带投影算符进行完整的实空间描述。接下来，我们回顾平带微扰研究，这些研究为理解无序的影响，以及更重要的多体相互作用与平带物理之间错综复杂的相互作用，提供了新的见解。最后，我们概述了在各种物理平台上不断增多的平带实验实现。

关键词
紧致局域态 实空间投影
算符 多体相互作用 跨蒙
特量子比特 声学超材料

联系方式：Carlo Danieli（作者）– 邮箱：carlo.danieli@cnr.it
联系方式：Sergej Flach（作者）– 邮箱：sflach@ibs.re.kr

1. 引言

具有无色散能带（即平带（FB））的周期晶格，已成为现代凝聚态物理和波动物理学的基石。在具有有限程跃迁且能带数有限的晶格中，平带由大量简并紧致局域态（CLS）支撑。这些态源于相消波干涉，这一现象普遍存在于所有物理平带系统中，也使紧致局域态对微扰高度敏感。平带的吸引力很大程度上源于带宽为零意味着动能为零，因此即使微弱的微扰也会表现出强烈的非微扰效应。人们持续探索新颖且非常规的输运相——它们往往在平带受到微扰时涌现——这一直是近年来该领域研究热潮的重要驱动力。

Leykam 等人发表于 Advances in Physics: X 的综述 [1] 全面概述了截至 2018 年的平带研究。当时，大多数研究聚焦于少数几种典型模型，例如 Lieb 晶格、菱形链和笼目晶格。这些系统被用作试验平台，以探索微扰（如无序或相互作用）的影响，并借助光子波导和激子-极化激元凝聚体实现平带的实验构造 [1, 2]。然而，尽管已有若干开创性尝试致力于开发分类方案和生成元构造，对平带进行完整且系统的代数分类仍基本未得到探索。因此，后续关于平带晶格中的投影算符、微扰和多体相互作用的研究仍处于起步阶段，有待进一步发展。

自 2018 年以来，该领域迅速发展，相关进展可见文献 [3–5]。尤其是，光子学已成为平带研究中成果最丰硕的平台之一，这得益于其能够直接制造结构并精确控制参数 [4, 5]。值得注意的是，尽管平带最初是在凝聚态物理中提出的，例如用于研究多体海森堡自旋系统的奇异基态 [6]，这一领域仍取得了上述发展。

这篇简短综述旨在更新并扩展文献 [1]，总结自 2018 年以来平带物理取得的主要进展，重点关注：（i）分类方案；（ii）多体相互作用机制；以及（iii）光子学以外各种物理平台上的实验实现。我们还将讨论这一快速发展的领域中涌现的方向和未来展望。

2. 分类、生成与投影

平带晶格模型源于对紧束缚网络的精细调控。它们在这一参数空间中构成连续的参数族，而非彼此孤立的点。关键的控制参数仅仅是紧致局域态（CLS）的振幅。这组有限的振幅定义了 CLS 集合的代数结构，决定了平带类别，并支配由此产生的物理性质 [5]。

紧致局域态集的分类基于两个标准：正交性和完备性。一般情况下，选择紧致局域态振幅通常会得到线性无关但非正交的集合。进一步微调紧致局域态振幅，可使该集合正交。此类包括一个著名的情形：全能带平带晶格——例如 Creutz 梯子——其所有能带均无色散，输运也被完全抑制 [1]。另一种做法是对紧致局域态振幅进行不同的微调，使

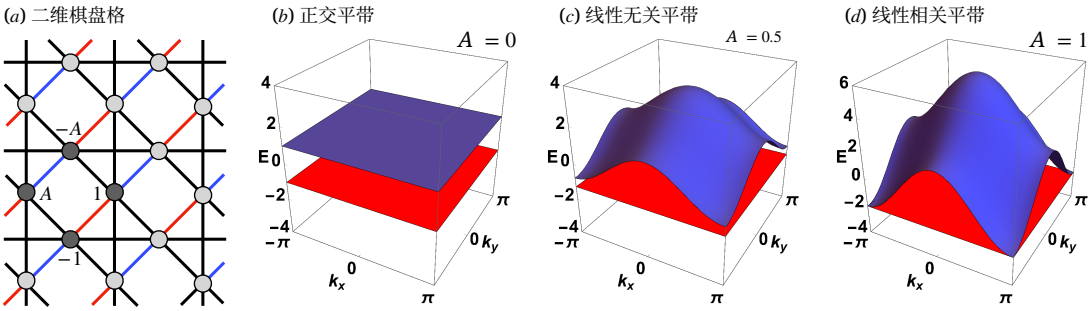


图 1. (a) 广义棋盘格晶格。跃迁强度分别为 1（红线）、 A （黑线）和 A^2 （蓝线）。紧致局域态振幅以黑色标示。(b) 在 $A = 0$ 条件下实现于 $E = \pm 1$ 的正交平带。(c) 在 $A = 0.5$ 条件下实现于 $E = -5/4$ 的线性无关平带（红色），与色散带（蓝色）之间存在能隙。(d) 在 $A = 1$ 条件下实现于 $E = -2$ 的线性相关平带（红色），与色散带（蓝色）相接触。本图参考了 [7] 中呈现的部分结果。

该集合线性相关。这一类称为奇异平带类 [3], ，仅存在于 $d \geq 2$ 维度，并且必然具有平带与一个或多个色散能带之间的能带接触。三类情况都可能共存于同一由紧致局域态控制的平带晶格参数族中，并可通过调节紧致局域态振幅加以实现，如图 1 所示的二维棋盘格晶格。

平带类别对实空间和动量空间中的晶格特性都有决定性影响。在实空间中，平带投影算符是分析晶格微扰的重要工具，其空间衰减取决于紧致局域态类别 [7]。正交平带产生严格紧致的投影算符，而非正交平带则因紧致局域态之间存在重叠而产生非紧致投影算符。衰减轮廓也反映了完备性：线性无关平带呈指数衰减并带有代数前因子，而线性相关（奇异）平带则呈现代数衰减 [7]。在动量空间中，正交平带的能量可在整个谱范围内调节。线性无关平带必然与所有色散带之间存在能隙，而线性相关平带则至少在一个或多个点与某条色散带相接触。这些谱差异见图 1(c、d)。

近期一系列基于紧致局域态的平带生成器已在文献 [5] 中提出并讨论。奇异平带这一特殊情形促使人们开发专用的奇异平带生成器 [8, 9], ，并特别关注多重能带接触点 [10]。平带投影算符 [7] 和奇异平带生成器 [8–10] 的研究有一个共同的关键要素：紧致局域态在动量空间中的类比，即未归一化的布洛赫紧致局域态（BCLS），以及其关键的代数结构。因此，可以推导出优雅而简洁的参数化平带族，并将其用于进一步研究。图 1 展示了一个改编自文献 [7] 的新例子。研究考虑了一个广义棋盘格晶格 $2d$，定义了由四个格点组成的紧致局域态，其中两个格点的振幅固定为 1，另外两个格点的振幅 $0 \leq A \leq 1$ 可调；随后计算 BCLS 并应用生成器，得到一个可调平带族：除 $A = 0$ （正交）和 $A = 1$ （奇异）外，对于所有 A ，该平带族均线性无关。因此，尽管人们对平带生成的理解已取得长足进展 [1, 5], ，这一领域仍在不断发展，催生出新颖的工具和引人瞩目的新方向——例如，近期提出的一种用于 $d = 2$ 平带晶格 [11] 的基于 Metropolis 方法的生成器。

即使对于平带，布洛赫本征态也会随着人在布里渊区中移动而变化。这些变化量化了量子几何张量 [12]。它的实部——

量子度规——定义了量子平带态之间的距离。其中一个最深远的结果是，超流刚度——它决定了超导体的转变温度——在平带中并非为零，而是受到量子度规的限制。

3. 多体相互作用

系统地参数化单粒子平带族，是研究微扰影响以及精细调节受微扰晶格以呈现预期响应的有力工具。最重要的是，平带投影算符性质 [7]能够定量和定性地揭示外部微扰的作用。典型例子包括随机无序或关联无序，以及经典非线性相互作用；它们会引发多种现象，例如反安德森（金属–绝缘体）转变、电场诱导的布洛赫振荡，以及由克尔非线性产生的紧致呼吸子和笼化效应——这些主题在文献 [5] 中针对光子学应用作了详细介绍。

历史上，单粒子紧致局域态一直是相互作用量子系统中奇异多体态的构建基元，例如海森堡自旋晶格 [6]。通过构造这类态，可以深入认识受挫几何结构中量子海森堡反铁磁体的热力学性质，例如 Kagome 双层晶格 [13]。近期进展包括对一系列全新量子材料的理论和实验研究，这些材料统称为 Kagome 金属 [14]。

非平衡量子现象同样源于FB晶格中的多体相互作用。两个突出例子是量子多体疤痕和希尔伯特空间碎裂。量子疤痕是以低纠缠为特征的非热化多体态，已在若干相互作用FB晶格中被观测到 [15–18]。例如，图2(a)所示的相互作用费米子系统在五个不同能量处呈现疤痕态。当系统初始化为反铁磁N´eel态（此时沿晶格水平子链每第三个橙色格点上有一个粒子）时，返回概率表现出相干振荡，而非迅速衰减至零 [15]。

如果平带源于对单粒子部分的精细调节，人们或许会问：为何不同样精细调节相互作用部分，以获得新的奇异量子相？这种多体精细调节可以产生一组广延的局域对易算符，从而将希尔伯特空间碎裂为互不连通的子扇区 [19–22]。这一机制可以完全抑制沿晶格的电荷输运——这一现象被称为多体平带局域化 [19–21]。图2(b)展示了两个呈现希尔伯特空间碎裂的代表性系统。在上方情形中，碎裂源于经过精细调节的ABF单粒子晶格，以及由彩色方块标示的、相邻格点之间精心设计的相互作用 [19, 20]; 在下方情形中，希尔伯特空间的碎裂源于在具有一条平带和一条色散带的 $2d$ 十字缝单粒子模型上取硬核玻色子极限（无穷大相互作用强度）。该图展示了由许多紧致局域态构成的环状激发，它们对困在内部的额外硬核玻色子起到不可穿透的栅栏作用 [21]。

进一步的研究涵盖了从传统领域到新兴方向的广泛主题，包括FB晶格中的超导 [24, 25]、阿哈罗诺夫-玻姆笼中相互作用玻色子的配对输运 [26] ，以及奇异平带中的反常分数量子霍尔效应 [23]。最后一个例子见图2(c)，展示了受磁场作用的Dice晶格。这一模型可通过精心设计的势景观实现，

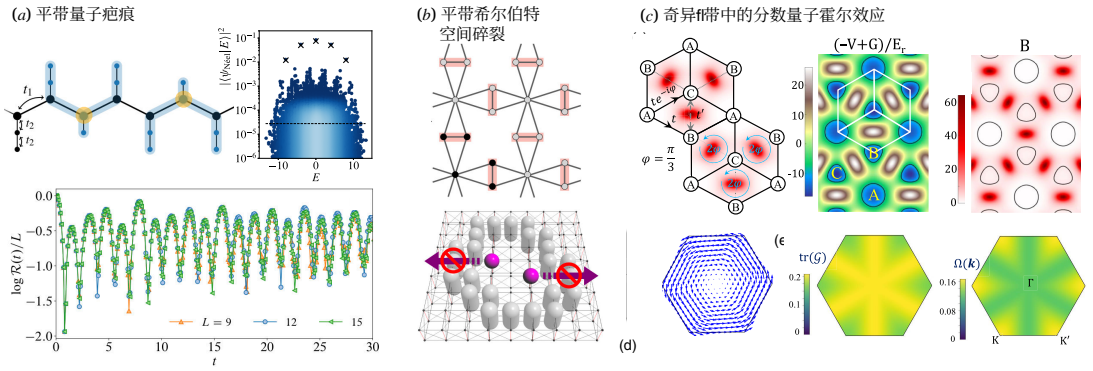


图 2. (a) 具有平带 $E = \pm t_2$ 的八带梳状结构。将本征态投影到 N´eel 态上，并在 $E = 0$、$\pm 2t_2$、$\pm 4t_2$ 处用十字标出疤痕。N´eel 态激发的返回概率 $\mathcal{R}$ 。经许可转载自参考文献 [15]。(b) 支持相互作用玻色子（上）和硬核玻色子（下）希尔伯特空间碎裂的两个多体平带晶格示例。经许可转载自参考文献 [20, 21]。(c) 上：具有赝磁场的 Dice晶格（红色）；一种可能实现方案中的势景观和赝磁场。下：奇异平带的贝里联络、贝里曲率以及量子度规张量的迹。经许可转载自参考文献 [23]。

其具有奇异平带，以及非平凡的贝里联络、曲率和量子度规张量，这些共同促成了分数量子霍尔效应。

4. 实验应用

长期以来，光波导阵列一直被视为实验研究平带现象的理想平台。事实上，飞秒激光写入所具备的精确性，使研究者能够精准设计数量不断增加、复杂程度日益提高的各类平带晶格，其中也包括具有多种微扰的晶格，例如 外场、周期驱动、相互作用 [2, 4, 5]。尽管如此，近期显著的技术进步已推动其他实验平台崭露头角，并成为平带研究的前沿平台。

一个新的例子是利用电感和电容构成的电学平带晶格实现紧致局域态。在一维情况下，这些电路可以排列成正交平带（菱形晶格）和线性无关平带（stub晶格），其紧致局域态在非线性区可延续为精确解 [27]。值得注意的是，这种方法具有很强的灵活性：菱形链中的电路可以重新配置，以模拟每个元胞内的 π 磁通，从而产生阿哈罗诺夫-玻姆笼效应 [28]。此外，这种方法还可扩展至构造 $2d$ 晶格，例如：（i）具有拓扑自旋纹理和量子化 π-贝里相位 [29]的边界平带；（ii）模拟两个关联玻色子在 $1d$ 阿哈罗诺夫-玻姆笼 [30]中的相互作用诱导平带局域化现象。

声学系统也为平带提供了一个极具吸引力的平台。例如，在声板中刻制的奇异平带晶格里实现紧致局域态的实验 [33]，以及通过精心组装带有磁耦合的圆盘，在声子超材料中构建六边形平带晶格 [34]。值得注意的是，在后一个例子中，还可以进一步精细调节磁耦合，使所有能带都变平。此外，声学系统还提供了实现拓扑现象的途径——例如，最初在文献 [35]中针对光子晶格提出的平带系统中的非阿贝尔索利斯泵浦。如图3(a)所示，非阿贝尔泵浦可以通过一组调制声波导来实现，这些波导排列成

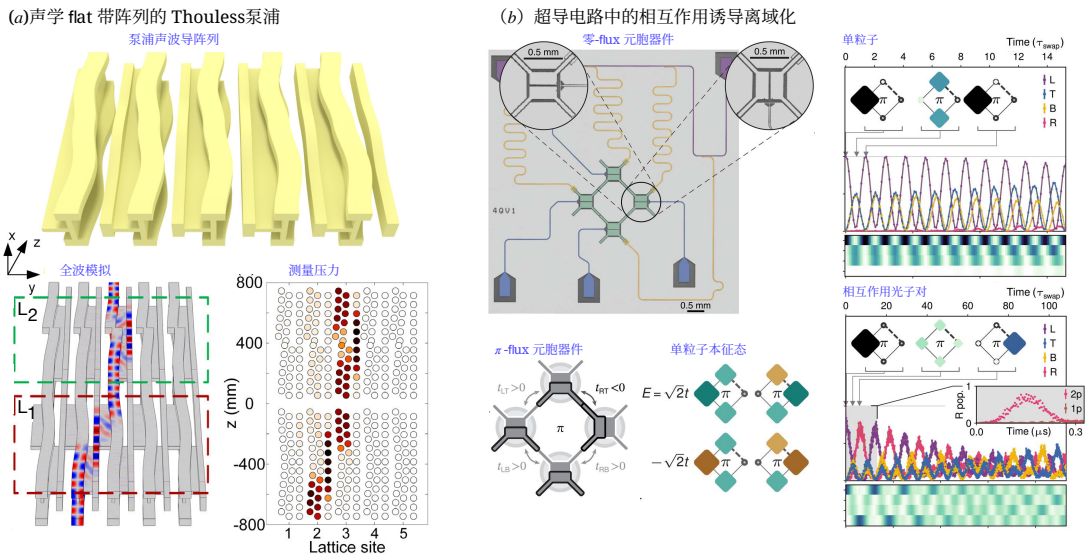


图 3. (a) 声学平台。上：通过泵浦回路驱动的声波导阵列构型。下：模拟的声波传播（左）以及沿波导离散位置测得的压力。经许可转载自参考文献 [31]。(b) 超导传输子量子比特平台。左上：零磁通方格，放大的量子比特取向分别形成零磁通（左）和 π 磁通（右）方格。左下： π 磁通方格的详细跃迁轮廓（左）和单粒子本征基（右）。右：单光子粒子（上）和两个相互作用光子粒子（下）情况下，随时间变化的方格中不同量子比特的平均布居。经许可转载自参考文献 [32]。

广义一维 Lieb 晶格，并具有两个零能平带 [31]。这一现象的典型特征是紧致局域态在网络中位移和重排，图中通过数值模拟（左下）和实验（右下）展示了这一过程。

正如这些实验结果以及前几节的结果所表明的，全能带平坦晶格引起了广泛关注。事实上，其完全淬灭的动能能够促成超越传统平带的奇异现象。例如，这类系统中完全不存在单粒子输运。然而，Hubbard 相互作用会诱导双粒子成对输运，从而逆转这一效应 [1, 16, 26]。近期，研究人员已利用光学阵列中的里德堡原子 [36], 、由超冷 ^{87}Rb 原子构成的人工晶格 [37], ，以及超导 transmon 量子比特 [32]，验证了这种输运完全停滞的破缺。图 3(b) 展示了最后一种情况：左侧显示由四个量子比特中的一个经过适当取向而形成的 π 磁通菱形方格。右上图展示了单粒子笼禁：粒子从左侧量子比特出发，经过一段时间后仍不会到达右侧量子比特。右下图则展示了两个相互作用光子所导致的笼禁破缺。

这些实验表明，平带领域正迅速发展，并从基础研究迈向实用技术。近期，平带已被用于利用硅波导集成超表面 [38] 和超紧凑腔 [39]实现激光。另一个令人振奋的方向是通过光电探测观察纳米片中的拓扑平带，这一成果为有机光电探测器 [40]的新型材料平台开辟了道路。该领域还涌现出大量关于Kagome金属 [41–43], 的新发现，包括异常磁性 [44], 、高阶拓扑相 [45] 以及相干电荷输运现象 [46]。这些发现表明，这是一个值得关注的领域，可用于设计不同寻常的

量子态和新颖现象，并有望在材料科学中实现深远应用。更多内容请参阅以下综述 [47] 。

5. 结论与展望

过去十年间，平带（FB）物理已从一系列彼此孤立的模型研究，发展为一个连贯且迅速拓展的前沿领域，连接起凝聚态物理、光子学、声学、电路与量子技术。人们认识到，紧致局域态（CLS）构成了所有平带系统的普适基石，这一认识促成了统一的代数框架，将晶格几何、干涉图样与谱性质联系起来。这一范式转变——从分析特定晶格转向理解CLS族的代数结构与分类——为跨越不同维度和物理平台构建、操控和精细调控平带开辟了系统化途径。

将平带分为正交、线性无关和奇异几类，并结合相应的投影算符形式主义，如今已清晰揭示实空间特征与动量空间特征之间的对应关系。这种结构性认识阐明了代数局域化与指数局域化、能带接触以及可调简并等现象。此外，解析和数值平带生成器的发展，使平带设计从一门艺术转变为算法化流程。这些工具不仅简化了参数空间的探索，也为研究微扰、非线性和无序奠定了重要基础。受机器启发的方法（如Metropolis类算法）的出现，标志着在更高维且具有丰富拓扑结构的系统中自动发现平带的时代即将开启。

同样具有变革意义的，是对平带晶格中多体效应的探索。平带通过抑制动能，放大了相互作用的作用，从而产生丰富的非微扰现象：量子疤痕、希尔伯特空间碎片化、无无序的多体局域化，以及原本受限于笼状结构的系统中的相互作用诱导输运。单粒子精细调控与多体精细调控之间的概念对称性，展现了平带如何成为孕育奇异量子相的沃土。这些进展关联着受限量子系统中的遍历性、热化以及非平庸关联如何涌现等基本问题，将平带物理与更广阔的非平衡量子动力学领域联系起来。

在实验方面，显著进展拓展了可实现平带平台的范围。光子波导阵列仍是精确控制和直观呈现紧致局域态动力学的标杆平台；与此同时，声学超材料、电路、超导量子比特和超冷原子等互补平台也已展现出同等甚至更强的可调控性。如今，实验已能常规探测平带或奇异能带中的相互作用驱动离域、拓扑泵浦和分数量子霍尔效应。这些多样化实现方式的汇聚，确立了平带作为一种普适主题的地位，而非局限于特定平台的奇特现象。重要的是，理论与实验之间的交叉融合加快了发现步伐，甚至在Kagome金属等关联电子材料中揭示了平带特征。

展望未来，平带研究有望迈入一个新的综合发展阶段。未来方向包括设计高阶拓扑平带、以可控方式引入自旋轨道耦合，以及探索平带性与增益和损耗相互竞争的非平衡态和驱动耗散机制。

将代数设计原理与实验可扩展性相结合，不仅有望加深理论理解，还能带来切实应用——从稳健的光子电路到可控相互作用的定制量子物质。作为统一描述局域化、拓扑和关联的框架，平带物理持续展现出优美的数学结构如何指引并启发人们探索新颖的物理现实。

致谢

我们感谢 Alexei Andreanov 和 Yeongjun Kim 富有成效的讨论。C.D. 感谢韩国大田的基础科学研究院复杂系统理论物理中心在本研究部分完成期间给予的热情接待。

利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

经费

S.F. 获得基础科学研究院通过 ProjectCode 项目（编号：IBS- R024-D1）的资助。C.D. 获得 PNRR MUR 项目 CN 00000013-ICSC 以及 PNRR MUR 项目 PE0000023-NQSTI - TOPQIN 的资助。

参考文献

[1]D. Leykam, A. Andreanov 和 S. Flach，《人工平带系统：从晶格模型到实验》，Adv. Phys.: X 3（2018），第 1473052 页，网址：https://doi.org/10.1080/23746149.2018.1473052。[2] D. Leykam 和 S. Flach，《观点：光子平带》，APL Photonics 3（2018），第 070901 页，网址：https://doi.org/10.1063/1.5034365。[3] J.W. Rhim 和 B.J. Yang，《奇异平带》，Advances in Physics: X 6（2021），第 1901606 页，网址：https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1901606。[4] R. Poblete，《光子平带动力学》，Advances in Physics: X 6（2021），第 1878057 页，网址：https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057。[5]C. Danieli、A. Andreanov、D. Leykam 和 S. Flach，《平带精细调控及其光子学应用》，Nanophotonics 13（2024），第 3925–3944 页，网址：https://doi.org/10.1515/nanoph-2024-0135。[6]O. Derzhko、J. Richter 和 M. Maksymenko，《强关联平带系统：从海森堡自旋到哈伯德电子的途径》，Int. J. Mod. Phys. B 29（2015），第 1530007 页，网址：http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217979215300078。[7] Y. Kim、S. Flach 和 A. Andreanov，《紧致局域态所对应的平带投影算符在实空间中的衰减》，arXiv:2510.17258（2025），网址：https://arxiv.org/abs/2510.17258。[8] J.W. Rhim 和 B.J. Yang，《依据布洛赫波函数能带交叉奇异性的平带分类》，《物理评论B》99（2019），第 045107 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.045107。

[9] Y. Hwang、J.W. Rhim 和 B.J. Yang，《基于波函数奇异性构造有能带交叉和无能带交叉的平带的一般方法》，《物理评论B》104（2021），第 085144 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.085144。[10]A. Graf 和 F. Pi´echon，《设计具有可调多重能带接触点的平带紧束缚模型》，《物理评论B》104（2021），第 195128 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.195128。[11]H.T. Li、T.Z. Ji、R.G. Yan、W.L. Fan、Z.X. Zhang、L. Sun、B.F. Miao、G. Chen、X.G. Wan 和 H.F. Ding，《在二维晶格中构造平带的一般方法》，Phys. Rev. Lett. 134（2025），第 076402 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.134.076402。[12] J. Yu、B.A. Bernevig、R. Queiroz、E. Rossi、P. Torma 和 B.J. Yang，《量子材料中的量子几何》，npj Quantum Materials 10（2025），第 101 页，网址：https://doi.org/10.1038/s41535-025-00801-3。[13] D. Yaremchuk、T. Hutak、V. Baliha、T. Krokhmalskii、O. Derzhko、J. Schnack 和 J. Richter，《受挫笼目晶格双层量子海森堡反铁磁体》，Phys.Rev. B 112（2025），第 024402 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/1rzb-s69p。[14] P. Negi、K. Medhi、A. Pancholi 和 S. Roychowdhury，《磁性笼目材料：连接基本性质与拓扑量子应用》，Mater. Horiz. 12（2025），第 4510–4544 页，网址：http://dx.doi.org/10.1039/D5MH00120J。[15] O. Hart、G. De Tomasi 和 C. Castelnovo，《从紧致局域态到随机量子梳中的多体疤痕态》，Phys. Rev. Research 2（2020），第 043267 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.043267。[16] C. Danieli、A. Andreanov、T. Mithun 和 S. Flach，《相互作用多体全平带晶格中的量子笼困》，《物理评论B》104（2021），第 085132 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.085132。[17] Y. Kuno、T. Mizoguchi 和 Y. Hatsugai，《平带系统中的多重量子疤痕态与涌现慢热化》，《物理评论B》104（2021），第 085130 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.085130。[18]G. Pelegrí、S. Flannigan 和 A.J. Daley，《*Creutz* 梯子中的少体束缚拓扑态和平带态》，《物理评论B》109（2024），第 235412 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.109.235412。[19]Y. Kuno、T. Orito 和 I. Ichinose，《*Creutz* 梯子中的平带多体局域化与遍历性破缺》，New J. Phys. 22（2020），第 013032 页，网址：https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab6352。[20] C. Danieli、A. Andreanov 和 S. Flach，《多体平带局域化》，《物理评论B》102（2020），第 041116 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.041116。[21]S. Lee、A. Andreanov、T. Sedrakyan 和 S. Flach，《在平带晶格中俘获硬核玻色子》，《物理评论B》109（2024），第 245137 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.109.245137。[22]E. Nicolau、A.M. Marques、R.G. Dias 和 V. Ahufinger，《平带诱导的局域希尔伯特空间碎裂》，《物理评论B》108（2023），第 205104 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.108.205104。[23] W. Yang、D. Zhai、T. Tan、F.R. Fan、Z. Lin 和 W. Yao，《奇异平带中的分数量子反常霍尔效应》，Phys. Rev. Lett. 134（2025），第 196501 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.134.196501。[24] G. Bouzerar 和 M. Thumin，《二维*Lieb*晶格模型中平带超导对无序的稳健性》，《物理评论B》111（2025），第 L020506 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.111.L020506。[25]M. Teeriaho、V.V. Linho、K. Swaminathan 和 S. Peotta，《平带超导体一维模型中遍历与非遍历行为共存及能级间距统计》，Phys. Rev. Res. 7（2025），第 013318 页，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.7.013318。[26]A.R. Kolovsky、P.S. Muraev 和 S. Flach，《阿哈罗诺夫–玻姆笼中的相互作用玻色子电导转变》，Phys. Rev. A 108（2023），第 L010201 页，网址：

https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.108.L010201.[27]C. Chase-Mayoral, L.Q. English, N. Lape, Y. Kim, S. Lee, A. Andreanov, S. Flach, and P.G. Kevrekidis, 电路平带晶格中的紧致局域态，《物理评论B》109 (2024), p. 075430，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.109.075430。[28] N. Lape, S. Diubenkov, L. English, P. Kevrekidis, A. Andreanov, Y. Kim, and S. Flach,全能带平坦电学晶格的实现与表征，arXiv:2508.13571 (2025年)，网址：https://arxiv.org/abs/2508.13571。[29]Y. Biao, Z. Yan, and R. Yu, 拓扑自旋纹理边界平带的实验观测，《物理评论B》110 (2024), p. L241110，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.110.L241110。[30]X. Zhou, W. Zhang, H. Sun, and X. Zhang, 电路网络中有效强相互作用诱导的平带局域化与拓扑边缘态的观测，《物理评论B》107 (2023), p. 035152，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.107.035152。[31]O. You, S. Liang, B. Xie, W. Gao, W. Ye, J. Zhu, and S. Zhang, 非阿贝尔托姆泵的观测，Phys. Rev. Lett. 128 (2022), p. 244302，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.244302。[32] J.G. Martinez, C.S. Chiu, B.M. Smitham, and A.A. Houck,光子的平带局域化与相互作用诱导的离域化，《科学进展》9 (2023), p. eadj7195，网址：https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.adj7195。[33] E. Riva, F. Bellinzoni, and F. Braghin, 通过奇异平带工程构造紧致局域模式，实现稳健声传输，《通讯物理》8 (2025年), p. 255，网址：https://doi.org/10.1038/s42005-025-02158-2。[34]M.M. Samak and O.R. Bilal, 全平带声子超材料的直接观测，Phys. Rev. Lett. 133 (2024), p. 266101，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.133.266101。[35]V. Brosco, L. Pilozzi, R. Fazio, and C. Conti, 光子晶格中的非阿贝尔托姆泵，Phys. Rev. A 103 (2021), p. 063518，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.063518。[36] T. Chen, C. Huang, I. Velkovsky, T. Ozawa, H. Price, J.P. Covey, and B. Gadway,里德伯平带晶格中阿哈罗诺夫–玻姆笼困的相互作用驱动破缺，Nature Physics 21 (2025年), pp. 221–227，网址：https://doi.org/10.1038/s41567-024- 02714-7。[37] H. Li, Q. Liang, Z. Dong, H. Wang, W. Yi, J.S. Pan, and B. Yan, 超冷原子平带晶格中拓扑手性输运的工程调控，《光：科学与应用》14 (2025年), p. 326，网址：https://doi.org/10.1038/s41377-025-02025-3。[38] S. Eyvazi, E.A. Mamonov, R. Heilmann, J. Cuerda, and P. Torma, 硅波导集成超表面中的平带激光，《ACS光子学》12 (2025年), pp.1570–1578，网址：https://doi.org/10.1021/acsphotonics.4c02332。[39] J. Cui, S. Han, B. Zhu, C. Wang, Y. Chua, Q. Wang, L. Li, A.G. Davies, E.H. Linfield, and Q.J. Wang, 超紧凑多束缚态辅助平带激光器，《自然·光子学》19 (2025年), pp. 643–649，网址：https://doi.org/10.1038/s41566-025-01665-6。[40]Y. Shi, J. Zhu, X. Wang, Y. Wang, Q. Song, L. Chen, Y. Song, W. Wu, and T. Guo, 利用光电探测表征锡酞菁纳米片中的拓扑平带，《ACS光子学》12 (2025年), pp. 3412–3420，网址：https://doi.org/10.1021/acsphotonics.4c02491。[41] S. Geng, X. Wang, R. Guo, C. Qiu, F. Chen, Q. Wang, K. Li, P. Hao, H. Liang, Y. Huang,等,层状电子化物 *YCl* 中费米能级处骰子晶格平带的实验实现，arXiv:2508.21311 (2025年)，网址：https://arxiv.org/abs/2508.21311。[42] D. Oh, A. Hampel, J.P. Wakefield, P. Moen, S. Smit, X. Luo, M. Zonno, S. Gorovikov, M. Leandersson, C. Polley,等,受挫尖晶石氧化物中的洪德平带，arXiv:2502.07234 (2025年)，网址：https://arxiv.org/abs/2502.07234。[43] X. Luo, L. Zullo, S. Patel, D. Oh, Q. Song, A.K. Kundu, A. Rajapitamahuni, E. Vescovo,

N. Olszowska, R. Kurleto, 等,过渡金属氧氯化物中的稳健轨道选择性平带, arXiv:2510.15080 (2025年)，网址：https://arxiv.org/abs/2510.15080。[44] S. Thomas, C. Kengle, W. Simeth, C.y. Lim, Z. Riedel, K. Allen, A. Schmidt, M. Ruf, S. Gim, J. Thompson, 等, 新型笼目材料 *uv6sn6* 中反常的*5f*磁性，npj Quantum Materials 10 (2025年), p. 66，网址：https://doi.org/10.1038/s41535-025- 00783-2。[45] Q. Lin, P. Zhou, X. Peng, and L. Sun, 氟化 *c3n* 中的自旋极化平带与二阶拓扑相，Applied Physics Letters 127 (2025年), p. 103103，网址：https://doi.org/10.1063/5.0279685。[46] C. Guo, K. Wang, L. Zhang, C. Putzke, D. Chen, M.R. van Delft, S. Wiedmann, F.F. Balakirev, R.D. McDonald, M.Gutierrez-Amigo, 等, 笼目晶体中的多体干涉，Nature (2025年), pp. 1–6, 网址：https://doi.org/10.1038/s41586-025-09659- 8。[47] D. Di Sante, T. Neupert, G. Sangiovanni, R. Thomale, R. Comin, J.G. Checkelsky, I. Zeljkovic, and S.D. Wilson, *Kagome*金属，《现代物理评论》98 (2026年), p. 015002，网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/1g9n-wm38。