arXiv:2603.04268v1 [math.FA] 4 Mar 2026

由高斯核和平移不变空间生成的双曲正割的极点与暴露点

MARKUS VALˆAS HAGEN、ALEXANDER ULANOVSKII、DENIS ZELENT 和 ILYA ZLOTNIKOV

摘要。我们刻画了由高斯函数生成的平移不变空间中单位球（关于 L^1-范数）的极点和暴露点，以及由双曲正割生成的准移位不变空间中的极点和暴露点。

1. 引言与主要结果

1.1. 极点与暴露点。 设 X 是一个巴拿赫空间，$C \subset X$ 是一个闭凸集。如果元素 $f \in C$ 不位于包含于 C 中的任何非平凡线段的内部，则称其为 C 的极点；也就是说，不存在不同的点 f_1、$f_2 \in C$ 以及标量 $0 < \alpha < 1$，使得 $f = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$。在极点中，如果存在一个连续线性泛函 $\varphi \in X^*$ 使得

$$\varphi(f) > \varphi(g) \quad \text{for all } g \in C \setminus \{f\}.$$

等价地，φ 在 C 上于 f处唯一地达到其最大值。

Let

$$B(X) = \{f \in X : \|f\| \le 1\}, \qquad S(X) = \{f \in X : \|f\| = 1\}$$

表示 X的单位球和单位球面。我们分别用Ext(X)和Exp(X)，表示 $B(X)$的极点集和暴露点集。注意Exp(X) $\subset$ Ext(X) $\subset S(X)$。

根据经典的克莱因–米尔曼定理，集合 Ext(X) 和 Exp(X) 在底层空间的几何结构中发挥着根本作用。它们自然地出现在许多问题中，包括函数空间 [6] 线性等距映射的刻画，以及预测理论中的应用 [4]。人们已在众多函数空间中研究了这些集合，其中解析函数空间尤其受到持续关注。最重要且有趣的情形出现在配备 L^p-范数的函数空间中，此时 $p = 1$ 或 $p = \infty$ （另见下文注 1.1）。在这些情形下，人们对单位球的极端点和暴露点进行了广泛研究，尤其是经典哈代空间及其变体 [1, 5, 11, 17], 各种多项式空间 [8, 9, 10, 21], 以及某些

关键词和短语。极点，暴露点，单位球的几何，平移不变空间，高斯核。HAGEN、ZELENT和ZLOTNIKOV获得挪威研究理事会334466号资助的支持。1

Paley–Wiener空间 [8, 24]。如需更全面的介绍，请参阅综述 [12]，其中还指出了若干有趣的开放问题。

据我们所知，本文首次研究了平移不变函数空间和拟平移不变函数空间中单位球的极点和暴露点。我们聚焦于经典生成元——高斯核和双曲正割，因此所得空间由复平面 $\mathbb{C}$ 上的整函数或亚纯函数构成。这些空间在现代采样理论和 Gabor框架理论中也发挥着重要作用。从这些理论的视角来看，由于高斯函数与双曲正割函数的 Zak变换之间存在联系，它们表现出非常相似的性质，见 [15, 19, 23]。然而，正如下文所示，从巴拿赫空间几何的角度考察时，它们的性质有所不同。

1.2. **平移不变空间和拟平移不变空间**。设 $1 \le p \le \infty$，并设$\Gamma \subset \mathbb{R}$ 是一个分离集，即

$$\inf_{\gamma,\gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma'} |\gamma - \gamma'| > 0.$$

由函数 g 生成的准移位不变空间 $V_\Gamma^p(g)$ 由以下函数构成

$$f(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma g(x-\gamma), \quad \{c_\gamma\} \in l^p(\Gamma).$$

下文中，我们将上述表示中的系数 c_γ 记为 $c_\gamma(f)$。

按照惯例，我们始终假设 Γ-平移集合相对稠密；也就是说，存在一个 $R > 0$，使得每个长度为 R 的区间都至少包含 Γ 中的一个点。此假设对于后续分析并非必不可少。

在特殊情形 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 下，空间 $V^p(g) := V_{\mathbb{Z}}^p(g)$ 称为平移不变空间。

当 g 属于维纳融合空间 W 时，空间 $V_\Gamma^p(g)$ 定义良好，即

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|g\|_{L^\infty[k,k+1]} < \infty, \tag{1.1}$$

因为此时对于每个 $f \in V_\Gamma^p(g)$，$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ 都是有限的，参见例如 [25, 引理 8.1]。

与通常一样，我们赋予空间 V_Γ^p 标准的 L^p-范数。下文所考虑的准移位不变空间满足以下条件：对于每个 $p \in [1, \infty]$，存在正常数 K_1、K_2，使得

$$K_1 \|c\|_{l^p} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le K_2 \|c\|_{l^p}, \quad \text{for every } f \in V_\Gamma^p(g). \tag{1.2}$$

这一性质表明，$V_\Gamma^p(g)$ 是 $L^p(\mathbb{R})$ 的闭子空间。

注意，当 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 和 $f \in W$时，范数等价 (1.2) 成立，当且仅当傅里叶变换 $\hat{}g$ 在任意步长为 1 的等差数列上都不完全消失，参见[20]。关于一般分离集 Γ的情形，请读者参见 [26]。

与 Paley–Wiener空间一样，（准）平移不变空间在逼近论中发挥着基础作用。特别是，空间$V_\Gamma^p(g)$的采样和插值性质与由 g生成的 Gabor系统的框架性质密切相关，例如参见 [2, 14, 15, 16, 23, 25]。当 g 为高斯核或双曲正割时，会得到重要的例子：

$$G_a(x) := e^{-ax^2}, \quad H_a(x) = \frac{1}{e^{ax} + e^{-ax}}, \tag{1.3}$$

其中 $a > 0.$

众所周知，空间 $V^p(G_a)$ 和 $V_\Gamma^p(H_a)$ 满足 (1.2)，参见例如 [16], [25], [26]。容易验证， $V^p(G_a)$ 中的每个元素都可解析延拓为整函数，而 $V_\Gamma^p(H_a)$ 中的每个元素都可解析延拓为亚纯函数。

注 1.1. 对于满足 $1 < p < \infty$ 的空间 $V^p(G_a)$ 和 $V_\Gamma^p(H_a)$，单位球的极点集合与单位球面重合。这直接由 *Minkowski*不等式中的经典等号情形得出：$\|f+g\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$ 当且仅当 $f = ag$ 对某个 $a \geq 0$ 成立。

本文考察在 $p = 1.$ 情形下这些空间的单位球的几何

1.3. **主要结果**。

定理 1.2。（高斯核）（i）集合 $\mathrm{Ext}(V^1(G_a))$ 由满足 $\|f\|_1 = 1$ 的函数 $f \in V^1(G_a)$ 组成，并且

$$\textit{There is no point } \lambda \in \mathbb{C} \textit{ with } 0 < \operatorname{Im}\lambda < \pi/a \textit{ for which } f(\lambda) = f(\bar{\lambda}) = 0. \tag{1.4}$$

（ii）集合 $\mathrm{Exp}(V^1(G_a))$ 由满足以下两个条件的函数 $f \in \mathrm{Ext}(V^1(G_a))$ 组成：

$$\textit{There is no point } \lambda \in \mathbb{R} \quad \textit{such that} \quad f(\lambda) = f'(\lambda) = 0; \tag{1.5}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2ax}|f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2ax}|f(x)|\,dx = \infty. \tag{1.6}$$

注 1.3。在多项式和 *Paley–Wiener*空间；的情形中也会出现与（1.4）和（1.5）类似的条件，参见例如 [8,定理 1and 3]。

注 1.4。（见引理3.3）设 $f \in V^1(G_a)$。条件（1.6）等价于要求序列 $c_n(f)e^{2an}$ 和 $c_n(f)e^{-2an}$ 均不属于 $l^1(\mathbb{Z})$，即

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2an}|c_n(f)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2an}|c_n(f)| = \infty.$$

对于双曲正割，我们得到一般分离平移集 Γ.的$\mathrm{Ext}(V_\Gamma^1(H_a))$与$\mathrm{Exp}(V_\Gamma^1(H_a))$的描述

定理 1.5.（双曲正割生成元）设 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 为分离相对稠密集。

(i) 集合 $\mathrm{Ext}(V_\Gamma^1(H_a))$ 由满足 $\|f\|_1 = 1$、条件 (1.4) 以及条件的函数 $f \in V_\Gamma^1(H_a)$ 组成

$$c_\gamma(f) \neq 0, \quad \textit{for all } \gamma \in \Gamma. \tag{1.7}$$

(ii) 集合 $\mathrm{Exp}(V_\Gamma^1(H_a))$ 由满足条件(1.5)和(1.6)的函数 $f \in \mathrm{Ext}(V_\Gamma^1(H_a))$ 组成。

注记 1.6。 (见推论 4.4) 对于 $f \in V_\Gamma^1(H_a)$，条件 $e^{2ax} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 等价于以下两个条件

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{a\gamma} c_\gamma(f) = 0, \quad \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{2a\gamma} |c_\gamma(f)| < \infty.$$

类似地，$e^{-2ax} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 当且仅当

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-a\gamma} c_\gamma(f) = 0, \quad \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-2a\gamma} |c_\gamma(f)| < \infty.$$

我们用一个简单的例子来说明上述结果。

例 1.7. 考虑函数

$$f_\sigma(x) = C(e^{-(x-1)^2} - \sigma e^{-(x+1)^2}) = Ce^{-x^2-1}(e^{2x} - \sigma e^{-2x}) \in V^1(G_1), \quad \sigma \in \mathbb{C},$$

其中 C 的选取满足 $\|f_\sigma\|_{L^1} = 1$。注意到，恰当且仅当 $\sigma \notin \mathbb{R}$. 时，$f_\sigma \in \mathrm{Ext}(V^1(G_1))$。此外，$f_\sigma$ 不是 $B(V^1(G_1))$ 的暴露点，因为函数 $f_\sigma(x)e^{2x} \in L^1(\mathbb{R})$。相反，显然，双曲正割的任意有限个平移的线性组合都不属于 $\mathrm{Ext}(V_\Gamma^1(H_a))$，这是由 (1.7) 可知的。

定理 1.2 和定理 1.5 的证明采用复分析方法，并依赖 Hayman 的一个深刻结果 [18]，该结果涉及缓慢增长的整函数的增长与衰减之间的关系。由于一个关键的周期性现象，这种方法非常有效：由双曲正割 H_a 生成的准移位不变空间中的元素是 $2\pi i/a$-周期函数；而由高斯 G_a 生成的平移不变空间也具有类似性质，只要将函数乘以 $\exp(ax^2)$。我们指出，这种周期性此前已在 [15] 中用于分析由高斯和双曲正割生成的平移不变空间的采样集。

本文结构如下。第 2 节回顾极端点与暴露点的标准判据，并介绍一个来自整函数理论的辅助结果，该结果将在后文中发挥关键作用。第 3 节研究由高斯核生成的平移不变空间，并证明定理 1.2。定理 1.5 的证明见第 4 节。

2. 预备知识

2.1. 极端点与暴露点判据。 假设 g 是 (1.3) 中指定的生成元之一。我们对 (拟) 平移不变空间$V^1_\Gamma(g)$ 的单位球几何的分析，将依赖于以下两个标准引理。

引理 2.1 (极端点判据)。 假设 $f \in V^1_\Gamma(g)$ 且 $\|f\|_1 = 1$。那么， $f \in \mathrm{Ext}(V^1_\Gamma(g))$ 当且仅当不存在定义在 $\mathbb{R}$ 上、满足 $f\tau \in V^1_\Gamma(g)$ 的实值非恒定有界函数 τ。

引理 2.2 (暴露点判据)。 函数 $f \in \mathrm{Exp}(V^1_\Gamma(g))$ 是暴露的，当且仅当 $f \in \mathrm{Ext}(V^1_\Gamma(g))$ 且不存在定义在 $\mathbb{R}$ 上、满足 $fh \in V^1_\Gamma(g)$ 的实值非负非恒定函数 h。

这些引理在 Hardy 空间 H^1 和 Paley-Wiener 空间（见 [8, 13]）的情形中广为人知。相同的论证无需实质性修改，即可应用于由高斯核或双曲正割生成的（拟）平移不变空间 $V^1_\Gamma(g)$。

2.2. **Hayman 定理的一个推论。**给定一个整函数 h，s et

$$M(r,h) = \sup_{|z|\le r} |h(z)|, \quad m(r,h) = \inf_{|z|=r} |h(z)|. \tag{2.1}$$

若 $h(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ 是一个多项式，那么显然，对于每个正数 ε，都存在 $r_\varepsilon > 0$，使得对于所有 $r > r_\varepsilon.$， $m(r,h) > (1-\varepsilon)M(r,h)$。对于超越整函数，这一结论不再成立。然而，经典结果——尤其是 cos $\pi\lambda$-定理——表明，对于“缓慢”增长的函数，量 $m(r,h)$ 相对于 $M(r,h)$ 不可能过小。

以下引理是 Hayman 的经典结果的直接推论（参见 [18] 中的定理 1 和推论 1）：

引理 2.3. 设 ψ 是一个满足以下条件的整函数

$$\log M(r,\psi) \le C \log^2 r, \ r \ge 2, \quad \textit{for some constant } C. \tag{2.2}$$

那么，

(i) 对于几乎每个 $\theta \in [0, 2\pi)$，都存在 $r_\theta > 0$，使得

$$\log|\psi(re^{i\theta})| \ge \frac{\log M(r,\psi)}{2}, \quad r \ge r_\theta; \tag{2.3}$$

(ii) 存在一个集合 $E \subset (1,\infty)$ 满足 $\int_E (1/t)\, dt < \infty$，并且

$$\log m(r,\psi) \ge \frac{\log M(r,\psi)}{2}, \quad r \in (1,\infty) \setminus E. \tag{2.4}$$

引理 2.4。 设 φ是一个整函数，且为 $\pi i/a$-周期函数。那么

$$\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2az}, \quad z \in \mathbb{C},$$

其中该级数在任意带域 $-\infty < A \le \operatorname{Re} z \le B < \infty$ 内一致收敛。

事实上，令 $w := e^{2za}$，使得 $z = \log w/(2a)$ 且 $\operatorname{Re} z = \log |w|/(2a)$。由于 φ 是整函数且为$\pi i/a$-周期函数，显然，函数 $\psi(w) := \varphi(\frac{\log w}{2a})$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内解析。因此，

$$\psi(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k,$$

且该级数在任意环域 $0 < r < |w| < R < \infty$，内一致收敛，这就证明了引理。

引理 2.5。 假设 $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$ 是一个整函数，其中 φ_1 和 φ_2 是满足以下估计的整$\pi i/a$-周期函数

$$|\varphi_j(x+iy)| \le Ce^{Kx^2},\ j = 1, 2, \quad \textit{for all } x, y \in \mathbb{R} \textit{ and some } C, K > 0. \tag{2.5}$$

那么 φ 也满足 (2.5)，其中某些 C、$K > 0$。

尽管这个引理是 [7, 第 2]，讲中定理 1 的一个特例，我们仍基于引理 2.3 给出另一种证明，后面还会多次引用它。

证明。 考虑函数

$$\psi_j(w) := \varphi_j\left(\frac{\log w}{2a}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(j)} w^k,\ j = 1, 2.$$

记

$$\psi_j(w) = \sum_{k\ge 0} a_k^{(j)} w^k + \sum_{k<0} a_k^{(j)} w^k =: \psi_j^+(w) + \psi_j^-(w).$$

显然，两个函数 $\psi_j^-(w)$ $j = 1$，2，在 $|w| > 1$. 上有界。因此，根据 (2.5)，ψ_j^+ 满足 (2.2)，$j = 1$，2。

假设 $\psi_2^+ \equiv const$，于是 $n_0 := \max\{k \in \mathbb{Z} : a_k^{(2)} \ne 0\} \le 0$。那么对于所有绝对值充分大的 w，

$$|\psi_2(w)| \ge |w|^{n_0}\left(|a_{n_0}^{(2)}| - \left|\sum_{n<n_0} a_n^{(2)} w^{n-n_0}\right|\right) \ge C|w|^{n_0}.$$

现假设 ψ_2^+ 不是常值函数。由引理 2.3 (ii)，存在序列$r_k \to \infty$ 使得

$$\log m(r_k, \psi_2^+) > \frac{1}{2}\log M(r_k, \psi_2^+) \to \infty, \quad k \to \infty,$$

其中 m 与 M 在(2.1)中定义。因此， $|\psi_2(w)| > C, |w| = r_k, k \in \mathbb{N}.$

上述估计表明，存在一个序列 $r_k \to \infty$ 使得

$$|\psi_2(w)| \geq C|w|^{n_0} \quad \text{for some } n_0 \leq 0 \text{ and } |w| = r_k \to \infty. \tag{2.6}$$

因此，

$$|\varphi_2(z)| \geq Ce^{2an_0x} \quad \text{for some } n_0 \leq 0 \text{ and } x = x_k \to \infty. \tag{2.7}$$

利用 (2.7) 和关于 φ_1 的估计 (2.5)，我们得出 $\varphi(z)$ 对所有 $z = x+iy$ 都满足 (2.5)，其中 $x = x_k := (\log r_k)/(2a) \to +\infty$。

类似的方　　法表明， $\varphi(z)$ 对所有 $z = x + iy$，其中 $x = \tilde{x}_k \to -\infty$　　.

现在，我们将引理 2.3 (i) 应用于函数 $\psi_1^{\pm}$，得到数 $\theta \in [0, 2\pi)$ 和 $R = R(\theta) > 0$，使得函数 $\psi_1^{+}(re^{i\theta})$ 和 $\psi_1^{-}((1/r)e^{-i\theta})$ 均满足 (2.3)，其中 $r > R$。与上文类似，我们可知 $\varphi(z)$ 对所有 $z = x + iy_0$， $y_0 := \theta/(2a)$ 均满足 (2.5)。由于 φ 是整函数且具有 $\pi i/a$-周期性，因此对每个 $y = y_0 + \pi k/a$， $k \in \mathbb{Z}$，我们都有相同的估计。因此，我们可以找到 $y_1 \leq 0$ 和 $y_2 \geq \pi/a$ 以及一个较大的正数 K，使函数 $e^{-Kz^2}\varphi(z)$ 在矩形的边界上有界

$$P(k) := \{z = x + iy : \tilde{x}_k \leq x \leq x_k, y_1 \leq y \leq y_2, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

因此，

$$|\varphi(z)| \leq Ce^{Kx^2}, \quad z = x + iy \in P(k),$$

其中 C， K 不依赖于 $k.$。令 $k \to \infty$，并利用 φ 的 $\pi i/a$-周期性，我们可知 φ 满足 (2.5)。□

我们以两条技术性说明结束本节。

(1) 以下论证不依赖函数 H_a 和 G_a中形状参数 $a > 0$ 的取值。为使表述简洁，我们在陈述中保留 a，但在证明开始时令 $a = 1$。我们还令 $G := G_1$ 和 $H := H_1$。(2) 全文中，符号 C 表示一个正常数，其取值可能随行而变。

3. 高斯核：定理 1.2 的证明

3.1. 辅助引理。 回顾一下，每个元素 $f \in V^{\infty}(G_a)$ 都是如下形式的整函数

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-a(z-n)^2}, \quad \{c_n\} \in l^{\infty}(\mathbb{Z}). \tag{3.1}$$

由此可得:

$$|f(z)| \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| e^{-a(z-n)^2} \right| \le C e^{ay^2}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

我们从 以下对空间 V^∞(G_a 中函数的刻画开始).

引理 3.1。 设 $a > 0$。以下各陈述等价。

(i) $f \in V^\infty(G_a)$;(ii) $f(z) = e^{-az^2}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 是满足以下条件的 $\pi i/a$-周期整函数

$$|\varphi(z)| \le C e^{ax^2}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

证明。设 $a = 1$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)。令 $f \in V^\infty(G)$。设

$$\varphi(z) := e^{z^2} f(z) = e^{z^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-(z-n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2zn} c_n e^{-n^2}.$$

显然， φ 是 πi-周期函数，并且由 (3.2) 可知它满足 (3.3)。

(ii) $\Rightarrow$ (i)。与引理 2.5 的证明中一样，我们使用变量代换 $w = e^{2z}$，并设

$$\psi(w) := \varphi\left(\frac{\log w}{2}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_n w^n.$$

由 (3.3)（其中 $a = 1$），

$$|\psi(w)| \le C e^{(\log|w|)^2/4}, \quad w \ne 0. \tag{3.4}$$

记 $\psi = \psi_+ + \psi_-$，其中 $\psi_\pm$ 在引理 2.5 的证明中定义。注意， ψ_+ 对所有 $|w| \ge 1$ 都满足估计 (3.4)。在柯西不等式中取 $R = e^{2n}$ ，得到

$$|a_n| \le \frac{M(R,\psi)}{R^n} \le C \exp\left(\frac{\log^2 R}{4} - n\log R\right) = C e^{-n^2}$$

对所有 $n \ge 0$ 均成立。对每个 $n < 0.$ ，同样的估计也成立。这意味着数列$c_n := a_n e^{n^2}$ 有界，因此函数

$$f(z) := e^{-z^2}\psi(e^{2z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-(z-n)^2}$$

属于 V^∞(G)。 引理的证明至此完成。 □

引理 3.2. 假设 $f \in V^\infty(G_a) \cap L^1(\mathbb{R})$。则 $f \in V^1(G_a)$。

证明。我们设 $a=1$.

假设 $f\in V^\infty(G)\cap L^1(\mathbb{R})$。任取一个正的 $\varepsilon<1$，并考虑函数

$$f_\epsilon(x):=f\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)e^{-\varepsilon x^2/(1+\varepsilon)^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{-(x-n)^2/(1+\varepsilon)-\varepsilon n^2/(1+\varepsilon)}.$$

显然，$f_\epsilon\in V^1(G_{1/(1+\varepsilon)})$ 且 $\|f_\varepsilon\|_1\le(1+\varepsilon)\|f\|_1\le 2\|f\|_1$.。另请注意，$f_\varepsilon$ 的傅里叶变换为

$$\hat{f}_\varepsilon(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi itx}f_\varepsilon(x)\,dx=\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{-\varepsilon n^2/(1+\varepsilon)}e^{-2\pi int}\right)e^{-\pi^2(1+\varepsilon)t^2}.$$

由于三角系统 $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 在 $L^2(I)$ 中不完备，对于每个长度为 >1 的区间 I，都存在一个函数 $\Psi\in C^\infty(\mathbb{R})$，它在 $|t|\ge 2$ 上为零，且满足

$$\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi int}\Psi(t)\,dt=\begin{cases}1, & n=0;\\ 0, & n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{cases}$$

对于每个 $\alpha>0$，我们定义

$$\Psi_\alpha(t):=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{\pi^2t^2/\alpha}\Psi(t),$$

并将其逆傅里叶变换记为 ψ_α。显然，$\Psi_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R})$，且它在$|t|\ge 2$上为零，因此对于每个 $\alpha>0.$，ψ_α 都是一个施瓦茨函数。由帕塞瓦尔定理可得

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha(x-n)^2}\psi_\alpha(x-m)\,dx=\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha(x-n+m)^2}\psi_\alpha(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi i(n-m)t}\Psi(t)\,dt=\begin{cases}1, & n=m;\\ 0, & n\ne m.\end{cases}$$

现在假设 $\alpha=1/(1+\varepsilon)\in[1/2,1]$。我们有

$$\int_{\mathbb{R}}f_\varepsilon(x)\psi_{1/(1+\varepsilon)}(x-k)\,dx=c_k(f)e^{-\varepsilon n^2/(1+\varepsilon)}. \tag{3.5}$$

显然,

$$\|\psi_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\|x^2\psi_\alpha(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le\|\Psi_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R})}+\|(\Psi_\alpha)''\|_{L^1(\mathbb{R})}<C,$$

其中 C 不依赖于 ε.。因此,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\psi_\alpha(x-n)|<C,\quad\text{for every }\alpha=1/(1+\varepsilon)\in[1/2,1]. \tag{3.6}$$

考虑积分

$$I_\varepsilon:=\int_{\mathbb{R}}f_\varepsilon(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\overline{c_k(f)}}{|c_k(f)|}\psi_{1/(1+\varepsilon)}(x-k)\,dx.$$

根据（3.6），

$$|I_\varepsilon| < C\|f_\varepsilon\|_1 \le 2C\|f\|_1, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \tag{3.7}$$

另一方面，由于序列 $\{c_n(f)\exp(-\varepsilon n^2/(1+\varepsilon))\} \in l^1(\mathbb{Z})$，根据 (1.2) 中右侧的不等式，函数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| e^{-\varepsilon n^2/(1+\varepsilon)} e^{-(x-n)^2/(1+\varepsilon)}$$

属于 $L^1(\mathbb{R})$。由控制收敛定理，逐项积分并利用 (3.5)，我们得到

$$I_\varepsilon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| e^{-\varepsilon n^2/(1+\varepsilon)}.$$

利用 (3.7) 并令 $\varepsilon \to 0$，得到 $\{c_n(f)\} \in l^1(\mathbb{Z})$，因此 $f \in V^1(G)$。 □

引理3.3。设 $f \in V^1(G_a)$。以下条件等价：

(i) $e^{2ax} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$; (ii) $\{e^{2an} c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$;
(iii) $e^{2ax} f(x) \in V^1(G_a)$.

类似的 结论仍然成立，只需在上述三个条件的每个指数中设为”−”。

证明。为简洁起见，设 $a = 1$。

(i)⇒(iii) 和 (ii)。假设 (i) 成立。那么 $e^{bx} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$，对每个 $0 \le b \le 2$，均成立，因此傅里叶变换

$$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i z x} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{-2\pi i z n} \right) e^{-\pi^2 z^2}$$

可解析延拓至带域 $0 < \operatorname{Im} z < \pi^{-1}$，并连续延伸至其边界。这意味着 1-周期级数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{-2\pi i z n}$$

也可解析延拓至带域 $0 < \operatorname{Im} z < \pi^{-1}$，并连续延伸至其边界。显然，这一性质对级数

$$\sum_{n\ge 0} c_n(f) e^{-2\pi i z n}.$$

这等价于以下条件：幂级数 $\sum_{n\ge 0} c_n w^n$ 可解析延拓至圆盘 $|w| < e^2$，并且在其闭包内有一个常数 C 作为其上界。根据柯西不等式，

$$|c_n| \le \frac{C}{e^{2n}}, \quad n \ge 0,$$

这证明了 $\{c_n e^{2n}\}_{n\geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$。

注意到

$$e^{2x} f(x) = e^{2x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{-(x-n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2n+1} e^{-(x-n-1)^2} =: g(x),$$

并令 $c_n(g) := c_n(f) e^{2n+1}$. 则 $g \in V^\infty(G)$. 由 (i) 与引理 3.2, $g \in V^1(G)$, 从而证明了 (iii) 与 (ii)。

(ii)⇒(i)。设 g 为上述函数。由 (ii), $\{c_n(g)\} \in l^1(\mathbb{Z})$, 并且由于高斯生成元满足条件 (1.2), 条件 (i) 成立。

□

3.2. **定理 1.2 的证明** (i). 同样, 为简便起见, 我们令 $a = 1$。

¯**必要性**。 假设函数 $f \in V^1(G)$ 在 λ 与 λ 处为零, 其中 Im $\lambda \in (0, \pi)$。

假设 Im $\lambda \neq \pi/2$. 集

$$\tau(z) := \frac{1}{(e^{2z} - e^{2\lambda})(e^{2z} - e^{2\bar{\lambda}})}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

注意, $\tau(x)$ 是一个在 $\mathbb{R}$ 上有界的非恒定实函数。由于函数 $e^{z^2} f(z)$ 是 πi-周期函数, 我们看到 f 在集合 $\{\lambda, \lambda\} + \pi i\mathbb{Z}$. 上消失。因此, τf 是一个整函数。

根据引理 2.1, 要证明 f 不是极点, 只需证明 $q := \tau f$ 是 $V^1(G)$. 的一个元素。事实上, 由于 f 满足 (3.2)（其中 $a = 1$）, q 也满足该条件。显然, 函数 $\varphi(z) := e^{z^2} q(z)$ 是 πi-周期函数, 满足 (3.3), 且 q 属于 $L^1(\mathbb{R})$。根据引理 3.1 和 3.2, 我们得出 $q \in V^1(G)$。因此, f 不是极点。

假设 Im $\lambda = \pi/2$。那么函数

$$\tau(z) := \frac{1}{e^{2z} - e^{2\lambda}}$$

在实轴上为实值且有界。第 (i) 部分的论证得出结论: f不是极端点。

¯**充分性**。 假设不存在 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} + \pi i k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 使得 $f(\lambda) = f(\lambda) = 0$.根据引理 2.1, 要证明 f 是极端点, 只需证明每个函数

$$\tau(x) := \frac{q(x)}{f(x)}, \quad q \in V^1(G),$$

在 $\mathbb{R}$ 上为实值且有界的函数都是常数。

由于

$$\tau(x) = \frac{e^{x^2} q(x)}{e^{x^2} f(x)} := \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

其中 φ_j 是 πi 周期整函数，因此 τ 也是 πi 周期亚纯函数。

假设 τ 在某点 $\lambda \in \mathbb{C}$有一个极点。由于 τ 是实数，它在 λ也有一个极点。由于它在 $\mathbb{R}$ 上有界且为 πi-周期函数，我们不妨设 $0 < \operatorname{Im}\lambda < \pi$. 然而，这意味着 f 在 λ 和 λ处均为零，但事实并非如此。因此，我们得出结论： τ 是一个整函数。根据引理 2.5， τ 满足 (2.5)。回顾一下， τ 在 $\mathbb{R}$上有界，因此在水平直线 Im $z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$上也有界。根据 Phragmén–Lindelöf 原理，它是一个常函数。至此，高斯核极点定理的证明完成。

3.3. **定理 1.2 的证明**(ii)。我们令 $a = 1$.

必要性。 我们首先证明条件 (1.5) 是必要的。假设该条件不成立：存在一点 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $f(\lambda) = f'(\lambda) = 0$。

Set

$$h(z) := \frac{1}{(e^{2z} - e^{2\lambda})^2}.$$

由于函数 $e^{z^2} f(z)$ 是 πi-周期函数， f 和 $f_\prime$都在集合 $\lambda + \pi i\mathbb{Z}$ 上消失，因此 fh 是整函数。类似于第3.2节中的证明，可以验证 $fh \in V^1(G)$。由于h在 $\mathbb{R}$上非负，根据引理 2.2，我们得出 f 不是暴露的。

这是一个由引理3.3直接得到的结论，即条件 (1.6) 是必要的。

充分性。 假设 f 满足条件 (1.5) 和 (1.6)。为证明 $f \in \operatorname{Exp}(V^1(G))$，根据引理 2.2，只需证明每个可表示为 $\tau = q/f$ （其中 $q \in V^1(G)$）的非负函数 τ 都是常数。

我们来证明 τ 是一个整函数。类似于第3.2节中的证明，可以证明 τ 在带域 $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ 内没有极点。因此，由于 τ 具有 πi-周期性，若它有极点，则必在某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 处有极点。根据 (1.5)，每个这样的极点的阶数都必须为一。于是

$$\tau(x - \lambda) = \frac{q(x - \lambda)}{f'(\lambda)(x - \lambda)} + O(1), \text{ as } x \to \lambda,$$

这显然意味着 τ 在 $\mathbb{R}$ 上不可能非负。因此， τ 是一个整函数。根据引理 2.5， τ 满足 (2.5)。

记

$$\tau(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2nz} = a_0 + \sum_{n>0} a_n e^{2nz} + \sum_{n<0} a_n e^{2nz} := a_0 + \tau^+(z) + \tau^-(z).$$

我们需要验证 $\tau^- = \tau^+ = 0$.

假设 τ^+ 包含有限个非零系数，并令 $n_0 := \max_{n>0}\{a_n \neq 0\}$。那么条件 $\tau f \in V^1(G)$ 蕴含 $e^{2n_0 x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$，因此 $e^{2x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$，这与条件 (1.6) 矛盾。

假设 τ^+ 包含无限个非零系数。那么函数

$$\psi^+(w) := \tau^+(\log w/2) = \sum_{n>0} a_n w^n$$

是一个整超越函数。柯西估计的一个直接推论

$$|a_n| \le \frac{M(R,\psi^+)}{R^n}, \quad \text{for every } R>0,$$

是

$$M(R,\psi^+)R^{-n} \to \infty, \quad R\to\infty, \quad \text{for every } n>0.$$

特别地，$M(r,\ \psi^+) \ge Cr^8,\ r\ge 1$。由此可得

$$\sup_{0\le x\le r} |\tau^+(x+iy)| \ge Ce^{8x}, \quad x\ge 0.$$

回忆一下，τ^+ 是一个满足 (2.5) 的整 πi-周期函数。与引理 2.5 的证明类似，将引理 2.3 应用于上述缓慢增长的整函数 ψ^+，可证明存在一个序列 $r_k\to\infty$，使得

$$\sup_{0\le x\le r, y\in\mathbb{R}} |\tau^+(x+iy)| > Ce^{4r}, \quad r=r_k, \tag{3.8}$$

并且存在 $y_1>0,\ y_2<0$ 和 $R>0$，使得

$$\sup_{0\le x\le r} |\tau^+(x+iy_j)| > Ce^{4r}, \quad r>R,\ j=1,2. \tag{3.9}$$

因此，$|\tau^+(x+iy)| \ge Ce^{4x}$ 在每个矩形的边界上

$$P_k := \{z=x+iy : 0\le x\le r_k, y_2\le y\le y_1\},\ k\in\mathbb{N}.$$

回想一下，$\tau f = g \in V^1(G)$。因此，$\tau^+ f = g-\tau^- f$。由 (3.2)，f和 g在 P_k, $k\in\mathbb{N}$.上方一致有界。显然，τ^-也同样成立。我们得出结论，$|\tau^+(z)f(z)| <C,\ z\in P_k$, 其中 C不依赖于 k。由 (3.8) 和 (3.9)，函数 $e^{4z}f(z)$在 P_k的边界上方有界。由 (3.2) 可知，此函数的阶为二（或更低），因此 Phragmen-Lindel¨原理证明它在 P_k中有界。特别地，我们有$|e^{4x}f(x)| \le C,\ x\ge 0$，这与 (1.6) 矛盾。我们得出结论，$\psi$的级数不可能含有无限多项。结合前面的论证，这证明了 $\tau^+ = 0$。类似地，可以验证 $\tau^- = 0$，因此 $\tau = const.$

4. 双曲正割：定理 1.5 的证明

4.1. 辅助结果。 回想，每个 $f\in V^1_\Gamma(H_a)$ 都具有一种表示

$$f(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{c_\gamma}{e^{a(x-\gamma)}+e^{a(\gamma-x)}}, \quad c_\gamma\in l^1(\Gamma), \tag{4.1}$$

其中 $a > 0$，且 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 是一个分离集。可以验证，f 可延拓为一个亚纯函数，该函数仅可能在该集合上具有简单极点

$$\mathcal{P}_a := \Gamma + \frac{i\pi}{a}\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right) \tag{4.2}$$

and

$$c_\gamma(f) = 2ai(-1)^k \operatorname{Res}\left(f, \gamma + \frac{\pi i k}{a} + \frac{\pi i}{2a}\right), \quad k \in \mathbb{Z},\ \gamma \in \Gamma. \tag{4.3}$$

显然，每个 $f \in V_\Gamma^1(H_a)$ 都满足以下四个条件：

$$f(z + \pi i/a) = -f(z), \quad \text{for every } z \in \mathbb{C}, \tag{4.4}$$

$$f \text{ is a meromorphic function, whose every pole is simple and lies in } \mathcal{P}_a, \tag{4.5}$$

$$f \text{ is bounded above on every set } \mathbb{C} \setminus (\mathcal{P}_a + \{z : |z| < \delta\}), \quad \forall \delta > 0, \tag{4.6}$$

$$\{\operatorname{Res}(f, \gamma + \pi i/(2a)\}_{\gamma\in\Gamma} \in l^1(\Gamma). \tag{4.7}$$

最后一个条件可由 (4.3) 轻易推出。

引理 4.1。设 $a > 0$。以下陈述等价：

(i) $f \in V_\Gamma^1(H_a)$;(ii) $f \in L^1(\mathbb{R})$ 且是满足 (4.4)–(4.7) 的亚纯函数。

证明。照例，令 $a = 1.$。蕴含关系 (i) $\Rightarrow$ (ii) 已有说明。

(ii) $\Rightarrow$ (i)。设

$$g(z) := \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{c_\gamma}{e^{(z-\gamma)} + e^{(\gamma - z)}},$$

其中系数 c_γ 在(4.3)中定义。由(4.7)，$g \in V_\Gamma^1(H)$。

考虑差 $q := f - g$。显然，q 满足(4.6)。由(4.4)和(4.5)，容易验证它在每一点 $z \in \mathcal{P}_1$处都有可去奇点。因此，q 是有界整函数，从而 $q \equiv const$。由于 f 和 g 都是 $L^1(\mathbb{R})$的元素，我们得出 $q \equiv 0$. □

4.2. **定理 1.5 (i) 的证明**。令 $a = 1$。

必要性。 设函数 $f \in V^1_\Gamma(H)$在点 $\lambda, \bar{\lambda}$ 处为零，其中 $0 < \mathrm{Im}\ \lambda < \pi$。我们需要证明 $f \notin \mathrm{Ext}(V^1_\Gamma(H))$. 我们将区分两种情形。

情形 (i)。假设 $\mathrm{Im}\,\lambda \neq \pi/2$。根据引理 2.1，只需验证函数

$$q(x) := \frac{f(x)}{(e^{2x} - e^{2\lambda})(e^{2x} - e^{2\bar{\lambda}})} \tag{4.8}$$

属于 $V^1_\Gamma(H)$。只需检查 q 满足引理 4.1 的条件 (ii)。

容易验证， q 属于 $L^1(\mathbb{R})$，并满足 (4.4) 和 (4.7)。

将函数 $h(z)$ 的零点集记为 $\Lambda \subset \mathbb{C} : = (e^{2z} - e^{2\lambda})(e^{2z} - e^{2\bar{\lambda}})$。$f$ 的零点是 πi-周期的，因此 f 在 Λ 上消失。因此， q 满足 (4.5)。

显然，对于任意集合 $S_\delta := \Lambda + \{|z| \leq \delta\}$ $\delta > 0$，在其外部， h有下界。我们假设 δ 足够小，使得 S_δ 与 f的极点集不相交。由于 f 满足 (4.6)，可知 $|q(z)|$ 在所有满足以下条件的点 z 上有一致上界：这些点到 Λ 及 f的极点集的距离均为 $\geq \delta$。然而，由于 q 在 S_δ 上解析，根据最大模原理，它在 S_δ上也有上界。因此 q 满足 (4.6)，从而 $q \in V^1_\Gamma(H)$。

情形 (ii). 假设 $\mathrm{Im}\,\lambda = \pi/2$。那么函数 $\left(e^{2z} - e^{2\lambda}\right)^{-1}$ 在实轴上为实值且有界。第 (i) 部分的论证表明， f 不是极端的。

为了完成必要性部分的证明，只需证明：若对于某个 $\sigma \in \Gamma$， $c_\sigma = 0$ 成立，则 f 不是极端的。取满足 $c_{\sigma'} \neq 0$ 的 $\sigma' \in \Gamma$，并令

$$\tau(x) = \frac{e^{(x-\sigma')} + e^{(\sigma'-x)}}{e^{(x-\sigma)} + e^{(\sigma-x)}}.$$

显然， τ 在 $\mathbb{R}$上是实值且有界的。用同样的方法可以验证，$g : = \tau f \in L^1(\mathbb{R})$，并满足 (4.4)–(4.7)。因此，引理 4.1 断言 $g \in V^1_\Gamma(H)$。

充分性。 假设 f 满足条件 (1.4) 和 (1.7)。由引理 2.1，只需证明每个在 $\mathbb{R}$ 上的有界实值函数 τ，若满足 $\tau f =: q \in V^1_\Gamma(H)$，则必为常数。

断言 4.2。 τ 是一个整函数。

事实上， τ 的极点只能来自 q 的极点或 f的零点。 q 的所有极点都是简单极点，且位于式 (4.2) 中定义的集合 $\mathcal{P}_1$ 上。由 (1.7) 可知，函数 $1/f$ 在该集合的每一点都为零，因此 τ 在那里不可能有极点。此外， τ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，因此在 $\mathbb{R}$ 上没有极点。最后，由于 τ 是 πi周期函数，且在 $\mathbb{R}$上取实值，任何极点的存在都会导致在某个 λ及其共轭 λ处出现极点，其中 $0 < \mathrm{Im}\,\lambda < \pi$，这与 (1.4) 矛盾。

断言 4.3。 τ 满足(2.5)中的估计。

Set

$$P(z)=P_{+}(z)\cdot P^{-}(z):=\prod_{\gamma\in\Gamma,\gamma\geq 0}\left(1-e^{2(z-\gamma)}\right)\cdot\prod_{\gamma\in\Gamma,\gamma<0}\left(1-e^{-2(z-\gamma)}\right).$$

显然，当 $z=x+iy,\ x<0.$时， $P^{+}(z)$ 有界。对于 $x\geq 0$，我们有

$$|P^{+}(z)|\leq\prod_{\gamma\geq 0}\left(1+e^{2(x-\gamma)}\right)\leq\prod_{0\leq\gamma\leq 2x}\left(1+e^{2x}\right)\cdot\prod_{\gamma>2x}\left(1+e^{-\gamma}\right).$$

由于集合 Γ 是分离的，存在常数 ρ，使得 $\#(\Gamma\cap[0,x])\leq\rho x,\ x\geq 1.$ 因此，P^{+} 满足 (2.5)，而同样的估计也适用于 P^{-}。由此可得， P 满足 (2.5)。

显然，函数 qP 和 fP 是整函数，且满足 (4.4)。根据引理 4.1， q 和 f 在集合 $\mathcal{P}_1$ 之外均有上界。因此，根据最大模原理，qP 和 fP 均满足 (2.5)。

此时，应用定理 1.2 第 (i) 部分充分性证明结尾所用的同一论证，我们得出 τ 必然是常数。

4.3. **定理 1.5 (ii) 的证明**。照例，设 $a=1.$

必要性。 假设条件 (1.5) 不成立：存在一个 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 f 和 f' 在 λ 处为零。根据引理 2.2，只需验证函数

$$q(z):=\frac{f(z)}{(e^{2z}-e^{2\lambda})^2}$$

属于 $V_{\Gamma}^{1}(H)$。由于 f 满足 (4.4)，因此 q 是一个在 $\mathcal{P}_1$ 上有简单极点的亚纯函数。与第 4.2 节中的证明类似，可以验证 q 满足引理 4.1 (ii) 的假设，因此 $q\in V_{\Gamma}^{1}(H)$。 于是，条件 (1.5) 是必要的。

现在来验证条件 $e^{\pm 2x}f(x)\notin L^{1}(\mathbb{R})$ 也是必要的。只需证明条件 $e^{\pm 2x}f(x)\in L^{1}(\mathbb{R})$ 蕴含 $e^{\pm 2x}f(x)\in V_{\Gamma}^{1}(H)$。我们只证明条件 $e^{2x}f(x)\in L^{1}(\mathbb{R})$ 的情形，因为剩余情形的证明类似。

注意，函数 $e^{2z}f(z)$ 满足 (4.4)，因此它在线$\mathbb{R}+i\pi$上也可积。

下文中，我们构造一个在集合 $\Gamma+\pi i/2$上取指定值的辅助函数。为此，我们利用Bernstein空间$B(\sigma)$中插值问题的解。该空间由所有指数型至多为 σ 且在 $\mathbb{R}$上一致有界的整函数组成。特别地， $B(\sigma)$中的每个函数在 $\mathbb{C}$ 中的每一水平带上都一致有界（例如，详见 [22] ）。由于集合 Γ 是分离的，

集合 $\Gamma + \pi i/2$ 对每个充分大的 $\sigma > 0$都是 $B(\sigma)$的插值集，见 [3] 或[22]。因此，对每个 $\delta > 0$ ，存在函数 $B_\delta \in B(\sigma)$，使得

$$B_\delta(\gamma + i\pi/2) = -e^{i\pi\gamma\delta}\frac{\overline{c_\gamma(f)}}{|c_\gamma(f)|}, \quad \text{for every } \gamma \in \Gamma.$$

注意， L^∞ 上 B_δ 在带域 $0 \le \operatorname{Im} z \le \pi$ 上的范数仅取决于 σ、 Γ 的分离常数以及序列 $|-ie^{i\gamma\delta}c_\gamma/|c_\gamma|| = 1$， $\gamma \in \Gamma$ 的上确界范数，因此它不依赖于 δ.

给定 $R > 0$，考虑由线段 $[-R, R] \cup [R, R+\pi i] \cup [R+\pi i, -R+\pi i] \cup [-R+\pi i, -R]$ 组成的围道 C_R。固定 $\sigma > 0$。由引理 **4.1**，对于任意足够小的 $\epsilon > 0$ 和足够大的 R，只要满足 $|R - \gamma| > \epsilon$， $\gamma \in \Gamma$，函数 $f_\delta(z) := e^{2z}f(z)B(z)e^{-\delta z^2}$ 在 C_R 上可积，并且当 $R \to \infty$ 时，它在 C_R 上的 L^1 范数一致有界。将 f_δ 在 C_R 上积分并令 $R \to \infty$，由留数定理可得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f_\delta(z)\,dz = 2\pi i\sum_{\gamma\in\Gamma}\operatorname{Res}(f_\delta, \gamma + i\pi/2) = \pi e^{\delta\pi^2/4}\sum_{\gamma\in\Gamma}|c_\gamma|e^{2\gamma-\delta\gamma^2} < K,$$

其中常数 K 与 δ. 无关。令 $\delta \to 0$，我们得出该级数收敛:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|c_\gamma|e^{2\gamma} < \infty. \tag{4.9}$$

现在，写作

$$e^{2x}f(x) = e^{2x}\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{c_\gamma}{e^{x-\gamma}+e^{\gamma-x}} = \sum_{\gamma\in\Gamma}c_\gamma\left(e^\gamma e^x - \frac{e^{2\gamma}}{e^{x-\gamma}+e^{\gamma-x}}\right).$$

由 **(4.9)** 可知，函数

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{c_\gamma e^{2\gamma}}{e^{x-\gamma}+e^{\gamma-x}} \in L^1(\mathbb{R}).$$

因此,

$$e^x\sum_{\gamma\in\Gamma}c_\gamma e^\gamma \in L^1(\mathbb{R}),$$

这意味着

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}c_\gamma e^\gamma = 0. \tag{4.10}$$

我们得出

$$e^{2x}f(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{c_\gamma e^{2\gamma}}{e^{x-\gamma}+e^{\gamma-x}} \in V^1_\Gamma(H).$$

推论 4.4。 设 $f \in V^1_\Gamma(H)$。函数 $e^{2x}f(x)$ 可积，当且仅当条件(4.9)和(4.10)均成立。

类似地，可以验证 $e^{-2x}f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 当且仅当

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |c_\gamma| e^{-2\gamma} < \infty, \quad \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma e^{-\gamma} = 0.$$

充分性。 证明采用了与定理 1.2 (ii) 充分性部分相同的策略，参见第 3.3 节。为简洁起见，其余细节留给读者。

5. 致谢

作者非常感谢阿列克谢·库利科夫提出的若干有益意见，这些意见改进了本文稿。

参考文献

[1] E. Amar 和 A. Lederer。 $H^\infty(D)$单位球的暴露点。巴黎科学院院刊 S ´ér. A-B，272:A1449–A1452，1971。[2] A. Baranov、Y. Belov 和 K. Gr¨ochenig。高斯平移不变空间的完全插值序列。Appl. Comput. Harmon. Anal.，61:191–201，2022。[3] A. Beurling。 R^1中区间的插值，载于：《阿恩·贝尔林文集》第1卷。当代数学家丛书。Birkh¨auser Boston, Inc.，Boston，MA，1989。[4] P. Bloomfield、N. P. Jewell 和 E. Hayashi。完全非确定性随机过程的刻画。Pacific J. Math.，107(2):307–317，1983。[5] K. de Leeuw 和 W. Rudin。 H_1中的极点与极值问题。Pacific J. Math.，8:467–485，1958。[6] K. de Leeuw、W. Rudin 和 J. Wermer。某些函数空间的等距映射。Proc. Amer. Math. Soc.，11:694–698，1960。[7] B. Y. Levin。整函数讲义，数学专著译丛第150卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，1996年。与 Yu. Lyubarskii、M. Sodin 和 V. Tkachenko 合作，并由其撰写序言；由 Tkachenko 从俄文手稿翻译。[8] K. M. Dyakonov。多项式与整函数：零点和单位球的几何。Math. Res. Lett.，7(4):393–404，2000。[9] K. M. Dyakonov。多项式空间中的极点。Math. Res. Lett.，10(5-6):717–728，2003。[10] K. M. Dyakonov。 L^1中的疏幂多项式：单位球面的几何。Adv. Math.，381:论文编号107607，24页，2021。[11] K. M. Dyakonov。穿孔 Hardy 空间中的近外函数作为极点。Adv. Math.，401:论文编号108330，22页，2022。[12] K. M. Dyakonov。关于极点的问题。Integral Equations Operator Theory，95(2):论文编号14，11页，2023。[13] T. W. Gamelin。一致代数。Prentice-Hall, Inc.，恩格尔伍德克利夫斯，NJ，1969。[14] K. Gr¨ochenig、J. L. Romero 和 J. St¨ockler。平移不变空间、Gabor框架和全正函数的采样定理。Invent. Math.，211(3):1119–1148，2018。[15] K. Gr¨ochenig、J. L. Romero 和 J. St¨ockler。平移不变空间和多窗 Gabor 框架中带导数采样的精确结果。Constr. Approx.，51(1):1–25，2020。[16] K. Gr¨ochenig 和 J. St¨ockler。Gabor框架与全正函数。Duke Math. J.，162(6):1003–1031，2013。

[17] V. P. Havin。空间 H^∞ 和 L^1/H^1_0。*Zap. Nauˇcn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*，39:120–148，1974。《线性算子与函数论研究，IV》。[18] W. K. Hayman。缓慢增长的整函数和次调和函数。*Comment. Math. Helv.*，34:75–84，1960。[19] A. J. E. M. Janssen 和 T. Strohmer。双曲正割函数产生 Gabor 框架。*Appl. Comput. Harmon.Anal.*，12(2):259–267，2002。[20] R.-Q. Jia 和 C. A. Micchelli。利用细化方程构造预小波 II：二的幂。载于 曲线与曲面，第209–246页。爱思唯尔，1991。[21] S. Neuwirth。三角三项式的最大模。*J. Anal. Math.*，104:371–396，2008。[22] A. M. Olevskii 和 A.Ulanovskii。具有非连通谱的函数，大学讲座丛书第65卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，2016。采样、插值、平移。[23] J. L. Romero、A. Ulanovskii 和 I. Zlotnikov。由二元高斯函数生成的平移不变空间中的采样。*J. Funct. Anal.*，287(9):论文编号110600，2024。[24] A. Ulanovskii 和 I. Zlotnikov。关于两个对称区间上 Paley-Wiener空间单位球的几何。*Int. Math. Res. Not. IMRN*，2023(8):6329–6363，2023。[25] A. Ulanovskii 和 I. Zlotnikov。准平移不变空间中的采样以及由指数多项式之比生成的 Gabor 框架。*Math. Ann.*，391(3):3429–3456，2025。[26] A. Ulanovskii 和 I. Zlotnikov。平移的稳定性、插值和原子测度的谱。*J.Lond. Math. Soc. (2)*，112(3):论文编号e70267，20页，2025。

挪威科技大学数学科学系，7491 特隆赫姆，挪威电子邮箱： markus.v.hagen@ntnu.no斯塔万格大学数学与物理系，4036 斯塔万格，挪威电子邮箱： alexander.ulanovskii@uis.no挪威科技大学数学科学系，7491 特隆赫姆，挪威电子邮箱： denis.zelent@ntnu.no挪威科技大学数学科学系，7491 特隆赫姆，挪威电子邮箱： ilia.k.zlotnikov@ntnu.no