arXiv:2603.04278v1 [stat.ME] 4 Mar 2026

基于马尔可夫的水库管理建模：评估可靠性与韧性

M.L. G´amiz*, N. Limnios**, D. Montoro-Cazorla, M.C. Segovia-Garc´ıa*

摘要

本文构建了一个全面的基于马尔可夫的框架，用于模拟水库行为并评估可靠性和韧性等关键性能指标。首先，我们针对有限库容大坝建立随机模型，依据莫兰模型分析独立同分布入流下的长期蓄水动态，并依据 Lloyd 公式分析由遍历马尔可夫链表示的相关入流。对于这一有限情形，我们建立稳态水量平衡关系，并推导渐近结果，包括蓄水水位的中心极限定理。随后将分析扩展至无限库容水库，并获得正态极限分布及相应的长期性质。此外，我们还提出连续状态公式，以表示具有连续入流过程的水库，从而将离散状态框架加以推广。在此基础上，我们在所提出的马尔可夫背景下定义并评估可靠性和韧性指标。通过对 Quiebrajano大坝开展真实案例研究，展示了该方法的适用性，并说明所开发的模型如何在水文不确定性下支持高效、可持续的水库管理。

关键词：遍历马尔可夫模型、水库随机建模、长期性能、韧性、水文不确定性

*格拉纳达大学（西班牙）

**贡比涅技术大学（法国）哈恩大学（西班牙）*Email addresses:* mgamiz@ugr.es (M.L. G´amiz), nlimnios@utc.fr (N.Limnios), dmontoro@ujaen.es (D. Montoro-Cazorla), msegovia@ugr.es(M.C. Segovia-Garc´ıa)

*2020*年数学主题分类： 60K30; 62P12; 90B25; 90B30

1. 引言

高效的水资源管理是气候变化、人口增长以及水资源需求日益增长背景下的一项关键挑战。水文气象变异性给水库入流和出流带来了显著的不确定性，使规划与运行更加复杂，并影响生活用水、灌溉、发电和工业的水资源可用性 [7], [30]。在多功能水库中，平衡相互竞争的用水需求的必要性进一步增加了复杂性，因而需要能够在变化条件下最大化资源利用效率并确保可用性的运行策略 [1], [34]。

为应对这些不确定性，分析和优化水系统时通常会采用随机模型。这类模型能够捕捉水文过程固有的变异性，并为决策提供有价值的见解 [2], [40]。在这些方法中，马尔可夫链已被证明特别适用于表征入流动态和水库蓄水行为的随机特性。以往研究曾应用马尔可夫模型分析降水发生以及干湿期之间的转换 [9], [14], [24], [27], ，并利用多状态马尔可夫链评估雨养农业面临的干旱风险 [8]。在水库可靠性研究中， [19], [20]采用基于 Moran 模型 [26] 的离散时间马尔可夫链，评估不同入流条件下水库枯竭或溢流的可能性。

尽管可靠性长期以来一直是工程系统分析中的核心概念 [11], [12], [13], ，它在运筹学和系统工程中仍是一个快速发展的领域 [3]。其统计学基础仍通过参数方法和非参数方法不断发展[10]。这一视角同样延伸至供水网络，统计方法已被用于在不完整故障数据条件下评估系统性能。例如， [5] 利用右删失和左截断故障数据考察了供水网络的可靠性，提供了一种稳

健方法，用于根据有限观测评估组件可靠性。近年来，韧性 日益被视为系统性能的补充性指标，尤其适用于能源、交通和水系统等关键基础设施 [7], [30]。韧性被广泛定义为系统承受扰动、适应变化并从中断中恢复的容量 [17], [28]。其评估通常涉及三个关键维度：吸收能力，表示系统对扰动的初始抵抗能力；适应能力，描述其在危机期间调整运行的能力；以及恢复能力，评估正常状态得以恢复的速度和有效性 [31]。这些方面已被广泛应用于分析面临极端事件的关键基础设施的性能，为增强稳健性和响应能力的策略提供支持 [6]。

事实证明，马尔可夫过程是一种有效的框架，可用于量化复杂系统的韧性和动态性能 [41], [32], [38]。它们能够以概率形式表示状态转移，并推导出定量指标，用以描述可靠性、恢复能力和整体系统稳定性 [38]。基于马尔可夫过程的韧性评估已应用于多个领域：能源系统中，它们用于量化极端事件发生后的故障吸收能力和恢复能力 [41]；海上运输基础设施中，它们支持分析应对结构故障的适应性策略 [38]；工业系统中，例如加氢站和燃气压缩机，则用于估算运营中断后的恢复时间和服务恢复概率 [15], [16]。

在水资源系统中，韧性不仅关系到服务连续性，也关系到水库在干旱、洪水或其他极端事件后恢复运行性能的容量。已有多项研究使用马尔可夫模型评估水库管理和缓解策略 [36], [42], ，并运用随机控制推导不确定入流条件下灌溉水库的最优运行规则 [35], ，但将其纳入正式韧性评估框架的研究仍相对有限。在对水库动力学建模时，入流过程是一个关键的随机组成部分。早期方法通常假设入流独立同分布

；然而，在许多实际情况下，入流具有时间相关性。 [22], [23]提出了一种将水库入流建模为马尔可夫链的公式，以考虑这类相关性影响。本文采用这一相关入流框架，以下称之为*Lloyd* 公式 或扩展 *Moran* 模型 ，以强调其与经典离散时间随机水库模型的联系。

在此背景基础上，本研究将马尔可夫过程的应用扩展到不确定性条件下的水库性能分析。遵循 [32], 的方法，我们在基于马尔可夫过程的框架内，为受扰动事件影响的系统定义韧性度量。所提出的方法为评估水系统的动态行为提供了定量基础，从而支持在随机水文条件下实现更高效、更稳健的水库管理。

本文提出一种基于Moran 模型的多状态马尔可夫模型，用以刻画位于西班牙Ja´en省一座水库的年度水量平衡演变。该模型依赖于安装在大坝上的监测设备所采集的数据，这对模型的实施至关重要。根据入流量的处理方式，建立了两种不同的模型：一种将入流视为离散变量，另一种将其视为连续变量。针对每种模型，本文给出了描述系统渐近行为的解析结果，以及可靠性和韧性指标。这些指标可用于评估水库维持安全蓄水水位的容量，以及在危及供水（干旱）或导致溢流（洪水）的事件之后的恢复能力。这两个方面对该研究水库的水治理至关重要，因其具有重要的社会经济影响。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍所提出的离散入流随机模型的一般公式。第 3 节构建有限库容水库的马尔可夫模型，讨论独立入流的 Moran 情形和具有马尔可夫相关入流的 Lloyd 公式，并确立其长期性质，包括平稳水量平衡和存储量的中心极限定理

。第 4 节将分析扩展至无限容量情形，推导相应的渐近结果。第 5 节提出连续状态公式，用于表示具有连续入流过程的水库。第 6 节在马尔可夫框架下定义并讨论可靠性和韧性的性能指标。第 7 节通过 Quiebrajano大坝的真实案例研究，展示所提出方法的应用。最后，第 8 节给出总结性评论并探讨未来研究方向。

2. 具有离散输入的水库系统的随机特性

在实际应用中，为描述水库系统（具体而言，是用于人类供水的大坝）的动态演化，我们将采用一个二维随机过程 $\{(Y_n,\ Z_n)\ n \geq 0\}$ ，其状态空间为$E_y \times E_z$。在该模型中， Y_n 表示某一特定区域在第 n年记录的降雨总量，其中 $n = 0,\ 1,\ .....$。众所周知，某一特定区域的降雨量取决于多种因素，包括大气环流型、地形、与水体的距离、温度、湿度、海拔、土地利用，当然还有气候变化。尽管这些因素会导致降雨存在异质性，但我们的初步方法并未明确纳入这些因素。相反，作为分析的第一步，我们假设年度降雨量可表示为一列独立同分布（i.i.d.）随机变量 $\{Y_n, n \geq 0\}$，其分布为 $\{p_y;\ y \in E_y\}$。接下来，在更贴近现实的情形中，我们将考虑 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 作为一条转移矩阵为$\mathbf{P}_y$的平稳马尔可夫链。

对于任意 $n \geq 0$，令 Z_n 表示时刻（年份）n的水量，则 Z_0 为水库的初始蓄水。一般而言，我们假设二维过程 $\{(Y,\ Z)\}$是可观测的。这意味着，对于任意 $n \geq 0$，我们都可以直接观测到降雨量 Y_n 以及蓄水量 Z_n。此外，我们将年份 $n+1$的蓄水量建模为其先前取值的函数，即 $Z_{n+1} = f(Y_n,\ Z_n)$，见图1。

我们的首要目标是对随机过程的分

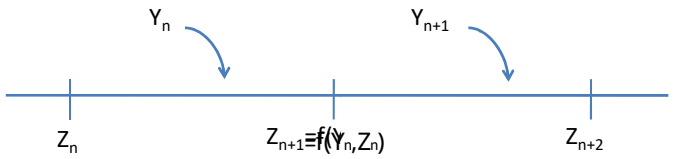


图 1：水库的马尔可夫模型。

布 $Z_n, , n \geq 0$ 进行建模，以刻画水库水位的时间动态。变量 Z_n 表示根据入流与出流之间的水文平衡~推算出的年末 n水库理论蓄水量。实际观测到的水量记为 Z_n，由于还存在输入–输出模型未明确纳入的其他因素，例如蒸发、渗漏或过滤损失，因此可能与该理论值不同。部分损失可能与结构劣化有关，包括坝体裂缝或缺陷的形成。~因此，分析差异 $Z_n - Z_n$ 有助于评估预期性能与实际观测性能之间的偏差，并可能作为监测结构随时间退化情况的替代指标。这一关系如图2所示，图中根据现有数据，使用输入–输出方程计算得出经验水量平衡曲线。这些曲线根据公开的Quiebrajano大坝相关信息绘制，该水库位于西班牙南部。黑色点状曲线表示2007年的每日蓄水量（Z_n），红色实线则表示根据同一时期公布的入流和出流数据计算得出的每日输入–输出平衡方程结果（Z_n）。

3. 有限情形

3.1. 模型描述

在我们最初的方法中，假设输入序列 $\{Y_n, n \geq 0\}$由独立同分布（i.i.d.）随机变量组成

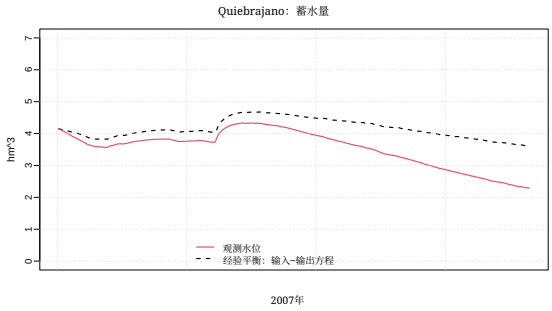


图2：经经验调整的2007年水量平衡。

这些随机变量取值于离散集合 $E_y \subseteq \mathbb{N}$。设 $\{p_y;\ y \in E_y\}$ 表示对所有 n 而言， Y_n 的分布。

我们假设采用 Moran 模型 [26],，因此有 $Z_n = f(Y_{n-1}, Z_{n-1})$，函数 f 的具体形式如下:

$$f(y,z) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad z+y < c_0 \\ z+y-c_0, & \text{if} \quad c_0 \le z+y \le C_1 \\ C_1 - c_0, & \text{if} \quad z+y \ge C_1 \end{cases} ; \tag{1}$$

其中， c_0 和 C_1 是一些正常数， $0 < c_0 < C_1$。简洁地说，我们可以写成 $Z_{n+1} = \min\{C_1 - c_0, \max\{Y_n + Z_n - c_0, 0\}\}$， $n \ge 0$。为简便起见，在下文中不失一般性地取 $c_0 = 1$ ，并使用记号 C 代替 C_1。在这些条件下， Z 是一个状态空间为 $E_z = \{0, 1, \ldots, C-1\}$的马尔可夫链。

过程（Y， Z）是一个马尔可夫链，其转移概率如下

$$\begin{aligned} \widetilde{P}((y_0,z_0),(y_1,z_1)) &= \mathbb{P}(Y_{n+1}=y_1, Z_{n+1}=z_1 \mid Y_n=y_0, Z_n=z_0) \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1}=z_1 \mid Y_n=y_0, Z_n=z_0)\mathbb{P}(Y_{n+1}=y_1) \\ &= 1_{\{z_1=(z_0+y_0-1)^+\}} p_{y_1}, \end{aligned}$$

其中 $(x)^+ = \max\{0, x\}$，对任意 $x \in \mathbb{R}$。我们按照字典序排列 $E_y \times E_z$ 的元素，并将这些概率整理成一个矩阵~，记为$\mathbf{P}$。

当入流过程具有时间相依性而非独立同分布时，水库演化遵循水坝方程的所谓*Lloyd* 公式 [23], ，该公式将Moran原始模型推广到马尔可夫相关入流的情形。

注记 1. *Lloyd* 的表述 *[22]* （扩展 *Moran* 模型）

当入流过程 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 被建模为遍历马尔可夫链，其转移矩阵为 $\mathbf{P}_Y$ ，平稳分布为 $\{p_y; y \in E_y\}$时，水库动力学遵循 *[22]* 所称的水坝方程的马尔可夫入流表述。在这种情况下，联合过程 (Y, Z) 本身$\widetilde{}$是一个马尔可夫链，其转移矩阵为 $\mathbf{P}$，其元素由$\widetilde{}$ $P((y_0, z_0), (y_1, z_1)) = \mathbf{1}_{\{z_1=(z_0+y_0-1)^+\}} P_{y_0, y_1}$ 给出，对于 $((y_0, z_0), (y_1, z_1)) \in E = E_y \times E_z$，其中状态空间按字典序排列。

我们假设 Y_n 具有有限支撑 $E_y = \{0, 1, \ldots, K\}$。为写出$\widetilde{}$转移矩阵 $\mathbf{P}$，我们考虑如下记号：

- $E_{(\cdot,\ i)} = E_y \times \{i\}$，对于 $i \in E_z$；
- $\mathbf{D}_{k_1:\ k_2}$，是一个 K 维对角矩阵，其对角元从位置 k_1 到 k_2 为 *1*，其余为 *0*，其中 $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq K$。
- $\mathbf{0}_{K\times K}$ 是由 *0* 组成的 K 维方阵；
- $\widetilde{\mathbf{P}}_{i,\ j}$ 是$\mathbf{P}$ 的子矩阵，包含从 $E_{(\cdot,\ i)}$的任一状态到 $E_{(\cdot,\ j)}$的任一状态的全部转移，其中 i、 $j = 0$、.....、 $C-1$。

我们有

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{D}_{1:2}\mathbf{P}_y, & i = j = 0; \\ \mathbf{D}_{(j-i+2):(j-i+2)}\mathbf{P}_y, & i = 0, j = 1, \ldots, C-2;\ or\ i \geq 0; j = i-1, \ldots, C-2 \\ \mathbf{0}_{K\times K}; & i \geq 2; j = 0, \ldots, i-2; \\ \mathbf{D}_{(C-1):K}\mathbf{P}_y; & i = 0, \ldots, C-1; j = C-1 \end{cases}$$

需要解决的一些主要问题：

1. Z 过程的边缘分布，即水库中储水量的分布。2. 计算平均空置时间，即若记作 T_E =inf$\{n > 0 \colon Z_n < 1\}$，则目标是计算 $MTTE = E[T_E]$; 3. 计算平均溢流时间，即若记作 T_O =inf$\{n > 0 \colon Z_n > C - 1\}$，则目标是计算 $MTTO = E[T_O]$。4. 计算长期单位时间内水损失的期望值。若记作 $C_O(n) = \sum_{k=0}^{n}(Z_k + Y_k - C)^+$，则我们希望确定 $\lim_{n\to\infty} \frac{C_O(n)}{n}$。5. 计算韧性指标，以描述水库能够安全运行多久，以及从极端状况中恢复的速度。

——

3.2. 水库系统的长期性能

水库管理中的一个关键问题是了解蓄水量随时间推移的长期变化。具体而言，这涉及确定 $\{Z_n; n \geq 0\}$的平稳分布，它代表蓄水量序列。在本节中，我们假设$\{Y_n, n \geq 0\}$ 是一个服从分布$\{p_y; y \in E_Y\}$的独立同分布随机变量序列，因此 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 是一个马尔可夫链。

平稳分布有助于了解水库中不同蓄水水位随时间变化的概率，而与初始水量无关，从而有助于实现有效的长期资源管理。由莫兰模型可知，$\{Z_n; n \geq 0\}$ 是一个具有有限状态空间 $E_z = \{0, 1, \ldots, C - 1\}$的不可约马尔可夫链，因此存在唯一的极限分布 π，它作为平稳方程的归一化解而得到。即 $\pi\mathbf{P} = \pi$，以及 $\pi\mathbf{1} = 1$，其中$\mathbf{P}$ 是马尔可夫链 Z 的转移矩阵，根据（1）中的设定，该矩阵具有

如下表达式

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_0+p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{C-1} & h_C \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{C-2} & h_{C-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_0 & h_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

对于 $h_k=\sum_{j=k}^{+\infty}p_j$，以及 $p_j=\mathbb{P}(Y_n=j)$，对于 $j=0$，1，.....

引理 1. 如果 $0<p_0$ 和 $p_0+p_1<1$，那么马尔可夫链 $\{Z_n;\ n\geq 0\}$是遍历的，其平稳分布为 $\pi_n=a_n\pi_0$，其中

$$a_n=\frac{1}{p_0}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{j1}-p_j\right)a_{n-j},\ 2\leq n\leq C-1 \tag{3}$$

其中 $a_0=1$ 和 π_0 是相应的归一化常数。

证明. 证明可由经典的马尔可夫链论证直接得出。

此外，$\{Z_n,n\geq 0\}$ 的平稳分布可以递归地构造如下。对于 $k=1$，...，$C-1$, $\pi_n=a_n\pi_0$，系数 a_k可递归地构造如下：$a_1=\frac{1-p_0-p_1}{p_0}$，并且对于 $n=2$，有

$$\pi_2=\frac{-p_2}{p_0}\pi_0+\frac{1-p_1}{p_0}\pi_1=\left(\frac{-p_2}{p_0}+\frac{1-p_1}{p_0}a_1\right)\pi_0=a_2\pi_0.$$

依此类推。于是，我们可以将 a_n 表示为式 (3) 所示。

□

我们在以下算法中总结了构造有限大坝模型平稳分布的步骤。

算法：莫兰模型下 Z 的平稳分布。

1. 定义 $a_0 := 1$. 2. 设置 $n = 1$ 和 $a_1 = (1 - p_0 - p_1)$ $/p_0$, 3. 设置 $b_n = \sum_{j=1}^{n+1} p_j a_{n+1-j}$; 4. 放入 $n = n + 1$ 并设置 $a_n = (a_{n-1} - b_{n-1})/p_0$. 5. 如果 $n < C - 1$，转到步骤 3，否则转到步骤 6. 6. 设置 $\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{C-1} a_n\right)^{-1}$，以及 $\pi_n = a_n \pi_0$.

3.3. 有限容量水坝中储存量的一些极限结果

本节研究表示大坝中储存水量的过程 Z 的渐近性质。

引理2。 二维过程 $\{(Y_n, Z_n); n \geq 0\}$ 是一个遍历马尔可夫链，其极限分布为

$$\widetilde{\pi}(y, z) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = y, Z_n = z) = \mathbb{P}(Y = y) \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = z) = p_y \pi(z), \tag{4}$$

证明。 由于 Z_n 由 $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ 确定，且 Y_n 与 $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ 相互独立，因此证明很直接。 □

注 2。 鉴于假设大坝的容量有限，必然有 $\frac{Z_n}{n} \to 0$ (几乎处处)，因为 $n \to \infty$ —

命题 1. 平稳水量平衡（有限情形）

令 Z_n 表示时刻 $n \geq 0$水库中储存的水量。令Y_n 表示在时间段 $(n, n+1)$ 内记录的总输入量。我们假设 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 构成一列共同均值为 μ_y的独立同分布随机变量。再假设二元组 (Y, Z) 符合莫兰模型，即对于任意 $n \geq 0$, $Z_{n+1} = \min\{\max\{0, Z_n + Y_n - c_0\}, C_1\}$。那么在平稳状态下$\mu_y = m_{c_0} - M$, 其中 $m_{c_0} = c_0 \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_n \geq c_0)$ 是长期均值

受控出流，而 $M = \mathbb{E}[\ (Z_n + Y_n - C_1)\ ^+]$ 是单位时间内因溢流造成的长期平均水损失。

证明。 我们取上文所取的 $c_0 = 1$ 和 $C_1 = C$。在这种情况下，我们有 $m_{c_0} = 1 - \pi_0$。根据 Moran 模型，我们可以写出

$$Z_{n+1} = Z_0 + \sum_{k=0}^{n} Y_k - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_k > 0\}} - \sum_{k=0}^{n} (Z_k + Y_k - C)^+,$$

于是,

$$\frac{Z_{n+1}}{n+1} = \frac{Z_0}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} Y_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_k>0\}} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (Z_k + Y_k - C)^+,$$

由于 $n \to +\infty$，显然 $(n+1)^{-1} Z_0 \to 0$，并且利用独立同分布变量的强大数定律，我们有 $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} Y_k \xrightarrow{a.s.} \mu_y$，以及 $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_k>0\}} \xrightarrow{a.s.} 1 - \pi_0$，最后 $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (Z_k + Y_k - C)^+ \xrightarrow{a.s.} \sum_{y,z} \widetilde{\pi}(y,z)(z + y - C)^+$。

我们定义 $M := \sum_{y,z} \widetilde{\pi}(y,z)(z+y-C)^+ = \sum_{y,z} \pi(z) p_y (z+y-C)^+$，于是我们得到

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu_y - (1 - \pi_0) - M, \quad \text{as } n \to +\infty,$$

由于必有 $Z_n / n \to 0$，因此稳态水量平衡方程成立。

□

注 3. 如果 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是平稳马尔可夫链，那么我们可以应用马尔可夫链大数定律，命题 *1* 的结论仍然成立。

命题2. 储存量强大数定律（有限情形）
令 Z_k 表示时刻 $k \geq 0$储存的水量，则 $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} Z_k \to \mu_z$，其中 $\mu_z = \sum_{i=0}^{C-1} z_i\ \pi_i$，且 $\pi_i =$ 极限$_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = z_i)$， $i = 0$，……， $C - 1$。

证明。 </style}该结果可由马尔可夫链 Z 的遍历性立即推出。

□

定理1. 储存量中心极限定理（有限情形）。
令 Z_k 表示时刻 $k \geq 0$ 水库中储存的水量，并定义 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$ 为截至时刻 n 的累积储水量。

Then

$$\sqrt{n}\,(S_n - n\mu_z) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2) \quad \text{as } n \to +\infty,$$

with

$$\sigma^2 = \widetilde{\mathbf{g}}_z \left\{ \mathbf{D}_\pi (2(\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{\Pi})^{-1} - \mathbf{I}) \right\} \widetilde{\mathbf{g}}_z^\top, \tag{5}$$

其中使用以下记号：$\mathbf{I}$ 表示单位矩阵；$\mathbf{D}_\pi = \mathtt{diag}(\pi_i; i = 0, \ldots, C-1)$；$\mathbf{\Pi} = \mathbf{1}\pi$，其中 $\mathbf{1} = (1,\ 1,\ 1,\ \ldots)^\top$；以及向量 $\widetilde{\ }\mathbf{g}_z = (z_i - \mu_z;\ i = 0, \ldots, C-1)$。

证明。为证明这一结果，我们考察了文献 [29] 和 [33]中关于有限常返马尔可夫链中心极限定理的研究。具体而言，在文献 [33] 中，中心极限定理的相关方差以不同的矩阵形式给出，这些形式源自文献中已有的不同中心极限定理证明；作者重点分析的是文献 [29]中给出的方差形式。

我们沿用文献 [33] 中的术语，并定义如下：

- Z 是定义在有限状态空间 $E_z = \{0, 1, \ldots, C-1\}$上的马尔可夫链，其转移矩阵为$\mathbf{P}$，平稳分布为上文定义的 π；
- $g:\ E_z \to \mathbb{R}$，其中 $g(i) = i$，对所有 $i \in E_z$均成立；
- $\mu_g :\ = \mathbb{E}_{\widetilde{\pi}}[g(Z)] = \mu_z$；
- $\widetilde{g}(i) := g(i) - \mu_g$；
- $S_n :\ = \sum_{k=0}^{n-1} g(Z_k)$。

接着，在 [29]中证明了 $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \mu_g\right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$，然后根据 [33]可得到式（5）中所述方差的矩阵形式。

□

4. 半无限情形

在这种情况下，我们假设水库的容量无限大 $C = \infty$，那么在时刻 $n \geq 1$ 储存的体积可通过输入序列 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 计算得出:

$$Z_n = \max\{Z_{n-1} + Y_{n-1} - c_0, 0\}, \tag{6}$$

$n > 0$。与上一节一样，对于所有 $n \geq 0$，我们将变量输入 Y_n 的分布记为 $p_i = \mathbb{P}(Y_n = i)$，其中 $i \in \mathbb{N}$。实际上，假设序列 $\{p_i, i \in \mathbb{N}\}$ 具有有限支撑并不过分严格；也就是说，存在某个可任意大的 $K \in \mathbb{N}$，使得对于 $i \geq 1$， $p_{K+i} = 0$ 。那么， Z_n 是一个转移矩阵为以下无限矩阵的马尔可夫链:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 + p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{K-1} & p_K & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{K-1} & p_K & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{K-1} & p_K & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{7}$$

命题 3. 平稳分布（半无限情形）。

设 $\{Z_n; n \geq 0\}$ 是一个离散时间马尔可夫链，其转移矩阵 $\mathbf{P}$ 如 (7) 所示，其中 $0 < p_0 < 1$ 且 $p_0 + p_1 < 1$，并且

$$\sum_{k=1}^{K-1} \sum_{j=k+1}^{K} \frac{p_j}{p_0} < 1. \tag{8}$$

那么存在一个平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$，使得 $\pi_n = \pi_0 a_n$，其中 $a_n = a_n(p_0, p_1, \ldots)$ 是 Y 的概率分布的函数。

证明。对于半无限水坝的情形（见 [39]），我们假设状态空间为 $E_z = \mathbb{N}$。我们假设平稳分布 π 的概率生成函数（概率生成函数）存在，并记 $G(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i s^i$，其中 $|s| \leq 1$。此外，我们记 $H(s) = \sum_{i=0}^{K} p_i s^i$，其中 $|s| \leq 1$，为

输入 Y的分布的概率生成函数。给定 $s > 0$，由 $\pi\mathbf{P} = \pi$ 得到的线性方程组可变换如下

$$\begin{array}{lllllll}
\pi_0 s = & sp_0+ & p_1 s\ \pi_0+ & p_0\ \pi_1 s+ & & & \\
\pi_1 s^2 = & + & p_2 s^2 \pi_0+ & p_1 s \pi_1 s+ & p_0\ \pi_2 s^2+ & & \\
\pi_2 s^3 = & + & p_3 s^3 \pi_0+ & p_2 s^2 \pi_1 s+ & p_1 s \pi_2 s^2+ & p_0\ \pi_3 s^3+ & \\
\pi_3 s^4 = & + & p_4 s^4 \pi_0+ & p_3 s^3 \pi_1 s+ & p_2 s^2 \pi_2 s^2+ & p_1 s \pi_3 s^3+ & p_0\ \pi_4 s^4 \\
\cdots\cdots & & & & & &
\end{array}$$

可将其表示为 G 和 H 的形式： $sG(s) - H(s)G(s) = (s-1)p_0\pi_0$，或者等价地写作 $G(s)(H(s) - s) = (1 - s)p_0\pi_0$。由于 $H(1) = 1$，我们可以将上式两边除以二项式 $1 - s$，从而得到

$$G(s) = \frac{\pi_0}{1 - \sum_{k=1}^{K-1} q_k s^k}, \tag{9}$$

其中 $q_k = \sum_{j=k+1}^{K} \frac{p_j}{p_0}$，对于 $k = 1, \ldots\ldots, K - 1$。

我们可以将表达式 (9) 右侧的项展开为幂级数，从而得到概率 π_i的闭式表达式，其中 $i = 0, 1, \ldots\ldots$。记 $B(s) = \sum_{k=1}^{K-1} q_k s^k$。根据 (8)，有 $|B(s)| < 1$，对于$|s| \leq 1$，于是

$$G(s) = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (B(s))^n < \infty. \tag{10}$$

(10) 中求和的第 n 项涉及一个次数为 $K - 1$、 $B(s)$ 的多项式的 n 次幂。因此我们有

$$G(s) = \pi_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k_1=1}^{K-1} \sum_{k_2=1}^{K-1} \cdots \sum_{k_n=1}^{K-1} q_{k_1} q_{k_2} \cdots q_{k_n} s^{k_1+k_2+\ldots+k_n}. \tag{11}$$

我们可以重新排列式 (11) 中的各项，从而得到 $G(s)$ 的幂级数表达式，例如 $G(s) = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$，其中 $a_n = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} q_{k_1}\, q_{k_2} \cdots q_{k_m}$,$1 \leq k_j \leq K-1$适用于 $n > 0$。这个函数仅涉及决定 Y 分布的概率 p_0， p_1， $\ldots p_K$。最后，我们得到，对于所有

$n > 0$。 □

例1. 对于特定情形 $K = 2$，过程 $\{Z_n\}$ 表示一个转移概率为 $p_0 = P_{i,i-1}$，$p_2 = P_{i,i+1}$，且$p_1 = 1 - (p_0 + p_2)$的随机游走。在这种情形下，条件 (8) 简化为 $p_2 < p_0$，这是随机游走存在平稳分布的一个著名充分条件。注意，条件 (8) 保证了马尔可夫链的正常返性。

接下来，我们证明在无限容量大坝的莫兰模型下，水库中水量的渐近正态分布。

命题4. 平稳水量平衡（半无限情形）
设 Z_n 表示时刻 $n \geq 0$无限容量水库中储存的水量。设 Y_n 表示在区间$(n, n+1)$内记录的总输入量。假设 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是一列满足条件 (8)、共同均值为 μ_y 的独立同分布随机变量。令 $m_{c_0} = c_0 \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq c_0)$。则 $\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} \to \mu_y - m_{c_0}$。

—

证明。 证明过程与命题 1 的论证相同。 □

定理2. 储存量中心极限定理（半无限情形）

令 Z_n 表示时刻 $n \geq 0$ 水库中储存的水量。令 Y_n 表示期间 $(n, n+1)$ 记录的总输入量。假设$\{Y_n, n \geq 0\}$ 构成一列满足条件(8) 的独立同分布随机变量，其共同均值为 μ_y，方差为 $\sigma_y^2 < \infty$。再假设这一对 (Y, Z) 符合 (6) 中给出的模型。那么

$$\sqrt{n}\left(\frac{Z_n}{n} - \mu_g\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_g^2) \quad \text{as } n \to +\infty,$$

其中 $\sigma_g^2 = \sum_{y,\ z} p_y \pi(z) \widetilde{g}(y, z)^2 + 2 \sum_{y>0,\ z>0} \sum_{y',\ z'} p_y \pi(z) h_0(y, z, y', z') \widetilde{g}(y, z) \widetilde{g}(y' z')$，其中 $\mu_g = \mu_y - (1 - \pi_0)$；$\widetilde{g}(y, z) = y - 1_{\{z>0\}} - \mu_g$；以及 $h_0(y, z, y', z') = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_0 \geq n, Y_n = y', Z_n = z' \mid Y_0 = y, Z_0 = z)$，其中 $T_0 = \inf\{n : Y_n = 0,\ Z_n = 0\}$。

证明。为证明该结果，我们考虑 [29]中给出的关于遍历的马尔可夫链的中心极限定理（中心极限定理）的工作，该工作在可数状态空间上成立。

令$\mathbf{X}_0 = (Z_0, 0)$，并且对 $n > 0$ 令$\mathbf{X}_n = (Y_{n-1}, Z_{n-1})$。则$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_n; n \geq 0\}$ 是定义在可数状态空间 $E = E_y \times E_z$上的马尔可夫链，其转移矩阵为$\mathbf{P}$，平稳分布为(4)中定义的 $\widetilde{\pi}$。

我们定义奖励函数 $g(i, j) := i - 1_{\{j>0\}}$，对所有$(i, j) \in E$均成立。于是有 $\mathbb{E}_{\widetilde{\pi}}[g(X_1, X_2)] = \mu_g$。我们还定义 $\widetilde{g}(i, j) := g(i, j) - \mu_g$。最后，考虑累积和 $S_n := \sum_{k=0}^{n} g(X_{1,k}, X_{2,k})$。

在我们的模型中，n 处的累积奖励与链$\mathbf{X}$的第二个坐标相吻合，但滞后一步，也就是说，我们得到 $S_n = Z_{n+1}$。这一恒等式使我们能够借助成熟的马尔可夫链的加性泛函理论（[29],[25]），分析大坝中储存体积 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的变化规律。特别地，我们使用 [33], 中的**定理1**，而该结果本身是对 [29]中原始结果的重新表述。我们根据本文的符号约定，将其表述调整如下。

假设存在某个状态 $a = (a_1, a_1) \in E$,

$$\sum_{y,z,y',z'} \widetilde{\pi}(y,z) h_a(y,z,y',z') |\widetilde{g}(y,z)||\widetilde{g}(y'.z')| < \infty \tag{12}$$

并令 $\sigma_g^2 = \sum_{y,z} \widetilde{\pi}(y,z)\widetilde{g}(y,z)^2 + 2\sum_{(y,z)\neq a} \sum_{y',z'} \widetilde{\pi}(y,z) h_a(y,z,y',z')\widetilde{g}(y,z)\widetilde{g}(y',z')$，其中 $\widetilde{g}$ 和 h_a 如上所定义。于是，对于任意初始分布，

$$\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - \mu_g) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_g^2). \tag{13}$$

为得到 (13)，我们需要验证 (12)。例如，取 $a = (0, 0)$。根据命题 3，我们知道二维马尔可夫链 $\mathbf{X}$ 是遍历的。因此，首次进入状态 (0，0) 的期望时间（记为 $\mathbb{E}[T_0] < \infty$）有限。令 $N^0_{(y',z')}$ 表示在首次进入状态 (0，0) 之前访问状态 (y', z') 的次数，则有$h_0(y, z, y', z') = \mathbb{E}_{(y,z)}[N^0_{(y',z')}] < \infty$，对任意 y, z, y', z' 均成立。因此，要证明 (12)，只需证明

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\pi}}[(\widetilde{g}(X_1, X_2))^2] < \infty \tag{14}$$

其中 $\mathbb{E}_{\tilde{\pi}}[\cdot]$ 表示在平稳分布下的期望。由于 $Var(Y) = \sigma_y^2 < \infty$，故 (14) 中的二阶矩是有保证的。

在我们的特定情形下，有 $S_n = Z_n$ 和 $\mu_g = \mu_y - (1 - \pi_0)$；这一点可由命题 1 直接推出，其中 $M = 0$，因为在无限容量的情况下不会发生溢流。 □

5. 基于具有连续输入的 Moran 模型的水库系统的随机性质

令 $G(y) = \mathbb{P}(Y_n \le y)$ 为 Y_n for$y \in E_y \subset \mathbb{R}^+$的累积分布函数，其中 $\mathbb{P}(Y_n = 0) > 0$，这意味着 G 在零点有一个原子。假设水库在有可用水量时释放固定数量 $c_0 > 0$，且其最大容量为 C_1。在这些条件下，转移函数为:

$$P(z_1, [0, z_2]) = \begin{cases} G(c_0 - z_1), & 0 \le z_1 \le c_0,\ z_2 = 0 \\ G(c_0 - z_1 + z_2), & \max\{0, c_0 - z_1\} < z_2 < C_1 - c_0 \\ 1 - G(C_1 - z_1), & 0 \le z_1 \le C_1 - c_0,\ z_2 = C_1 - c_0 \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{15}$$

注 4。

1. 在我们的背景下，$P(Y_n = 0) > 0$ 是一个自然的物理假设。因此，$G(0) > 0$；由此，G 在零点有一个原子，因此相对于勒贝格测度并非绝对连续。

2. 根据上述定义，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((Y_{n+1}, Z_{n+1}) \in B_y \times B_z \mid (Y_n, Z_n) = (y, z)) = \\ &= \mathbb{P}(Y_n \in B_y)\mathbb{P}(Z_{n+1} \in B_z \mid Z_n = z, Y_n = y) \\ &= 1_{\{((z+y)\wedge(C_1 - c_0))^+ \in B_z\}} G(B_y) \end{aligned}$$

对于任意博雷尔集 $B_y \times B_z \subseteq E_y \times E_z$。

3. 若 $\{Y_n\}$ 独立同分布，则 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 是一个具有一般状态空间的马尔可夫链，其转移函数由(15)给出；否则，(Y, Z)是一个二维马尔可夫链。

4. 如果我们将 U_n 表示为实际输入，那么在任意时刻 n，都有$U_n =$ 最小值$\{Y_n, C_1 - Z_n\}$。

对于下一个命题，我们需要对马尔可夫链 Z施加一些正则性条件。特别是，我们关注其遍历性，以及不变测度 π的存在性，该测度满足：对于任意可测集合 $A \subseteq E_z$，有$\int_{E_z} P(z,\ A)\pi(\mathrm{d}z) = \pi(A)$，其中 $P(z,\ A) = \mathbb{P}($ $Z_1 \in A \mid Z_0 = z)$是转移核。我们可以使用《遍历定理》第313页的定理 13.0.1，证明：如果 $\{Z_n; n \geq 0\}$ 是状态空间 E_z 上的马尔可夫链，其转移核为 P，且该链不可约、非周期、正常返，并具有唯一的平稳分布 π，那么对于任意初始状态 $z \in E_z$，

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z, A) = \pi(A) \quad \text{for any measurable set } A \subseteq E_z. \tag{16}$$

上述结果成立的一个充分条件是 Doeblin 条件，即存在 $\delta > 0$ 常数、$n_0 \geq 1$，以及 E_z 上的概率测度 ν，使得对所有 $z \in E_z$ 及所有可测集合 $A \subseteq E_z$，

$$P_{n_0}(z, A) \geq \delta\nu(A). \tag{17}$$

在 Doeblin 条件下，该马尔可夫链存在唯一的平稳分布π ，该链是正常返的，并且对任意初始状态 $z \in E_z$，(16) 成立。

引理 3. 设 $G(y) = \mathbb{P}(Y_n \leq y)$ 为 $y \in E_y \subset \mathbb{R}^+$时 Y_n 的累积分布函数，且 $\mathbb{P}(Y_n = 0) > 0$。状态空间为 $E_z = [0, C_1 - c_0]$ 、核由(15) 给出的马尔可夫链 $Z = \{Z_n; n \geq 0\}$满足 *Doeblin* 条件。

证明。设 $k = \left[\frac{C_1 - c_0}{c_0}\right]$ 为除法 $(C_1 - c_0)/c_0$ 的整数部分，并取任意区间 $A = [0, z_1] \subseteq E_z$。那么，鉴于 $\mathbb{P}(Y_n = 0) > 0$，我们可以

验证

$$P_{k+1}(z,[0,z_1]) \geq (\mathbb{P}(Y_n=0))^k(G(z_1+c_0)-G(c_0)).$$

取 $n_0=k+1$ 和 $\delta=\mathbb{P}(Y_n=0)^k$，并对任意 $0\leq z_0\leq z_1\leq C_1-c_0$，定义 $\nu([z_0,z_1]):=G(z_1+c_0)-G(z_0+c_0)$，它是由 G 在 $E_z=[0,C_1-c_0]$ 上诱导的测度。根据这一定义，我们得出 Z满足 Doeblin 条件。

□

最后，众所周知，对于任意测度 ρ ，都可以定义以下算子

$$\rho P_n(A)=\int_{E_z}P_n(x,A)\rho(\mathrm{d}x)$$

对于任意 $A\subset E_z$。

若 ρ_0 表示马尔可夫链 Z的初始分布，则时刻 n 的占据概率分布为 $p_n(\cdot)=\rho_0P_n(\cdot)$。特别地，对于 $[0,z]$类型的区间，我们关注 $F_n(z):=\mathbb{P}(Z_n\leq z)=p_n([0,z])$，其中任意 $z\in R_+$均成立，以及其在 $n\to+\infty$时的极限，即 $F(z)$。

命题 5. 令 $Z=\{Z_n,n\geq 0\}$, $Y=\{Y_n,n\geq 0\}$ 如上所定义。对于所有 Y_n，我们记作 $G(y)=\mathbb{P}(Y_n>y)$，其中 $y\in E_y\subseteq[0,+\infty)$。对于 $n\geq 0$，记作 $F_n(z)=\mathbb{P}(Z_n\leq z)$，其中 $z\in E_z$，并记 $F(z)=\lim_{n\to+\infty}F_n(z)$，其中$z\in E_z$。那么

$$F(z)=\int_0^{C_1-c_0}G(c_0+z-x)\ F(\mathrm{d}x).$$

证明。令 $z\geq 0$，则

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(z)&=\mathbb{P}(\max\{0,Z_n+Y_n-c_0\}\leq z)\\
&=\mathbb{P}(Z_n+Y_n-c_0\leq z)=\mathbb{P}(Z_n+\min\{Y_n,C_1-Z_n\}\leq z+c_0)\\
&=\mathbb{P}(\min\{Z_n+Y_n,C_1\}\leq z+c_0)\\
&=1-\mathbb{P}(Z_n+Y_n>z+c_0,\ C_1>z+c_0)\\
&=1-\mathtt{1}_{\{C_1>z+c_0\}}\mathbb{E}\left[\mathbb{P}(Z_n+Y_n>z+c_0\mid Z_n)\right] \qquad (18)
\end{aligned}$$

我们有 $\mathbb{P}(Z_n + Y_n > c_0 + x \mid Z_n = z) = 1 - G(c_0 + x - z)$，于是可以代入（18）并得到

$$F_{n+1}(z) = 1 - \mathbb{1}_{\{C_1 > c_0 + z\}} \mathbb{E}\left[\bar{G}(c_0 + z - Z_n)\right] = 1 - \int_0^{C_1 - c_0} \bar{G}(c_0 + z - x) F_n(\mathrm{d}x)$$
$$= \int_0^{C_1 - c_0} F_n(\mathrm{d}x) - \int_0^{C_1 - c_0} \bar{G}(c_0 + z - x) F_n(\mathrm{d}x). \tag{19}$$

取极限并利用 G 是连续且有界的函数这一事实，我们得到

$$\lim_{n \to +\infty} F_{n+1}(z) = F(z) = \int_0^{C_1 - c_0} G(c_0 + z - x) F(\mathrm{d}x).$$

□

6. 水库管理的常用性能度量

考虑更一般的情况，其中 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是一个马尔可夫~链，并令 $\mathbf{P}$ 表示二维 l
马尔可夫链 (Y, Z)，其状态空间 $E = E_y \times E_z$ 如上所述，按照优先考虑 Z 的字典序来定义。
我们尤其关注以下可信性度量。

6.1. 可靠性度量

我们将水库水量不足以满足一整年的用水需求的状态称为“空库”。令 $Z_0 = z_0$ 表示水库的初始水量，其中 $z_0 \in E_z$。

- **首次空库概率**
  令 $R_{z_0}(n)$ 表示在初始水量为 z_0 的情况下，水库在 n 之前的任意时刻都不为空的概率。对于 $n > 0$,

$$R_{z_0}(n) = \sum_{y \in E_Y} \mathbb{P}(Z_k \neq 0, k = 1, \ldots, n \mid Z_0 = z_0, Y_0 = y) \mathbb{P}(Y_0 = y) \tag{20}$$

~ ~令 P_0 表示 P 中限制为 $E_0 = E_y \times E_{z,0}$内各状态之间转移的子矩阵，其中 $E_{z,0} = E_z \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\{\mathbf{0}\}$ 表示~空状态类。于是 $R_{z_0}(n) = (\mathbf{e}_{z_0} \otimes \pi_y)\mathbf{P}_0^n \ \mathbf{1}$, 其中 π_y 是 Y的平稳分布。我们将$\mathbf{e}^{z_0}$ 记为一个向量，除$z_0 \in E_{z,0}$对应的索引处为 $\mathbf{1}$ 外，其余分量均为 $\mathbf{0}$；而$\mathbf{1}$ 是一个维度适当、可用于求和的全 $\mathbf{1}$ 向量。

- **空置概率（不一定是首次）**
  令 $A_{z_0}(n)$ 表示在初始水量为 z_0 的情况下，水库在时间 n 不为空的概率。对于 $n > 0$

$$A_{z_0}(n) = (\mathbf{e}_{z_0} \otimes \pi_y)\widetilde{\mathbf{P}}^n \ \mathbf{1}, \tag{21}$$

  对于 $n > 1$。在这种情况下，我们将 $\mathbf{e}^{z_0}$ 表示为一个零向量，其中对应于 z_0 在 E_z 中的索引的位置为 $\mathbf{1}$。

- **平均空置时间**
  从条件 $Z_0 = z_0$ 开始，首次到达空状态的平均时间可近似为

$$MTTE_{z_0} = \sum_{n>0} n(R_{z_0}(n-1) - R_{z_0}(n)) = (\mathbf{e}_{z_0} \otimes \pi_y)(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{P}}_0)^{-1} \ \mathbf{1}. \tag{22}$$

- **单位时间长期期望水量损失**
  记 $C_O(n) = \sum_{k=0}^{n}$最大值$\{(Z_k + Y_k - C) > 0\}$，则可确定单位时间内水损失的期望值

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_O(n)}{n} = \sum_{y,z} \widetilde{\pi}(y,z)(z + y - C)^+ \tag{23}$$

  其中，$\widetilde{\pi}(y, z)$ 是二维过程的平稳分布（见引理2）。

- **安全水位指标**
  当水库水位降至临界阈值以下时，可能发生空化，导致水工结构受损并造成运行

失效。为防止这种情况，设定最低蓄水量 z_{safe}。安全水位指标 S_{safe} 用于量化水库库容保持在该限值以上的概率，并定义为时刻 n的

$$S_{z_0}(n) = \mathbb{P}(Z_n \geq z_{\text{safe}} \mid Z_0 = z_0). \tag{24}$$

长期度量可定义为 $S = \sum_{z \geq z_{\text{safe}}} \widetilde{\pi}(z)$。

6.2. 韧性度量

本节介绍两个适用于大坝管理的不同韧性概念。它们描述水库能够安全运行多长时间，以及从极端状况中恢复的速度。首先，我们回顾一般背景下的韧性概念。

定义 1. 韧性状态*([32])*

考虑一个具有 K 个性能等级的系统，该系统按照不可约马尔可夫链 $\{Z_n, n \geq 0\}$演变，其中 Z_n 表示时刻 t_n的系统状态。状态空间 $E = \{1, \ldots, K\}$ 按性能递减顺序排列，并划分如下：

- 完美运行状态： $E_1 = \{1, \ldots, k_1\}$;
- 非完美运行状态： $E_2 = \{k_1 + 1, \ldots, k_2\}$;
- 中断（非韧性）状态： $E_3 = \{k_2 + 1, \ldots, K\}$。

$E_1 \cup E_2$ 中的状态被视为具有韧性，而 E_3 中的状态则代表失效或中断。因此，转移矩阵$\mathbf{P}$ 可划分为描述从 E_i 到 E_j的转移的子矩阵$\mathbf{P}^{E_i E_j}$。我们定义以下首次到达时间： $T_1 = \inf\{n\colon Z_n \in E_1\}$，以及 $T_3 = \inf\{n\colon Z_n \in E_3\}$。

遵循 [32], 的韧性包含两种互补能力：

- 抗扰韧性：在中断期间维持性能的能力；
- 恢复韧性：在中断后恢复性能的能力。

根据这些测度，我们在本文中考虑以下韧性指标：

- **抗扰韧性：**系统在首次进入非韧性状态之前保持正常运行状态的预期次数：

$$\mathcal{R}_{\text{res}} = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_3 \geq n,\, Z_n \in E_1\}}\right] = \mathbb{E}_i[N_3^1], \tag{25}$$

  其中， N_3^1 统计失效前对 E_1 的访问次数。该测度体现了系统抵御扰动的耐久性或稳健性。

- **恢复韧性：**系统在返回正常运行之前处于非韧性状态的预期次数：

$$\mathcal{R}_{\text{rec}} = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_1 \geq n,\, Z_n \in E_3\}}\right] = \mathbb{E}_i[N_1^3]. \tag{26}$$

  该量反映了系统的恢复能力，且与预期恢复时间成反比。

可靠性指标描述水库运行的（长期）可信赖性，而韧性指标则刻画其在中断及恢复阶段的短期适应行为。

韧性指标计算

设 E 表示马尔可夫链 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的有限状态空间，其中$|E| = k$，并设 $A \subset E$（其中 $|A| = k'$、 $k' < k$）为状态的一个目标状态类。进入 A 的首次进入时间定义为 $T_A := \inf\{n \geq 1 : \quad Z_n \in A\}$，即在时刻 0 之后首次访问 A。

对于任意状态 $j \in E$，我们定义随机变量 $N_j^A := \sum_{n=1}^{T_A} \mathbf{1}_{\{Z_n = j\}}$，表示截至（并包括） A 的到达时刻，对状态 j 的访问次数。其期望 $g_A(i, \ j) := \mathbb{E}_i[N_j^A]$ 可通过

限制在 $E \setminus A$ [33] 上的子链的基本矩阵计算：

$$g_A(i,j) = \begin{cases} \mathbf{e}_{k,i}^{\top} \mathbf{P}_{Ac}^{0} \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_A\right)^{-1} \mathbf{e}_{k',j}, & j \notin A, \\ \mathbb{P}_i(Z_{T_A} = j), & j \in A, \end{cases} \tag{27}$$

其中：$\mathbf{P}_A^0$ 表示从 E 中的任意状态到$E \setminus A$中的任意状态的转移子矩阵；$\mathbf{P}_A$ 表示 $E \setminus A$中各状态之间的转移矩阵；$\mathbf{I}$ 表示适当维度的单位矩阵；对于有限集合 A ，其中 $|A| = m$ ，且任意 $i \in A$，$\mathbf{e}_{m,i}$ 表示 $\mathbb{R}^m$中的第 i个标准基。

对于任意两个不相交的子集 $A, B \subset E$，在首次进入 A之前，对 B中的所有状态的预期访问次数为 $g_B(i,A) := \mathbb{E}_i[N_A^B] = \sum_{j \in A} g_B(i,j)$。因此，两个韧性指标可表示为：$\mathcal{R}_{\text{res}} = g_{E_3}(i, E_1)$和$\mathcal{R}_{\text{rec}} = g_{E_1}(i, E_3)$，其中 E_1 表示完美运行状态的集合， E_3 表示非韧性状态的集合。因此， $\mathcal{R}_{\text{res}}$ 量化失效前对完美运行状态的预期访问次数，而 $\mathcal{R}_{\text{rec}}$ 衡量完全恢复前对失效状态的预期访问次数。换言之， $\mathcal{R}_{\text{res}}$ 表征水库应对极端水文条件的耐久性，而 $\mathcal{R}_{\text{rec}}$ 量化其在中断后恢复正常运行的能力。

7. 一个真实案例研究：Quiebrajano水库

Quiebrajano水库位于西班牙南部哈´恩省，自1976年起投入运行，是区域供水系统的关键组成部分。该水库的集水区面积约为 $A = 99$ km^2 ，总库容为 $C_1 = 32$ hm^3。本研究估算的城市供水年均取水量为 $c_0 = 10$ hm^3。本研究采用瓜达尔基维尔河流域管理局（ https://www.chguadalquivir.es/saih/）提供的观测入流和蓄水数据，数据按年统计，时间跨度为1999年10月1日至2025年5月1日。

*7.1. Quiebrajano*案例的莫兰模型

在提供数据的网站上，SAIH（自动水文信息系统）提供的可用数据为以立方米每秒（m^3/s）表示的流量。这些数值代表每月的平均入流量。若要估算某月进入水库的总水量，可假设每月为30天，将单位从m^3/s换算为立方百米（hm^3），换算时乘以 $60\times60\times24\times30\times10^{-6}$。该系数考虑了30天的秒数，并将立方米换算为立方百米。将各月换算后的水量相加，即可得到以hm^3表示的年总流入量。本研究采用年流入量数据，而非月度数据进行分析。这是因为本研究是对可用数据的初步探索，重点关注长期蓄水行为，而非短期季节性动态。因此，本阶段未对月度表述所产生的周期性进行显式建模。

Quiebrajano地区自1999年10月1日起有可用数据，我们下载了截至2024年10月1日的信息。因此，样本量为 $N = 26$。我们将 Z_0 初始储水量（即1999年10月1日的水量）记为 $n \geq 1$，而对于 $Z_n =$，{的最小值为min{，最大值为max$\{Z_{n-1} + Y_{n-1} - c_0, 0\}$，$C_1\}$表示 n年末的储水量，其取值范围为 $[0, C_1 - c_0]$。SAIH网站还提供了水库年流出量的信息。本研究将流出量视为确定性量，并将其估算为26年观测期内释放水量的年平均值，约为 $C_0 = 10\ hm^3$。据官方资料，Quiebrajano水库的最大容量约为31.6至 $32\ hm^3$。这对应于其总库容，而有效库容可能会因运行条件而略低。本研究将采用 $C_1 = 32$。

大坝在某一时间区间（例如1年）内的入流是区间 $[0, +\infty)$上的连续随机变量。我们将照常进行简化近似，以便处理离散

量，而非连续量（[21]）。我们将以 $\delta = c_0$ 作为离散化单位，并对区间 $[0, C_1 - c_0]$ 考虑与 [26]中所建议的类似离散化方案。设 k 满足 $\left(k - \frac{1}{2}\right) c_0 < C_1 - c_0 < \left(k + \frac{1}{2}\right) c_0$，并定义如下区间：$I_0 = [0, \frac{1}{2} c_0]$，$I_j = \left(\left(j - \frac{1}{2}\right) c_0,\ \left(j + \frac{1}{2}\right) c_0\right]$，对于 $j = 1, 3, 5, \ldots\ldots, k$），$I'_k = \left(\left(k - \frac{1}{2}\right) c_0,\ C_1 - c_0\right]$，以及 $I''_{k+1} = \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) c_0,\ +\infty\right)$。对于 Y_n 的取值，我们按集合 $E_y = \{I_0, \ldots, I_k, I''_{k+1}\}$ 进行离散化；对于 Z_n 的取值，我们考虑 $E_z = \{I_0, \ldots, I_{k-1}, I'_k\}$。对于Quiebrajano情形，我们有 $C_1 = 32$、$c_0 = 10$和 $k = 3$，于是 E_z 中有 $k + 1 = 4$ 个状态，E_y中有$k + 2 = 5$ 个状态。在应用费希尔独立性检验后，未发现反对变量 Y_n 独立性的统计证据。因此，基于 $N = 26$ 份年度记录，我们估计了 Y（即一年内的年总入流）的分布概率，其由

I_0	I_1	I_2	I_3	I''_4
0.3462	0.3846	0.1538	0.0385	0.0769

我们采用前文讨论的有限容量情形下的 Moran 模型（见第 3 节），并使用定义在状态空间 $E_z = \{I_0, I_1, I_2, I'_3\}$ 上的马尔可夫链 Z来描述Quiebrajano大坝水量的动态演变，该状态空间共有 6 个状态。相应的转移矩阵为

$$\mathbf{P}_z = \begin{bmatrix} 0.7308 & 0.1538 & 0.0385 & 0.0769 \\ 0.3462 & 0.3846 & 0.1538 & 0.1154 \\ 0.0000 & 0.3462 & 0.3846 & 0.2692 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3462 & 0.6538 \end{bmatrix}$$

我们可以直接根据这个矩阵计算 Z 的平稳分布，也可以使用第 3.2 节所述算法，根据估计的入流分布来求得该分布。该算法还可以帮助我们

I_0	I_1	I_2	I'_3
0.2547	0.1980	0.2389	0.3084

估算大坝长期处于非空状态的概率低于 75%，这与官方记录所反映的该水库预期情况一致。

7.2. 蓄水量分析

可靠性和可用性指标（分别定义于（20）和（21）中）提供了定量指标，用于概括随时间维持充足蓄水水位的概率。它们有助于水库管理者评估缺水风险、识别安全运行条件，并为干旱事件确定预警阈值。从图3可以看出，对于Quiebrajano水库，这些可靠性估计表明，从中等蓄水位（$Z_0 = I_1$）开始，维持非空状态的概率从第一年的0.88下降至四年后的0.66。这一模式显示，枯竭风险在稳步但适度地增加，突显了持续低入流条件下水库的脆弱性。在运行层面，这些结果可支持瓜达尔基维尔河流域管理局确定干旱警报阈值、调整年度取水量，并规划补充入流或需求限制，以确保长期供水可靠性。在图4中

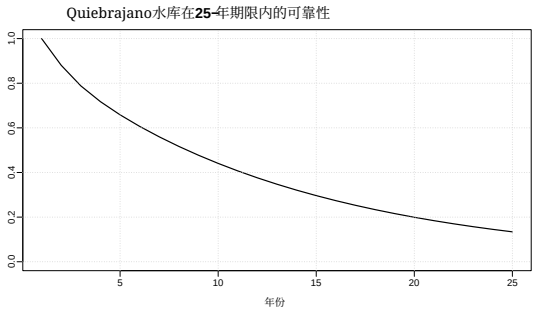


图3：Quiebrajano水库在25年期间始终保持非空的概率。初始条件设定为数据集中记录的条件，即储存水量的初始水量为 $I_1 = \ (1/2,\ \ 3/2]$。

我们估算式 (21) 中定义的可用性函数。该函数表示在给定初始条件下，水库在时间 n 非空（即处于运行状态）的概率，

蓄水位 $Z_0 = I_1$。与可靠度函数不同，可靠度函数要求水库在整个时段内始终非空，而可用性仅关注特定时间 n 的状态，不论此前是否曾出现空库时段。从图 4 可以看出，长期可用性为 74.5%，这意味着在稳定运行情况下，除非政策或系统参数发生变化，水库预计约有四分之三的时间处于非空状态。根据世界气象组织 [37], 的说法，“75% 保证率产水量”表示所需供水至少在每四年中的三年可获得。这一惯例支持将约 0.75 的长期可用性水平视为水库性能可靠的满意标准；而更低的数值则意味着供水失效风险不断增加。

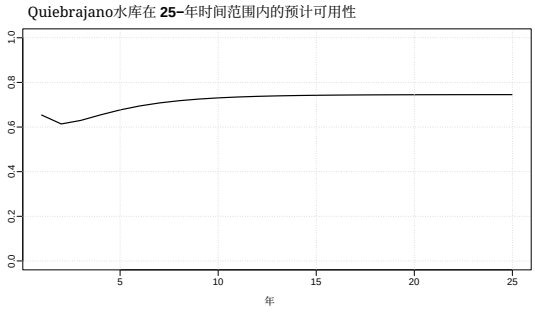


图 4：在 25 年模拟期内，Quiebrajano水库于第 n 年为空的概率（不一定是首次为空），不考虑之前的空库时段。初始储水量为 $I_1 = (1/2,\ 3/2]$，即初始条件设为数据集中记录的条件。

最后，图 5 展示了观测到的蓄水量历史序列，以及基于马尔可夫的模型得出的期望值。灰色圆点表示观测到的蓄水量，实线则表示根据拟合的 Moran 模型估算的期望蓄水量。估算曲线平滑地近似了观测序列，并捕捉到了水库的长期平衡水平。模型期望值收敛至数据的经验均值（15.0526 hm^3），这证实模型能够恰当地再现其平稳行为

储存过程。

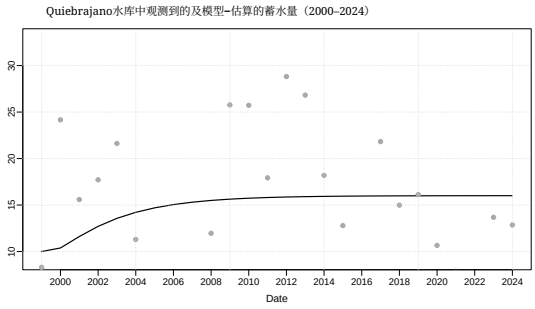


图5：观测到的蓄水量（灰色点）以及根据马尔可夫链模型估算的期望值（实线）。该模型再现了系统的长期平均行为，期望值稳定在接近观测数据经验平均值的位置，即 $V = 15.0526\ \hbar m^3$。

7.3. 性能与韧性指标

我们仅考虑两类状态： $E_1 = \{I_0, I_1\}$ 为韧性状态，而 $E_3 = \{I_0, I_3\}$ 为非韧性状态。根据这一分类，我们可以按照第 6.2 节中的定义，提出两种韧性测度，即抵抗韧性 $\mathcal{R}_{res} = \mathbb{E}_{I_1}\left[N_{E_1}^{E_3}\right]$；以及恢复韧性 $\mathcal{R}_{rec} = \mathbb{E}_{I_1}\left[N_{E_3}^{E_1}\right]$。根据第 6 节，我们计算： $\mathcal{R}_{res} = \sum_{j\in E_1} \mathbf{e}_{4,I_1}^{\top}\mathbf{P}_{E_3}^{0}\,(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{E_3})^{-1}\mathbf{e}_{2,j}$；以及 $\mathcal{R}_{rec} = \sum_{j\in E_3} \mathbf{e}_{4,I_1}^{\top}\mathbf{P}_{E_1}^{0}\,(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{E_1})^{-1}\mathbf{e}_{2,j}$。

估计的抵抗韧性值为 $\mathcal{R}_{res} = 1.36$年，这意味着，平均而言，从水位 I_1 开始，Quiebrajano水库在达到临界状态（过空或过满）之前，可在安全运行范围内维持约一年零四个月。这一时长反映了该系统在进入风险状态之前抵抗水文扰动（如干旱或大量入流）的容量。该估计值与水库管理实践及其入流显著的年际变化相一致，表明长期韧性处于中等而非较高水平。另一方面，我们估计了 $\mathcal{R}_{rec} = 1.90$，这意味着一旦水库达到临界状态（蓄水量极低或极高），平均需要

近两年才能恢复到正常且具有韧性的运行水平。换言之，这一估计表明该水库具有韧性，但恢复能力较慢，这在半干旱系统中较为典型，因为其水文补给具有强烈的季节性并受到制约，西班牙南部Quiebrajano大坝所在地区正是如此。

8. 结论与未来研究

本文构建了一个统一的基于马尔可夫的框架，用于对水库行为进行建模并评估可靠性和韧性等性能指标。该方法涵盖有限容量和无限容量两种形式，纳入了独立入流和马尔可夫相关入流，并可自然扩展至连续状态系统。在这一一般性框架下，本文建立了稳态水量平衡关系和渐近结果，包括关于长期蓄水行为的中心极限定理。随后，本文将该框架应用于Quiebrajano大坝，以展示其实际应用价值。

未来的研究可以沿着若干相互补充的方向推进。其中一个核心方面是与领域专家开展密切合作。本研究的一些结果已经向负责该大坝的工程师进行了介绍；他不仅认为该方法对运行支持具有实用价值，还指出我们的分析揭示了SAIH 数据库中存在一些需要专家核实的不一致之处。这凸显了将建模工作与实践者见解相结合的价值，目前我们正在探索继续合作的机会。

从方法论角度看，未来的发展包括处理非平稳入流，以捕捉长期气候变异性；纳入非确定性出流；以及整合基于传感器的监测数据，以获取更详细的信息并改进模型校准。另一项有前景的方向，是将随机建模框架与优化或决策支持程序相结合，以便在相互竞争的目标下实施自适应水库管理。最后，利用连续监测数据分析韧性，可为

决策提供宝贵见解，并有助于制定更稳健、可持续的运行策略。

致谢

作者衷心感谢西班牙科学与创新部—国家研究署通过项目PID2024-156234NB-C22提供的资助。本研究亦部分得到IMAG-María de Maeztu项目CEX2020-001105-M / AEI / 10.13039/501100011033的支持。我们衷心感谢Quiebrajano大坝（Confederaci´on Hidrogr´afica del Guadalquivir）运营经理Estrella Montoro Cazorla提供的支持与宝贵见解。本研究所用的水文与运行数据来自https://saih.chguadalquivir.es（最后访问日期为2025年11月1日）。

参考文献

[1] Allawi, M. F., Jaafar, O., Hamzah, F. M., El-Shafie, A. (2019). 面向供水与需求之间缺口最小化的新型水库系统仿真方法. 清洁生产杂志, 206, 928-943.

[2] Asefa, T., Clayton, J., Adams, A., Anderson, D.（2014）。不同气候条件下水资源系统的性能评估：可靠性、韧性、脆弱性及其他。Journal of Hydrology，508，53-65。

[3] Aven, T., Insua, D. R., Soyer, R., Zhu, X., Zio, E.（2025）。运筹研究中的可靠性五十年。European Journal of Operational Research, 324(2)，361-381。

[4] Browning, C., Kumin, H. (2016). 不同蓄水损失假设下的随机水库系统. 美国运筹学杂志 , 6(5),414-423.

[5] Carri´on, A., Solano, H., Gamiz, M. L., Deb´on, A. (2010). 基于右删失与左截断破裂数据的供水网络可靠性评估。《水资源管理》, 24(12), 2917-2935.[6] Diao, K., Sweetapple, C., Farmani, R., Fu, G., Ward, S., Butler, D. (2016). 供水系统的全局韧性分析。《水研究》, 106, 383-393. [7] Didier, M., Broccardo, M., Esposito, S., Stojadinovic, B. (2018). 一种用于量化土木基础设施系统韧性的组合式供需框架（Re-CoDeS）。《可持续与韧性基础设施》, 3(2), 86-102. DOI:10.1080/23789689.2017.1364560.[8] Fadhil, R. M., Unami, K. (2021). 用于评估雨养农业干旱风险的多状态马尔可夫链模型：伊拉克北部尼尼微平原案例研究。《随机环境研究与风险评估》, 35(9), 1931-1951.[9] Feyerherm, A. M., Bark, L. D. (1967). 湿日和干日序列的马尔可夫链模型拟合优度。《应用气象学杂志》（1962-1982）, 770-773.[10] G´amiz, M. L., Kulasekera, K. B., Limnios, N., Lindqvist, B. H. (2011). 可靠性中的应用非参数统计。Springer Science & Business Media.[11] G´amiz, M. L., Kal´en, A., Nozal-Canadas, R., Raya-Miranda, R. (2022). 基于工程数据的统计监督学习：半导体器件低频噪声测量案例研究。《国际先进制造技术杂志》, 120(9), 5835-5853.[12] G´amiz, M. L., Limnios, N., Carmen Segovia-Garc´ıa, M.C. (2023). 可靠性与维护中的隐马尔可夫模型。《欧洲运筹学杂志》, 304(3), 1242-1255.[13] G´amiz, M. L., Montoro-Cazorla, D., Segovia-Garcia, M. C. (2024). 面向复杂模块化系统的基于层级决策的维护

由 MoMA 算法驱动。《可靠性工程与系统安全》，245，110006。[14] Gates, P., Tong, H.（1976）。关于将马尔可夫链建模应用于某些天气数据。《应用气象学与气候学杂志》，15(11)，1145-1151。[15] He, Q., Peng, S., Zhang, Z., He, Y., Fan, L., Yang, Z., ... Zhang, J.（2024）。一种针对加氢站、基于两阶段恢复下多状态转移建模的系统性韧性评估框架。《国际氢能杂志》，90，481-497。[16] He, Q., Peng, S., Gao, G., Yang, Z., He, Y., Su, H., Zhang, J.（2025年1月）。基于马尔可夫过程的压缩机站韧性评价方法。载于光电子信息与光学工程国际会议（OIOE2024）（第13513卷，第457-465页）。SPIE。[17] Hosseini, S., Barker, K., Ramirez-Marquez, J. E.（2016）。系统韧性定义与测度综述。《可靠性工程与系统安全》，145，47-61。[18] Iqbal, A., Siddiqi, T. A.（2022）。基于马尔可夫描述符的大规模气候指数随机分析。《随机环境研究与风险评估》，36(4)，955-968。[19] Limnios, N.（1988）。《水库系统可靠性评估》。《可靠性工程与系统安全》，第23卷。[20] Limnios, N.（1989）。《莫兰水库可靠性评估》。《IEEE 可靠性汇刊》，第38卷，第5期。[21] Lochert, P., Phatarfod, R.M.（1979）。关于坝理论中的离散化问题。《水资源研究》，第15卷，第6期，1593–1597。[22] Lloyd, E. H.（1963）。具有序列相关入流的水库。《计量经济学》，85-93。

[23] Lloyd, E. H., Odoom, S.（1964）。关于坝方程求解的注记。皇家统计学会期刊B辑：统计方法论，26(2)，338-344。[24] Martin-Vide, J., Gomez, L.（1999）。基于干旱时段长度的西班牙半岛地区区域化。国际气候学杂志，19(5)，537-555。[25] Meyn, S. P., Tweedie, R. L.（2009）。《马尔可夫链与随机稳定性》（第2版）。施普林格科学与商业媒体。[26] Moran, P. A. P.（1959）。《储存理论》。Methuen and Co., Ltd.。[27] Nop, C., Fadhil, R. M., Unami, K.（2021）。一种用于雨水收集系统优化运行的降雨多状态马尔可夫链模型。清洁生产杂志，285，124912。[28] Pawar, B., Park, S., Hu, P., Wang, Q.（2021）。韧性工程原则在不同领域的应用：聚焦工业系统的文献综述。《工艺工业损失预防杂志》，69，104366。[29] Port, S. C.（1994）。《应用理论概率》。威利，纽约。[30] Ren, K., Huang, S., Huang, Q., Wang, H., Leng, G., Fang, W., Li, P.（2020）。评估多种不确定性来源下供水系统的可靠性、韧性与脆弱性。清洁生产杂志，252，119806。[31] Sathurshan, M., Saja, A., Thamboo, J., Haraguchi, M., Navaratnam, S.（2022）。关键基础设施系统的韧性：测量框架系统性文献综述。《基础设施》，7(5)，67。[32] Tan, Z., Wu, B., Che, A.（2023）。基于马尔可夫过程的多状态系统韧性建模。《可靠性工程与系统安全》，235，109207。

[33] Trevezas, S., Limnios, N.（2009）。马尔可夫链中心极限定理中的方差估计。《统计规划与推断杂志》，139(7), 2242-2253。[34] Tukimat, N. N. A., Harun, S.（2014）。气候变异框架下供水水库的优化。《国际软件工程及其应用杂志》，8(3), 361-378。[35]Unami, K., Yangyuoru, M., Badiul Alam, A. H. M., Kranjac-Berislavljevic, G.（2013）。旱季耕作微型水坝灌溉方案的随机控制。《随机环境研究与风险评估》，27(1), 77-89。[36] Vogel, R.M., Bolognese, R.A.（1995）跨年供水系统的库容-可靠性-韧性-供水量关系。《水资源研究》，313(3), 645-654。[37] WMO（世界气象组织）。（2009）。《水文实践指南》第二卷：水资源管理与水文实践应用。瑞士日内瓦：世界气象组织。[38] Wu, J., 等（2023）。系泊失效威胁下张力腿平台的马尔可夫韧性评估框架。《可靠性工程与系统安全》，231, 108939。[39] Yeo, G. F.（1961）。具有离散加性输入的无限坝时间相关解。皇家统计学会期刊：B辑（方法学），23(1), 173-179。[40] Zhao, Z.（2024）。基于水库的水源的韧性与脆弱性。《教育、人文与社会科学杂志》，43。[41] Zeng, Z., Fang, Y. P., Zhai, Q., Du, S.（2021）。基于马尔可夫报酬过程的框架：极端事件威胁下多态能源系统的韧性分析。《可靠性工程与系统安全》，209, 107443。

[42] Zolfagharpour, F., Saghafian, B., Delavar, M. (2021). 使水库运行规则适应水文干旱状态和环境流量要求。Journal of Hydrology 600, 126581