arXiv:2603.04303v1 [math.RT] 4 Mar 2026

作为无挠 $U(\mathfrak{h})$-模且秩为1的简单 $\mathfrak{sl}_2$-模

DIMITAR GRANTCHAROV、LIBOR KˇRIˇZKA 与 VOLODYMYR MAZORCHUK

Abstract. 我们给出了所有在卡当子代数上无挠且秩为 1 的简单 $\mathfrak{sl}_2$-模的显式分类。我们还对第一 Weyl 代数以及李超代数 $\mathfrak{osp}(1|2)$ 建立了类似的结果。

关键词：斜 Laurent 多项式，有理函数，简单模，李代数，李超代数，Weyl 代数

2020年数学主题分类：主分类：16S32 次分类：16S99；17B10；17B35

1. Introduction and description of the results

1.1. 历史概述。 给定代数上的简单模分类是当代表示论中的一个基本问题。在某些自然假设下，这个问题“相对容易”，例如，研究代数闭域上的有限维结合代数时。然而，如果所讨论的代数是无限维的，这个问题通常就“很难”或“非常难”。

无限维代数的经典例子是李代数的泛包络代数。有限维复李代数上的简单模分类问题仍悬而未决。这里所说的最小李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 需要加以说明。所有简单 $\mathfrak{sl}_2$模的分类自然分为以下两个子问题：

- 分类所有关于某个卡当子代数的权模；
- 分类所有关于同一卡当子代数的无挠模。

权 $\mathfrak{sl}_2$模的分类如今已相当明了。这可以追溯到 Gabriel 的一些未发表笔记（如 [Di96]中所述），相关内容也见于 [Dr83、Di96、Ma10]。论文 [Bl79、Bl81] 提出了一项结果，将相对于卡当子代数无挠的简单 $\mathfrak{sl}_2$模的分类，归结为描述某个非交换欧几里得整环中不可约元素的等价类。从理论上讲，这一结果相当漂亮。然而，这一结果并不具有明确的可操作性。

文献中已有一些针对特殊情形的显式结果，例如 Whittaker 模的情形，见 [AP 74], ；以及在卡当子代数上自由且秩为一的模，见 [Ni15]。近期论文 [GNZ26] 研究了一族在卡当子代数上自由且秩为二的简单 $\mathfrak{sl}_2$-模，并给出了它们的显式描述。

1.2. 结果描述。 本文明确分类了在卡当子代数上为秩一无挠的简单 $\mathfrak{sl}_2$-模（定义在复数域上）。该分类由以下组合参数给出：

- 一个复数 ϑ，用于描述我们所研究模的中心特征；
- 另一个非零复数，用于描述某个多项式的首项；
- 以及一个从复数的某个子集（实部在某个半区间内变化的带状区域）到整数集的函数。

后一个函数对一个首一有理函数进行编码。

我们的主要结果定理 9 对该模中的基给出了显式描述；这个基实现于卡当子代数上的有理函数域中。

此外，我们还得到了关于第一 Weyl 代数和李超代数 $\mathfrak{osp}(1|2)$的类似结果。

1.3. **方法**。我们的方法遵循 [Bl79, Bl81], 的理论描述，另见 [Ba92] ，其中将这一描述推广到所谓的广义 *Weyl* 代数。对于固定的中心特征 ϑ，存在一种经典方法，可将相应的本原商 $U(\mathfrak{sl}_2)/(\mathsf{c}-\vartheta)$（其中 c 是 Casimir元）实现于斜 Laurent 多项式环 $R=\mathbb{C}(\mathsf{h})[x,x^{-1},\sigma]$ 之中，其中 $\mathbb{C}(\mathsf{h})$ 的自同构 σ 由将 h 映为 $\mathsf{h}-2$ 来定义。

环 R 是一个非交换欧几里得整环。秩 1 的 R-模对应于 $\mathbb{C}(\mathsf{h})$ 上的 R-模结构，因而由 $\mathbb{C}(\mathsf{h})$ 中元素的某些等价类来分类。我们在第 2 节给出这一分类的全部细节。

由一般理论（见 [Bl79, Bl81, Ma10], ）可知，在 $\mathbb{C}[\mathsf{h}]$ 上无挠且秩 1 的单 $\mathfrak{sl}_2$-模恰好是上一段所述单 R-模的简单底层。因此，我们分类的最后一步是对这些简单底层作出显式确定。这既需要一些巧妙的选择，也需要一定程度的谨慎。

1.4. **论文结构**。 在第2节中，我们汇集全部预备知识，以给出斜 Laurent 多项式代数 $\mathbb{C}(\mathsf{h})[x,x^{-1},\sigma]$ 上秩 1 单模的显式分类。在第3节中，我们将这一分类应用于对作为卡当子代数上无挠秩 1 模的单 $\mathfrak{sl}_2$-模进行分类。在第4节中，我们对第一 Weyl 代数得到类似结果。最后，在第5节中，我们对李超代数 $\mathfrak{osp}(1|2)$ 得到类似结果。

致谢。 第一作者部分受 Simons 合作基金 855678 资助。第三作者部分受瑞典研究理事会资助。我们感谢于2026年1月至2月在 Link¨oping 举办的“Representation Theorem on Ice”会议的组织者，该会议促成了我们的合作。

2. Modules over skew Laurent polynomial algebras

2.1. **域上的斜洛朗多项式代数**。设 $\Bbbk$ 为一个域， σ 为 $\Bbbk$ 的一个自同构。相应的斜 *Laurent* 多项式代数 $\Bbbk[x,x^{-1},\sigma]$ 是以 $\{x^i$ 为基的 $\Bbbk$-代数： $i\in\mathbb{Z}\}$ ，其中乘法定义为

$$x^ix^j=x^{i+j}\quad\text{and}\quad xr=\sigma(r)x,$$

对所有 $i,\ j\in\mathbb{Z}$ 和 $r\in\Bbbk$。

2.2. -子群 $\mathbb{k}^\times$。 设 $\mathbb{k}$ 为一个域， σ 为 $\mathbb{k}$的一个自同构。记 G_σ 为 $\mathbb{k}$ 中所有形如 $\overset{r}{\sigma}{}_{r()}$的元素组成的集合，其中 $r \in \mathbb{k}^\times$。

引理 1. 子集 G_σ 实际上是 $\mathbb{k}^\times$的一个子群。

证明. 显然， $1 = \overset{1}{\sigma}{}_{1()} \in G_\sigma$。此外，由于对于所有 $r, s \in \mathbb{k}$, $\overset{r}{\sigma}{}_{r()} \cdot \overset{s}{\sigma}{}_{s()} = \overset{rs}{\sigma}{}_{rs()}$, 可知 G_σ 在乘法下封闭。最后，我们有 $\left(\overset{r}{\sigma}{}_{r()}\right)^{-1} = \overset{r^{-1}}{\sigma}{}_{r^{-1}()}$ ，因此 G_σ 在取逆元运算下封闭。断言得证。□

我们将 G_σ 称为 $\mathbb{k}^\times$的 σ-子群。注意， G_σ 通过乘法作用于 $\mathbb{k}$ （因此也作用于 $\mathbb{k}^\times$）。

例 2. 若 $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{k}$，则 $G_\sigma = \{1\}$。

例 3. 若 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$且 σ是复共轭 $\sigma(a+b\mathbf{i}) = a-b\mathbf{i}$，对于 $a, b \in \mathbb{R}$，则 $G_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$。事实上，我们有

$$\left|\frac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}\right| = 1$$

因而 $G_\sigma \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$。另一方面，如果 $|z| = 1$，则我们有$z = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathbf{i}$，对某个 $\varphi \in [0, 2\pi)$，从而

$$z = \frac{\cos(\frac{1}{2}\varphi) + \sin(\frac{1}{2}\varphi)\mathbf{i}}{\cos(\frac{1}{2}\varphi) - \sin(\frac{1}{2}\varphi)\mathbf{i}} \in G_\sigma.$$

2.3. 另一个例子。设 $\mathbb{L}$ 为一个代数闭域， a 为 $\mathbb{L}^\times$中的一个固定元素。考虑 $\mathbb{k} = \mathbb{L}(x)$，即有理函数域，并令 σ 在 $\mathbb{L}$ 上定义为恒等映射，此外还通过 $x \mapsto x + a$定义。

由于 $\mathbb{L}$ 是代数闭的，任一元素 $\alpha \in \mathbb{L}(x)^\times$ 都可以唯一地写成如下形式

$$c_\alpha \prod_{t \in \mathbb{L}} (x-t)^{\mathfrak{m}_\alpha(t)},$$

其中 $c_\alpha \in \mathbb{L}^\times$ ，且$\mathfrak{m}_\alpha : \mathbb{L} \to \mathbb{Z}$ 是一个函数，使得除 t的有限多个值外，均有 $\mathfrak{m}_\alpha(t) = 0$ 。我们将 c_α 称为绝对值，并将$\mathfrak{m}_\alpha$ 称为指数函数。

对于函数$\mathfrak{m} : \mathbb{L} \to \mathbb{Z}$，所有使$\mathfrak{m}(t) \neq 0$ 成立的 $t \in \mathbb{L}$ 所组成的集合称为$\mathfrak{m}$的支集。于是，我们可以通过要求$\mathfrak{m}$的支集是有限的，来改述上一段中关于$\mathfrak{m}$的条件。

由于指数在乘法下表现为加法，因此将 α映射到 $(c_\alpha, \mathfrak{m}_\alpha)$，可得乘法群 $\mathbb{L}(x)^\times$ 与乘法群 $\mathbb{L}^\times$ 和由所有从 $\mathbb{L}$ 到 $\mathbb{Z}$ 、具有有限支集的函数构成的加法群 $\mathrm{Fsfun}(\mathbb{L}, \mathbb{Z})$ 的直积之间的一个同构。

用 $\mathrm{Fsfun}_\sigma(\mathbb{L}, \mathbb{Z})$ 表示所有满足以下条件的 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Fsfun}(\mathbb{L}, \mathbb{Z})$ 的集合：对任意 $t \in \mathbb{L}$, 都有

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{m}(t + ia) = 0.$$

换句话说，该条件表示，在 $\mathbb{L}$ 中任意一个 $\langle\sigma\rangle$-轨道上，$\mathfrak{m}$ 的取值之和为零。容易看出，$\mathrm{Fsfun}_\sigma(\mathbb{L}, \mathbb{Z})$ 是 $\mathrm{Fsfun}(\mathbb{L}, \mathbb{Z})$ 的一个子群。此外

容易看出，作为一个阿贝尔群，Fsfun$_\sigma(\mathbb{L},\mathbb{Z})$ 由函数 $\mathtt{d}_s$ 生成，其中 $s\in\mathbb{L}$，定义如下

$$\mathtt{d}_s(t)=\begin{cases}1, & t=s;\\ -1, & t=s-a;\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

命题 4. 限制在 G_σ 上定义了一个从 G_σ 到 $\mathrm{Fsfun}_\sigma(\mathbb{L},\mathbb{Z})$ 的同构。

证明。显然，对于任意 $\alpha\in\mathbb{L}(x)^\times$，$\sigma^{\alpha}_{\alpha()}$ 的绝对值等于1。因此，同构 $\mathbb{L}(x)^\times\to\mathbb{L}^\times\times$ Fsfun$(\mathbb{L},\mathbb{Z})$ 限制后给出一个从 G_σ 到 Fsfun$(\mathbb{L},\mathbb{Z})$ 的嵌入。此外，对于任意 $\alpha\in\mathbb{L}(x)^\times$ 以及任意 $t\in\mathbb{L}$，令 $\beta:=\sigma^{\alpha}_{\alpha()}$，我们有

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathtt{m}_\beta(t+ia)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathtt{m}_\alpha(t+ia)-\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathtt{m}_{\sigma(\alpha)}(t+ia)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathtt{m}_\alpha(t+ia)-\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathtt{m}_\alpha(t+ia)=0,$$

其中等式

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathtt{m}_{\sigma(\alpha)}(t+ia)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathtt{m}_\alpha(t+ia)$$

由 σ 的定义可得。因此，限制映射将 G_σ 嵌入 Fsfun$_\sigma(\mathbb{L},\mathbb{Z})$。

剩下需要证明这个嵌入也是满射。由于 Fsfun$_\sigma(\mathbb{L},\mathbb{Z})$ 由 $\mathtt{d}_s$ 生成，其中 $s\in\mathbb{L}$，只需证明每个 $\mathtt{d}_s$ 都属于像。显然，$\mathtt{d}_s$ 是 $\sigma^{x-s}_{x-s()}$ 的像。断言得证。□

2.4. $\mathbb{k}[x,x^{-1},\sigma]$**-维1的模**。设 $R=\mathbb{k}[x,x^{-1},\sigma]$ 为一个斜 Laurent 多项式代数。这里我们关注维数为 1 的简单 R-模的分类，其中维数是相对于 $\mathbb{k}$而言的。

引理 5。$\mathbb{k}$ 上的 R-模结构由元素 $u\in\mathbb{k}^\times$ 通过 $x\cdot 1=u$唯一确定。

证明。若对于某个 $u\in\mathbb{k}^\times$有 $x\cdot 1=u$，则对任意 $b\in\mathbb{k}$，都有 $x\cdot b=x\cdot(b\cdot 1)=\sigma(b)u$。特别地，$x\cdot_$是 $\mathbb{k}$上的可逆映射。因此，我们可以将 x^{-1}的作用定义为 x的作用的逆，从而在 $\mathbb{k}$上得到一个 R-模结构。

反过来，给定 $\mathbb{k}$上的一个 R-模结构，显然，$x\cdot 1$ 必定非零。断言得证。□

我们将把上述 R-模结构在 $\mathbb{k}$ 上记作 N_u。

命题 6. 对于 $u,v\in\mathbb{k}^\times$，R-模 N_u 和 N_v 同构，当且仅当 $v\in G_\sigma\cdot u$。

证明. 设 $\varphi\colon N_u\to N_v$ 是一个 R-模同构。令 $r:=\varphi(1)\in\mathbb{k}^\times$。则对所有 $b\in\mathbb{k}$，都有 $\varphi(b)=br$。于是，对于 $b\in\mathbb{k}$，等式 $\varphi(x\cdot b)=x\cdot\varphi(b)$ 等价于

$$\sigma(b)ur=\sigma(b)\sigma(r)v.$$

若 $b\neq 0$，我们将两边除以 $\sigma(b)$，得到 $ur=\sigma(r)v$，即 $v=\sigma^{r}_{\sigma r()}u$。换言之，$v\in G_\sigma\cdot u$。

反之，如果 $v\in G_\sigma\cdot u$，那么对于某个 $r\in\mathbb{k}^\times$，有 $v=\sigma^{r}_{r()}u$。由上述计算可知，映射 $\varphi:\ N_u\to N_v$，定义为 $\varphi(b)=br$，对所有 $b\in\mathbb{k}$，

交织了 x 在 N_u 和 N_v 上的作用，因此是 N_u 与 N_v 之间的一个 R-模同构。□

推论 7. 一维 R-模的同构类与 $\mathbb{k}^\times/G_\sigma$ 之间存在自然双射。

我们注意到，群 $\mathbb{k}^\times/G_\sigma$ 与第一上同调群 $\mathrm{H}^1(\langle\sigma\rangle,\ \mathbb{k}^\times)$ 同构。

3. 应用于 sl2

3.1. 一般设定。 本节中，我们在 $\mathbb{C}$ 上进行讨论（或者，任何其他不可数的特征 0 代数闭域也可以）。对于李代数 $\mathfrak{a}$，我们用 $U(\mathfrak{a})$ 表示 $\mathfrak{a}$ 的泛包络代数。

3.2. 李代数 $\mathfrak{sl}_2$。 我们将使用 [Ma10] 作为李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 及其表示的一般参考资料。

将具有标准基的李代数 $\mathfrak{g}\ \mathfrak{sl}_2$ 记为

$$\mathtt{e} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{f} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{h} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g}$ 上的李括号由下式唯一确定：

$$[\mathtt{h},\mathtt{e}] = 2\mathtt{e}, \quad [\mathtt{h},\mathtt{f}] = -2\mathtt{f}, \quad [\mathtt{e},\mathtt{f}] = \mathtt{h}.$$

因此，在 $U(\mathfrak{g})$ 中，我们有

$$\mathtt{he} = \mathtt{e}(\mathtt{h}+2) \quad \text{and } \mathtt{hf} = \mathtt{f}(\mathtt{h}-2). \tag{1}$$

我们还有 Casimir元

$$\mathtt{c} := (\mathtt{h}+1)^2 + 4\mathtt{fe} = (\mathtt{h}-1)^2 + 4\mathtt{ef} \in U(\mathfrak{g}). \tag{2}$$

对于 $\vartheta \in \mathbb{C}$，我们将商 $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})(\mathtt{c}-\vartheta)$ 记为 U_ϑ。

3.3. U_ϑ 和斜 Laurent 多项式代数。 考虑有理函数域 $\mathbb{k} := \mathbb{C}(\mathtt{h})$及其自同构 σ，该自同构在 $\mathbb{C}$ 上为恒等映射，此外还将 $\mathtt{h}$ 映为 $\mathtt{h}-2$。现在我们可以考虑相应的斜 Laurent 多项式代数 $R := \mathbb{k}[x, x^{-1}, \sigma]$。

对于固定的 $\vartheta \in \mathbb{C}$，将 $\mathtt{e}$ 映射为 x，将 $\mathtt{f}$ 映射为

$$\frac{\vartheta - (\mathtt{h}+1)^2}{4} x^{-1}$$

便得到一个单射代数同态 Φ，从 U_ϑ 到 R（见 [Ma10，定理 6.2.12]）。注意，$\Phi(\mathtt{h}) = \mathtt{h}$。经由 Φ 拉回定义限制函子

$$\mathrm{Res}^R_{U_\vartheta} : R\text{-Mod} \to U_\vartheta\text{-Mod}.$$

在本节余下部分中，我们将把 U_ϑ 与其在 Φ 下的像等同起来。

回顾一下，作为一个 $\mathbb{C}$-向量空间，代数 $\mathbb{C}(\mathtt{h})$有一个基，由所有单项式 $\mathtt{h}^i$组成，其中 $i \geq 0$；此外，还包括所有形如 $\frac{1}{(\mathtt{h}-t)^m}$的分式，其中 $t \in \mathbb{C}$ 且 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$。我们将这个基记为 $\mathbf{B}$。

3.4. 简单 R-模及相应的简单 U_ϑ-模。回顾第 2.4 小节， $\Bbbk$ 上的一维简单 R-模具有形式 N_u，其中 $u \in \Bbbk$。 x 在 N_u 上的作用由 $x \cdot b = \sigma(b)u$给出，其中 $b \in \Bbbk$。这意味着

$$\mathsf{e} \cdot b = \sigma(b)u, \quad \text{for} \quad b \in \Bbbk.$$

因此，我们也有

$$\mathsf{f} \cdot b = \frac{(\vartheta - (\mathtt{h}+1)^2)}{4} \cdot \frac{\sigma^{-1}(b)}{\sigma^{-1}(u)}, \quad \text{for} \quad b \in \Bbbk.$$

此外， $N_u \cong N_v$ 当且仅当 $u \in G_\sigma v$。给定这样的 N_u，相应的 U_ϑ-模 $\mathrm{Res}^R_{U_\vartheta}(N_u)$ 有一个唯一的简单子模，见 [Ma10，引理 6.3.8]。我们将这个简单的 U_ϑ-模记为 L_u。

由第 2.3 小节可知，群 G_σ 同构于 $\mathrm{Fsfun}_\sigma(\mathbb{L}, \mathbb{Z})$。对固定的 $\omega \in \mathbb{R}$，用 $\mathbb{C}_\omega$ 表示所有实部属于半区间 $[\omega, \omega+2)$ 的 $z \in \mathbb{C}$ 的集合。那么 $\mathbb{C}_\omega$ 是 $2\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的（加法）作用的一个截面（注意，我们的 σ 是根据这一作用定义的）。于是，每个陪集 $\zeta \in \Bbbk^\times/\mathrm{Fsfun}_\sigma(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$ 都包含唯一一个形如以下形式的元素 $u \in \Bbbk^\times$

$$c_u \prod_{t \in \mathbb{C}_\omega} (\mathtt{h} - t)^{\mathtt{m}_u(t)}. \tag{3}$$

因此，由推论 7 可知，$\mathbb{C}(x)$ 上简单 R-模结构的同构类与形如 $(c, \mathtt{m})$ 的对一一对应，其中 $c \in \mathbb{C}^\times$ 且 $\mathtt{m} \in \mathrm{Fsfun}(\mathbb{C}_\omega, \mathbb{Z})$。因此，由 [Ma10 定理 6.3.6]，，对于 u，由方程 3 给出的所有 L_u 构成了 $U(\mathfrak{h})$ 上无挠且秩一的简单 U_ϑ-模的同构类的一组完备且无冗余的代表元。

我们将根据 ϑ 作如下选择 ω：令 r_1 和 r_2 为 $\vartheta - (\mathtt{h}+1)^2$ 的两个根（可能有 $r_1 = r_2$）。我们令 ω 等于 3 加上 r_1 和 r_2 的实部中的较大者。例如，若 $\vartheta = 0$，则 $r_1 = r_2 = -1$ 和 $\omega = 2$。这样，我们便确保 r_1 和 r_2 的实部都严格小于 ω，甚至与之“相距甚远”。这将简化一些结果，也会简化接下来的部分论证。

3.5. L_u 与 $\mathbb{C}[\mathtt{h}]$。现在我们来更详细地描述 L_u 的结构。为此，我们假设

$$u = c \prod_{t \in \mathbb{C}_\omega} (\mathtt{h} - t)^{\mathtt{m}(t)}, \tag{4}$$

对于某个 $c \in \mathbb{C}^\times$ 和 $\mathtt{m} \in \mathrm{Fsfun}(\mathbb{C}_\omega, \mathbb{Z})$。我们设

$$\alpha(\mathtt{h}) = \prod_{t \in \mathbb{C}_\omega : \mathtt{m}(t) > 0} (\mathtt{h} - t)^{\mathtt{m}(t)} \qquad \text{and} \qquad \beta(\mathtt{h}) = \prod_{t \in \mathbb{C}_\omega : \mathtt{m}(t) < 0} (\mathtt{h} - t)^{-\mathtt{m}(t)}. \tag{5}$$

于是我们有 $u = c\frac{\alpha(\mathtt{h})}{\beta(\mathtt{h})}$，其中 $\mathfrak{g}$。$\mathfrak{c}$。$\mathfrak{d}$。$(\alpha(\mathfrak{h}), \beta(\mathfrak{h})) = 1$。

考虑集合 $L_u \cap \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$。这是 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ 的一个非零理想，因为 $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$ 的任意非零 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$-子模都与 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ 有非平凡交。由于 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ 是主理想整环，该理想由唯一确定的首一非零多项式 $f_u(\mathfrak{h})$ 生成。

回忆一下， r_1 和 r_2 表示 $\vartheta - (\mathtt{h}+1)^2$ 的两个根（当且仅当 $\vartheta = 0$时，我们有 $r_1 = r_2$）。

命题 8. 我们有 $f_u(\mathtt{h}) = 1$，因此 $\mathbb{C}[\mathtt{h}] \subset L_u$。

证明。对于任意 $v(\mathsf{h}) \in \mathbb{C}[\mathsf{h}],$，我们有 $\beta(\mathsf{h})\mathsf{e}\cdot v(\mathsf{h}) = cv(\mathsf{h}-2)\alpha(\mathsf{h}) \in \mathbb{C}[\mathsf{h}]$。特别地，$cf_u(\mathsf{h}-2)\alpha(\mathsf{h})$ 必须能被 $f_u(\mathsf{h})$ 整除。反复应用 $\beta(\mathsf{h})\mathsf{e}$，我们得到，对于所有 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$，$f_u(\mathsf{h}-2i)\alpha(\mathsf{h}-2(i-1))\alpha(\mathsf{h}-2(i-2))\cdots\alpha(\mathsf{h})$ 必须能被 $f_u(\mathsf{h})$ 整除。对于某个 $i \gg 0$，我们有最大公因式$(f_u(\mathsf{h}-2i)\ f_u(\mathsf{h})) = 1$。这意味着 $f_u(\mathsf{h})$ 整除相应的 $\alpha(\mathsf{h}-2(i-1))\alpha(\mathsf{h}-2(i-2))\cdots\alpha(\mathsf{h})$。因此，$f_u(\mathsf{h})$ 的所有根都属于集合

$$\{t \in \mathbb{C}_\omega : \mathtt{m}(t) > 0\} + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{6}$$

对于任意 $v(\mathsf{h}) \in \mathbb{C}[\mathsf{h}],$，我们有

$$\alpha(\mathsf{h}+2)\mathsf{f}\cdot v(\mathsf{h}) = \frac{1}{4c}v(\mathsf{h}+2)\beta(\mathsf{h}+2)(\vartheta - (\mathsf{h}+1)^2).$$

特别地，$f_u(\mathsf{h}+2)\beta(\mathsf{h}+2)(\vartheta-(\mathsf{h}+1)^2)$ 必能被 $f_u(\mathsf{h})$ 整除。反复应用$\alpha(\mathsf{h}+2)\mathsf{f}$，我们得到

$$f_u(\mathsf{h}+2i)\cdot\beta(\mathsf{h}+2i)\beta(\mathsf{h}+2(i-1))\cdots\beta(\mathsf{h}+2)\cdot \\ \cdot(\vartheta-(\mathsf{h}+2(i-1)+1)^2)(\vartheta-(\mathsf{h}+2(i-2)+1)^2)\cdots(\vartheta-(\mathsf{h}+1)^2)$$

必能被 $f_u(\mathsf{h})$ 整除。对某个 $i \gg 0$，我们有 g.c.d.$(f_u(\mathsf{h}+2i)\ f_u(\mathsf{h})) = 1$。这意味着 $f_u(\mathsf{h})$ 整除其余各项的乘积。因此，$f_u(\mathsf{h})$ 的任意根都属于集合

$$(\{r_1, r_2\} \cup \{t \in \mathbb{C}_\omega : \mathtt{m}(t) < 0\}) - 2\mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{7}$$

由于我们对 ω 的选取，方程（6）和（7）中的集合互不相交。因此，$f_u(\mathsf{h}) = 1$，证明完毕。□

3.6. **显式描述**。回顾 $\vartheta-(\mathsf{h}+1)^2 = -(\mathsf{h}-r_1)(\mathsf{h}-r_2)$。设 $t_1, t_2 \in \mathbb{C}_\omega$ 与 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $t_1 - r_1 = 2n_1$ 与 $t_2 - r_2 = 2n_2$。由于我们对 ω 的选取，这一切都是良定义的；此外，我们有 $n_1, n_2 \geq 2$。我们还分别用 m_1 与 m_2 表示 r_1 与 r_2 作为 $\vartheta-(\mathsf{h}+1)^2,$ 的根的重数。

令 K_u 表示由以下元素张成的 N_u 子空间

- $\mathbb{C}[\mathsf{h}]$;
- $\frac{1}{(\mathsf{h}-s-2i)^k}$, where $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $1 \leq k \leq -\mathtt{m}(s)$, for each $s \in \mathbb{C}_\omega$ such that $\mathtt{m}(s) < 0$;
- $\frac{1}{(\mathsf{h}-s+2i)^k}$, where $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ and
  $$1 \leq k \leq \mathtt{m}(s) - |\{j \in \{1,2\} : r_j \in \{s-4, s-6, \ldots, s-2i\}\}|.$$
  for each $s \in \mathbb{C}_\omega$ such that $\mathtt{m}(s) > 0$.

定理 9. 我们有 $K_u = L_u$。

证明。由命题 8 可知 $\mathbb{C}[\mathsf{h}] \subset L_u$。因此，我们只需证明 $U_\vartheta\mathbb{C}[\mathsf{h}] = K_u$。为简单起见，在证明的余下部分中，我们讨论 N_u 中的元素时都只考虑非零数乘意义下的等价类。

取 $s \in \mathbb{C}_\omega$ 使得 $\mathtt{m}(s) < 0$。将 e 作用于 $\mathsf{1}$，得到 $^{\alpha}(\mathsf{h})\,^{\beta}(\mathsf{h})\mathsf{1}$，其中 $(\mathsf{h}-s)^{\mathtt{m}(s)}$ 是一个因子。注意到分子与 $\mathsf{h}-s$ 互素，因此，将 $^{\alpha}(\mathsf{h})\,^{\beta}(\mathsf{h})$ 按基 B 展开，可得$^{1}(\mathsf{h}-s)^{-\mathtt{m}(s)}$，其系数非零。于是，将 $^{\beta}(\mathsf{h})(\mathsf{h}-s)$ 作用于其上，得到 $^{1}(\mathsf{h}-s)$ 加上一个关于 h 的多项式。因此 $^{1}(\mathsf{h}-s) \in L_u$。若 $-\mathtt{m}(s) \geq 2$，则在必要时将 $^{\beta}(\mathsf{h})(\mathsf{h}-s)^2$ 作用于 $^{\alpha}(\mathsf{h})\,^{\beta}(\mathsf{h})$，并作归纳推理，可得 $^{1}(\mathsf{h}-s)_k \in L_u$，其中

对所有 $k = 1, 2, \ldots\ldots, -\mathrm{m}(s)$ 均成立。将 e 反复作用于这些元素，并使用与上述类似的论证，可得 $1_{(\mathrm{h}-s-2j)_k} \in L_u$，对所有 $k = 1, 2, \ldots\ldots, -\mathrm{m}(s)$ 以及所有 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 均成立。

注意，对 $1_{(\mathrm{h}-s)^k}$ 作用 f，其中 $k \in \{1, 2, \ldots, -\mathrm{m}(s)\}$，不会产生形如 $1_{(\mathrm{h}-s+2)^l}$ 的分母，因为这些分母会与分子中 $\beta(\mathrm{h}+2)$ 的因子 $(\mathrm{h}-s+2)^{-\mathrm{m}(s)}$ 抵消。

接下来，取满足 $\mathrm{m}(s) > 0$ 的 $s \in \mathbb{C}_\omega \setminus \{t_1, t_2\}$。在上述论证中交换 e 和 f 的角色，可以证明 $1_{(\mathrm{h}-s+2i)_k} \in L_u$，其中 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 且 $1 \leq k \leq \mathrm{m}(s)$。关键在于，f 的作用的分子中的因子 $\vartheta - (\mathrm{h}+1)^2$ 与分母互素，因此不会影响论证。此外，由于 $\alpha(\mathrm{h})$ 中的因子 $(\mathrm{h}-s)^{\mathrm{m}(s)}$，我们无法用 e 从 $1_{(\mathrm{h}-s+2)^k}$ 得到任何 $1_{(\mathrm{h}-s)^l}$。最后，注意到与上一段不同，这里有上述限制 $i \neq 0$，这是因为 f 的公式中含有 $\sigma^{-1}(\beta)$。

接下来考虑 $s = t_j$ 的情形，其中 $j \in \{1, 2\}$，且 $\mathrm{m}(s) > 0$。首先假设 $t_1 \neq t_2$。如果尝试采用上一段中的方法，第一步会很顺利（这得益于我们对 ω 的选择）；然而，在尝试反复应用 f 时，最终会遇到这样的情况：f 的作用的分子中 $\vartheta - (\mathrm{h}+1)^2$ 的因子会与分母 $\alpha(\mathrm{h}-s+2j)$ 中的某些因子相消。相应的步骤由 n_j 给出。分子中的因子个数为 $m_j = 1$，分母中的因子个数为 $\mathrm{m}(s)$。因此，如果 $m_j = 1 \geq \mathrm{m}(s)$，我们将无法构造任何 $1_{(\mathrm{h}-s+2n_j)^l}$，于是必须停止。如果 $m_j = 1 < \mathrm{m}(s)$，我们便能够构造形如 $1_{(\mathrm{h}-s+2n_j)^{\mathrm{m}(s)-m_j}}$ 的元素，然后像上一段那样继续。

最后，我们考虑情形 $s = t_1 = t_2$。此时可以有 $r_1 = r_2 = -1$ 或 $r_1 - r_2 \in 2\mathbb{Z}_{>0}$。若 $r_1 = r_2 = -1$，则 $t_1 = t_2 = 3$。上述方法的第一步完全适用，但在第二步，分子中出现 $(\mathrm{h}+1)^2$，因此我们只能得到指数 $\mathrm{m}(s) - 2$（若其为正）。其余部分与上一段类似。

若 $r_1 - r_2 \in 2\mathbb{Z}_{>0}$，我们所能得到的最大可能指数必须两次各减 1：先在步骤 n_1，然后在步骤 n_2。其余部分与上文类似。□

我们注意到，对 ω 的选取保证整个 $\mathbb{C}[h]$ 都属于 L_u，从而简化了前一定理的证明中的若干论证。对于 ω的一般选取，可以转而考虑由 $\mathbb{C}[h]$ 生成的 R 的 $\mathfrak{sl}_2$ 子模，然后寻找该模的单 $\mathfrak{sl}_2$-本原。

例 10. 令 $\vartheta = 0$ 和 $u = \mathrm{h} - 2$。则 $\vartheta - (\mathrm{h}+1)^2 = -(\mathrm{h}+1)^2$ 有根 -1，其重数为 2。注意，$2 - (-1) \notin 2\mathbb{Z}$。
将 f 作用于 1，得到 $-\frac{1}{4(\mathrm{h}+1)^2}$；由于分子与分母互素，我们得到 $\frac{1}{\mathrm{h}} \in L_u$。反复将 f 作用于其上，可得 $\frac{1}{\mathrm{h}+2i} \in L_u$，对所有 $i \geq 0$均成立。

将 e 作用于 $\frac{1}{\mathrm{h}}$，由于 $\mathrm{h}-2$的消去，得到 1；因此，$\mathbb{C}[\mathrm{h}]$ 与所有 $\frac{1}{\mathrm{h}+2i}$（其中 $i \geq 0$）的线性张成是 $\mathfrak{g}$-不变的。因此，这个线性张成就是我们的 L_u。

例 11. 设 $\vartheta = 0$ 和 $u = \mathrm{h} - 3$。那么 $\vartheta - (\mathrm{h}+1)^2 = -(\mathrm{h}+1)^2$ 有一个重数为 2的根 -1。注意，$3 - (-1) = 2 \cdot 2$。

将 f 作用于 1，得到 $-\frac{1}{4}(\mathrm{h}+1)^2$；由于分子和分母互素，我们得到 $\frac{1}{\mathrm{h}-1} \in L_u$。再次将f 作用于其上，得到 $-\frac{1}{4}(\mathrm{h}+1)\mathrm{h}-1$，它是 1 和 $\frac{1}{\mathrm{h}-1}$的线性组合。因此，我们的 L_u 由 $\mathbb{C}[\mathrm{h}]$ 和 $\frac{1}{\mathrm{h}-1}$ 张成。注意，在此情形下， L_u 是自由的，作为 $\mathbb{C}[\mathrm{h}]$ 上的模，其秩为一，基为 $\frac{1}{\mathrm{h}-1}$。

例 12. 设 $\vartheta = 0$ 和 $u = (\mathrm{h}-3)^3$。那么 $\vartheta - (\mathrm{h}+1)^2 = -(\mathrm{h}+1)^2$ 有一个重数为 2的根 -1。注意 $3-(-1) = 2\cdot 2$。
将f 作用于1，得到 $-\frac{1}{4}(\mathrm{h}+1)^2(\mathrm{h}-1)^3$；由于分子与分母互素，我们得到 $\frac{1}{(\mathrm{h}-1)^3}$，$\frac{1}{(\mathrm{h}-1)^2}$，$\frac{1}{\mathrm{h}-1} \in L_u$。将f 作用于 $\frac{1}{(\mathrm{h}-1)^3}$，我们得到

$$\frac{-\frac{1}{4}(\mathrm{h}+1)^2}{(\mathrm{h}+1)^3(\mathrm{h}-1)^3} = -\frac{1}{4(\mathrm{h}+1)(\mathrm{h}-1)^3}.$$

从这里出发，将 $-4(\mathrm{h}-1)^3$ 作用后得到 $\frac{1}{\mathrm{h}+1} \in L_u$。类似地继续推导可得，对所有 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有 $\frac{1}{\mathrm{h}+1+2i} \in L_u$。因此，我们的 L_u 由 $\mathbb{C}[\mathrm{h}]$，$\frac{1}{(\mathrm{h}-1)^3}$，$\frac{1}{(\mathrm{h}-1)^2}$ 以及所有 $\frac{1}{\mathrm{h}-1+2i}$（其中 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）张成。

推论 13。模 L_u 在 $\mathbb{C}[\mathrm{h}]$ 上有限生成，当且仅当对于任意 $s \in \mathbb{C}_\omega$，都有 $0 \leq \mathfrak{m}(s) \leq |\{j \in \{1,2\} : r_j \in s - 2\mathbb{Z}_{>0}\}|$。

证明。模 L_u 在 $\mathbb{C}[\mathrm{h}]$ 上有限生成，当且仅当 L_u 的描述中真分式的数量有限。由定义可直接得出，这等价于推论中的条件。□

注意，同时无挠且在 $\mathbb{C}[\mathrm{h}]$ 上有限生成，等价于有限秩自由。因此，推论 13 将所有在 $\mathbb{C}[\mathrm{h}]$上秩一自由的简单 $\mathfrak{sl}_2$-模分类。

4. Application to the first Weyl algebra

4.1. 一般设定。本节中，我们在 $\mathbb{C}$ 上工作（或者说，在特征 0 的代数闭域上工作）。回顾一下，第一 *Weyl* 代数 $\mathbf{A}_1$ 由如下表示给出：$\mathbf{A}_1 := \langle a,\ b : ab - ba = 1\rangle$。代数$\mathbf{A}_1$ 是一个单代数。
考虑与第3节中相同的有理函数域 $\Bbbk := \mathbb{C}(\mathrm{h})$，以及该域上的相同自同构 σ：它在 $\mathbb{C}$ 上取恒等映射，此外还将 h 映为 $\mathrm{h}-2$。现在可以考虑相应的斜 Laurent 多项式代数 $R := \Bbbk[x, x^{-1}, \sigma]$。

将 a映为 x并将 b映为 $-\frac{\mathrm{h}}{2}x^{-1}$，定义了一个嵌入 Ψ，将 $\mathbf{A}_1$ 嵌入 R。因此，任意 R-模都可以通过沿 Ψ拉回，视为一个 $\mathbf{A}_1$-模。

4.2. 无挠简单 $\mathbf{A}_1$-模，秩为 1。由推论 7，$\mathbb{C}(x)$ 上的简单 R-模结构的同构类与数对 $(c,\ \mathrm{m})$ 一一对应，其中 $c \in \mathbb{C}^\times$ 且 $\mathrm{m} \in \mathrm{Fsfun}(\mathbb{C}_0,\ \mathbb{Z})$（注意，我们取 $\omega = 0$）。

对于由方程 3 给出的 u，有相应的秩 1 简单 R-模 N_u。将 N_u视为 $\mathbf{A}_1$-模时，我们用 F_u 表示它的单底。因此，对于由方程 3 给出的 u，所有这些 F_u构成了 $\mathbf{A}_1$-模的同构类的一组完备且无冗余的代表元；这些模在子代数 $\mathbb{C}[ab]$上是秩一无挠的。现在可以显式描述所有这类 F_u。回忆一下，$\mathrm{h} = -2ba$。

引理14。对于所有如上所述的 u，我们有 $\mathbb{C}[\mathrm{h}] \subset F_u$。

证明。 对命题 8 的证明作相应修改即可。 □

令 D_u 表示由下列元素张成的 N_u 子空间

- $\mathbb{C}[\mathtt{h}]$;
- $\frac{1}{(\mathtt{h}-s-2i)^k}$, where $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $1 \leq k \leq -\mathtt{m}(s)$, for each $s \in \mathbb{C}_0$ such that $\mathtt{m}(s) < 0$;
- $\frac{1}{(\mathtt{h}-s+2i)^k}$, where $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ and $1 \leq k \leq \mathtt{m}(s)$, for each $s \in \mathbb{C}_0 \setminus \{0\}$ such that $\mathtt{m}(s) > 0$.
- $\frac{1}{(\mathtt{h}+2i)^k}$, where $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ and $1 \leq k \leq \mathtt{m}(0) - 1$, if $\mathtt{m}(0) > 0$.

定理 15. 我们有 $D_u = F_u$。此外，对于上述的 u，模 D_u 构成子代数 $\mathbb{C}[ab]$ 上无挠或秩一的简单 $\mathbf{A}_1$-模同构类的完备且不冗余的代表元列表。

证明。 证明与定理 9 的证明类似，细节从略。 □

推论 16. </style}模 在 h] 上有限生成，当且仅当m 要么是零函数，要么$\mathtt{m}(s) \neq 0$ 蕴含 $s = 0$，并且还满足$\mathtt{m}(0) = 1$。

5. Application to $\mathfrak{osp}(1|2)$

5.1. 预备、SCasimir 与振子商。 在本小节中，我们将所述方法应用于另一种情形，即李超代数 $\mathfrak{s} = \mathfrak{osp}(1|2)$。关于该超代数简单模的 Block式描述见 [BO00]。

考虑李超代数 $\mathfrak{s} = \mathfrak{osp}(1|2)$，其偶生成元为 e,f,h，奇生成元为 p,q，满足

$$[\mathtt{h},\mathtt{e}] = 2\mathtt{e}, \qquad [\mathtt{h},\mathtt{f}] = -2\mathtt{f}, \qquad [\mathtt{e},\mathtt{f}] = \mathtt{h},$$
$$[\mathtt{h},\mathtt{p}] = \mathtt{p}, \qquad [\mathtt{h},\mathtt{q}] = -\mathtt{q}, \qquad \mathtt{p}^2 = \mathtt{e}, \qquad \mathtt{q}^2 = -\mathtt{f}, \qquad \mathtt{pq} + \mathtt{qp} = \mathtt{h}.$$

Set

$$\Sigma := \mathtt{pq} - \mathtt{qp} + \frac{1}{2} \in U(\mathfrak{s}), \tag{8}$$

有时称其为 SCasimir 元。照例，我们用 Π 表示奇偶性变换函子。

本节所用的 $U(\mathfrak{osp}(1|2))$ 的大多数结构性结果都可见于 Pinczon 的著作 [Pi90]。以下是一个由 $\mathfrak{s}$ 的定义关系推出的著名结果。

引理 17 $\Sigma + \Sigma = 0$ $\Sigma + \Sigma = 0$ $[\Sigma,] = [\Sigma,] =$。有 pp 和 qq。因此，hef，$[\Sigma,] = 0$ Σ^2 U $\mathfrak{s}$ 且它在 () 中是中心的。

回忆一下，$\mathbf{A}_1 = \langle a, b : \ ab - ba = 1 \rangle$ 是第一 Weyl 代数。定义代数同态 $\Theta : U(\mathfrak{s}) \to \mathbf{A}_1$，其映射规定如下

$$\Theta(\mathtt{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a, \qquad \Theta(\mathtt{q}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, b, \tag{9}$$

因此，$\Theta(\mathtt{h}) = -\frac{1}{2}(ab + ba)$，$\Theta(\mathtt{e}) = \frac{1}{2}\, a^2$，且 $\Theta(\mathtt{f}) = -\frac{1}{2}\, b^2$。根据定义可直接得出，$\Theta$ 是满射同态。我们还有 $\Theta(\Sigma) = 0$，因此 Θ 通过 $U := U(\mathfrak{s})/U(\mathfrak{s})\Sigma U(\mathfrak{s})$ 分解。

命题 18。 诱导映射 $\Theta : U \to \mathbf{A}_1$ 是一个同构。

证明。 容易验证，存在一个由 $a \mapsto \sqrt{2}\,\mathrm{p}$ 与 $b \mapsto -\sqrt{2}\mathrm{q}$ 定义的同态 $\mathbf{A}_1 \to U$，且该同态是 Θ 的逆。□

无挠秩与超秩。 如前设定 $H := U(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[\mathrm{h}]$ 与 $\Bbbk := \mathbb{C}(\mathrm{h})$。我们将 h（因而 H 与 $\Bbbk$）视为纯偶的。若 X 是 H-无挠模，则定义其 H-秩 为

$$\mathrm{rk}_H(X) := \dim_{\Bbbk}\big(\Bbbk \otimes_H X\big).$$

若 $M = M_{\bar 0} \oplus M_{\bar 1}$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次 H-模，我们称 M 为 H-无挠且超秩为 $(1|1)$，如果 $M_{\bar 0}$ 与 $M_{\bar 1}$ 均为 H- 无挠，并且

$$\dim_{\Bbbk}(\Bbbk \otimes_H M_{\bar 0}) = 1, \qquad \dim_{\Bbbk}(\Bbbk \otimes_H M_{\bar 1}) = 1.$$

5.2. **H-秩为 1 的单非分次 $U(\mathfrak{s})$-模。**

引理 19. 设 M 是一个（不一定是 $\mathbb{Z}_2$-分次的） $U(\mathfrak{s})$-模，且它是 H-无挠的，秩为 1。那么 Σ 在 M上的作用为0 。

证明。 将 M 局部化为 $M_{\Bbbk} := \Bbbk \otimes_H M \cong \Bbbk$，并取 $v \neq 0$ 属于 $M_{\Bbbk}$。那么 $M_{\Bbbk} = \Bbbk v$。由 $[\mathrm{h},\mathrm{p}] = \mathrm{p}$ 和 $[\mathrm{h},\mathrm{q}] = -\mathrm{q}$，存在 $u, w \in \Bbbk^{\times}$ 使得

$$\mathrm{p}\cdot(bv) = b(\mathrm{h}-1)\,u(\mathrm{h})\,v, \qquad \mathrm{q}\cdot(bv) = b(\mathrm{h}+1)\,w(\mathrm{h})\,v, \qquad \text{for any } b \in \Bbbk.$$

由于 $[\Sigma,\mathrm{h}] = 0$，根据引理 17， Σ 在 $M_{\Bbbk}$ 上的作用等于乘以某个 $\varphi(\mathrm{h}) \in \Bbbk$。利用 $\Sigma\mathrm{p} + \mathrm{p}\Sigma = 0$，得到 $\varphi(\mathrm{h}) + \varphi(\mathrm{h}-1) = 0$。若 $\varphi \neq 0$，则对所有 $n \geq 0$，有 $\varphi(\mathrm{h}-n) = (-1)^n\varphi(\mathrm{h})$，这会迫使任一零点和任一极点都有无穷多个平移点，这对有理函数是不可能的。因此 $\varphi = 0$。□

沿 Θ 拉回（通常记作 Θ^*）会在以下两类对象的同构类之间诱导一个双射：在子代数 $\mathbb{C}[ab]$ 上为无挠秩 1 的简单 $\mathbf{A}_1$-模，以及无 H-挠、秩 1 的简单 非分次 $U(\mathfrak{s})$-模。更确切地说，使用第 4.2 节的记号，我们有如下结论。

定理 20. 模 $\Theta^*(F_u) = \Theta^*(D_u)$ 构成了简单 $U(\mathfrak{s})$-模的同构类的一个完备且无冗余的代表元列表，这些模是 H-无挠且秩为 1。

证明。 由引理 19，任何这样的 $U(\mathfrak{s})$-模 M都满足 $\Sigma M = 0$，因此由命题 18，它可经由 $U = U(\mathfrak{s})/\langle\Sigma\rangle \cong \mathbf{A}_1$ 分解。反之，若 F是一个在 $\mathbb{C}[ab]$ 上无挠且秩为 1 的 $\mathbf{A}_1$-模，则 $\Theta^*(F)$ 是 H-无挠且秩为 1。事实上，$\Theta(\mathrm{h}) = -\frac{1}{2}(ab + ba) = -ab + \frac{1}{2}$，因此 $H = \mathbb{C}[\mathrm{h}]$ 与 $\mathbb{C}[ab]$同构。分类结论由第 4.2 节的结果得出。□

5.3. **单分次 $U(\mathfrak{s})$-模，其 H-超秩为 $(1|1)$。** 设$M = M_{\bar 0} \oplus M_{\bar 1}$ 为一个$\mathbb{Z}_2$-分次 $U(\mathfrak{s})$-模，它是 H-无挠的，且超秩为$(1|1)$。由于根据引理 17， Σ^2 是中心的，它通过一个标量作用于 M。选取 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得

$$\Sigma^2 = (\lambda + \tfrac{1}{2})^2 \cdot \mathrm{Id}_M. \tag{10}$$

设 $\Bbbk = \mathbb{C}(\mathrm{h})$，并设 $\sigma_1(\mathrm{h}) = \mathrm{h} - 1$。令 $R_1 := \Bbbk[x, x^{-1}, \sigma_1]$。对于 $u \in \Bbbk^{\times}$，令 N_u为定义在 $\Bbbk$上、满足 $x \cdot b = \sigma_1(b)\,u$ 的一维 R_1-模。令 G_{σ_1}为按第 2.2 节中的方式定义的子群（将 σ替换为 σ_1）。

对于 $u \in \Bbbk^\times$，定义一个 $\mathbb{Z}_2$-分次的 $U(\mathfrak{s})$-模 $M_{u,\,\lambda} := N_u \oplus N_u$（偶 $\oplus$ 奇），如下：

$$\mathsf{h} \mapsto \mathsf{h}\, I_2, \qquad \mathsf{p} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{q} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathsf{h}-\lambda}{2}\, x^{-1} \\ \frac{\mathsf{h}+\lambda+1}{2}\, x^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

引理 21。 我们有如下结论：

(a) 赋值 (11) 在 $M_{u,\,\lambda}$ 上定义了一个 $\mathbb{Z}_2$-分次 $U(\mathfrak{s})$-模结构。

(b) 元素 Σ 在 $M_{u,\,\lambda}$ 上的作用为 $(\lambda + \frac{1}{2})\mathrm{diag}(1,\ -1)$，特别地，$\Sigma^2$ 的作用如公式 (10)所示。

(c) 对于来自 (2) 的 $\mathfrak{sl}_2$-*Casimir* 元素 c（其中 $\mathsf{e} = \mathsf{p}^2$ 且 $\mathsf{f} = -\mathsf{q}^2$），有

$$\mathsf{c}|_{(M_{u,\lambda})_{\bar{0}}} = (\lambda+1)^2, \qquad \mathsf{c}|_{(M_{u,\lambda})_{\bar{1}}} = \lambda^2.$$

证明。 利用 $xr = \sigma_1(r)x$ 和 $x^{-1}r = \sigma_1^{-1}(r)x^{-1}$，在 R_1中直接计算可验证这些关系，其中 $r \in \Bbbk$。关于 Σ 的公式同样可由 $\Sigma = \mathsf{pq} - \mathsf{qp} + \frac{1}{2}$ 直接计算得到。这就证明了断言 (a) 和 (b)。

为证明断言 (c)，注意 $\mathsf{c} = (\mathsf{h}+1)^2 + 4\mathsf{fe} = (\mathsf{h}+1)^2 - 4\mathsf{q}^2\mathsf{p}^2$。直接计算可得，$\mathsf{q}^2\mathsf{p}^2$ 在 $(M_{u,\lambda})_{\bar{0}}$ 上作用为$\frac{(\mathsf{h}-\lambda)(\mathsf{h}+\lambda+2)}{4}$，~~在 $(M_{u,\lambda})_{\bar{1}}$ 上作用为$\frac{(\mathsf{h}+\lambda+1)(\mathsf{h}-\lambda+1)}{4}$，由此得到~~所述标量。□

令 $\mathfrak{s}_{\bar{0}} \cong \mathfrak{sl}_2$ 为 $\mathfrak{s}$ 的偶部。这是由 $\mathsf{e} = \mathsf{p}^2, \mathsf{f} = -\mathsf{q}^2$，和 h 张成的子代数。于是 $(M_{u,\lambda})_{\bar{0}}$ 是一个 $U_{(\lambda+1)^2}$-模。令 $L^{\bar{0}}_{u,\lambda} \subset (M_{u,\lambda})_{\bar{0}}$ 为 $(M_{u,\lambda})_{\bar{0}}$ 作为 $U_{(\lambda+1)^2}$-模的单底，并设

$$L_{u,\lambda} := U(\mathfrak{s})\, L^{\bar{0}}_{u,\lambda} \ \subset\ M_{u,\lambda}. \tag{12}$$

为了恰当地表述同构判据，我们引入以下群：

$$\widetilde{G}_{\sigma_1} := \{\pm 1\}\, G_{\sigma_1} = \{\pm g \,:\, g \in G_{\sigma_1}\} \subset \Bbbk^\times.$$

定理 22。 (a) 对于所有 $u \in \Bbbk^\times$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，模 $L_{u,\,\lambda}$ 是一个简单的 $\mathbb{Z}_2$-分次 $U(\mathfrak{s})$-模，它是 H-无挠的，超秩为 $(1|1)$，且 Σ^2 在其上的作用如公式 (10) 所示。

(b) 每个简单的 $\mathbb{Z}_2$-分次 $U(\mathfrak{s})$-模，只要它是 H-无挠的且超秩为 $(1|1)$，就与 $L_{u,\,\lambda}$ 同构，其中 $u \in \Bbbk^\times$ 任意且 $\lambda \in \mathbb{C}$ 任意。

(c) 对于 u、$v \in \Bbbk^\times$ 和 λ、$\lambda' \in \mathbb{C}$，有：

(i) $L_{u,\,\lambda} \cong L_{v,\,\lambda'}$ 作为 $\mathbb{Z}_2$-分次模（即通过一个偶同构）当且仅当

$$\lambda = \lambda' \qquad \textit{and} \qquad v \in \widetilde{G}_{\sigma_1} \cdot u.$$

(ii) $L_{u,\,\lambda} \cong \Pi(L_{v,\,\lambda'})$ 作为 $\mathbb{Z}_2$-分次模当且仅当

$$\lambda' = -\lambda - 1 \qquad \textit{and} \qquad v \in \widetilde{G}_{\sigma_1} \cdot u.$$

特别是，$\Pi(L_{u,\lambda}) \cong L_{u,-\lambda-1}$.

证明。 由构造，$L_{u,\lambda}$ 是$M_{u,\lambda}$的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次 $U(\mathfrak{s})$-子模。由于 x 在 N_u 上的作用是可逆的，该算子

$$\mathsf{p} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

在$M_{u,\lambda}$上是可逆的。因此，任意非零分次 $U(\mathfrak{s})$-子模$W \subset M_{u,\lambda}$满足$W_{\bar{0}} \neq 0$。这意味着 $W_{\bar{0}}$是$(M_{u,\lambda})_{\bar{0}}$的一个非零 $U(\mathfrak{s}_{\bar{0}})$-子模，具有中心特征$(\lambda+1)^2$，因而包含单底 $L^{\bar{0}}_{u,\lambda}$。由此可得$L_{u,\lambda} = U(\mathfrak{s})\ L^{\bar{0}}_{u,\lambda} \subset W$，故$L_{u,\lambda}$是$M_{u,\lambda}$的唯一最小非零分次子模，从而是单的。 H-无挠性与超秩$(1|1)$由$M_{u,\lambda}$继承而来，且 Σ^2按公式（10）作用这一事实由引理 21 成立。这证明了断言(a)。 $\mathfrak{osp}(1|2)$反之，设 $M = M_{\bar{0}} \oplus M_{\bar{1}}$是一个单分次 $U(\mathfrak{s})$-模，它是超秩为$(1|1)$的 H-无挠模。局部化得到 $M_{\mathbb{k}}$:
$= \mathbb{k} \otimes_H M \simeq \mathbb{k}^{1|1}$。由于 Σ^2是中心的，它在 M上通过一个标量作用。选取 $\lambda \in \mathbb{C}$使得 Σ^2按公式（10）作用。选取 $0 \neq v_{\bar{0}} \in (M_{\mathbb{k}})_{\bar{0}}$并令 $v_{\bar{1}} := \mathsf{p}\ v_{\bar{0}}$。则 $v_{\bar{1}} \neq 0$与$(v_{\bar{0}}, v_{\bar{1}})$是 $M_{\mathbb{k}}$的一个齐次 $\mathbb{k}$-基。在对该基作适当重新标度后，p由 $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$表示，其中某个可逆加性映射 $x\colon \mathbb{k} \to \mathbb{k}$ 满足

$$x(r\,b) = \sigma_1(r)\,x(b), \qquad \text{for all } r, b \in \mathbb{k}.$$

于是， x由 $u := x(1) \in \mathbb{k}^\times$唯一确定，并且满足 $x \cdot b = \sigma_1(b)\ u$，对所有$b \in \mathbb{k}$均成立。因此， $M_{\mathbb{k}} \simeq N_u \oplus N_u$是一个 R_1-模。利用关系 $\mathsf{pq} + \mathsf{qp} = \mathsf{h}$ 以及 (10)（等价地，利用 Σ的作用），可以验证 q 必须具有 (11) 中的形式。因此， $M_{\mathbb{k}} \simeq (M_{u,\lambda})_{\mathbb{k}}$是分次 $U(\mathfrak{s})$-模。现在， $M_{\bar{0}}$是一个秩 1 的无挠 $U(\mathfrak{s}_{\bar{0}})$-模，其中心特征为 $(\lambda+1)^2$,; 因此它嵌入 $(M_{u,\lambda})_{\bar{0}}$，并包含其本原 $L^{\bar{0}}_{u,\lambda}$。于是， M包含 $U(\mathfrak{s})L^{\bar{0}}_{u,\lambda} = L_{u,\lambda}$，并且由简单性可知 $M \cong L_{u,\lambda}$。这就证明了断言 (b)。

现在来证明断言 (ci)。由引理 21 可知，在 $L_{u,\lambda}$ 上，我们有

$$\Sigma|_{(L_{u,\lambda})_{\bar{0}}} = (\lambda + \tfrac{1}{2})\,\mathrm{Id}, \qquad \Sigma|_{(L_{u,\lambda})_{\bar{1}}} = -(\lambda + \tfrac{1}{2})\,\mathrm{Id}.$$

因此，任意偶同构 $L_{u,\lambda} \to L_{v,\lambda'}$ 都迫使 $\lambda = \lambda'$。固定 $\lambda = \lambda'$。若 $v \in \widetilde{G}_{\sigma_1} \cdot u$，记 $v = \varepsilon\ {}^{r}_{\sigma_1}(r)u$，其中 $r \in \mathbb{k}^\times$ 且 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$。对于 $\varepsilon = 1$，乘以 r 给出一个 R_1-模之间的同构 $N_u \to N_v$，从而得到一个分次 $U(\mathfrak{s})$-模之间的同构 $M_{u,\lambda} \to M_{v,\lambda}$，并将 $L_{u,\lambda}$ 映到 $L_{v,\lambda}$。对于 $\varepsilon = -1$，同一映射给出一个同构 $M_{u,\lambda} \to M_{w,\lambda}$，其中 $w = {}^{r}_{\sigma_1}(r)u$；再与 $M_{w,\lambda} = N_w \oplus N_w$ 的偶自同构 $(a,b) \mapsto (a,-b)$ 复合，便得到一个同构 $M_{w,\lambda} \to M_{-w,\lambda} = M_{v,\lambda}$，同样将 $L_{u,\lambda}$ 映到 $L_{v,\lambda}$。

反过来，假设 $L_{u,\lambda} \cong L_{v,\lambda}$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次模。进行局部化后，我们得到一个 $\mathbb{Z}_2$-分次 $U(\mathfrak{s})$-模之间的同构 $(L_{u,\lambda})_{\mathbb{k}} \cong (L_{v,\lambda})_{\mathbb{k}}$。利用标准形 (11)，这两个局部化模都同构于 $\mathbb{k}^{1|1}$，其中 $\mathsf{h} = \mathsf{h}I_2$，且 $\mathsf{p} = \begin{pmatrix} 0 & x_u \\ x_u & 0 \end{pmatrix}$（分别为 $\mathsf{p} = \begin{pmatrix} 0 & x_v \\ x_v & 0 \end{pmatrix}$），其中 $x_u \cdot b = \sigma_1(b)u$ 且 $x_v \cdot b = \sigma_1(b)v$。令 Φ 为这两个局部化模之间的偶同构。由于 Φ 与 h 对易，它是对角的，即 $\Phi = \mathsf{diag}(r_0, r_1)$，其中 $r_0, r_1 \in \mathbb{k}^\times$为某些元素。与 p 对易意味着 $r_1 = \pm r_0$。若 $r_1 = r_0$，则关系 $\Phi x_u = x_v \Phi$ 导出 $v \in G_{\sigma_1} \cdot u$；而若 $r_1 = -r_0$，则得到 $v \in (-G_{\sigma_1}) \cdot u$。因此 $v \in \widetilde{G}_{\sigma_1} \cdot u$。

最后，我们证明断言 (cii)。注意，应用 Π 会交换两个齐次分量。因此， Σ 在偶分量上的特征值从 $\lambda + \frac{1}{2}$ 变为 $-(\lambda + \frac{1}{2})$，这对应于将 λ 替换为 $-\lambda - 1$。具体而言，用置换矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 共轭变换 (11) 中的矩阵，会交换两个对角块，并将参数 λ 变为 $-\lambda - 1$。关于 u的条件保持不变，而上述论证表明该参数在相差 $\widetilde{G}_{\sigma_1}$的意义下唯一确定。这就证明了断言 (cii)，特别是证明了 $\Pi(L_{u,\ \lambda}) \cong L_{u,\ -\lambda-1}$。□

注*23*。记 $u^{(2)} := u\,\sigma_1(u)$ 和 $\sigma = \sigma_1^2$（因此 $\sigma(h) = h - 2$），则 $L_{u,\lambda}$ 在偶子代数 $\mathfrak{s}_{\bar{0}} \cong \mathfrak{sl}_2$ 上的限制可描述如下。$e = p^2$在两个齐次分量上的作用由 x^2给出，因此，σ-参数在 $(L_{u,\lambda})_{\bar{0}}$ 和 $(L_{u,\lambda})_{\bar{1}}$两者上均为 $u^{(2)}$，而引理 *21* 分别给出了卡西米尔标量 $(\lambda+1)^2$ 和 λ^2。因此，采用定理 *9* 的记号，有

$$(L_{u,\lambda})_{\bar{0}} \cong K_{u^{(2)}}, \qquad (L_{u,\lambda})_{\bar{1}} \cong K_{u^{(2)}},$$

其中，$K_{u^{(2)}}$ 取为具有中心特征 $\vartheta = (\lambda+1)^2$ 的模，在偶部中为 $\vartheta = \lambda^2$，在奇部中为 $\vartheta = \lambda^2$。等价地，我们可以写成

$$\mathrm{Res}^{U(\mathfrak{s})}_{U(\mathfrak{sl}_2)} L_{u,\lambda} \;\cong\; K_{u^{(2)},(\lambda+1)^2} \;\oplus\; K_{u^{(2)},\lambda^2}.$$

我们注意到，对于简单 $\mathfrak{osp}(1|2)$-模的分类，也可以借鉴 [CM21]中的一些思路。然而， [CM21], 中的方法完全不适用于非分次模的分类；此外，由于缺少 [CM21]术语中所谓的分次算子，即使在分次情形下，该方法也无法充分发挥作用。例如，定理 22 的断言 (cii)无法用 [CM21]中的方法推导出来。

References

[AP74] Arnal, D., Pinczon, G. 关于李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 的代数不可约表示。《数学物理杂志》15 (1974), 350–359. [Ba92] Bavula, V. 广义 Weyl 代数及其表示。《代数与分析》4 (1992), no. 1, 75 97 **4** 1993 1, 71 92 –；译文载于 [00]《圣彼得堡数学杂志》( ), no. – BO Bavula, V., van Oystaeyen, F. 李超代数 osp(1,2) 的简单模。《纯粹与应用代数杂志》150 (2000), no. 1, 41–52. [Bl79] Block, R. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的不可约表示分类。《美国数学会通报》(N.S.) 1 (1979), no. 1, 247–250. [Bl81] Block, R. 李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 和 Weyl 代数的不可约表示。《数学进展》39 (1981), no. 1, 69–110. [CM21] Chen, C.-W.; Mazorchuk, V. 李超代数上的简单超模。《美国数学会会刊》374 (2021), no. 2, 899–921. [Di96] Dixmier, J. 包络代数。1977 年译本的修订重印版。数学研究生教材，第 11 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996。xx+379 页。[Dr83] Drozd, Yu. 李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 的表示。（乌克兰语）《基辅大学学报》数学与力学系列，第 25 期 (1983), 70–77. [GNZ26] Grantcharov, D., Nguyen, K., Zhao K. 一族秩2的简单 $U(\mathfrak{h})$-自由模，定义在 $\mathfrak{sl}(2)$ 上。预印本 arXiv:2601.21197。[Ma10] Mazorchuk, V. 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-模的讲义。帝国理工学院出版社，伦敦，2010，x+263 页。[Ni15] Nilsson, J. $U(\mathfrak{h})$ 上的简单 $\mathfrak{sl}_{n+1}$-模结构。《代数杂志》424 (2015), 294–329. [Pi90] G. Pinczon, 李超代数 $\mathfrak{osp}(1,2)$ 的包络代数，《代数杂志》132 (1990), no. 1, 219–242.

(D.Grantcharov) 德克萨斯大学阿灵顿分校数学系，美国 电子邮箱：grandim@uta.edu

(L. KˇriˇZka) 查理大学，布拉格，捷克共和国 电子邮箱：krizka.libor@gmail.com

(V.Mazorchuk) 乌普萨拉大学数学系，乌普萨拉，瑞典 电子邮箱：mazor@math.uu.se