arXiv:2603.04258v1 [math.DG] 4 Mar 2026

外在双共形热流及其光滑性

朴雄培

Abstract. 本文介绍了4维流形上（外蕴）双调和映射的共形热流，简称双共形热流（bi-CHF），并研究其性质。与其他调和映射的 CHF 以及正则化的 n-调和映射（分别为 CHF 和正则化 n-CHF）类似，我们证明了其整体光滑性，且不存在有限时奇点。

1. Introduction

设 (M,g) 和 (N,h) 是两个黎曼流形，且 $\dim\ M\ =\ 4$。（外蕴）双调和映射流是（外蕴）双能量的梯度流

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_M|\Delta f|_g^2dvol_g. \tag{1}$$

其欧拉-拉格朗日方程为

$$-\Delta^2 f+\Delta(A(df,df))-\langle\Delta f,\Delta P\rangle+2\nabla\langle\Delta f,\nabla P\rangle=0 \tag{2}$$

其中， A 是嵌入$(N,\ h)$的第二基本形式， $\hookrightarrow\mathbb{R}^L$ 而 P 是从 $\mathbb{R}^L$ 到 T_fN的正交投影。为简便起见，我们记

$$B=\Delta(A(df,df))-\langle\Delta f,\Delta P\rangle+2\nabla\langle\Delta f,\nabla P\rangle\perp T_fN. \tag{3}$$

因此，外蕴双调和映射方程变为

$$-\Delta^2 f\perp T_fN.$$

相应的梯度流方程变为

$$f_t=-\Delta^2 f+\Delta(A(df,df))-\langle\Delta f,\Delta P\rangle+2\nabla\langle\Delta f,\nabla P\rangle. \tag{4}$$

双调和映射被视为调和映射的推广，因为（外蕴）双能量可被视为狄利克雷能量在更高维度上的推广

$$E_1(f)=\frac{1}{2}\int_M|df|^2dvol_g. \tag{5}$$

请注意，广义化还有另一种形式，称为内禀双能量，其定义为

$$E_2(f)=\frac{1}{2}\int_M|\tau(f)|^2dvol_g \tag{6}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：58E20，53E99，35K91。

Key words and phrases. 双调和映射流，双共形热流，整体存在性，光滑解。

其中 $\tau(f) = \tau_g(f) \in T_f N$是 f的张力场。它的临界点称为（内禀）双调和映射。这里需要指出，外蕴双调和映射取决于嵌入，而内蕴双调和映射则不然。

关于双调和映射已有许多研究成果，包括Jiang [5], Chang-Wang- Yang [1], Wang [17], [18], [19], Lamm-Rivi`ere [8], Hornung-Moser [4], Laurain- Rivi` ere [10], Fardoun-Saliba [2], 等人的工作。由于双调和映射与调和映射及 n-调和映射一样，都是能量泛函的临界点，因此它们具有相似的性质。相应椭圆系统的热流也具有类似的对应关系。许多学者广泛研究了双调和热流，包括Lamm [7], [6], Moser [13], Wang [20], Hineman-Huang-Wang [3],Liu-Yin [11], Laurain-Lin [9], 等人。其中，Wang [20]证明了外蕴双调和映射流整体弱解的存在性，而Liu-Yin [11]则得到了有限时间奇点。在进一步假设条件下，也得到了整体光滑性：Lamm [6] 在目标流形具有非正曲率时证明了这一点，Lamm [7]则在初始能量较小时证明了这一点。

通过以适当方式改变定义域度量，出现了一种获得全局光滑解的新方法。Park [14] 研究了调和映射流的一种变体，它将该流与度量沿共形方向的演化结合起来，称为调和映射的共形热流（或简称共形热流或 CHF），其形式如下：

$$\begin{cases} f_t = & \tau_g(f) \\ u_t = & b|df|_g^2 - a \end{cases} \tag{7}$$

其中 a, b为足够大的正数常量，$\tau_g = \mathrm{tr}_g(\nabla^g df)$ 是相对于 g 的 f 的张力场，而 $g = g(x, t) = e^{2u(x,t)} g_0(x)$ 是 M 的时变度量，其共形因子为 u。共形因子 u 的演化方程旨在推迟任何有限时间泡化。得益于能量的共形不变性，CHF 具有许多与调和映射流相似的性质，包括 ε-正则性和能量递减。近期研究 [15]表明，CHF 中不会发生有限时间泡化。这一思想具有稳健性，可应用于另一类共形不变能量集中的几何流，即（正则化的） n-调和映射流，详见 [16]。

在这方面，我们寻求双调和映射流的类似变体，以克服有限时奇点。与调和映射方程不同，双调和映射方程并非完全共形不变——它仅在常数伸缩下不变。因此，我们不采用时变度量 $g = e^{2u} g_0$ 来建立演化方程，因为这样较为复杂。相反，我们采用较简单的形式建立方程，只乘以共形因子 e^{-4u}。记 g_0 为 M和 $u = u$（x, t）上的时不变度量： $M \times [0, T] \to \mathbb{R}$ 为共形因子。考虑如下方程组

$$\begin{cases} f_t & = e^{-4u} \left(-\Delta^2 f + \Delta(A(df, df)) - \langle \Delta f, \Delta P \rangle + 2\nabla \langle \Delta f, \nabla P \rangle \right) \\ u_t & = b e^{-4u} (|\nabla df|^2 + |df|^4) - a \end{cases} \tag{8}$$

关于 g_0，其初始条件为 $f(0) = f_0$： $M \to N \hookrightarrow \mathbb{R}^L$ 和 $u(0) = 0$。将此方程称为（外蕴）双共形热流（bi-CHF）。有时我们会使用其修正版，即将等式两边都乘以 e^{4u}。

注 1.1. 在 CHF 情形下， u的方程形式为 $u_t = b e_g(f) - a$，其中 $e_g(f)$ 是相对于 g 的能量密度，来自能量 $E(f) = \int e_g(f) dvol_g$。这

表明，对于双共形热流情形， u的方程应为 $u_t = b|\Delta_g f|^2 - a$或 $e^{4u}u_t = b|\Delta f|^2 - ae^{4u}$。但由于缺少对 $|df|^4$和 $|\nabla df|^2$的局部控制，我们改变了 u 的方程中的能量密度项，使度量能够作出适当响应：响应的不是 $|\Delta f|^2$集中的位置，而是 $|\nabla df|^2 + |df|^4$集中的位置。

注 1.2. 虽然我们在局部对 $|\nabla df|^2$和 $|df|^4$没有足够的先验控制，但我们对它们有整体控制。首先，通过分部积分， $\int_M |\nabla df|^2 = \int_M |\Delta f|^2$ 如常。由于我们假设 N 是紧致黎曼流形，且f： $M \to N$，我们可以假设 $\|f\|_{L^\infty} < \infty$。就此而言，并结合索伯列夫嵌入与椭圆正则性，我们有

$$\int_M |df|^4 \le C\left(\int_M |\Delta f|^2 + |f|^2\right)^2 \le C_1\left(\int_M |\Delta f|^2\right)^2 + C_2. \tag{9}$$

因此， $\int_M |df|^4$由能量 $E(f)$控制。

本文的主要定理如下。

定理1.3. 设 $f_0 \in W^{6,\,2}(M,\ N)$。则存在(8) 在 $M \times [0,\infty)$ 上的光滑解$(f,\ u)$，其初始条件为 $f(0) = f_0,\ u(0) = 0$。

在本文中，我们假设 $(N, h) \hookrightarrow \mathbb{R}^L$ 等距地，并且存在一个常数 C_N，使得 $\|A\|, \|DA\|, \|D^2A\|, \|P\|, \|\nabla P\|, \|\nabla^2 P\| \le C_N$。

2. 预备知识

本节回顾一些后续章节中需要用到的有用事实。在许多情况下，计算需要所谓的交换子恒等式。这些都是标准结果，可在许多文献中找到，例如参见 Lamm 和 Muller。

设 B 是 M 上的一个 (p, q) 张量，即 $(T^*M)^{\otimes p} \otimes (TM)^{\otimes q}$ 的光滑截面。设 $(x^1, \cdots, x^4)$ 是 $U \subset M$ 中的一个局部坐标。于是有

$$[\nabla_i, \nabla_j]B^{k_1\ldots k_q}_{\ell_1\ldots\ell_p} = \sum_{r=1}^{q} R^{k_r}_{ijm} B^{k_1\ldots k_{r-1} m k_{r+1}\ldots k_q}_{\ell_1\ldots\ell_p} + \sum_{s=1}^{p} R_{ij\ell_s m} B^{k_1\ldots k_q}_{\ell_1\ldots\ell_{s-1} m \ell_{s+1}\ldots\ell_p} \tag{10}$$

其中 R 是 M 的黎曼曲率张量。

我们可以沿着映射 f： $M \to N$ 对其进行延拓。结合嵌入$N \hookrightarrow \mathbb{R}^L$，我们只需考虑映射 f： $M \to \mathbb{R}^L$。M上的莱维-奇维塔联络以及 $\mathbb{R}^L$可以在 $f^*TN \hookrightarrow f^*T\mathbb{R}^L$及其更高阶张量幂上诱导联络，相应地，上述交换子恒等式仍然成立。

现在设 x^i 是 M 上的一个局部坐标，其中 $i = 1,\ \ldots,\ 4$，且 $\alpha = 1,\ \ldots,\ L$。为简便起见，我们记 $\nabla_i f^\alpha = f^\alpha_i,\ \frac{\partial}{\partial t} f^\alpha = f^\alpha_t$。这里我们列举几个后文中常用的恒等式。

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k f^\alpha = \nabla_j\nabla_i\nabla_k f^\alpha + R_{ijk\ell} f^\alpha_\ell. \tag{11}$$

在 $M \times [0,T]$ 上，$\frac{\partial}{\partial t}$ 按照通常意义在 $M \times [0,T]$ 上的所有丛中诱导出 ∇_t。因此，特别地，我们有

$$\nabla_i\nabla_j f^\alpha_t = \nabla_j\nabla_i f^\alpha_t \tag{12}$$

$$\nabla_t\left(\nabla_i\nabla_j f^\alpha\right) = \nabla_j\nabla_i f^\alpha_t \tag{13}$$

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k f^\alpha_t = \nabla_j\nabla_i\nabla_k f^\alpha_t + R_{ijk\ell}\nabla_\ell f^\alpha_t. \tag{14}$$

注 2.1。 上述恒等式在嵌入 $(N,h) \hookrightarrow \mathbb{R}^L$ 下成立。没有嵌入时，对易子恒等式会在 N 中产生额外的曲率项。设 $\dim N = n$，并选取 N 的一个局部坐标 $\{f^{\tilde{\alpha}}\}$，使得 $\tilde{\alpha} = 1, \dots, n$。例如，

$$\nabla_t(\nabla_i \nabla_j f^{\tilde{\alpha}}) = \nabla_i \nabla_j f_t^{\tilde{\alpha}} + {}^N R^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\beta}} f_t^{\tilde{\mu}} f_i^{\tilde{\nu}} f_j^{\tilde{\beta}}$$

其中，${}^N R$ 是 N的黎曼曲率张量。

因此，在嵌入（N，h）$\hookrightarrow \mathbb{R}^L$下，$\nabla_t$ 与其他导数交换。

接下来，我们给出一些关于双共形热流的简单观察。

引理 2.2。（能量递减）设（f、u）是 $M \times [0,T)$ 上的（8）的光滑解。则

$$\frac{d}{dt} E(f(t)) = -\int_M e^{4u} |f_t|^2 \leq 0. \tag{15}$$

特别地，能量是非递增的，并且当 $t \to \infty$时，$E(t) \to E_\infty$。

证明。 通过直接计算，并利用方程 $e^{4u} f_t + \Delta^2 f = B \perp T_f N$，

$$\frac{d}{dt} E(f(t)) = \int_M \langle \partial_t \Delta f, \Delta f \rangle = \int_M \langle \Delta f_t, \Delta f \rangle = \int_M \langle f_t, \Delta^2 f \rangle = -\int_M e^{4u} |f_t|^2 \leq 0.$$

□

引理 2.3。 设 (f, u) 是 $M \times [0,T)$上的 (8) 光滑解。那么

$$e^{4u} = e^{-4at} \left(1 + 4b \int_0^t e^{4as} (|\nabla df|^2(s) + |df|^4(s)) ds \right). \tag{16}$$

因此，体积 $V(t) = \int_M dvol_g = \int_M e^{4u}$ 满足

$$V(t) \leq e^{-4at} V(0) + \frac{b}{a} \left(2E(0) + 4C_1 E(0)^2 + C_2 \right). \tag{17}$$

证明。 直接求解方程 (8) 的第二个方程可得 (16)。利用上述引理和方程 (9)，在 M 上积分可得

$$\begin{aligned} V(t) =& e^{-4at} V(0) + 4be^{-4at} \int_0^t e^{4as} \int_M (|\nabla df|^2(s) + |df|^4(s)) ds \\ \leq& e^{-4at} V(0) + 4be^{-4at} \int_0^t e^{4as} \left(2E(0) + 4C_1 E(0)^2 + C_2 \right) \\ \leq& e^{-4at} V(0) + \frac{b}{a} \left(2E(0) + 4C_1 E(0)^2 + C_2 \right). \end{aligned}$$

□

注意，由 (16) 可知，对任意 $c > 0$,

$$e^{-cu} \leq e^{cat}.$$

引理 2.4. *(e^{pu} 估计)* 设 u是 (8) 中第二个方程的一个解。对于任意 $p > 1$，以及任意 $m \geq 0$ 和 $t_0 \leq t$,

$$\int_M e^{4pu} \varphi^m(t) \leq \int_M e^{4pu} \varphi^m(t_0) + \frac{4(p-1)b^2}{pa} \int_{t_0}^t \int_M \left(|\nabla df|^2 + |df|^4 \right)^p \varphi^m.$$

证明。 直接计算可得,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_M e^{4pu}\varphi^m(t)\right) =&4p\int_M e^{4pu}u_t\varphi^m(t)\\ =&4p\int_M e^{4(p-1)u}\left(b(|\Delta f|^2+|df|^4)-ae^{4u}\right)\varphi^m\\ \leq&4(p-1)b\lambda\int_M e^{4pu}\varphi^m+4b\lambda^{-1}\int_M\left(|\nabla df|^2+|df|^4\right)^p\varphi^m\\ &-4pa\int_M e^{4pu}\varphi^m\\ =&4b\lambda^{-1}\int_M\left(|\nabla df|^2+|df|^4\right)^p\varphi^m\end{aligned}$$

如果我们选取 $\lambda=\frac{pa}{(p-1)b}$。 若将其在 $[t_0,t]$上积分，则证明完成。 □

现在我们推导分部积分型不等式。

命题 2.5. 设 $F\in C^\infty(M\times[0,T],\ N)$与 $\psi\in C^\infty(M)$。则

$$\int_M|\nabla^2F|^2\psi^2\leq 2\int_M|\Delta F|^2\psi^2+C\int_M|\nabla F|^2|\nabla\psi|^2+C\int_M|\nabla F|^2\psi^2 \tag{18}$$

其中 C 取决于 g_0的里奇曲率。

证明。 通过分部积分,

$$\begin{aligned}\int_M|\nabla^2F|^2\psi^2=&-\int_M\langle\nabla_i\nabla_i\nabla_jF,\nabla_jf\rangle\psi^2-2\int_M\langle\nabla_i\nabla_jF,\nabla_jF\rangle\psi\nabla_i\psi\\ =&I+II.\end{aligned}$$

由（14），我们有

$$\nabla_i\nabla_i\nabla_jF=\nabla_j\nabla_i\nabla_iF+Ric_{ji}\nabla_iF.$$

So,

$$\begin{aligned}I=&-\int_M\langle\nabla_j\nabla_i\nabla_iF,\nabla_jF\rangle\psi^2-\int_M\langle Ric_{ji}\nabla_iF,\nabla_jF\rangle\psi^2\\ \leq&\int_M|\Delta F|^2\psi^2+2\int_M\langle\Delta F,\nabla F\rangle\psi\nabla\psi+C\int_M|\nabla F|^2\psi^2\\ \leq&(1+\delta)\int_M|\Delta F|^2\psi^2+C\int_M|\nabla F|^2|\nabla\psi|^2+C\int_M|\nabla F|^2\psi^2\\ II\leq&\delta\int_M|\nabla^2F|^2\psi^2+C\int_M|\nabla F|^2|\nabla\psi|^2.\end{aligned}$$

综合以上结果，我们得到所需的不等式。 □

作为推论，我们有以下不等式，后文将用到。

引理 2.6。 设 $f\in C^\infty(M\times[0,T],N)$， φ 是 $M\times[0,T]$上任意一个截断函数。则

$$\int_M|\nabla df_t|^2\varphi^4\leq 2\int_M|\Delta f_t|^2\varphi^4+C\int_M|df_t|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2+C\int_M|df_t|^2\varphi^4, \tag{19}$$

$$\int_M|\nabla df|^2\varphi^2\leq 2\int_M|\Delta f|^2\varphi^2+C\int_M|df|^2(\varphi^2+|\nabla\varphi|^2) \tag{20}$$

其中 C 取决于 g_0 的里奇曲率。

此外，我们有

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla^2 df|^2\varphi^4 \leq & 2\int_M |\Delta df|^2\varphi^4 + C\int_M (|\nabla df|^2|df|^2 + |df|^6)\varphi^4 + C\int_M (1+|\nabla df|^2)\varphi^4 \\ & + C\int_M |\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\end{aligned} \tag{21}$$

其中 C 取决于 g_0的里奇曲率。

对于任意 $\delta > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\int_M |df|^2|df_t|^2\varphi^4 \leq & \delta\int_M |\Delta f_t|^2\varphi^4 + C\int_{B_R} |f_t|^2|df|^4\varphi^4 + C\int_M |f_t|^2|\nabla df|^2\varphi^4 \\ & + C\int_M |df_t|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\end{aligned} \tag{22}$$

$$\int_M |df_t|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2 \leq \delta\int_M |\Delta f_t|^2\varphi^4 + C\int_M |f_t|^2|\nabla\varphi|^4 + C\int_M |f_t|^2\varphi^2|\nabla^2\varphi|^2 \tag{23}$$

其中 C 取决于 g_0 和 δ的里奇曲率。

证明。(19) 可由定理 2.5 结合 $F = f_t$ 和 $\psi = \varphi^2$直接得出。同理，结合 $F = f$ 和 $\psi = \varphi$ 可得 (20)。

对于 (21)，注意，对于任意 X_1， $X_2 \in \Gamma(TM)$，

$$\begin{aligned}|(\nabla\Delta f - \Delta df)(X_1)| \leq & C(|df|^3 + |df|)|X_1|, \\ |(\nabla\Delta df - \Delta\nabla df)(X_1, X_2)| \leq & C(|df|^2|\nabla df| + |\nabla df| + |df|^4 + |df|)|X_1||X_2|\end{aligned} \tag{24}$$

其中 C 仅依赖于 M 的曲率张量。（参见 Lamm 2004，方程 2.3 和 2.4。）然后通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla^2 df|^2\varphi^4 \leq & -\int_M \langle\nabla\Delta df, \nabla df\rangle\varphi^4 + C\int_M (|df|^2|\nabla df| + |\nabla df| + |df|^4 + |df|)|\nabla df|\varphi^4 \\ & + 4\int_M |\nabla^2 df||\nabla df|\varphi^3|\nabla\varphi| \\ \leq & \int_M |\Delta df|^2\varphi^4 + 4\int_M |\Delta df||\nabla df|\varphi^3|\nabla\varphi| + C\int_M (|df|^2|\nabla df|^2 + |\nabla df|^2)\varphi^4 \\ & + C\int_M (|df|^6 + 1)\varphi^4 + \delta\int_M |\nabla^2 df|^2\varphi^4 + C\int_M |\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2 \\ \leq & (1+\delta)\int_M |\Delta df|^2\varphi^4 + C\int_M (|df|^2|\nabla df|^2 + |\nabla df|^2)\varphi^4 \\ & + C\int_M (|df|^6 + 1)\varphi^4 + \delta\int_M |\nabla^2 df|^2\varphi^4 + C\int_M |\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

对于（22），通过分部积分，

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |df|^2|df_t|^2\varphi^4 = & -\int_{B_R} \langle\Delta f_t, f_t\rangle|df|^2\varphi^4 - 2\int_{B_R} \langle df_t, f_t\rangle\langle\nabla df, df\rangle\varphi^4 - 4\int_{B_R} \langle df_t, f_t\rangle|df|^2\varphi^3\nabla\varphi \\ \leq & \delta\int_{B_R} |\Delta f_t|^2\varphi^4 + C\int_{B_R} |f_t|^2|df|^4\varphi^4 + \frac{1}{2}\int_{B_R} |df|^2|df_t|^2\varphi^4 \\ & + C\int_{B_R} |f_t|^2|\nabla df|^2\varphi^4 + C\int_{B_R} |df_t|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

类似地，对于（23），通过分部积分，

$$\begin{aligned}\int_{B_R}|df_t|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2 =& -\int_{B_R}\langle\Delta f_t,f_t\rangle\varphi^2|\nabla\varphi|^2-\int_{B_R}\langle df_t,f_t\rangle 2\varphi\nabla\varphi|\nabla\varphi|^2\\ &-\int_{B_R}\langle df_t,f_t\rangle\varphi^2 2\langle\nabla\varphi,\nabla^2\varphi\rangle\\ \leq&\delta\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|f_t|^2|\nabla\varphi|^4+\frac{1}{2}\int_{B_R}|df_t|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\\ &+C\int_{B_R}|f_t|^2\varphi^2|\nabla^2\varphi|.\end{aligned}$$

□

利用交换子不等式 (24)，我们可以在 (21) 中用 $|\nabla\Delta f|^2$ 替换 $|\Delta df|^2$。

结合索伯列夫嵌入并运用一些分部积分技巧，我们得到更有用的不等式。

引理 2.7. 设 $f\in C^\infty(M\times[0,T])$， φ 是 $M\times[0,T]$ 上任意一个截断函数。那么，

$$\int_M|\nabla df|^2|df|^2\varphi^4\leq C\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M|\nabla^2 df|^2\varphi^4+|\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\tag{25}$$

$$\begin{aligned}\left(\int_M|df|^8\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\leq&C\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M|\nabla^2 df|^2\varphi^4+|\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ &+C\int_M|df|^4\varphi^2|\nabla\varphi|^2\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\int_M|df|^6\varphi^4\leq&C\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi}|df|^4\right)\left(\int_M|\nabla^2 df|^2\varphi^4+|\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ &+C\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M|df|^4\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\end{aligned}\tag{27}$$

其中， C 是普适常数。

证明。 由索伯列夫嵌入 ${W^1_{,0}}^2\hookrightarrow L^4$ 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_M|\nabla df|^2|df|^2\varphi^4\leq&\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M|\nabla df|^4\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq&C\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M|\nabla^2 df|^2\varphi^4+|\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\int_M|df|^8\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\leq&C\left(\int_M|\nabla df|^2|df|^2\varphi^4+|df|^4\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ \leq&C\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M|\nabla^2 df|^2\varphi^4+|\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ &+C\left(\int_M|df|^4\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_M |df|^6\varphi^4 \leq& \left(\int_{\operatorname{supp}\varphi} |df|^4\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |df|^8\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq& C\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi} |df|^4\right)\left(\int_M |\nabla^2 df|^2\varphi^4 + |\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ &+ C\left(\int_{\operatorname{supp}\varphi} |df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M |df|^4\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

我们还有如下 $W^{3,\,2}$ 估计。

引理2.8. （局部 $W^{3,\,2}$ 估计）设(f,u) 是(8) 在$M\times[t_1,t_2]$上的光滑解。则

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla\Delta f|^2\varphi^4 \leq& C\int_M |\nabla df|^2|df|^2\varphi^4 + C\int_M |df|^6\varphi^4 + C\int_M |\Delta f|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\\ &+ C\int_M e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4,\end{aligned}\tag{28}$$

证明。 注意到

$$|\nabla P| \leq \|\nabla P\||df| \leq C_N|df|, \quad |\Delta P| \leq \|\nabla^2 P\|(|\Delta f| + |df|^2) \leq C_N(|\Delta f| + |df|^2).$$

将(8)中的第一个方程乘以 $-\Delta f\varphi^4$ 并积分，得到

$$\begin{aligned}-\int_M e^{4u}\langle f_t, \Delta f\rangle\varphi^4 =& \int_M \langle\Delta^2 f, \Delta f\rangle\varphi^4 - \int_M \langle\Delta(A(df,df)), \Delta f\rangle\varphi^4\\ &+ \int_M \langle\langle\Delta f, \Delta P\rangle, \Delta f\rangle\varphi^4 - 2\int_M \langle\nabla\langle\Delta f, \nabla P\rangle, \Delta f\rangle\varphi^4\\ \leq& -\int_M |\nabla\Delta f|^2\varphi^4 - 4\int_M \langle\nabla\Delta f, \Delta f\rangle\varphi^3\nabla\varphi\\ &+ \int_M \langle 2A(\nabla df, df) + DA(df,df)\cdot df, \nabla\Delta f\varphi^4 + 4\Delta f\varphi^3\nabla\varphi\rangle\\ &+ 3C_N\int_M (|\Delta f|^3 + |\Delta f|^2|df|^2)\varphi^4 + 2C_N\int_M |\nabla\Delta f||\Delta f||df|\varphi^4\\ =& -\int_M |\nabla\Delta f|^2\varphi^4 + I + II + III + 2IV.\end{aligned}$$

I 和 II 由以下方式估计

$$\begin{aligned}I \leq& \delta\int_M |\nabla\Delta f|^2\varphi^4 + C\int_M |\Delta f|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\\ II \leq& C_N\int_M (2|\nabla df||df| + |df|^3)(|\nabla\Delta f|\varphi^4 + 4|\Delta f|\varphi^3|\nabla\varphi|)\\ \leq& \frac{1}{4}\int_M |\nabla\Delta f|^2\varphi^4 + 4C_N^2\int_M |\nabla df|^2|df|^2\varphi^4 + \frac{1}{8}\int_M |\nabla\Delta f|^2\varphi^4 + 2C_N^2\int_M |df|^6\varphi^4\\ &+ 4C_N\int_M |\nabla df|^2|df|^2\varphi^4 + 2C_N\int_M |df|^6\varphi^4 + 6C_N\int_M |\Delta f|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

为了估计 III，首先注意到，根据分部积分，

$$\begin{aligned}3C_N\int_M|\Delta f|^3\varphi^4\leq&9C_N\int_M|\nabla\Delta f||df||\Delta f|\varphi^4+12C_N\int_M|\Delta f|^2|df|\varphi^3|\nabla\varphi|\\\leq&9IV+6C_N\int_M|\Delta f|^2|df|^2\varphi^4+6C_N\int_M|\Delta f|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

最后， $11IV$ 可以由下式估计

$$11IV\leq\frac{1}{2}\int_M|\nabla\Delta f|^2\varphi^4+C(C_N)\int_M|\Delta f|^2|df|^2\varphi^4.$$

通过适当选择 δ并重新整理各项，可得所需的不等式。 □

3. Local energy estimate

本节将利用局部能量估计和导数估计进行一些估计。我们首先推导这两个估计，并据此控制若干项。由于 f_t 项具有积分性质，大多数估计都采用 L^pL^q 形式。

我们假设 (f,u) 是 (8) 在 $M\times[t_1,t_2]$ 上的一个光滑解，且 $E(f(0))=E_0<\infty$。令 φ 为一个截断函数。此外，我们假设存在一个常数 C_N，它仅依赖于等距嵌入 $(N,h)\hookrightarrow\mathbb{R}^L$，使得$\|P\|,\|\nabla P\|,\|\nabla^2P\|,\|A\|,\|DA\|,\|D^2A\|\leq C_N$。

引理 3.1. *(局部能量估计)* 设 (f,u) 是 *(8)* 在$M\times[t_1,t_2]$上的一个光滑解。那么

(29)
$$\int_M e^{4u}|f_t|^2\varphi^4+\frac{d}{dt}\int_M|\Delta f|^2\varphi^4\leq16\int_M|\Delta f||df_t|\varphi^3|\nabla\varphi|+Ce^{4at}\int_M|\Delta f|^2\left(|\nabla\varphi|^4+\varphi^2|\Delta\varphi|^2\right).$$

证明。 由 (8) 以及 (3)，我们有

$$e^{4u}|f_t|^2=-\langle\Delta^2f,f_t\rangle.$$

现在乘以 φ^4 并积分，得到

$$\begin{aligned}\int_M e^{4u}|f_t|^2\varphi^4=&-\int_M\langle\Delta^2f,f_t\rangle\varphi^4=\int_M\langle\nabla\Delta f,df_t\rangle\varphi^4+4\int_M\langle\nabla\Delta f,f_t\rangle\varphi^3\nabla\varphi\\=&-\int_M\langle\Delta f,\Delta f_t\rangle\varphi^4-8\int_M\langle\Delta f,df_t\rangle\varphi^3\nabla\varphi\\&-12\int_M\langle\Delta f,f_t\rangle\varphi^2|\nabla\varphi|^2-4\int_M\langle\Delta f,f_t\rangle\varphi^3\Delta\varphi\\\leq&-\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M|\Delta f|^2\varphi^4+8\int_M|\Delta f||df_t|\varphi^3|\nabla\varphi|\\&+\frac{1}{2}\int_Me^{4u}|f_t|^2\varphi^4+C\int_Me^{-4u}|\Delta f|^2\left(|\nabla\varphi|^4+\varphi^2|\Delta\varphi|^2\right)\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

注意，我们还可以得到如下另一种形式的局部能量估计：

(30)
$$\int_M e^{4u}|f_t|^2\varphi^4+\frac{d}{dt}\int_M|\Delta f|^2\varphi^4\leq Ce^{4at}\int_M|\nabla\Delta f|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2+Ce^{4at}\int_M|\Delta f|^2\left(|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|\right)^2.$$

其证明与上文类似，我们对项 $\int_M\langle\Delta f,df_t\rangle\varphi^3\nabla\varphi$ 再进行一次分部积分，以消去因子 df_t 的空间导数。

接下来，我们给出导数估计。这可以视为更一般估计的 $p=0$ 版本，例如 [14] 和 [16]中的估计。但对于双调和映射流，我们只能得到下面这个版本，而无法得到具有更高阶 p的一般版本。例如，如果我们尝试估计 $\int e^{4u}|f_t|^{p+2}$的时间导数，在右端，有一个良好的项（带负号）是 $\int|\Delta f_t|^2|f_t|^p$，而最终需要控制的麻烦项之一是 $p\int|df_t|^4|f_t|^{p-2}$。并且，除 $p=0$之外，我们无法用 $\int|\Delta f_t|^2|f_t|^p$ 对$p\int|df_t|^4|f_t|^{p-2}$ 进行局部控制。

命题 3.2. （导数估计）

设(f,u) 是(8) 在 $M\times[t_1,t_2]$上的一个光滑解。那么

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4+\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4+C_b\int_{B_R}|f_t|^2(|\nabla df|^2+|df|^4)\varphi^4\\&\quad\leq 4a\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|f_t|^2(\varphi^4+|\nabla\varphi|^4+\varphi^2|\Delta\varphi|^2).\end{aligned}\tag{31}$$

这里， C 仅依赖于 g_0 的里奇曲率，而 C_N 和 C_b 依赖于 b、 g_0的里奇曲率以及 C_N。当 b充分大时， $C_b>0$ 成立。

证明。 对(8)中的第一个方程两边取时间导数，得到

$$(e^{4u}f_t)_t=-\left[\Delta^2 f\right]_t+\left[\Delta(A(df,df))\right]_t-\left[\langle\Delta f,\Delta P\rangle\right]_t+2\left[\nabla\langle\Delta f,\nabla P\rangle\right]_t.\tag{32}$$

与 $f_t\varphi^4$ 取内积并积分，得到

$$\int_{B_R}\langle(e^{4u}f_t)_t,f_t\rangle\varphi^4=I+II+III+IV.$$

每一项都可以估计如下。

对于 I，有

$$\begin{aligned}I=&\int_{B_R}\langle\nabla_i\Delta f_t,\nabla_i f_t\varphi^4+4f_t\varphi^3\nabla_i\varphi\rangle\\=&-\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4-\int_{B_R}\langle\Delta f_t,8\nabla_i f_t\varphi^3\nabla_i\varphi+12f_t\varphi^2|\nabla\varphi|^2+4f_t\varphi^3\Delta\varphi\rangle\\\leq&-(1-\delta)\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|f_t|^2(|\nabla\varphi|^4+\varphi^2|\Delta\varphi|^2)+|df_t|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

对于 II，注意到

$$\begin{aligned}\left[\Delta(A(df,df))\right]_t=&\Delta\left(2A(df_t,df)+DA(df,df)\cdot f_t\right)\\=&\nabla_i\left(2A(\nabla_i df_t,df)+2A(df_t,\nabla_i df)+2DA(df_t,df)\cdot\nabla_i f\right)\\&+\nabla_i\left(2DA(\nabla_i df,df)\cdot f_t+D^2A(df,df)\cdot f_t\cdot\nabla_i f+DA(df,df)\cdot\nabla_i f_t\right).\end{aligned}$$

因此，通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}II=&-\int_{B_R}\langle 2A(\nabla_i df_t,df)+2A(df_t,\nabla_i df)+2DA(df_t,df)\cdot\nabla_i f,\nabla_i f_t\varphi^4+f_t\varphi^3\nabla_i\varphi\rangle\\&-\int_{B_R}\langle 2DA(\nabla_i df,df)\cdot f_t+D^2A(df,df)\cdot f_t\cdot\nabla_i f+DA(df,df)\cdot\nabla_i f_t,\nabla_i f_t\varphi^4+f_t\varphi^3\nabla_i\varphi\rangle.\end{aligned}$$

这里我们希望避免项 $\int |df_t|^2|\nabla df|\varphi^4$。因此，对该项再次应用分部积分。

$$
\begin{aligned}
&-\int_{B_R}\langle 2A(df_t,\nabla_i df),\nabla_i f_t\varphi^4\rangle\\
&\quad=\int_{B_R}\langle 2A(\nabla_i df_t,df),\nabla_i f_t\varphi^4\rangle+\int_{B_R}\langle 2DA(df_t,df)\cdot\nabla_i f,\nabla_i f_t\varphi^4\rangle\\
&\qquad+\int_{B_R}\langle 2A(df_t,df),\Delta f_t\varphi^4\rangle+4\int_{B_R}\langle 2A(df_t,df),\nabla_i f_t\varphi^3\nabla_i\varphi\rangle\\
&\quad\leq C\int_{B_R}|\nabla df_t||df_t||df|\varphi^4+C\int_{B_R}|df_t|^2|df|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|\Delta f_t||df_t||df|\varphi^4\\
&\qquad+C\int_{B_R}|df_t|^2|df|\varphi^3|\nabla\varphi|.
\end{aligned}
$$

将这个不等式与其他项结合考虑，我们得到

$$
\begin{aligned}
II\leq& C\int_{B_R}(|\nabla df_t||df|+|df_t||df|^2+|\nabla df||df||f_t|+|df|^3|f_t|)\cdot(|df_t|\varphi^4+|f_t|\varphi^3|\nabla\varphi|)\\
&+C\int_{B_R}|\nabla df_t||df_t||df|\varphi^4+C\int_{B_R}|df_t|^2|df|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|df_t|^2|df|\varphi^3|\nabla\varphi|\\
\leq&\delta\int_{B_R}|\nabla df_t|^2\varphi^4+C\int_{B_R}\left(|df_t|^2|df|^2+|f_t|^2|\nabla df|^2+|f_t|^2|df|^4\right)\varphi^4\\
&+C\int_{B_R}\left(|f_t|^2|df|^2+|df_t|^2\right)\varphi^2|\nabla\varphi|^2\\
\leq&\delta\int_{B_R}|\nabla df_t|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|df|^2|df_t|^2\varphi^4\\
&+C\int_{B_R}|f_t|^2(|df|^4+|\nabla df|^2)\varphi^4+C\int_{B_R}\left(|f_t|^2|df|^2+|df_t|^2\right)\varphi^2|\nabla\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

为了分析 III，注意到

$$\langle\Delta f,\Delta P\rangle=A(\Delta f,\Delta f)+DA(df,\Delta f)\cdot df.$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
III=&-\int_{B_R}\langle 2A(\Delta f_t,\Delta f),f_t\rangle\varphi^4-\int_{B_R}\langle DA(\Delta f,\Delta f)\cdot f_t,f_t\rangle\varphi^4\\
&-\int_{B_R}\langle DA(df_t,\Delta f)\cdot df,f_t\rangle\varphi^4-\int_{B_R}\langle DA(df,\Delta f_t)\cdot df,f_t\rangle\varphi^4\\
&-\int_{B_R}\langle DA(df,\Delta f)\cdot df_t,f_t\rangle\varphi^4-\int_{B_R}\langle D^2A(df,\Delta f)\cdot df\cdot f_t,f_t\rangle\varphi^4\\
\leq&\delta\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|df|^2|df_t|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|f_t|^2(|df|^4+|\Delta f|^2)\varphi^4.
\end{aligned}
$$

对于 IV，首先注意到

$$
\begin{aligned}
\langle\Delta f,\nabla P\rangle=&A(\Delta f,df)\\
[\nabla\langle\Delta f,\nabla P\rangle]_t=&\nabla\left(A(\Delta f_t,df)+A(\Delta f,df_t)+DA(\Delta f,df)\cdot f_t\right)
\end{aligned}
$$

并应用分部积分得到

$$IV = -2\int_{B_R}\langle A(\Delta f_t, df) + A(\Delta f, df_t) + DA(\Delta f, df)\cdot f_t, df_t\varphi^4 + 4f_t\varphi^3\nabla\varphi\rangle.$$

同样，我们希望避免使用术语 $\int|\Delta f||df_t|^2\varphi^4$。因此，再次对 b y 部分进行积分，得到

$$\begin{aligned}
&-2\int_{B_R}\langle A(\Delta f, df_t), df_t\varphi^4\rangle\\
&\quad=2\int_{B_R}\langle A(\nabla_i f, \nabla_i df_t), df_t\varphi^4\rangle + 2\int_{B_R}\langle DA(\nabla_i f, df_t)\cdot\nabla_i f, df_t\varphi^4\rangle\\
&\qquad+2\int_{B_R}\langle A(\nabla_i f, df_t), \nabla_i df_t\varphi^4\rangle + 8\int_{B_R}\langle A(\nabla_i f, df_t), df_t\varphi^3\nabla_i\varphi\rangle\\
&\quad\le C\int_{B_R}|\nabla df_t||df_t||df|\varphi^4 + C\int_{B_R}|df_t|^2|df|^2\varphi^4 + C\int_{B_R}|df_t|^2|df|\varphi^3|\nabla\varphi|.
\end{aligned}$$

将此估计与其他项结合考虑，可得

$$\begin{aligned}
IV \le&\delta\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4 + C\int_{B_R}|df|^2|df_t|^2\varphi^4\\
&+C\int_{B_R}|f_t|^2(|df|^4+|\Delta f|^2)\varphi^4 + C\int_{B_R}(|f_t|^2|df|^2+|df_t|^2)\varphi^2|\nabla\varphi|^2.
\end{aligned}$$

注意，对于 $\int|df|^2|df_t|^2\varphi^2$ 和 $\int|df_t|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2$，我们使用 (22) 和 (23)。

将所有结果结合起来，并令 δ 足够小，可得

$$\begin{aligned}
RHS \le&-\frac{1}{2}\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4 + \frac{1}{2}C_1\int_{B_R}|f_t|^2(|df|^4+|\nabla df|^2)\varphi^4\\
&+C\int_{B_R}|f_t|^2(\varphi^4+|\nabla\varphi|^4+\varphi^2|\nabla^2\varphi|^2)
\end{aligned}$$

其中 C，C_1 仅取决于 g_0 和 C_N的里奇曲率。

另一方面，左侧变为

$$\begin{aligned}
\int_{B_R}\langle(e^{4u}f_t)_t, f_t\rangle\varphi^4 =&\int_{B_R}e^{4u}\langle f_{tt}, f_t\rangle\varphi^4 + 4\int_{B_R}e^{4u}u_t|f_t|^2\varphi^4\\
=&\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4 + 2b\int_{B_R}|f_t|^2(|\nabla df|^2+|df|^4)\varphi^4 - 2a\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4.
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4 + \int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4 + (4b-C_1)\int_{B_R}|f_t|^2(|\nabla df|^2+|df|^4)\varphi^4\\
&\quad\le 4a\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4 + C\int_{B_R}|f_t|^2(\varphi^4+|\nabla\varphi|^4+\varphi^2|\nabla^2\varphi|^2).
\end{aligned}$$

证明在 $C_b = 4b - C_1$处完成。 □

从现在起，我们假设 b 足够大，使得

$$C_b = 4b - C_1 > 0. \tag{33}$$

于是，利用 $e^{-4u} \leq e^{4at}$，由定理 3.2 可得，

(34)
$$\frac{d}{dt}\int_{B_R} e^{4u}|f_t|^2\varphi^4 + \int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4 \leq 4a\int_{B_R} e^{4u}|f_t|^2\varphi^4 + Ce^{4at}(1+\frac{1}{R^4})\int_{B_R} e^{4u}|f_t|^2.$$

由此得到局部能量估计的一个更精细版本。

命题 3.3。（局部能量估计——更精细版本）在定理 *3.2* 的相同假设下，取 $C_b > 0$,

(35)
$$\begin{aligned}&\int_{B_R} e^{4u}|f_t|^2\varphi^4(t) + 4a\int_{B_R}|\Delta f|^2\varphi^4(t)\\ \leq& K_1(t_1) + C(t_2-t_1)e^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})\left(K_1(t_1) + Ce^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})(1+t_2)E(0)\right)\end{aligned}$$

其中

(36)
$$K_1(t_1) := \int_{B_{2R}} e^{4u}|f_t|^2(t_1) + 4a\int_{B_{2R}}|\Delta f|^2(t_1).$$

证明。设 ψ 是 B_{2R} 上的一个截断函数，且在 B_R 上满足 $\psi \equiv 1$ 。由定理 3.1 可得

$$\int_{B_{2R}} e^{4u}|f_t|^2\psi^4 + \frac{d}{dt}\int_{B_{2R}}|\Delta f|^2\psi^4 \leq C\int_{B_{2R}}|\Delta f||df_t|\psi^3|\nabla\psi| + Ce^{4at}\frac{1}{R^4}\int_{B_{2R}}|\Delta f|^2.$$

右端的第一项可以估计为

$$\int_{B_{2R}}|\Delta f||df_t|\psi^3|\nabla\psi| \leq \int_{B_{2R}}|\Delta f|^2\psi^2|\nabla\psi|^2 + C\int_{B_{2R}}|df_t|^2\psi^4$$

其中第二项通过分部积分并由 (23) 可得，

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}}|df_t|^2\psi^4 =& -\int_{B_{2R}}\langle\Delta f_t, f_t\rangle\psi^4 - 4\int_{B_{2R}}\langle df_t, f_t\rangle\psi^3\nabla\psi\\ \leq& \delta\int_{B_{2R}}|\Delta f_t|^2\psi^4 + C\int_{B_{2R}}|f_t|^2\psi^4 + C\int_{B_{2R}}|df_t|^2\psi^2|\nabla\psi|^2\\ \leq& 2\delta\int_{B_{2R}}|\Delta f_t|^2\psi^4 + C\int_{B_{2R}}|f_t|^2(\psi^4 + |\nabla\psi|^4 + \psi^2|\nabla^2\psi|^2).\end{aligned}$$

将此与 (34) 结合，并取 δ 足够小，我们得到

(37)
$$\frac{d}{dt}\left(\int_{B_{2R}} e^{4u}|f_t|^2\psi^4 + 4a\int_{B_{2R}}|\Delta f|^2\psi^4\right) \leq Ce^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})\left(\int_{B_{2R}} e^{4u}|f_t|^2 + 4a\int_{B_{2R}}|\Delta f|^2\right).$$

对 $[t_1, t]$ 积分，并利用定理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{B_R} e^{4u}|f_t|^2(t) + 4a\int_{B_R}|\Delta f|^2(t)\\ \leq& \int_{B_{2R}} e^{4u}|f_t|^2\psi^4(t_1) + 4a\int_{B_{2R}}|\Delta f|^2\psi^4(t_1) + Ce^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})\left(E(t_1) - E(t) + (t-t_1)E(0)\right)\\ \leq& K_1(t_1) + Ce^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})(1+t_2)E(0)\end{aligned}$$

其中我们记

$$K_1(t_1) := \int_{B_{2R}} e^{4u}|f_t|^2(t_1) + 4a\int_{B_{2R}}|\Delta f|^2(t_1).$$

在 B_R 上再次对 (37) 积分，并使用截断函数 φ 及上述界，我们便得到结论。□

为简便起见，将依赖于 $K_1(t_1)$ t_2，t_2-t_1，R，$E(0)$ 的 K_2 记为

$$K_2 := K_1(t_1) + C(t_2-t_1)e^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})\left(K_1(t_1) + Ce^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})(1+t_2)E(0)\right).$$

于是，定理 3.3 推出：

$$\int_{B_{R/2}} e^{4u}|f_t|^2 \le K_2, \int_{B_{R/2}} |\Delta f|^2 \le \frac{K_2}{4a}.$$

注 3.4。这是一个关键时刻，表明共形热流方法优于通常的双调和映射热流。在通常的双调和映射流中，我们**无法**以如此统一的方式，根据初始数据和时间差来控制局部能量。但在我们的情形下，如果选择 R 足够小，使得 $K_1(t_1)$ 很小，并且选择 t_2-t_1 足够小，那么我们就可以使 K_2 任意小。

更确切地说，我们有如下推论。

推论 3.5. 设(f,u)是 $M\times[t_1,t_2]$上方程(8)的一个光滑解。对于任意$\varepsilon>0$，存在 $R=R(\varepsilon)$ 和 $T\in[t_1,t_2]$，使得

$$\sup_{t_1\le s\le T}\int_{B_R} e^{4u}|f_t|^2(s), \sup_{t_1\le s\le T}\int_{B_R}|\Delta f|^2(s) \le \varepsilon. \tag{38}$$

证明。对于第一项，只需证明我们可以使 K_2 足够小。首先，我们选择 R 足够小，使得 $K_1(t_1)$ 在 B_{4R} 上的值小于 ε。现在选择T，使 $T-t_1$ 足够小，从而

$$C(T-t_1)e^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})\left(K_1(t_1)+Ce^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})(1+t_2)E(0)\right)\le\varepsilon.$$

由定理 3.3，证明完成。 □

注 3.6。显然，上述 T 的选取取决于 t_1，并且根据构造也取决于 t_2。但它对 t_2 的依赖方式是：t_2 越小，就可以选取越大的 T。因此，通过选择足够小的 t_2，我们可以假设 (38) 中的$T=t_2$。

特别地，对 $\int e^{4u}|f_t|^2$ 的良好控制将有助于获得高阶估计。

推论 3.7. 设 (f,u) 是定义在 $M\times[t_1,t_2]$ 上的方程 (8) 的光滑解，并按定理*3.5*选取 $R=R(\varepsilon)$。那么

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4, \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|f_t|^2(|\nabla df|^2+|df|^4)\varphi^4 \le C_3(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon \tag{39}$$

对于某个常数 $C_3=C_3(t_2)$。

证明。我们对 (31) 从 t_1 到 t 积分，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t}\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4 + C_b\int_{t_1}^{t}\int_{B_R}|f_t|^2(|\nabla df|^2+|df|^4)\varphi^4\\
\le&\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4(t_1) - \int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4(t)\\
&+4a\int_{t_1}^{t}\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2\varphi^4 + Ce^{4at_2}(1+\frac{1}{R^4})\int_{t_1}^{t}\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2.
\end{aligned}$$

现在由 (38) 可得结论。 □

由此，我们还可以得到以下估计。

推论3.8。 设(f,u)是(8)在 $M\times[t_1,t_2]$ 上的一个光滑解，并按定理*3.5*选取 $R=R(\varepsilon)$。则

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|df_t|^2|df|^2\varphi^4,\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|df_t|^2\varphi^4\leq& C_4(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon\\ \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|\nabla df_t|^2\varphi^4\leq& C_4(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon\end{aligned}\tag{40}$$

其中 $C_4=C_4(t_2,t_2-t_1)$为某个常数。

证明。 我们先证明关于 $\int|df_t|^2|df|^2\varphi^4$的估计。通过分部积分，

$$\begin{aligned}\int_{B_R}|df_t|^2|df|^2\varphi^4=&-\int_{B_R}\langle\Delta f_t,f_t\rangle|df|^2\varphi^4-2\int_{B_R}\langle df_t,f_t\rangle\langle\nabla df,df\rangle\varphi^4\\&-4\int_{B_R}\langle df_t,f_t\rangle|df|^2\varphi^3\nabla\varphi\\\leq&\frac{1}{2}\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4+\frac{1}{2}\int_{B_R}|f_t|^2|df|^4\varphi^4+\frac{1}{2}\int_{B_R}|df_t|^2|df|^2\varphi^4\\&+C\int_{B_R}|f_t|^2|\nabla df|^2\varphi^4+C\int_{B_R}|f_t|^2|df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

最后一项可以估计为

$$\int_{B_R}|f_t|^2|df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\leq\int_{B_R}|f_t|^2|df|^4\varphi^4+Ce^{4at_2}\frac{1}{R^4}\int_{B_R}e^{4u}|f_t|^2.$$

因此，我们得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|df_t|^2|df|^2\varphi^4\leq C\varepsilon+Ce^{4at_2}\frac{1}{R^4}(t_2-t_1)\varepsilon\leq C_4(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon$$

对于适当选取的 C_4 （它仅依赖于 t_2 和 t_2-t_1），上述结论成立。对于 $\iint|df_t|^2\varphi^4$，证明类似。

最后，对于 $\iint|\nabla df_t|^2\varphi^4$，由 (19) 得

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|\nabla df_t|^2\varphi^4\leq&2\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|\Delta f_t|^2\varphi^4+C(1+\frac{1}{R^2})\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|df_t|^2\\\leq&C_4(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon.\end{aligned}$$

□

我们可以应用索伯列夫嵌入来推广这类估计，但所得结果中空间积分和时间积分的幂次可能不同。

引理 3.9。 设（f、u）是 $M\times[t_1,t_2]$ 上的一个光滑解（8），并按定理*3.5*选取 $R=R$（ε）。则

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|f_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}}\leq&C_5(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon\\ \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|df_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}},\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|df_t|^2|f_t|^2\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}}\leq&C_5(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon\end{aligned}\tag{41}$$

对于某个常数 $C_5 = C_5(t_2、\ t_2 - t_1)$。

证明。 由索伯列夫嵌入可得

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_R} |f_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} \leq & C\int_{B_R} |df_t|^2\varphi^2 + |f_t|^2|\nabla\varphi|^2\\ \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R} |f_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} \leq & C_4(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon + Ce^{4at_2}\frac{1}{R^2}\varepsilon\\ \leq & C_5(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon.\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\left(\int_{B_R} |df_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_{B_R} |\nabla df_t|^2\varphi^2 + |df_t|^2|\nabla\varphi|^2\right)$$

并在 $[t_1, t_2]$ 上积分即可得出结论。最后，

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_R} |df_t|^2|f_t|^2\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} \leq & \left(\int_{B_R} |df_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{B_R} |f_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{4}}\\ \leq & \frac{1}{2}\left(\int_{B_R} |df_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\int_{B_R} |f_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

在 $[t_1, t_2]$ 上积分并利用上述结果，即完成证明。 □

我们可以进一步改进形如 $\int\left(\int_{B_R} |f_t|^p\varphi^4\right)^q$ 的估计。关键要素是上述结果和 $\int |f_t|^2 \leq \varepsilon$。

引理3.10。 设(f, u)是(8)在 $M \times [t_1, t_2]$ 上的一个光滑解，并按定理*3.5*选取 $R = R(\varepsilon)$。则

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R} |f_t|^3\varphi^4 \leq & C_6(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon^{\frac{3}{2}}\\ \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R} |f_t|^6\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} \leq & C_6(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon^{\frac{3}{2}}\\ \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R} |f_t|^4\varphi^4 \leq & C_6(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon^2\\ \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R} |f_t|^3\varphi^4\right)^2 \leq & C_6(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon^3\end{aligned} \tag{42}$$

存在某个常数 $C_6 = C_6(t_2, t_2 - t_1)$。

证明。 首先注意到

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R} |f_t|^3\varphi^4 \leq & \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R} |f_t|^2\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R} |f_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq & Ce^{2at_2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}C_5(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon \leq C_6(1+\frac{1}{R^4})\varepsilon^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

现在由索伯列夫嵌入可得 $W^{1,\ 0}{}^{\ 2} \hookrightarrow L^4$,

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|f_t|^6\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} \leq & C\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|df_t|^2|f_t|\varphi^2+|f_t|^3|\nabla\varphi|^2\\ \leq & C\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|f_t|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R}|df_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}}+C_6(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon^{\frac{3}{2}}\\ \leq & C_6(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

最后,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|f_t|^4\varphi^4 \leq \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|f_t|^2\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R}|f_t|^6\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_6(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon^2$$

这也意味着

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|f_t|^3\varphi^4\right)^2 \leq C\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|f_t|^2\varphi^4\right)\left(\int_{B_R}|f_t|^4\varphi^4\right) \leq C_6(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon^3.$$

□

利用上述结果，我们可以如下改进定理 3.9 中的估计。

引理 3.11. 设 (f,u) 是定义在 $M\times[t_1,t_2]$ 上的式 (8) 的光滑解，且 $R=R(\varepsilon)$如定理*3.5* 中所选。则

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|df_t|^2|f_t|^2\varphi^4\right)^{\frac{2}{3}},\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|f_t|^8\varphi^4\right)^{\frac{1}{3}} \leq C_7(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon \tag{43}$$

对某个常数 $C_7=C_7(t_2,t_2-t_1)$。

证明。 首先注意到，根据 H¨older 不等式和杨氏不等式,

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|df_t|^2|f_t|^2\varphi^4\right)^{\frac{2}{3}} \leq & \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|df_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{B_R}|f_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{3}}\\ \leq & \frac{2}{3}\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_R}|df_t|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}|f_t|^4\varphi^4\\ \leq & C_7(1+\frac{1}{R^6})\varepsilon.\end{aligned}$$

根据索伯列夫嵌入,

$$\left(\int_{B_R}|f_t|^8\varphi^4\right)^{\frac{1}{3}} \leq C\left(\int_{B_R}|df_t|^2|f_t|^2\varphi^2+|f_t|^4|\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{2}{3}}.$$

对时间积分后，我们得到所需的不等式。

□

看来，这套方法能够进一步提高指数，但由于 L^pL^q结构的缘故， q 的值越高，p的值就越低。我们将在后面的章节中通过其他方式进一步改进这一估计。

4. C^0 ESTIMATE FOR df

本节在 $\int_{B_r} 1+|\nabla df|^2+|df|^4$满足小性假设的条件下，对某个较小的 $r>0$，推导出 $|df|$ 在 $B_r\times[t_1,t_2]$ 上的 C^0 估计。注意，根据定理3.5，对于任意 $\varepsilon>0$，我们都可以将 R 取得足够小，从而使得 $\int_{B_R}|\Delta f|^2\le\varepsilon$。然而，这并不能直接保证 $\int_{B_R}|\nabla df|^2\le\varepsilon$ 或 $\int_{B_R}|df|^4\le\varepsilon$，因为仅凭 $\int|\Delta f|^2$无法局部控制 $\int|\nabla df|^2$和 $\int|df|^4$。这也是许多关于双调和映射流的文献中，需要 $\int_{B_R}|\Delta f|^2+\left(\int_{B_R}|df|^4\right)^{\frac12}<\varepsilon_0$或 $\int_{B_R}|\nabla df|^2+\left(\int_{B_R}|df|^4\right)^{\frac12}<\varepsilon_0$来获得 ε-正则性的原因之一。

然而，正如我们将在下文看到的，我们可以证明它们具有类似于 H¨older 连续性的行为。注意到，这种行为类似于 n-共形热流中的行为，参见 [16]。

命题4.1。 设 (f,u) 是 (8) 在 $M\times[t_1,t_2]$ 上的光滑解，且 $\varepsilon>0$已给定。则存在 $R=R(\varepsilon)>0$ 以及 $\alpha=\alpha(t_2,R)\in(0,1)$，使得对于任意 $r\in(0,R]$,

$$\int_{B_r}|df|^4\le C\varepsilon^2+\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}(4C_1E(0)^2+C_2). \tag{44}$$

证明。 首先选取如定理3.5中的 R_1。设 $R\le R_1$（其将于稍后确定），并考虑 φ 为 B_R 上的一个截断函数，其中在 $B_{R/2}$ 上满足 $\varphi\equiv1$，在 B_R上满足$|\nabla\varphi|\le\frac{4}{R}$。于是由定理3.5可得 $\int_{B_R}|\Delta f|^2\le\varepsilon$。

由 Sobolev嵌入和 (20)，我们有

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_R}|df|^4\varphi^4\right)^{\frac12}\le&C\left(\int_{B_R}|\nabla df|^2\varphi^2+|df|^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ \le&C\int_{B_R}|\Delta f|^2\varphi^2+C\int_{B_R}|df|^2\varphi^2+C\int_{B_R}|df|^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

这里，第二项估计为

$$C\int_{B_R}|df|^2\varphi^2\le C\left(\int_{B_R}1\right)^{\frac12}\left(\int_{B_R}|df|^4\varphi^4\right)^{\frac12}\le\frac12\left(\int_{B_R}|df|^4\varphi^4\right)^{\frac12}$$

如果 R 足够小。此外，我们可以将最后一项估计为

$$C\int_{B_R}|df|^2|\nabla\varphi|^2\le C\left(\int_{B_R}|\nabla\varphi|^4\right)^{\frac12}\left(\int_{B_R\setminus B_{R/2}}|df|^4\right)^{\frac12}\le C\left(\int_{B_R\setminus B_{R/2}}|df|^4\right)^{\frac12}.$$

将它们合并起来，我们得到

$$\int_{B_{R/2}}|df|^4\le C\varepsilon^2+C_0\int_{B_R\setminus B_{R/2}}|df|^4$$

对某个仅依赖于 g_0的里奇曲率的常数 C_0。通过适当的修正，我们得到

$$\int_{B_{R/2}}|df|^4\le\frac{C}{1+C_0}\varepsilon^2+\theta\int_{B_R}|df|^4$$

其中 $\theta = \frac{C_0}{1+C_0} \in (0,1)$与 R无关。迭代此过程，我们可以得到

$$\int_{B_{R/2^k}} |df|^4 \leq \frac{C}{1+C_0}\varepsilon^2 \frac{1}{1-\theta} + \theta^k \int_{B_R} |df|^4.$$

因此，对于任意 $r \in (0, R]$，令 $\alpha = -\log_2(\theta) > 0$，即可得到

$$\int_{B_r} |df|^4 \leq C\varepsilon^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \int_{B_R} |df|^4 \leq C\varepsilon^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} (4C_1 E(0)^2 + C_2).$$

证明完毕。 □

推论4.2。 设(f, u)是(8)在 $M \times [t_1, t_2]$上的一个光滑解，且给定了 $\varepsilon > 0$。则存在 $R = R(\varepsilon) > 0$ 和 $\alpha = \alpha(t_2, R) \in (0,1)$，使得对于任意$r \in (0, R]$,

$$\int_{B_r} |\nabla df|^2 \leq C\varepsilon + C\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\alpha}{2}} (4C_1 E(0)^2 + C_2)^{\frac{1}{2}}. \tag{45}$$

证明。 取定理4.1中的 R。对于任意 $r \in (0, R]$ 以及定义在B_r上的截断函数 φ，由(20)可得,

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\nabla df|^2 \varphi^2 \leq & 2\int_{B_r} |\Delta f|^2 \varphi^2 + C\int_{B_r} |df|^2 (\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2) \\
\leq & 2\varepsilon + C\left(\int_{B_r} (\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int B_r |df|^4\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & C\varepsilon + C\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\alpha}{2}} (4C_1 E(0)^2 + C_2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定理4.1和定理4.2意味着，对于任意 $\varepsilon > 0$，只要选择足够小的 r，就可以保证

$$\int_{B_r} |df|^4 \leq C_8\varepsilon^2, \quad \int_{B_r} |\nabla df|^2 \leq C_8\varepsilon \tag{46}$$

其中常数 $C_8 = C_8(t_2, t_2 - t_1, C_1, C_2, E(0), \alpha)$与 R无关。

利用这一小性条件，我们可以得到空间导数的高阶估计。

命题4.3。 存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得下述结论成立：

设 (f, u) 是 $M \times [t_1, t_2]$ 上方程 (8) 的光滑解，且满足

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]} \int_{B_r} 1 + |df|^4 + |\nabla df|^2 \leq \varepsilon_1. \tag{47}$$

Then

$$\int_{B_r} |\nabla df|^4 \varphi^8, \int_{B_r} |df|^8 \varphi^8 \leq C_9\varepsilon_1^2$$

$$\int_{B_r} |\nabla^2 df|^2 \varphi^4, \int_{B_r} |\nabla\Delta f|^2 \varphi^4 \leq C_9\varepsilon_1$$

对于某个常数

$$C_9 := C_9(t_2, r, t_2 - t_1, V_1(t_1))$$

其中

$$V_1(t_1) = \int_{B_r} e^{8u}(t_1).$$

证明。 结合 (47)、(25) 和 (27)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |\nabla df|^2|df|^2\varphi^4 \leq & C\left(\int_{B_r}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2\varphi^4 + |\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ \leq & C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2\varphi^4 + C\frac{1}{r^2}\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\\ \int_{B_r}|df|^6\varphi^4 \leq & C\left(\int_{B_r}|df|^4\right)\left(\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2\varphi^4 + |\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ & + C\left(\int_{B_r}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|df|^4\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ \leq & C\varepsilon_1\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2\varphi^4 + C\frac{1}{r^2}\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

将这些结果与 (21) 和 (24) 结合，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{B_r}|\nabla df|^2|df|^2\varphi^4 + \int_{B_r}|df|^6\varphi^4\\ &\qquad\leq C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2\varphi^4 + C\frac{1}{r^2}\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\\ &\qquad\leq C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2\varphi^4 + C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\int_{B_r}(|\nabla df|^2|df|^2 + |df|^6)\varphi^4 + C(1+\frac{1}{r^2})\varepsilon_1.\end{aligned}$$

因此，当 ε_1 足够小时，我们可以将 $C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$ 放在右端，从而得到

$$\int_{B_r}|\nabla df|^2|df|^2\varphi^4 + \int_{B_r}|df|^6\varphi^4 \leq C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2\varphi^4 + C(1+\frac{1}{r^2})\varepsilon_1. \tag{48}$$

现在将此结果与定理 2.8 结合，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2\varphi^4 \leq & C\int_{B_r}|\nabla df|^2|df|^2\varphi^4 + C\int_{B_r}|df|^6\varphi^4 + C\int_{B_r}|\Delta f|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\\ & + C\int_{B_r}e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4\\ \leq & C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2\varphi^4 + C(1+\frac{1}{r^2})\varepsilon_1 + C\int_{B_r}e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4.\end{aligned}$$

同样，当 ε_1 足够小时，我们可以将 $C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$ 放在右端，从而得到

$$\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2\varphi^4, \int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2\varphi^4 \leq C(1+\frac{1}{r^2})\varepsilon_1 + C\int_{B_r}e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4. \tag{49}$$

其中，$\int|\nabla^2 df|^2\varphi^4$的估计由 $\int|\nabla\Delta f|^2\varphi^4$的估计以及（21）和（24）得出。此时，根据索伯列夫嵌入、定理 2.7 和上述不等式，

我们有

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^4\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\leq& C\left(\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2\varphi^4+|\nabla df|^2\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ \leq& C\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\varepsilon_1+C\int_{B_r}e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4\\ \left(\int_{B_r}|df|^8\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\leq& C\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\varepsilon_1+C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\int_{B_r}e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4.\end{aligned}$$

现在我们估计$\int e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4$。注意,

$$\begin{aligned}\int_{B_r}e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4\leq& C\left(\int_{B_r}e^{4u}|f_t|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}e^{8u}\varphi^8\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{B_r}|\Delta f|^4\varphi^8\right)^{\frac{1}{4}}\\ \leq& C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}e^{8u}\varphi^8\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{B_r}|\Delta f|^4\varphi^8\right)^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}\tag{50}$$

由定理 2.4,

$$\begin{aligned}\int_{B_r}e^{8u}\varphi^8(t)\leq&\int_{B_r}e^{8u}\varphi^8(t_1)+C\int_{t_1}^t\int_{B_r}\left(|\nabla df|^2+|df|^4\right)^2\varphi^8\\ \leq&\int_{B_r}e^{8u}\varphi^8(t_1)+C\int_{t_1}^t\int_{B_r}|\nabla df|^4\varphi^8+|df|^8\varphi^8.\end{aligned}$$

现在各项相互抵消，因此我们可以应用格朗沃尔不等式。令

$$X(t)=\int_{B_r}|\nabla df|^4\varphi^8+|df|^8\varphi^8(t).$$

则上述不等式蕴含

$$\begin{aligned}X(t)\leq& C\left(1+\frac{1}{r^4}\right)\varepsilon_1^2+C\left(\int_{B_R}e^{4u}|\Delta f||f_t|\varphi^4\right)^2\\ \leq& C\left(1+\frac{1}{r^4}\right)\varepsilon_1^2+C\varepsilon_1\left(\int_{B_r}e^{8u}\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|\Delta f|^4\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq& C\left(1+\frac{1}{r^4}\right)\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}X(t)+C\varepsilon_1^2\left(\int_{B_r}e^{8u}\varphi^8(t_1)+C\int_{t_1}^t X(s)ds\right).\end{aligned}$$

因此，我们得到格朗沃尔型不等式

$$X(t)\leq D_1+D_2\int_{t_1}^t X(s)ds$$

with

$$D_1=C\left(1+\frac{1}{r^4}\right)\varepsilon_1^2+C\varepsilon_1^2\int_{B_r}e^{8u}(t_1),\quad D_2=C\varepsilon_1^2.$$

根据格朗沃尔不等式，这表明,

$$X(t)\leq D_1\left(1+D_2(t_2-t_1)e^{D_2(t_2-t_1)}\right)=C_9\varepsilon_1^2$$

对于某个常数 $C_9=C_9(t_2,r,t_2-t_1,V_1(t_1))$。

最后，对于 $\int|\nabla\Delta f|^2\varphi^4$ 和 $\int|\nabla^2 df|^2\varphi^4$，由 (49) 和 (50) 可得，

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2\varphi^4,\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2\varphi^4 \leq& C(1+\frac{1}{r^2})\varepsilon_1+C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\left(V_1(t_1)+C(t_2-t_1)C_9\right)^{\frac{1}{4}}C_9^{\frac{1}{4}}\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\\ \leq& C_9\varepsilon_1.\end{aligned}$$

（如有必要，重新定义 C_9。）证明至此完成。 □

现在我们对局部量有了更好的控制。也就是说，我们现在可以对$\int|\nabla df|^4$和$\int|\nabla^2 df|^2$给出界限。但根据索伯列夫嵌入，对 $\int|\nabla df|^4$给出界限还不足以保证 sup $|df|<C$。在定理 4.6 中，我们将对$\int|\nabla df|^6$给出界限，这已经足以推出 sup $|df|<C$。

我们先介绍下面这个代数型引理。

引理4.4。 对于 H 这个 $n\times n$ 矩阵以及 v 这个 n维向量，我们有

$$|Mv|^2\leq(n-1)|H|^2|v|^2 \tag{51}$$

其中 $M=H-\mathrm{tr}(H)I$，而$|H|^2=\sum_{j,k}H_{jk}^2$ 是弗罗贝尼乌斯范数的平方。

证明。 记 λ_i 为 H的特征值。那么 $\mu_i=\lambda_i-\sum_i\lambda_i$ 是 M的特征值。现在使用算子范数 $\|M\|_{op}$，其中 $|Mv|^2\leq\|M\|_{op}^2|v|^2$,

$$|Mv|^2\leq\|M\|_{op}^2|v|^2\leq\left(\max_i\mu_i^2\right)|v|^2\leq\left((n-1)\sum_i\lambda_i^2\right)|v|^2=(n-1)|H|^2|v|^2$$

利用柯西-施瓦茨不等式。 □

注意，上述不等式对高阶张量仍然成立，例如 $H=H_{jk}^{(i)}$,$v=v_k^{(i)}$对于 $i=1,$ ....., N，其中 Mv替换为 $\langle M,\ v\rangle=\sum_i M_{(i)}v^{(i)}$。

下一个引理给出的估计略强于定理 2.8。

引理4.5。 （局部 $W^{3,\,2}$估计，带有额外因子 $|\nabla df|^p$）设 (f,u)是 $M\times[t_1,t_2]$上方程(8) 的光滑解。那么对于任意 $p<\frac{4}{3}$，

$$\begin{aligned}\int_M|\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4\leq& C\int_M e^{4u}|f_t||\nabla df|^{p+1}\varphi^4+C\int_M(1+|\nabla df|^p|df|^6+|\nabla df|^{p+3})\varphi^4\\ &+C\int_M|\nabla df|^{p+2}\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned} \tag{52}$$

其中 C 取决于 p。

证明。 式 (52) 的证明类似，但需要对这些项进行更细致的处理。分部积分并利用式 (24)，可得

(53)

$$
\begin{aligned}
&\int_M |\nabla^2 df|^2 |\nabla df|^p \varphi^4 \\
\leq & -\int_M \langle \nabla \Delta df, \nabla df\rangle |\nabla df|^p \varphi^4 + C\int_M (|df|^2|\nabla df| + |\nabla df| + |df|^4 + |df|)|\nabla df|^{p+1}\varphi^4 \\
& - p\int_M (\langle \nabla^2 df, \nabla df\rangle)^2 |\nabla df|^{p-2}\varphi^4 + 4\int_M |\nabla^2 df||\nabla df|^{p+1}\varphi^3|\nabla\varphi| \\
\leq & \int_M |\Delta df|^2 |\nabla df|^p \varphi^4 + p\int_M \langle \Delta df, \nabla df\rangle \langle \nabla^2 df, \nabla df\rangle |\nabla df|^{p-2}\varphi^4 \\
& + 4\int_M \langle \Delta df, \nabla df\rangle |\nabla df|^p \varphi^3 \nabla\varphi + C\int_M (|df|^2|\nabla df| + |\nabla df| + |df|^4 + |df|)|\nabla df|^{p+1}\varphi^4 \\
& - p\int_M (\langle \nabla^2 df, \nabla df\rangle)^2 |\nabla df|^{p-2}\varphi^4 + 4\int_M |\nabla^2 df||\nabla df|^{p+1}\varphi^3|\nabla\varphi| \\
\leq & V + VI + VII + \delta\int_M |\nabla^2 df|^2 |\nabla df|^p \varphi^4 + C\int_M (1 + |\nabla df|^p |df|^6 + |\nabla df|^{p+3})\varphi^4 \\
& + C\int_M |\nabla df|^{p+2}\varphi^2 |\nabla\varphi|^2
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
V &= \int_M |\Delta df|^2 |\nabla df|^p \varphi^4 \\
VI &= p\int_M \langle \Delta df, \nabla df\rangle \langle \nabla^2 df, \nabla df\rangle |\nabla df|^{p-2}\varphi^4 \\
VII &= -p\int_M (\langle \nabla^2 df, \nabla df\rangle)^2 |\nabla df|^{p-2}\varphi^4.
\end{aligned}
$$

现在我们有

$$
\begin{aligned}
V + VI &= \int_M \langle \Delta \nabla_k f, \nabla_j \left(\nabla_j \nabla_k f |\nabla df|^p\right)\rangle \varphi^4 \\
&= \int_M \langle \nabla_k \Delta f + Ric_{ki}\nabla_i f, \nabla_j \left(\nabla_j \nabla_k f |\nabla df|^p\right)\rangle \varphi^4 \\
&\leq \int_M \langle \nabla \Delta f, \Delta df\rangle |\nabla df|^p \varphi^4 + p\int_M \langle \nabla_k \Delta f, \nabla_j \nabla_k f\rangle \langle \nabla_j \nabla df, \nabla df\rangle |\nabla df|^{p-2}\varphi^4 \\
&\quad + C\int_M |df||\Delta df||\nabla df|^p \varphi^4 + C\int_M |df||\nabla df|^p |\nabla^2 df|\varphi^4 \\
&\leq \int_M |\nabla \Delta f|^2 |\nabla df|^p \varphi^4 + \int_M \langle \nabla_k \Delta f, Ric_{ki}\nabla_i f\rangle |\nabla df|^p \varphi^4 \\
&\quad + p\int_M \langle \nabla_k \Delta f, \nabla_j \nabla_k f\rangle \langle \nabla_j \nabla df, \nabla df\rangle |\nabla df|^{p-2}\varphi^4 \\
&\quad + C\int_M |df||\Delta df||\nabla df|^p \varphi^4 + C\int_M |df||\nabla df|^p |\nabla^2 df|\varphi^4.
\end{aligned}
$$

通过分部积分，上面的第一项为

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla\Delta f|^2|\nabla df|^p\varphi^4 = &-\int_M \langle\Delta^2 f,\Delta f\rangle|\nabla df|^p\varphi^4\\ &-p\int_M \langle\nabla_k\Delta f,\Delta f\rangle\langle\nabla_k\nabla df,\nabla df\rangle|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\ &-4\int_M \langle\nabla_k\Delta f,\Delta f\rangle|\nabla df|^p\varphi^3\nabla_k\varphi.\end{aligned}$$

将这些结果结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}V+VI\le &-\int_M \langle\Delta^2 f,\Delta f\rangle|\nabla df|^p\varphi^4 - p\int_M \langle\nabla_k\Delta f,\Delta f\rangle\langle\nabla_k\nabla df,\nabla df\rangle|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\ &+p\int_M \langle\nabla_k\Delta f,\nabla_j\nabla_k f\rangle\langle\nabla_j\nabla df,\nabla df\rangle|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\ &+\delta\int_M |\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4 + C\int_M (1+|\nabla df|^p|df|^6+|\nabla df|^{p+3})\varphi^4\\ &+C\int_M |\nabla df|^{p+2}\varphi^2|\nabla\varphi|^2\\ =&I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.\end{aligned}$$

现在， I_2， I_3 上面的量可以利用 $H_{jk}=\nabla_j\nabla_k f$、 $v_k=\nabla_k\Delta f$ 和 $w_k=\langle\nabla_k\nabla df,\nabla df\rangle$ 进行估计，

$$\begin{aligned}I_2+I_3=&-p\int_M \langle v_k,\mathrm{tr}(H)I\rangle w_k|\nabla df|^{p-2}\varphi^4 + p\int_M \langle v_j,H_{jk}\rangle w_j|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\ \le&\frac{p}{4}\int_M \left(\langle v_k,H_{jk}-\mathrm{tr}(H)I\rangle\right)^2|\nabla df|^{p-2}\varphi^4 + p\int_M |w_k|^2|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\ \le&\frac{3p}{4}\int_M |\nabla\Delta f|^2|\nabla df|^p\varphi^4 + p\int_M |w_k|^2|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 (51) 结合 $n=4$ 得到。综上，(53) 变为

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4 \le &-\int_M \langle\Delta^2 f,\Delta f\rangle|\nabla df|^p\varphi^4 + \left(\frac{3p}{4}+\delta\right)\int_M |\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4\\ &+C\int_M (1+|\nabla df|^p|df|^6+|\nabla df|^{p+3})\varphi^4 + C\int_M |\nabla df|^{p+2}\varphi^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

由于我们假设 $p<\frac{4}{3}$，当 δ 足够小时，项 $\int|\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4$ 可以吸收到左边。

另一方面，将 (8) 中的第一个方程乘以 $-\Delta f|\nabla df|^p\varphi^4$ ，得到

$$
\begin{aligned}
&-\int_M \langle \Delta^2 f, \Delta f\rangle |\nabla df|^p\varphi^4 \\
=&\int_M e^{4u}\langle f_t, \Delta f\rangle |\nabla df|^p\varphi^4 - \int_M \langle \Delta(A(df,df)), \Delta f\rangle |\nabla df|^p\varphi^4 \\
&+\int_M \langle\langle \Delta f, \Delta P\rangle, \Delta f\rangle |\nabla df|^p\varphi^4 - 2\int_M \langle \nabla\langle \Delta f, \nabla P\rangle, \Delta f\rangle |\nabla df|^p\varphi^4 \\
\le&\int_M e^{4u}|f_t||\Delta f||\nabla df|^p\varphi^4 \\
&+\int_M \langle 2A(\nabla df, df) + DA(df,df)\cdot df, \nabla\Delta f|\nabla df|^p\varphi^4 + 4\Delta f|\nabla df|^p\varphi^3\nabla\varphi\rangle \\
&+\int_M \langle 2A(\nabla df, df) + DA(df,df)\cdot df, p\Delta f\langle\nabla^2 df, \nabla df\rangle|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\rangle \\
&+3C_N\int_M (|\Delta f|^3 + |\Delta f|^2|df|^2)|\nabla df|^p\varphi^4 + 2C_N\int_M |\nabla\Delta f||\Delta f||df||\nabla df|^p\varphi^4 \\
=&\int_M e^{4u}|f_t||\Delta f||\nabla df|^p\varphi^4 + II_2 + II_2' + III_2 + 2IV_2.
\end{aligned}
$$

如上所述，每一项都可以估计为

$$
\begin{aligned}
II_2 \le& C_N\int_M (2|\nabla df||df| + |df|^3)(|\nabla\Delta f||\nabla df|^p\varphi^4 + 4|\Delta f||\nabla df|^p\varphi^3|\nabla\varphi|) \\
\le&\delta\int_M |\nabla\Delta f|^2|\nabla df|^p\varphi^4 + C\int_M |df|^6|\nabla df|^p\varphi^4 + C\int_M |\nabla df|^{p+2}|df|^2\varphi^4 \\
&+C\int_M |\Delta f|^2|\nabla df|^p\varphi^2|\nabla\varphi|^2 \\
II_2' \le& C_N\int_M (2|\nabla df||df| + |df|^3)(|\nabla^2 df||\nabla df^p|\varphi^4) \\
\le&\delta\int_M |\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4 + C\int_M |\nabla df|^{p+2}|df|^2\varphi^4 + C\int_M |df|^6|\nabla df|^p\varphi^4 \\
III_2 \le& C\int_M |\nabla df|^{p+3}\varphi^4 + C\int_M |\nabla df|^{p+2}|df|^2\varphi^4 \\
IV_2 \le&\delta\int_M |\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4 + C\int_M |\nabla df|^{p+2}|df|^2\varphi^4.
\end{aligned}
$$

将所有结果合并，我们得到

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4 \le& C\int_M e^{4u}|f_t||\nabla df|^{p+1}\varphi^4 + C\int_M (1 + |\nabla df|^p|df|^6 + |\nabla df|^{p+3})\varphi^4 \\
&+C\int_M |\nabla df|^{p+2}\varphi^2|\nabla\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

命题4.6。 存在 $\varepsilon_1 > 0$ ，使得以下结论成立：

设(f, u) 是(8) 在 $M\times[t_1,t_2]$ 上的一个光滑解，且满足

$$
\sup_{t\in[t_1,t_2]}\int_{B_r} 1 + |df|^4 + |\nabla df|^2 \le \varepsilon_1.
$$

Then

$$\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8, \int_{B_r}|df|^{12}\varphi^8 \leq C_{10}\varepsilon_1^2$$
$$\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|\varphi^4 \leq C_{10}\varepsilon_1$$

对于某个常数

$$C_{10} := C_{10}(t_2, r, t_2 - t_1, V_2(t_1))$$

其中

$$V_2(t_1) = \int_{B_r} e^{12u}(t_1).$$

证明。如上所述，由 (52)、 $p = 1$ 和定理 4.3 可得，

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|\varphi^4 \leq& C\int_{B_r}(1+|\nabla df|^4+|df|^8)\varphi^4 + C\int_{B_r}|\nabla df|^3\varphi^2|\nabla\varphi|^2\\ &+ C\int_{B_r} e^{4u}|f_t||\nabla df|^2\varphi^4\\ \leq& C\varepsilon_1 + C\frac{1}{r^2}\varepsilon_1^{\frac{3}{2}} + C\int_{B_r} e^{4u}|f_t||\nabla df|^2\varphi^4.\end{aligned} \tag{54}$$

这里我们使用插值不等式

$$\int_{B_r}|\nabla df|^3\varphi^2|\nabla\varphi|^2 \leq C\frac{1}{r^2}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^4\varphi^4\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\frac{1}{r^2}\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}.$$

对于最后一项，我们可以估计为

$$\begin{aligned}\int_{B_r} e^{4u}|f_t||\nabla df|^2\varphi^4 \leq& C\left(\int_{B_r} e^{4u}|f_t|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{B_r} e^{12u}\varphi^8\right)^{\frac{1}{6}}\\ \leq& C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{B_r} e^{12u}\varphi^8\right)^{\frac{1}{6}}.\end{aligned} \tag{55}$$

由定理 2.4 可得，

$$\begin{aligned}\int_{B_r} e^{12u}\varphi^8(t) \leq& \int_{B_r} e^{12u}\varphi^8(t_1) + C\int_{t_1}^t\int_{B_r}\left(|\nabla df|^2+|df|^4\right)^3\varphi^8\\ \leq& \int_{B_r} e^{12u}\varphi^8(t_1) + C\int_{t_1}^t\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8 + |df|^{12}\varphi^8.\end{aligned}$$

另一方面，由索伯列夫嵌入和上述不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}} \leq& C\left(\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|\varphi^4 + |\nabla df|^3\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ \leq& C\varepsilon_1^{\frac{3}{2}} + C\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|\varphi^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_r}|df|^{12}\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\leq& C\left(\int_{B_r}|\nabla df|^2|df|^4\varphi^4+|df|^6\varphi^2|\nabla\varphi|^2\right)\\ \leq& C\left(\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{B_r}|df|^6\varphi^2\right)^{\frac{2}{3}}+C\int_{B_r}|df|^6\varphi^2|\nabla\varphi|^2\\ \leq& C\left(\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}+C\left(\int_{B_r}|df|^6\varphi^2\right)^{2}+C\int_{B_r}|df|^6\varphi^2|\nabla\varphi|^2\\ \leq& C\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}+C\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|\varphi^4+C\varepsilon_1^3+C\frac{1}{r^2}\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

其中我们使用了以下插值不等式

$$\int_{B_r}|df|^6\leq\left(\int_{B_r}|df|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|df|^8\right)^{\frac{1}{2}}\leq\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}.$$

结合以上不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B_r}\left(|\nabla df|^6+|df|^{12}\right)\varphi^8\leq& C(1+\frac{1}{r^4})\varepsilon_1^3+C\left(\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|\varphi^4\right)^2\\ \leq& C\left(1+\frac{1}{r^4}\right)\varepsilon_1^2+C\varepsilon_1\left(\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_{B_r}e^{12u}\varphi^8\right)^{\frac{1}{3}}\\ \leq& C\left(1+\frac{1}{r^4}\right)\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^8\\ &+C\varepsilon_1^3\left(\int_{B_r}e^{12u}\varphi^8(t_1)+C\int_{t_1}^{t}\int_{B_r}\left(|\nabla df|^6+|df|^{12}\right)\varphi^8\right).\end{aligned}$$

现在记

$$X(t)=\int_{B_r}\left(|\nabla df|^6+|df|^{12}\right)\varphi^8(t).$$

则上述不等式变为

$$X(t)\leq D_1+D_2\int_{t_1}^{t}X(s)ds$$

其中

$$D_1=C\left(1+\frac{1}{r^4}\right)\varepsilon_1^2+C\varepsilon_1^3\int_{B_r}e^{12u}(t_1),\quad D_2=C\varepsilon_1^3.$$

由格朗沃尔不等式可得

$$X(t)\leq D_1\left(1+D_2(t_2-t_1)e^{D_2(t_2-t_1)}\right)=C_{10}\varepsilon_1^2$$

对于某个常数 $C_{10}=C_{10}(t_2,\ r,\ t_2-t_1,\ V_2(t_1))$。

最后，对于 $\int|\nabla^2 df|^2|\nabla df|\varphi^4$，由 (54) 和 (55) 可得，

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|\varphi^4\leq& C\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\varepsilon_1+C\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}(V_2(t_1)+C(t_2-t_1)C_{10})^{\frac{1}{6}}C_{10}^{\frac{1}{3}}\varepsilon_1\\ \leq& C_{10}\varepsilon_1.\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

由此，我们得到

$$\int_{B_r} e^{12u}\varphi^8(t),\ \sup_{t\in[t_1,t_2]}\|df\|_{C^0(B_r)} \le C_{11} \tag{56}$$

对于某个常数 $C_{11} = C_{11}(t_2,\ r,\ t_2-t_1,\ V_2(t_1)\ \varepsilon_1)$。

5. Higher order estimate

本节中，我们在小性假设 (47) 下为解导出 H¨older 估计。本节始终将 φ视为 B_r 上的截断函数，且满足$|\nabla\varphi| \le \frac{4}{r}$。

我们首先证明以下 $L^2W^{4,\ 2}$ 型估计。

命题 5.1. 存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得下述结论成立：

设 (f,u) 是定义在 $M\times[t_1,t_2]$ 上的 *(8)* 的一个光滑解，且满足

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]}\int_{B_r} 1+|df|^4+|\nabla df|^2 \le \varepsilon_1.$$

Then

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\Delta^2 f|^2\varphi^4, \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^4\varphi^4\right)^{\frac12} \le C_{12} \tag{57}$$

对于某个常数

$$C_{12} := C_{12}(t_2, r, t_2-t_1, V_2(t_1), \varepsilon_1).$$

证明。 由方程 $e^{4u}f_t = -\Delta^2 f + B$ 和 $f_t \perp B$，我们得到

$$\int_{B_r}|\Delta^2 f|^2\varphi^4 = \int_{B_r} e^{8u}|f_t|^2\varphi^4 + \int_{B_r}|B|^2\varphi^4.$$

对于第二项，我们注意到

$$\begin{aligned} B =& \Delta(A(df,df)) - \langle\Delta f, \Delta P\rangle + 2\nabla\langle\Delta f, \nabla P\rangle \\ |B|^2 \le& C(|\Delta df|^2|df|^2 + |\nabla df|^4 + |\nabla df|^2|df|^4 + |df|^8 \\ &+ |\Delta f|^4 + |\Delta f|^2|df|^4 + |\nabla\Delta f|^2|df|^2 + |\nabla df|^2|\Delta f|^2). \end{aligned}$$

由上一节和 (56) 可得，$\int_{B_r}|B|^2\varphi^4 \le C$，其中 C为某个常数。接下来，对于第一项，我们得到

$$\int_{B_r} e^{8u}|f_t|^2\varphi^4 = \left(\int_{B_r} e^{12u}\varphi^4\right)^{\frac23}\left(\int_{B_r}|f_t|^6\varphi^4\right)^{\frac13} \le \frac23\left(\int_{B_r}|f_t|^6\varphi^4\right)^{\frac12} + \frac13\left(\int_{B_r} e^{12u}\varphi^4\right)^2.$$

由定理 3.10 和 (56)，我们得到第一个估计。

第二个估计由索伯列夫嵌入 $W^{1,\ 0}{}^2 \hookrightarrow L^4$ 得到。 □

结合上述结果与定理 4.3，我们得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^3\varphi^4 \le \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^4\varphi^4\right)^{\frac12}\left(\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2\varphi^4\right)^{\frac12} \le C_{12}C_9^{\frac12}\varepsilon_1^{\frac12}.$$

相反，结合定理 4.6，我们还得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2|\nabla df|^3\varphi^4 \le \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^4\varphi^4\right)^{\frac12}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^6\varphi^4\right)^{\frac12} \le C_{12}C_{10}^{\frac12}\varepsilon_1^{\frac12}.$$

此时，我们需要比定理 2.5 更为精细的估计，以便在$\iint |\nabla df|^{p+2}\varphi^4$的界下，对任意 $p>0$将$\iint |\nabla\Delta f|^2|\nabla df|^p\varphi^4$与 $\iint |\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4$联系起来。

引理5.2。 存在 $\varepsilon_1>0$ 使得以下结论成立：

设(f,u)是 $M\times[t_1,t_2]$ 上的方程(8) 的光滑解，其中

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]}\int_{B_r} 1+|df|^4+|\nabla df|^2\le\varepsilon_1.$$

还假设对于某个 $p>0$,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla df|^{p+2}\le C'.$$

Then

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4\le(2+p)\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla\Delta f|^2|\nabla df|^p\varphi^4+C'_p \tag{58}$$

对于某个常数 $C'_p:=C'_p(t_2,r,t_2-t_1,V_2(t_1)\ \varepsilon_1,p,C')$。

证明。 通过分部积分和（24），

$$\begin{aligned}
\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4 =& -\int_{B_r}\langle\Delta\nabla df,\nabla df\rangle|\nabla df|^p\varphi^4-p\int_{B_r}(\langle\nabla^2 df,\nabla df\rangle)^2|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\
&-4\int_{B_r}\langle\nabla^2 df,\nabla df\rangle|\nabla df|^p\varphi^3\nabla\varphi\\
\le& -\int_{B_r}\langle\nabla\Delta df,\nabla df\rangle|\nabla df|^p\varphi^4-p\int_{B_r}(\langle\nabla^2 df,\nabla df\rangle)^2|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\
&+C\int_{B_r}(|\nabla df|+C)|\nabla df|^p\varphi^4+C\int_{B_r}|\nabla^2 df||\nabla df|^{p+1}\varphi^3|\nabla\varphi|\\
=&\int_{B_r}|\Delta df|^2|\nabla df|^p\varphi^4+p\int_{B_r}\langle\Delta df,\nabla df\rangle\langle\nabla^2 df,\nabla df\rangle|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\
&-p\int_{B_r}(\langle\nabla^2 df,\nabla df\rangle)^2|\nabla df|^{p-2}\varphi^4\\
&+C\int_{B_r}(|\nabla df|+C)|\nabla df|^p\varphi^4+C\int_{B_r}|\nabla^2 df||\nabla df|^{p+1}\varphi^3|\nabla\varphi|\\
\le&\Big(1+\frac{p}{4}\Big)\int_{B_r}|\Delta df|^2|\nabla df|^p\varphi^4+\delta\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|^p\varphi^4\\
&+C\int_{B_r}|\nabla df|^{p+2}\varphi^2|\nabla\varphi|^2.
\end{aligned}$$

再次使用（24），并对 $[t_1,t_2]$ 积分，我们得到所需的不等式。 □

由定理5.2及 $p=3$，我们得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|^3\varphi^4\le 5C_{12}C_{10}^{\frac12}\varepsilon_1^{\frac12}+C'_3.$$

由索伯列夫嵌入和H¨older不等式，我们还得到

$$\left(\int_{B_r}|\nabla df|^{10}\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\leq C\int_{B_r}|\nabla^2 df|^2|\nabla df|^3\varphi^4+|\nabla df|^5\varphi^2|\nabla\varphi|^2$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla df|^8\varphi^4\leq\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^{10}\varphi^8\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|\nabla df|^6\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_{13} \tag{59}$$

这也意味着

$$\int_{B_r}e^{16u}\varphi^8(t)\leq\int_{B_r}e^{16u}\varphi^8(t_1)+C\int_{t_1}^{t}\int_{B_r}|\nabla df|^8\varphi^8+|df|^{16}\varphi^8\leq C_{13} \tag{60}$$

对于某个常数 $C_{13}:=C_{13}(t_2,\ r,\ t_2-t_1,\ V_3(t_1)\ \varepsilon_1)$，其中

$$V_3(t_1):=\int_{B_r}e^{16u}(t_1).$$

借助对 $\int e^{16u}$ 的改进控制，我们得到以下高阶估计。

命题 5.3。 存在 $\varepsilon_1>0$，使得以下结论成立：

设 (f,u) 是 (8) 在 $M\times[t_1,t_2]$ 上的一个光滑解，且满足

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]}\int_{B_r}1+|df|^4+|\nabla df|^2\leq\varepsilon_1.$$

Then

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\Delta^2 f|^{\frac{8}{3}}\varphi^4\leq C_{14} \tag{61}$$

对某个常数

$$C_{14}:=C_{14}(t_2,r,t_2-t_1,V_3(t_1),\varepsilon_1).$$

证明。 如上所述，由 $|\Delta^2 f|^2=e^{8u}|f_t|^2+|B|^2$，我们有

$$\int_{B_r}|\Delta^2 f|^{\frac{8}{3}}\varphi^4\leq C\int_{B_r}e^{\frac{32}{3}u}|f_t|^{\frac{8}{3}}\varphi^4+C\int_{B_r}|B|^{\frac{8}{3}}\varphi^4.$$

对于第二项，利用 (24)，我们有

$$|B|^{\frac{8}{3}}\leq C\left(|\nabla\Delta f|^{\frac{8}{3}}|df|^{\frac{8}{3}}+|\nabla df|^{\frac{16}{3}}+|\nabla df|^{\frac{8}{3}}|df|^{\frac{16}{3}}+|df|^{\frac{32}{3}}\right).$$

因此，作为上一节和上述计算的推论，$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|B|^{\frac{8}{3}}\varphi^4\leq C$。对于第一项，我们有

$$\int_{B_r}e^{\frac{32}{3}u}|f_t|^{\frac{8}{3}}\varphi^4\leq\left(\int_{B_r}e^{16u}\varphi^4\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_{B_r}|f_t|^8\varphi^4\right)^{\frac{1}{3}}.$$

由 (60) 和定理 3.11，我们得到所需的不等式。 □

根据标准椭圆正则性，我们得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla^3 df|^{\frac{8}{3}}\varphi^4\leq C_{15}$$

对某个常数 $C_{15} := C_{15}(t_2, r, t_2 - t_1, V_3(t_1)\ \varepsilon_1)$。这意味着，根据索伯列夫嵌入，

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{B_r} |\nabla^2 df|^8 \varphi^4 \right)^{\frac{1}{3}}, \int_{t_1}^{t_2} (\sup_{B_r} |\nabla df|)^{\frac{8}{3}} dt \leq C_{15}. \tag{62}$$

现在只需得到关于 u 的以下一致估计。

推论5.4. 存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得以下结论成立：设 (f, u) 是 $M \times [t_1, t_2]$ 上满足 (8) 的光滑解，其中

$$\sup_{t \in [t_1, t_2]} \int_{B_r} 1 + |df|^4 + |\nabla df|^2 \leq \varepsilon_1.$$

Then

$$\sup_{B_r \times [t_1, t_2]} u(x, t) \leq C_u \tag{63}$$

对某个常数 $C_u := C_u(t_2, r, t_2 - t_1, V_u(t_1)\ \varepsilon_1)$ 其中

$$V_u(t_1) := \sup_{B_r} u(x, t_1).$$

证明. 首先注意到，通过以下方式，我们有 (16) 关于 $t \in [t_1, t_2]$ 的一个变体

$$e^{4u}(t) = e^{-4a(t-t_1)} \left(e^{4u}(t_1) + 4b \int_{t_1}^{t} e^{4a(s-t_1)} (|\nabla df|^2(s) + |df|^4(s)) ds \right).$$

将 $V_u(t_1)$记为

$$V_u(t_1) := \sup_{B_r} u(x, t_1).$$

那么我们有

$$e^{4u}(t) \leq e^{4V_u(t_1)} + 4be^{4a(t_2-t_1)} \int_0^t (\sup_{B_r} |\nabla df|)^2(s) ds + C$$

它是有界的。 □

上述结果至关重要，因为算子 $\partial_t + e^{-4u}\Delta^2$ 现在是一致抛物型的。

现在我们可以证明其光滑性了。

定理 5.5. 存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得下述结论成立：

令(f, u) 为(8) 在 $M \times [t_1, t_2]$ 上的一个光滑解，且满足

$$\sup_{t \in [t_1, t_2]} \int_{B_r} 1 + |df|^4 + |\nabla df|^2 \leq \varepsilon_1.$$

那么， f、 u 及其导数的霍尔德范数均有界，且其界仅依赖于 t_2、 r、 $t_2 - t_1$、 ε_1 以及 u 在 t_1处的相应范数。

证明。 注意，由定理 4.3和 (62)，可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} |\nabla^2 df|^4 \varphi^4 \leq \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{B_r} |\nabla^2 df|^8 \varphi^4 \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{B_r} |\nabla^2 df|^2 \varphi^4 \right)^{\frac{2}{3}} \leq C_9^{\frac{2}{3}} \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} C_{15}$$

因此 $|\nabla^2 df| \in L^4(B_r \times [t_1, t_2])$。

现在我们关注一致抛物型算子 $\partial_t + e^{-4u}\Delta^2$。我们有

$$|(\partial_t + e^{-4u}\Delta^2) f| \leq e^{-4u}|B| \in L^4(B_r \times [t_1, t_2])$$

由此，根据标准抛物理论可得 $\nabla^3 df$， $\partial_t f \in L^4(B_r \times [t_1, t_2])$。再由索伯列夫嵌入可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{B_r} |\nabla^2 df|^p \varphi^4 \right)^{\frac{4}{p}} \leq C \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} |\nabla^3 df|^4 \varphi^4 \leq C$$

对任意 $p > 1$。如上所述，我们得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} |\nabla^2 df|^{6-\frac{8}{p}} \varphi^4 \leq \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{B_r} |\nabla^2 df|^p \varphi^4 \right)^{\frac{4}{p}} \left(\int_{B_r} |\nabla^2 df|^2 \varphi^4 \right)^{\frac{p-4}{p}} \leq C.$$

这意味着对任意 $p > 1$，都有 $\nabla^3 df, \partial_t f \in L^{6-\frac{8}{p}}(B_r \times [t_1, t_2])$；特别地，当 $p = 8$ 时，有 $\nabla^3 df, \partial_t f \in L^5(B_r \times [t_1, t_2])$。重复这一过程可得，对任意 $p > 1$，都有 $\nabla^3 df, \partial_t f \in L^p(B_r \times [t_1, t_2])$。

接下来，由 (2.4) 可得

$$|\nabla u|(t) \leq C \left(e^{4u}(t_1) |\nabla u|(t_1) + \int_{t_1}^{t} (|\nabla^2 df||\nabla df| + |\nabla df||df|^3)(s) ds \right)$$

$$\int_{B_r} |\nabla u|^p(t) \leq C \int_{B_r} |\nabla u|^p(t_1) + C(t - t_1)^{p-1} \int_{t_1}^{t} \int_{B_r} (|\nabla^2 df|^p |\nabla df|^p + |\nabla df|^p |df|^{3p})$$

因此，对任意 $p > 1$，都有 $\nabla u \in L^p(B_r \times [t_1, t_2])$，其中界依赖于 $\|\nabla u\|_{L^p(B_r)}(t_1)$ 和 p。现在在 (8) 的第一个方程中取 ∇，得到

$$|(\partial_t + e^{-4u} \Delta^2) \nabla f| \leq C \left(|\nabla u||B| + |\nabla B| \right) \in L^p(B_r \times [t_1, t_2])$$

对任意 $p > 1$，这意味着对任意 $p > 1$，有 $\nabla^4 df, \partial_t(df) \in L^p(B_r \times [t_1, t_2])$。重复这一过程，我们得到 $\nabla^5 df, \nabla^6 df, \partial_t(\nabla df)\ \partial_t(\nabla^2 df) \in L^p(B_r \times [t_1, t_2])$。

最后，由索伯列夫嵌入可得 $f, df, \nabla df, \nabla^2 df \in C^{\alpha}(B_r \times [t_1, t_2])$，其中某个 $\alpha > 0$。这意味着 $(\partial_t + e^{-4u} \Delta^2) f \in C^{\alpha, \alpha/4}(B_r \times [t_1, t_2])$，其中 $C^{\alpha, \alpha/4}$是指数为 α 的抛物型 H¨older 空间。由 Schauder 估计和标准的逐步提升论证，我们完成证明。□

6. 短时间存在性

本节中，我们推导短时间存在性结果。大部分方法和技巧与 [14] 或 [16], 类似，记号取自 [12]。注意，与 CHF 或 n-CHF 类似，利用 (16) 对系统 (8) 解耦可得到一个演化方程

$$f_t = \frac{e^{4at} \left(-\Delta^2 f + \Delta(A(df, df)) - \langle \Delta f, \Delta P \rangle + 2 \nabla \langle \Delta f, \nabla P \rangle \right)}{1 + 4b \int_0^t e^{4as} (|\nabla df|^2 + |df|^4)(s) ds}$$

该方程在时间上是非局部的，因此很难分析。作为替代，我们采用 Mantegaza-Martinazzi [12] 和 Park [14], [16]中的不动点方法。

定义空间 $P^m(M, T)$ 为 $C^{\infty}(M \times [0, T], \mathbb{R}^L)$ 在以下范数下的完备化

$$\|f\|^2_{P^m(M,T)} := \sum_{4j+k \leq 4m} \int_{M \times [0,T]} |\partial_t^j \nabla^k f|^2 dx dt.$$

另外，定义空间 $Z^m(M, T)$ 为 $C^{\infty}(M \times [0, T])$ 在以下范数下的完备化

$$\|u\|^2_{Z^m(M,T)} := \sum_{4j+k \leq 4m-2} \int_{M \times [0,T]} |\partial_t^j \nabla^k u|^2 dx dt.$$

如果算子 $\partial_t + e^{-4u}\Delta^2$ 是一致抛物型的，那么映射

(64)
$$\Phi : P^m(M,T) \to W^{2(2m-1),2}(M) \times P^{m-1}(M,T), \quad \Phi(f) = (f_0, (\partial_t + e^{-4u}\Delta^2)f)$$

是一个适用于 $m > \frac{14}{8}$ 的 C^1-映射。（见 [12] 中的引理 2.5）因此，我们考虑情形 $m = 2$，也就是说，我们考虑 $f \in P^2(M,T)$ 和 $u \in Z^2(M,T)$。由索伯列夫嵌入，存在一个普适常数 C，使得

$$\|\nabla^7 f\|_{L^{\frac{8}{3}}(M\times[0,T])}\ \|\nabla^3 f_t\|_{L^{\frac{8}{3}}(M\times[0,T])}\ \|\nabla^6 f\|_{L^4(M\times[0,T])}\ \|\nabla^2 f_t\|_{L^4(M\times[0,T])},$$
$$\|\nabla^5 f\|_{L^8(M\times[0,T])}\ \|\nabla f_t\|_{L^8(M\times[0,T])}\ \|\nabla^4 f\|_{L^p(M\times[0,T])}\ \|f_t\|_{L^p(M\times[0,T])} \le C\|f\|_{P^2}$$

对任意 $p > 1$，并且

$$\|f\|_{C^0(M\times[0,T])}, \|\nabla f\|_{C^0(M\times[0,T])}, \|\nabla^2 f\|_{C^0(M\times[0,T])}, \|\nabla^3 f\|_{C^0(M\times[0,T])} \le C\|f\|_{P^2}.$$

类似地，u 满足

$$\|\nabla^5 u\|_{L^{\frac{8}{3}}(M\times[0,T])}, \|\nabla u_t\|_{L^{\frac{8}{3}}(M\times[0,T])}, \|\nabla^4 u\|_{L^4(M\times[0,T])}, \|u_t\|_{L^4(M\times[0,T])},$$
$$\|\nabla^3 u\|_{L^8(M\times[0,T])}, \|\nabla^2 u\|_{L^p(M\times[0,T])} \le C\|u\|_{Z^2}$$

对任意 $p > 1$，并且

$$\|u\|_{C^0(M\times[0,T])}, \|\nabla u\|_{C^0(M\times[0,T])} \le C\|u\|_{Z^2}.$$

此外，根据标准抛物理论，我们有

$$\sup_{0\le t\le T} \|f(t)\|_{W^{6,2}(M)}, \sup_{0\le t\le T} \|f_t(t)\|_{W^{2,2}(M)} \le C\|f\|_{P^2},$$
$$\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{W^{4,2}(M)} \le C\|u\|_{Z^2}.$$

固定 $f_0 \in W^{6,2}(M, \mathbb{R}^L)$。若 $\|u\|_{C^0} \le 1$，则算子 $\partial_t + e^{-4u}\Delta^2$ 是一致抛物型的。因此存在 $c_1 > 0$，使得对每个 $g \in P^1$，方程存在唯一解 $h \in P^2$

$$(\partial_t + e^{-4u}\Delta^2)h = g, \quad h(0) = f_0 \tag{65}$$

with

$$\|h\|_{P^2} \le c_1(\|f_0\|_{W^{6,2}} + \|g\|_{P^1}). \tag{66}$$

设 h_0 是方程的唯一解

$$(\partial_t + \Delta^2)h_0 = 0, \quad h(0) = f_0.$$

由 (66)，存在一个常数 c_2，它仅取决于 c_1 和 $\|f_0\|_{W^{6,2}}$，使得

$$\|h_0\|_{P^2} \le c_2. \tag{67}$$

现在，对于 $\delta > 0$，考虑 P^2 中的闭球 B_δ

$$B_\delta = \{f \in P^2 : f(0) = f_0 \text{ and } \|f - h_0\|_{P^2} \le \delta\}. \tag{68}$$

此外，对于 $\delta' > 0$，考虑 Z^2 中的闭球 $\tilde{B}_{\delta'}$

$$\tilde{B}_{\delta'} = \{u \in Z^2 : u(0) = 0 \text{ and } \|u\|_{Z^2} \le \delta'\}. \tag{69}$$

这里假设 δ' 足够小，使得 $\|u\|_{Z^2} \le \delta'$ 蕴含 $\|u\|_{C^0} \le 1$。我们还假设 $\delta' \le \frac{\delta}{2c_1c_3}$，其中 c_3 由定理 6.2 给出。

我们将按如下方式构造两个算子 S_1： $P^2\times Z^2\to P^2$ 和 S_2： $P^2\times Z^2\to Z^2$。定义 $S_1(f,\ u)=h$，其中 $h\in P^2$ 是以下方程的唯一解

(70)
$$(\partial_t+e^{-4u}\Delta^2)h=e^{-4u}\left(\Delta(A(df,df))-\langle\Delta f,\Delta P\rangle+2\nabla\langle\Delta f,\nabla P\rangle\right),\quad h(0)=f_0.$$

类似地，定义 $S_2(f,u)=v$，其中 $v\in Z^2$ 是下列方程的唯一解

$$\partial_t v=be^{-4u}(|\nabla df|^2+|df|^4)-a,\quad v(0)=0. \tag{71}$$

命题 6.1。对于 $f\in P^2,\ u\in Z^2,\ S_1(f,u)\in P^2$ 和 $S_2(f,u)\in Z^2$.

此外，存在 $T_1=T_1(c_2,\delta,\delta')>0$，使得 S_1 限制为 S_1： $B_\delta\times$ ~ ~ ~$B_{\delta'}\to B_\delta$，且 S_2 限制为 $S_2:B_\delta\times B_{\delta'}\to B_{\delta'}$。

证明中需要以下引理。

引理 6.2。存在 $T_2=T_2(c_2,\delta,\delta')>0$，使得对所有 $T\le T_2$、任意 $h\in B_\delta$ 以及每个 $u_1,u_2\in B_{\delta'}$,

$$\|(e^{4u_1-4u_2}-1)\partial_t h\|_{P^1}\le c_3\|u_1-u_2\|_{Z^2} \tag{72}$$

其中常数 c_3 仅依赖于 c_2 和 δ。

证明。注意到，对于某个常数 C，有 $|e^{4u_1-4u_2}-1|\le C|u_1-u_2|$，若 $\|u_1\|_{C^0}$, $\|u_2\|_{C^0}\le 1$。此外，对于 $u\in Z^2$，取 $\|u\|_{C^0}\le 2$，我们有

$$|\nabla^4(e^u)|\le e^u|\nabla^4 u|+C\left(|\nabla^3 u||\nabla u|+|\nabla^2 u|^2+|\nabla^2 u||\nabla u|^2+|\nabla u|^4\right)$$

因此，对于所有充分小的 T，有 $\|\nabla^4(e^u)\|_{L^2(M\times[0,T])}\le C(\|u\|_{C^0})\|u\|_{Z^2}$。类似的论证可得，对于所有充分小的 T，有 $\|\partial_t(e^u)\|_{L^2(M\times[0,T])}\le C(\|u\|_{C^0})\|u\|_{Z^2}$，对所有充分小的 T 均成立。

考虑

$$\begin{aligned}|\nabla^4\left((e^{4u_1-4u_2}-1)\partial_t h\right)|\le C\Big(&|\nabla^4 e^{4(u_1-u_2)}||\partial_t h|\\&+|\nabla^3 e^{4(u_1-u_2)}||\partial_t\nabla h|+|\nabla^2 e^{4(u_1-u_2)}||\partial_t\nabla^2 h|\\&+|\nabla e^{4(u_1-u_2)}||\partial_t\nabla^3 h|+|u_1-u_2||\partial_t\nabla^4 h|\Big).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|\nabla^4\left((e^{4u_1-4u_2}-1)\partial_t h\right)\|^2_{L^2(M\times[0,T])}\le&C(\|h\|_{P^2})\|u_1-u_2\|^2_{Z^2}T\\&+C\|u_1-u_2\|^2_{C^0}\|h\|^2_{P^2}\\\le&Cc_2\|u_1-u_2\|^2_{Z^2}\end{aligned}$$

若 T 充分小。类似的论证即可完成证明。 □

证明。(定理 6.1 的证明)

首先，检查 $S_1(f,u)\in P^2$。只需证明 $e^{-4u}B\in P^1$，其中 $B=\Delta(A(df,df))-\langle\Delta f,\Delta P\rangle+2\nabla\langle\Delta f,\nabla P\rangle$。如上所述，我们有

$$\begin{aligned}|B|\le C\big(&|\Delta df||df|+|\nabla df|^2+|\nabla df||df|^2+|df|^4+|\Delta f|^2+|\Delta f||df|^2\\&+|\nabla\Delta f||df|+|\nabla df||\Delta f|\big).\end{aligned}$$

因此

(73)

$$\begin{aligned}\|\nabla^4(e^{-4u}B)\|^2_{L^2(M\times[0,T])} \leq& C(\|f\|_{P^2},\|u\|_{Z^2})\sum_{k_1+k_2=4}\||\nabla^{k_1+3}f||\nabla^{k_2}u|\|^2_{L^2(M\times[0,T])}\\ \leq& C(\|f\|_{P^2},\|u\|_{Z^2})T^{\frac{1}{4}}\\ \|\partial_t(e^{-4u}B)\|^2_{L^2(M\times[0,T])} \leq& C(\|f\|_{P^2},\|u\|_{Z^2})\left(\|\partial_t\nabla^3 f\|^2_{L^2(M\times[0,T])}+\|\partial_t u\|^2_{L^2(M\times[0,T])}\right)\\ \leq& C(\|f\|_{P^2},\|u\|_{Z^2})T^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

至此便得到 $S_1(f,u)\in P^2$。而 $v=S_2(f,u)\in Z^2$ 则源于如下事实：

(74)

$$\begin{aligned}\|\nabla^6 v\|^2_{L^2(M\times[0,T])} \leq& C(\|f\|_{P^2},\|u\|_{Z^2})\sum_{k_1+k_2=6}\||\nabla^{k_1+2}f||\nabla^{k_2}u|\|^2_{L^2(M\times[0,T])}T\\ \leq& C(\|f\|_{P^2},\|u\|_{Z^2})T\\ \|\partial_t\nabla^2 v\|^2_{L^2(M\times[0,T])} \leq& C(\|f\|_{P^2},\|u\|_{Z^2})\sum_{k_1+k_2=2}\|\nabla^{k_1+2}f||\nabla^{k_2}u|\|^2_{L^2(M\times[0,T])}\\ \leq& C(\|f\|_{P^2},\|u\|_{Z^2})T^{1-\frac{2}{p}}\end{aligned}$$

~对任意 $p>1$成立。这一观察还表明，对于 $f\in B_\delta$ 与 $u\in B_{\delta'}$，以及足够小的T，我们有 $v=S_2(f,u)\in B_{\delta'}$。

接下来，记 $h=S_1(f,u)$与 $g=e^{-4u}B$。 $h-h_0$ 满足

$$(\partial_t+e^{-4u}\Delta^2)(h-h_0)=g+(e^{-4u}-1)\Delta^2 h_0,\quad (h-h_0)(0)=0.$$

因此由(66)，我们得到

$$\|h-h_0\|_{P^2}\leq c_1\|g+(e^{-4u}-1)\Delta^2 h_0\|_{P^1}\leq c_1\|g\|_{P^1}+c_1\|(e^{-4u}-1)\partial_t h_0\|_{P^1}.$$

上文已证明，对于所有足够小的 T，

$$\|\nabla^4 g\|_{L^2(M\times[0,T])},\|\partial_t g\|_{L^2(M\times[0,T])}\leq\frac{\delta}{4c_1}.$$

对于第二项，由定理 6.2，

$$\|(e^{-4u}-1)\partial_t h_0\|_{P^1}\leq c_3\|u\|_{Z^2}\leq\frac{\delta}{2c_1}.$$

证明至此完成。 □

接下来，我们证明，输入 S_1,S_2 的差异可以由 P^2 或 Z^2 中相应的范数控制。更确切地说，我们证明以下命题。

命题6.3. 存在 $T_3=T_3(c_2,\delta,\delta')>0$，使得对于所有 $T\leq T_3$，以下结论均成立。

~(1) 对于任意 $f\in B_\delta$ 和 $u_1,\ u_2\in B_{\delta'}$，我们有

$$\|S_1(f,u_1)-S_1(f,u_2)\|_{P^2}\leq c_1c_3\|u_1-u_2\|_{Z^2} \tag{75}$$

$$\|S_2(f,u_1)-S_2(f,u_2)\|_{Z^2}\leq\frac{1}{3}\|u_1-u_2\|_{Z^2}. \tag{76}$$

~(2) 对于任意 f_1、 $f_2 \in B_\delta$ 和 $u \in B_{\delta'}$，我们有

$$\|S_1(f_1,u)-S_1(f_2,u)\|_{P^2} \leq \frac{1}{3}\|f_1-f_2\|_{P^2} \tag{77}$$

$$\|S_2(f_1,u)-S_2(f_2,u)\|_{Z^2} \leq T^{\frac{1}{2}}\|f_1-f_2\|_{P^2}. \tag{78}$$

证明。 情形 (1):

~固定 $f \in B_\delta$ 和 $u_1,\ u_2 \in B_{\delta'}$。记 $h_1 = S_1(f,\ u_1)$ $h_2 = S_1(f,\ u_2)$ $v_1 = S_2(f,\ u_1)$ $v_2 = S_2(f,\ u_2)$。则 $h_1 - h_2$ 满足

$$(\partial_t + e^{-4u_1}\Delta^2)(h_1-h_2) = (e^{4u_1-4u_2}-1)\partial_t h_2, (h_2-h_1)(0) = 0.$$

于是由 (66) 和定理 6.2,

$$\|h_1-h_2\|_{P^2} \leq c_1\|(e^{4u_1-4u_2}-1)\partial_t h_2\|_{P^1} \leq c_1c_3\|u_1-u_2\|_{Z^2}$$

这表明 (75)。

$v_1 - v_2$ 满足

$$v_1 - v_2 = b\int_0^t e^{-4(u_1-u_2)}(|\nabla df|^2 + |df|^4)(s)ds.$$

因此，与 (74) 类似,

$$\begin{aligned}
\|\nabla^6(v_1-v_2)\|^2_{L^2(M\times[0,T])} \leq& C(\delta,\delta')\sum_{k_1+k_2=6}\||\nabla^{k_1+2}f||\nabla^{k_2}(u_1-u_2)|\|^2_{L^2(M\times[0,T])}T\\
\leq& C(\delta,\delta')\|f\|^2_{P^2}\|u_1-u_2\|^2_{Z^2}T\\
\|\partial_t\nabla^2(v_1-v_2)\|^2_{L^2(M\times[0,T])} \leq& C(\delta,\delta')\sum_{k_1+k_2=2}\||\nabla^{k_1+2}f||\nabla^{k_2}(u_1-u_2)|\|^2_{L^2(M\times[0,T])}\\
\leq& C(\delta,\delta')\|f\|^2_{P^2}\|u_1-u_2\|^2_{Z^2}T^{1-\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

对任意 $p > 1$，都有这一结论，这意味着当 T 足够小时，(76) 成立。

情形 (2):

~取定 $f_1, f_2 \in B_\delta$ 和 $u \in B_{\delta'}$。记 $h_1 = S_1(f_1,u)$ $h_2 = S_1(f_2,u)$ $v_1 = S_2(f_1,u)$ $v_2 = S_2(f_2,u)$。则 $h_1 - h_2$ 满足

$$\begin{aligned}
(\partial_t + e^{-4u}\Delta^2)(h_1-h_2) =& e^{-4u}\big(\Delta(A(f_1)(df_1,df_1)) - \langle\Delta f_1, \Delta P(f_1)\rangle + 2\nabla\langle\Delta f_1, \nabla P(f_1)\rangle\big)\\
&- e^{-4u}\big(\Delta(A(f_2)(df_2,df_2)) - \langle\Delta f_2, \Delta P(f_2)\rangle + 2\nabla\langle\Delta f_2, \nabla P(f_2)\rangle\big)
\end{aligned}$$

且 $(h_1-h_2)(0) = 0$。现在右侧为 $I + II + III + IV + V + VI$，其中

$$\begin{aligned}
I =& e^{-4u}\Delta\big((A(f_1)-A(f_2))(df_1,df_1)\big)\\
II =& e^{-4u}\Delta\big(A(f_2)(df_1+df_2, df_1-df_2)\big)\\
III =& e^{-4u}\langle\Delta(f_1-f_2), \Delta P(f_1)\rangle\\
IV =& e^{-4u}\langle\Delta f_2, \Delta(P(f_1)-P(f_2))\rangle\\
V =& e^{-4u}2\nabla\langle\Delta(f_1-f_2), \nabla P(f_1)\rangle\\
VI =& e^{-4u}2\nabla\langle\Delta f_2, \nabla(P(f_1)-P(f_2))\rangle.
\end{aligned}$$

我们断言，只要 T 足够小， $\|I\|_{P^1,\cdots,\|VI\|_{P^1}} \leq \frac{1}{18c_1}\|f_1 - f_2\|_{P^2}$。为此，请注意 $|A(f_1) - A(f_2)| \leq C(\delta)|f_1 - f_2|$，因此

$$\begin{aligned}\|\nabla^4 I\|^2_{L^2(M\times[t_1,t_2])} \leq & C(\delta,\delta')\Bigg(\sum_{k_1+k_2+k_3=4}\||\nabla^{k_1+2}(f_1-f_2)||\nabla^{k_2+1}f_1||\nabla^{k_3}u|\|^2_{L^2(M\times[t_1,t_2])}\\ &+\||\nabla^{k_1+1}(f_1-f_2)||\nabla^{k_2+2}f_1||\nabla^{k_3}u|\|^2_{L^2(M\times[t_1,t_2])}\\ &+\||\nabla^{k_1}(f_1-f_2)||\nabla^{k_2+3}f_1||\nabla^{k_3}u|\|^2_{L^2(M\times[t_1,t_2])}\Bigg)\\ \leq & C(\delta,\delta')\|f_1-f_2\|^2_{P^2}T^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\partial_t I\|^2_{L^2(M\times[t_1,t_2])} \leq & C(\delta,\delta')\Bigg(\||\partial_t(f_1-f_2)||\nabla f_1||u|\|^2_{L^2(M\times[t_1,t_2])}\\ &+\||(f_1-f_2)||\partial_t\nabla f_1||u|\|^2_{L^2(M\times[t_1,t_2])}\\ &+\||(f_1-f_2)||\nabla f_1||\partial_t u|\|^2_{L^2(M\times[t_1,t_2])}\Bigg)\\ \leq & C(\delta,\delta')\|f_1-f_2\|^2_{P^2}T^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

采用类似的论证即可得出该结论，从而完成式（77）的证明。

$v_1 - v_2$ 满足

$$\begin{aligned}v_1 - v_2 =& b\int_0^t e^{-4u}(|\nabla df_1|^2 + |df_1|^4 - |\nabla df_2|^2 - |df_2|^4)(s)ds\\ =& b\int_0^t e^{-4u}(\langle\nabla^2(f_1-f_2),\nabla^2(f_1+f_2)\rangle + (|df_1|^2+|df_2|^2)\langle\nabla(f_1-f_2),\nabla(f_1+f_2)\rangle)(s)ds.\end{aligned}$$

因此，与式（74）类似，

$$\begin{aligned}&\|\nabla^6(v_1-v_2)\|^2_{L^2(M\times[0,T])}\\ &\qquad\leq C(\delta,\delta')\sum_{k_1+k_2+k_3=6}\||\nabla^{k_1+2}(f_1-f_2)||\nabla^{k_2+2}(f_1+f_2)||\nabla^{k_3}u|\|^2_{L^2(M\times[0,T])}T\\ &\qquad\leq C(\delta,\delta')\|f_1-f_2\|^2_{P^2}\|u\|^2_{Z^2}T,\\ &\|\partial_t\nabla^2\ (v_1-v_2)\ \|^2_{L^2\ (M\times[0,T])}\\ &\qquad\leq C(\delta,\delta')\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\||\nabla^{k_1+2}(f_1-f_2)||\nabla^{k_2+2}(f_1+f_2)||\nabla^{k_3}u|\|^2_{L^2(M\times[0,T])}\\ &\qquad\leq C(\delta,\delta')\|f_1-f_2\|^2_{P^2}\|u\|^2_{Z^2}T^{1-\frac{2}{p}}\end{aligned}$$

对任意 $p > 1$，这意味着当 T 足够小时，(78) 成立。 □

现在我们可以证明短时间存在性了。首先，我们定义一个巴拿赫空间 $X = P^2 \times Z^2$，并赋予其范数

$$\|(f,u)\|_X = (2c_1c_3)^{-1}\|f\|_{P^2} + \|u\|_{Z^2}. \tag{79}$$

定理 6.4。固定 $f_0 \in W^{6,\ 2}(M,N)$。则存在 $T_0 = T_0(c_2,\delta,\delta') > 0$，使得方程 $(f,u) \in B_\delta \times \tilde{B}_{\delta'} \subset P^2 \times Z^2$ 的解 (8) 存在于 $M \times [0,T_0]$ 和$f(M \times [0,T_0]) \subset N$上。

证明。令 $T_0 = T_0(c_1,\ c_2,\ c_3,\ \delta,\ \delta')$ 为

$$T_0 = \min\left\{T_1, T_2, T_3, \left(\frac{1}{2}(2c_1c_3)^{-1}\right)^2\right\} > 0. \tag{80}$$

现在考虑算子 $\mathcal{S}\colon\ X \to X$ 由 $\mathcal{S}(f,u) = (S_1(f,u)\ S_2(f,u))$ 给出。由于定理 6.1，由于 $T_0 \le T_1$，$\mathcal{S}$ 限制为 $\mathcal{S}\colon\ B_\delta \times B_{\delta'} \to B_\delta \times B_{\delta'}$。设 $f_1, f_2 \in B_\delta$ 与 $u_1, u_2 \in B_{\delta'}$。由定理 6.3，对任意 $T \le T_0$，我们有 $\|\mathcal{S}(f_1,u_1) - \mathcal{S}(f_2,u_2)\|_X$

$$\begin{aligned}
=&(2c_1c_3)^{-1}\|S_1(f_1,u_1) - S_1(f_2,u_2)\|_{P^2} + \|S_2(f_1,u_1) - S_2(f_2,u_2)\|_{Z^2}\\
\le&(2c_1c_3)^{-1}\|S_1(f_1,u_1) - S_1(f_1,u_2)\|_{P^2} + (2c_1c_3)^{-1}\|S_1(f_1,u_2) - S_1(f_2,u_2)\|_{P^2}\\
&+ \|S_2(f_1,u_1) - S_2(f_1,u_2)\|_{Z^2} + \|S_2(f_1,u_2) - S_2(f_2,u_2)\|_{Z^2}\\
\le&\frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{Z^2} + (2c_1c_3)^{-1}\frac{1}{3}\|f_1 - f_2\|_{P^2} + \frac{1}{3}\|u_1 - u_2\|_{Z^2} + T^{\frac{1}{2}}\|f_1 - f_2\|_{P^2}\\
\le&\frac{5}{6}\Big((2c_1c_3)^{-1}\|f_1 - f_2\|_{P^2} + \|u_1 - u_2\|_{Z^2}\Big)\\
=&\frac{5}{6}\|(f_1,u_2) - (f_2,u_2)\|_X.
\end{aligned}$$

由巴拿赫不动点定理，存在 $(f,u) \in P^2 \times Z^2$ 使得 $S_1(f,u) = f$ 且 $S_2(f,u) = u$。这表明 (f,u) 是 (8) 的解。

最后，我们需要证明 $f(M\times[0,T_0]) \subset N$。由于 N 是等距地嵌入 $\mathbb{R}^L$ 中的光滑黎曼流形，我们可以找到其管状邻域 N_δ 并考虑最近点投影 $\Pi_N\colon\ N_\delta \to N$。注意，$P = \nabla\Pi(y)\colon \mathbb{R}^L \to T_yN$ 是正交投影，并且对 $y \in N$ 而言，$A(y) = -\nabla^2\Pi(y)\colon\ T_yN \otimes T_yN \to (T_yN)^\perp$ 是 $N \hookrightarrow \mathbb{R}^L$ 的第二基本形式。定义

$$\rho(x,t) = |\Pi(f(x,t)) - f(x,t)|^2. \tag{81}$$

那么 $\rho(\cdot,\ 0) = 0$，通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
\partial_t\rho =&2\langle\Pi(f) - f, \nabla\Pi(f_t) - f_t\rangle\\
=&-2e^{-4u}\langle\Pi(f) - f, \Delta^2 f - \Delta(A(df,df)) + \langle\Delta f, \Delta P\rangle - 2\nabla\langle\Delta f, \nabla P\rangle\rangle\\
=&-2e^{-4u}\langle\Pi(f) - f, P(\Delta^2 f)\rangle = 0
\end{aligned}$$

因为 $\Pi(f) - f \perp T_fN$ 且 $P(\Delta^2 f) \in T_fN$。因此，对于所有 t，$\rho(\cdot,\ t) = 0$，且 $f(M\times[0,T_0]) \subset N$。□

7. 全局正则性

根据第 6 节，存在 $T_0 > 0$，使得方程 (8) 的光滑解 $(f,\ u)$ 在 $M\times[0,T_0)$ 上存在。设 T_0 为解 $(f,\ u)$ 保持光滑的最大时间，使其在 $M\times[0,T_0)$ 上光滑。另假设 $T_0 < \infty$，即有限时奇点存在。我们首先证明，有限时奇点的判据是能量集中。随后证明这种能量集中不可能发生，从而得出不存在有限时奇点。

首先，我们证明定理 6.4 中得到的方程 (8) 的解 $(f,\ u)$ 是光滑的。

命题 7.1。设 $(f,u) \in P^2 \times Z^2$ 是 $M\times[0,T]$ 上方程 (8) 的一个解，则 (f,u) 在 $M\times[0,T]$ 上光滑。

证明。由于 $f \in P^2$，我们有 $\|df\|_{C^0}$，$\|\nabla df\|_{C^0} \le C\|f\|_{P^2} =: M < \infty$。于是

$$e^{-4u} = \frac{e^{4at}}{1 + 4b\int_0^t e^{4as}(|\nabla df|^2 + |df|^4)(s)ds} \ge \frac{1}{1 + 2\frac{b}{a}M^4}.$$

因此，算子 $\partial_t + e^{-4u}\Delta^2$ 是一致抛物型的，故通过使用 $\nabla^2 df \in C^{\alpha,\alpha/2}$, f进行逐步提升论证，可知其是光滑的，因此 u在 $M \times [0,T)$上也光滑。□

接下来，我们给出定理 3.2 的全局版本。

命题 7.2. （导数估计，全局版本）设 (f,u) 是(8) 在 $M \times [t_1,t_2]$上的一个光滑解。那么

$$\frac{d}{dt}\int_M e^{4u}|f_t|^2 \le 4a\int_M e^{4u}|f_t|^2 - \int_M |\Delta f_t|^2 - C_b\int_M |f_t|^2(|\nabla df|^2 + |df|^4). \tag{82}$$

其证明与定理 3.2 的证明几乎相同。由定理 7.2 和定理 2.2 可得

$$\int_M e^{4u}|f_t|^2(t_2) - \int_M e^{4u}|f_t|^2(t_1) \le 4a\int_{t_1}^{t_2}\int_M e^{4u}|f_t|^2 = 4a(E(t_1) - E(t_2))$$

因此，对于任意 $t \ge 0$,

$$\int_M e^{4u}|f_t|^2(t) \le 4aE(0). \tag{83}$$

定理 7.3. 设 (f,u) 是 $M \times [0,T_0)$ 上方程 (8) 的一个光滑解。假设$T_0 < \infty$ 是最大存在时间。那么至多存在有限多个点 $x_1,\cdots,x_k$，使得对所有 $i = 1,\cdots,k$,

$$\lim_{r\to 0}\limsup_{t\nearrow T_0}\int_{B_r(x_i)} |\nabla df|^2 + |df|^4 > \varepsilon_1. \tag{84}$$

证明. 我们首先证明，若对于 $x \in M$,

$$\lim_{r\to 0}\limsup_{t\nearrow T_0}\int_{B_r(x)} |\nabla df|^2 + |df|^4 \le \varepsilon_1, \tag{85}$$

那么 f 和 u 在 (x,T_0) 处是光滑的。

根据上述假设，我们可以假设存在某个固定的 t_1，满足 $0 < t_1 < T_0$，且对所有充分小的 $r > 0$，$\sup_{[t_1,T_0]}\int_{B_r(x)} |\nabla df|^2 + |df|^4(t) \le \varepsilon_1$。此外，由于 u在 t_1处光滑，$V_u(t_1) = \sup_{B_r} u(x,t_1) < \infty$。于是，由定理 5.5 可得，$f$ 是光滑的，并且 u 在 (x,T_0) 处也光滑。

接下来，假设对所有 $x \in M$，(85) 都成立。那么 f，u 在 $M \times \{T_0\}$ 上光滑，因此由定理 6.4，解 $(t,\ u)$ 在 $M \times [0,T_0+\delta]$ 上存在，其中 $\delta > 0$。这与 T_0 是最大存在时间的假设相矛盾。因此，应该存在 $x \in M$，使得对任意 $r > 0$,

$$\limsup_{t\nearrow T_0}\int_{B_r(x)} |\nabla df|^2 + |df|^4 > \varepsilon_1. \tag{86}$$

我们证明这样的点至多只有有限多个。设 $x_1,\ \cdots,\ x_k$ 是这样点的任意有限集合。固定 $R > 0$，使得 $B_{2R}(x_i)$ 两两不相交。令$T_0' < T_0$，并令 $0 < r \le R$。

我们首先断言

$$\sup_{T_0' \le t \le T_0}\int_{B_R(x_i)} |\Delta f|^2(t) > s\varepsilon_1 \tag{87}$$

其中， $s>0$ 的选取满足

$$s \leq \min\{\varepsilon_1^{-1}, (8C_8)^{-1}\}.$$

假设 $\sup_{T_0' \leq t \leq T_0} \int_{B_R(x_i)} |\Delta f|^2(t) \leq s\varepsilon_1$。由 (46)，当 t 充分接近 T_0 时，

$$\frac{\varepsilon_1}{2} < \int_{B_r(x_i)} |\nabla df|^2 + |df|^4(t) \leq C_8(s\varepsilon_1)^2 + C_8 s\varepsilon_1 \leq 2C_8 s\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon_1}{4}$$

这是不可能的，从而验证了该断言。注意，由于 (86)，我们还可以说

$$\limsup_{t \nearrow T_0} \int_{B_R(x_i)} |\Delta f|^2 > s\varepsilon_1. \tag{88}$$

注意，上述条件与 R 无关。令 $T_0' < T_0$ 待稍后确定。选取 $t_i \in [T_0', T_0]$ 使得

$$\int_{B_R(x_i)} |\Delta f|^2(t_i) > \frac{s\varepsilon_1}{2}.$$

由定理 3.3，并利用 $B_r(x_i)$，我们有

$$\begin{aligned}
4a\frac{s\varepsilon_1}{2} <& 4a \int_{B_R(x_i)} |\Delta f|^2(t_i) \\
\leq& 4aK^i(T_0') + C(T_0 - T_0')e^{4aT_0}(1 + \frac{1}{R^4}) \left(K^i(T_0') + Ce^{4aT_0}(1 + \frac{1}{R^4})(1 + T_0)E(0) \right) \\
\leq& \left(4a + C(T_0 - T_0')e^{4aT_0}(1 + \frac{1}{R^4}) \right) K^i(T_0') + C(T_0 - T_0')e^{8aT_0}(1 + \frac{1}{R^4})^2(1 + T_0)E(0)
\end{aligned}$$

其中

$$K^i(T_0') = \int_{B_{2R}(x_i)} e^{4u}|f_t|^2(T_0') + 4a \int_{B_{2R}(x_i)} |\Delta f|^2(T_0').$$

现在我们选取 T_0' 使得

$$C(T_0 - T_0')e^{8aT_0}(1 + \frac{1}{R^4})^2(1 + T_0)E(0) \leq 2a\frac{s\varepsilon_1}{2}.$$

由此可得

$$as\varepsilon_1 < \left(4a + C(T_0 - T_0')e^{4aT_0}(1 + \frac{1}{R^4}) \right) \left(\int_{B_{2R}(x_i)} e^{4u}|f_t|^2(T_0') + 4a \int_{B_{2R}(x_i)} |\Delta f|^2(T_0') \right).$$

记 $C_{16} = \left(4a + C(T_0 - T_0')e^{4aT_0}(1 + \frac{1}{R^4})\right)$。于是我们最终得到

$$\begin{aligned}
as\varepsilon_1 <& C_{16} \int_{B_{2R}(x_i)} e^{4u}|f_t|^2(T_0') + 4aC_{16} \int_{B_{2R}(x_i)} |\Delta f|^2(T_0') \\
kas\varepsilon_1 <& C_{16} \int_M e^{4u}|f_t|^2(T_0') + 4aC_{16} \int_M |\Delta f|^2(T_0').
\end{aligned}$$

由定理 2.2，$\int_M |\Delta f|^2(T_0') \leq E(0)$。此外，由 (83)，$\int_M e^{4u}|f_t|^2(T_0') \leq 4aE(0)$。因此右端是有限的，这意味着 k 有上界。这就完成了证明。□

接下来，我们将证明实际上不存在这样的有限时奇点。

证明。（定理1.3的证明）由第 6 节可知，存在 $T_0 > 0$，使得方程（8）的光滑解（f, u）存在于 $M \times [0, T_0)$。假设（x_0, T）是一个有限时奇点，并固定 B_R（x_0）为一个以 x_0 为中心的球。条件（88）意味着

$$\limsup_{t \nearrow T} \int_{B_R(x_0)} |\Delta f|^2(t) = K + \int_{B_R(x_0)} |\Delta f|^2(T)$$

对于某个正的常数 $K > s\varepsilon_1 > 0$，它度量了在 (x_0, T) 处的能量损失。等价地，由于 (88) 与 R 无关， K 可表示为

$$K = \lim_{r \to 0} \limsup_{t \nearrow T} \int_{B_r(x_0)} |\Delta f|^2(t).$$

设 $0 < r \leq R$ 和 φ 是 $B_r(x_0)$ 上的截断函数。定义局部能量

$$\Theta_r(t) = \int_{B_r(x_0)} |\Delta f|^2 \varphi^4. \tag{89}$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_r(t)}{dt} = \int_{B_r(x_0)} \varphi^4 \langle \Delta f_t, \Delta f \rangle \leq & \left(\int_{B_r(x_0)} |\Delta f_t|^2 \varphi^4 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_r(x_0)} |\Delta f|^2 \varphi^4 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & E(0)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_r(x_0)} |\Delta f_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此，对于 $s \leq t < T$，由定理 3.7 及 $\varepsilon = 1$,

$$\begin{aligned} \Theta_r(t) - \Theta_r(s) = & E(0)^{\frac{1}{2}} \int_s^t \left(\int_{B_r(x_0)} |\Delta f_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & E(0)^{\frac{1}{2}} (t-s)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \int_{B_R(x_0)} |\Delta f_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & C_{17} (t-s)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{90}$$

其中常数 C_{17} 仅依赖于 $E(0)$ T, R。

因此，我们可以取极限 $\lim_{t \nearrow T} \Theta_r(t)$，得到

$$K = \lim_{t \nearrow T} \int_{B_r(x_0)} |\Delta f|^2(t) - \int_{B_r(x_0)} |\Delta f|^2(T) = \lim_{t \nearrow T} \Theta_r(t) - \Theta_r(T).$$

结合上述两个不等式可得

$$|K + \Theta_r(T) - \Theta_r(s)| \leq C_{17} (T-s)^{\frac{1}{2}}. \tag{91}$$

现在，固定 $\delta > 0$ 使得

$$\delta = \min\{\frac{1}{C_{17}}, \frac{K}{4}\}. \tag{92}$$

同时固定 $s = T - \delta^4$，并选取足够小的 r，使得 $\Theta_r(T) < \frac{K}{4}$ 且 $\Theta_r(s) < \frac{K}{4}$。于是由(91)可得

$$\frac{K}{2} \leq C_{17} (T-s)^{\frac{1}{2}} \leq C_{17} \delta^2 < \delta \leq \frac{K}{4}$$

这是一个矛盾。因此不存在有限时奇点。于是通过对一致抛物型方程的自举论证，我们得到(8)的光滑解(f, u)，从而完成定理1.3的证明。□

References

[1] S.-Y. A. Chang、L. Wang 和 P. C. Yang。双调和映射的正则性理论。*Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 52 9 1113 1137, 1999 , ( ): – . [2] A. Fardoun 和 L. Saliba。关于极小化外蕴双调和映射。 *Calc. Var. Partial* , ( ):Paper No. . *Differential Equations* 60 4 132, 13, 2021
[3] J. Hineman、T. Huang 和 C.-Y. Wang。一类双调和映射热流的正则性与唯一性。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 50 3 491 524, , ( ): – .[4] P. 2014
Hornung 和 R. Moser。四维内蕴双调和映射的能量恒等式。 *Analysis & PDE*, 5(1):61–80, 2012. [5] G. Y. Jia ng。 2 *Chinese Ann.* -调和映射 *Math. Ser A* 7 389 402, 1986
及其一阶和二阶变分公式。 , : – .[6] T. Lamm。流入非正曲率流形的双调和映射热流。*Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 22 4 421 445, 2004 , ( ): – . [7] T. Lamm。小初始能量下外蕴双调和映射的热流。 *Annals of Global Analysis and Geometry* 26 4 369 384, 2004 , ( ): – . [8] T. Lamm 和 T. Rivi`ere。四维四阶系统的守恒律。*Comm. Partial Differential Equations*, 33(1-3):245–262, 2008. [9] P. Laurain 和 L. Lin。内蕴双调和映射的能量凸性及其应用 I：球面目标。 *J. Reine Angew. Math.*, 772:53–81, 2021.[10] P. Laurain 和 T. Rivi ` ere。双调和映 *Advances in Calculus of Variations* 6 2 191 216, 2013
射的能量量子化。 , ( ): – . [11] L. Liu 和 H. Yin。四维双调和映射流的有限时间爆破。 *J.* , : – .[12] C. Mantegazza 和 L. Martinazzi。关于流形上的拟线性抛物方程的注记。 *Elliptic Parabol. Equ.* 1 363 385, 2015
Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 11(4):857–874, 2012. [13] R. Moser。关于四维双调和映射正则性的注记。 *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 59 3 317 , ( ): –329,
2006. [14] W. Park。一种新的调和映射共形热流。 *J. Geom. Anal.*, 33(12):Paper No. 376, 36, 2023.[15] W. Park。调和映射共形热流的光滑性。 *arXiv preprint arXiv:2304.03444* 2023 , .[16] W. Park。
正则化 n-共形热流与整体光滑性。 *J. Differential Equations*, 463 114170, 2026 :Paper No. .[17] C. Wang。从 r 4 到黎曼流形的双调和映射。 *Mathematische Zeitschrift*, 247 1 65 87, 2004 ( ): – . [18] C. Wang。关于映入球面的双调和映射的注记。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 21 3 221 242, 2004 , ( ): – . [19] C. Wang。从 rm 到黎曼流形的平稳双调和映射。 *Communications on pure and applied mathematics* 57 4 419 444, 2004 , ( ): – . [20] C. Wang。四维双调和映射热流及其应用。 *Pure and Applied Mathematics Quarterly* 3 2 595 613, 2007 , ( ): – .