arXiv:2603.04313v1 [math.DS] 4 Mar 2026

树网络中同步现象的基于对称性的分类

N´ıcolas Brito 和 Miriam Manoel

摘要 耦合细胞系统用于对相互作用的动力单元建模，为研究集体行为中出现的同步现象提供了自然的框架。图对称性往往会诱导这类模式，但某些网络还会呈现与自同构无关的额外同步，通常称为奇异同步。在无向非对称图中，若存在同步，它必定不是由对称性诱导的；而判定何时会出现这种奇异模式，仍是一个颇具挑战性的结构问题。本文针对底层耦合图为树的网络探讨这一问题；这类图能够自然地刻画元素之间的层级相互作用。我们证明，树型网络中不会出现奇异同步，即每种平衡着色都是由图自同构决定的不动点着色。此外，我们还指出了图的叶子在这一背景下所发挥作用的重要性。除了研究存在性结果，我们还通过分析树网络上定义的容许向量场的平衡态线性稳定性，以及同步子空间的李雅普诺夫稳定性，探讨这些结构带来的动力学后果。我们特别关注樱桃型构型：在此类构型中，连接到同一顶点的叶子所产生的局部对称性会影响相应同步态的稳定性，从而阐明树的组合结构如何制约同步的产生与稳定性。

关键词：同步、对称性、无向网络、树图**数学主题分类：**
37G40、82B20、90B10

N´ıcolas Brito 圣保罗大学数学与计算科学研究所（ICMC-USP），Av. Trabalhador S˜ão-carlense, 400 - Centro, S˜ão Carlos, SP, Brasil, 13566-590。电子邮箱：nicolas.r.brito@usp.br Miriam Manoel 圣保罗大学数学与计算科学研究所（ICMC-USP），Av. Trabalhador S˜ão-carlense, 400 - Centro, S˜ão Carlos, SP, Brasil, 13566-590。电子邮箱：miriam@icmc.usp.br

1 引言

相互作用动力系统网络出现在广泛的科学领域中 [1, 7, 16, 12]。这类系统中的一个核心现象是同步，即尽管底层相互作用错综复杂，一些单元子集仍会随时间同步演化。Golubitsky、Stewart 及其合作者 [4, 9, 10, 11], 发展了耦合细胞系统理论，为研究这些现象提供了数学框架，并将动力学性质与相关耦合图的结构联系起来。一方面，同步通常与由底层网络的对称性所诱导的不变子空间相关。这些模式是图的自同构群某个子群的不动点子空间。另一方面，有些网络还存在并非由对称性诱导的额外不变子空间，这种现象称为奇异同步 [3]。

对于非对称网络，如果存在同步，则它是奇异的。此类行为的具体实例已有报道，但奇异同步何时可能或不可能出现，仍是一个尚未解决且颇具挑战性的问题，即使对于只有一种细胞类型和一种箭头类型的网络也是如此。在有向情形中，即使网络只有两个或三个顶点，非平凡同步也很常见且易于观察，如图 3 所示。然而，在无向情形中，当我们将研究范围限定于简单网络——即由不含重边和自环的无向图建模的网络——我们的研究表明，非对称网络中出现同步模式的情况极为罕见。事实上，近期对两百个随机非对称无向图进行的数值模拟显示，这些图均不允许存在非平凡的平衡着色。这些图含有 10 至 25 个顶点，且任意两点之间存在一条边的概率介于 0.2 至 0.6 之间。

图的正则性（所有顶点的度相同）是实现完全同步的充分条件，即所有网络细胞的演化完全相同。一些简单的非对称图也是正则图，因此这类结构中可能出现同步。不过，完全同步并非非对称网络中可能出现的唯一模式。事实上，Frucht 图是一个有 12 个顶点的 3-正则非对称图，它不仅允许完全同步，也支持 2 簇和三簇同步模式（图 4）。

从结构的角度看，非对称图尤为重要。Erd˝os 和 R´enyi 的一项经典结果 [6] 表明，随着顶点数量趋于无穷，随机图为非对称图的概率趋于 1。因此，在大型无向网络中，对称性应被视为一种非一般特征；而不依赖自同构的同步机制，对于理解典型网络行为至关重要。这一观察进一步促使我们将对非称图中奇异同步的研究视为耦合细胞系统理论中的核心问题。

在本文中，我们重点研究底层耦合图为树的网络。从理论角度看，树构成了研究非对称图中同步的最小类别，因此特别适合用于探究奇异同步的极限。由于每个连通图都至少包含一棵能够体现其连通结构的生成树，理解树上的同步机制有助于洞察更一般的网络拓扑。我们指出，存在无穷多棵非对称树 [6], ，其中最小的阶数为 7（图 1），这进一步凸显了这一类别作为一个非平凡且结构丰富的族的重要性。

从动力系统的视角来看，树状结构作为各类系统的模型而出现，并编码层级交互结构。例如，此类结构出现在神经元树突 [14],血管与呼吸网络 [17]以及系统发育关系 [15]的模型中。在这些情形下，无环性质反映了交互路径，例如无向流、资源分配或信号传输。

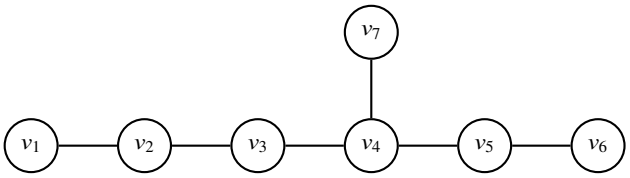


图 1 阶数 7 的非对称树示例。

度为一的顶点，通常称为悬挂 顶点，在这些系统中起着关键作用，往往表示边界分量，其有限的连通性会显著影响整体动力学行为。这些顶点在树型图中也称为 叶子 ，并且是同步刻画的基础（命题 3.1、3.5 与引理 3.8），如第 3 节所示。因此，我们得到本节的主要结果：树型网络不允许奇异同步模式（定理 3.9）。这一事实将树归入同步完全由对称性决定的网络类别，从而为理解无向图中同步与非对称性之间的关系迈出了第一步。

樱桃构型——附着于同一公共邻居的叶子群——在树中起着重要的结构作用，其重要性体现在其普遍性上：随着图的阶数增加，随机树至少包含一个樱桃的概率趋于 1 [6]。含有樱桃的图具有一种对称性，即交换所附着叶子的置换。因此，除同步的存在性之外，我们还研究由樱桃诱导的其稳定性（命题 4.2 和推论 4.9）。我们将看到，它们的局部排列会影响由樱桃生成的同步子空间的李雅普诺夫稳定性，如定理 4.12 和推论 4.13 所述。

本文结构安排如下。第 2 节用于预备知识，我们在其中回顾耦合细胞系统与同步的基本定义和结果。在第 3 节中，我们通过叶子和剪枝过程刻画树型网络中的同步模式。最后，在第 4 节中，我们分析可容许树网络中的线性稳定性和李雅普诺夫稳定性。

2 耦合细胞系统

本节旨在介绍耦合细胞系统的预备背景知识，以及对称性在同步模式形成过程中所起的作用。全文中，我们将 G 不加区分地用来表示网络或其关联图。在耦合细胞系统文献中，网络术语十分常见；当从动力系统的视角看待图时，通常会使用这些术语。按照[11], 定义，耦合细胞网络 G 由有限个细胞 （或顶点）构成，记为 $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$；必要时也记作$V(G)$，并由有限个边 构成，用以描述细胞之间的耦合。在每个集合中，我们引入一个等价关系，用来描述细胞和边的类型。

为了联系具有相同耦合关系的细胞的动力学，我们将 $c \in V$ 的输入集 定义为 $I(c) = \{e \in E : \mathrm{H}(e) = c\}$，并称两个细胞 c、d 是输入同构 的，当且仅当它们的输入集之间存在保持边类型不变的同构。在此情形下，如果网络中的所有细胞都输入同构，则称该网络是齐次 的。

对于每个细胞 $c \in V$，其细胞相空间 P_c 定义为一个非零有限维向量空间；如果细胞 c 和 d 属于同一类型，则 $P_c = P_d$。此外，$P = \prod_{c \in V} P_c$ 是该网络的总相空间，并且

$$P_{\mathcal{T}(I(c))} = P_{\mathcal{T}(e_1)} \times P_{\mathcal{T}(e_2)} \times \cdots \times P_{\mathcal{T}(e_{|I(c)|})}$$

耦合相空间，其中 遍历 $()$，$T:$ 是 尾部 函数，返回边的源细胞。

耦合系统随时间演化的研究通过自治常微分方程 $\dot{x} = f(x)$进行，而向量场 $f\colon P \to P$ 必须与耦合动力学相容，并遵循关联图所描述的相互作用。这类向量场称为容许 向量场：对所有 $c \in V$，向量场的分量 $f_c(x)$仅依赖于变量 x_c和变量 $x_{\mathcal{T}(I(c))}$，也就是说，存在 $\tilde{f}_c\colon P_c \times P_{\mathcal{T}(I(c))} \to P_c$，使得 $f_c(x) = \tilde{f}_c\left(x_c,\ x_{\mathcal{T}(I(c))}\right)$。此外，输入同构细胞共享相同的控制函数，只是其坐标经过输入同构重新标记。树网络上的容许向量场示例见例 4.10。

在这种形式体系中，同步是集合 V 上的等价关系 $\bowtie$，满足：对于所有 t，$c \bowtie d$ 当且仅当 $x_c(t) = x_d(t)$。给定网络的总相空间 P，以及一个细化 $\sim_V$ 的等价关系 $\bowtie$，我们将多对角子空间定义为

$$\Delta_{\bowtie} = \{x \in P : x_c = x_d \text{ whenever } c \bowtie d, \forall c, d \in V\}.$$

如果 $\Delta_{\bowtie}$ 在任何可容许的向量场下都保持不变，我们就称 $\bowtie$ 是鲁棒多重同步的 d.

另一方面，如果对于所有 $c \bowtie d$、c，$d \in V$，都存在一个输入同构 $\beta\colon I(c) \to I(d)$，使得对于所有 $e \in I(c)$，T $(e) \bowtie$ T $(\beta(e))$，则称集合 V 上的等价关系 $\bowtie$ 是平衡的。为每个 $\bowtie$-类指定一种不同的颜色，若着色 $\bowtie$ 是平衡关系，则称该着色为平衡的。

文献中的一项核心结果给出了同步模式的完整刻画：当且仅当 $\bowtie$ 是平衡的时，$\bowtie$ 在 V 上是鲁棒多重同步的。由于平衡关系 $\bowtie$ 细化 $\sim_I$，通过同步簇 研究网络动力学，便引出了商网络的概念，记作 $G_{\bowtie}$。其顶点集为商集 $V_{\bowtie} = V/\bowtie$，边集 $E_{\bowtie}$ 则由原网络的边投影到 $\bowtie$ 等价类上得到。平衡关系在无向树中呈现出鲜明的特征。回顾一下，树是没有圈的连通图。在这种情形下，平衡关系以一种特别有规律的方式出现，这一事实促使我们开展本研究。图 2 展示了这一现象：图中给出了具有十个顶点的无向树的一个平衡三着色及其商网络。

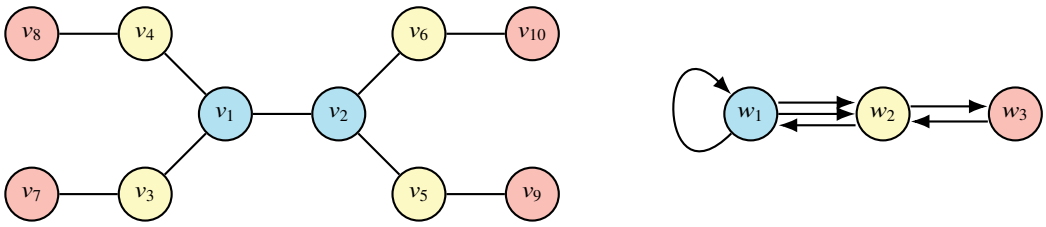


图 2 10单元无向树（左）及其商网络（右）上的平衡着色示例。

对称性通过顶点置换体现结构不变性；从动力学角度看，这对应于不变子空间和同步模式。按照 [3], ，耦合细胞网络 G 的一个对称性是作用于 V 和 E 上的一对双射 $\sigma = (\sigma_V, \sigma_E)$，分别保持细胞类型、边类型和邻接关系。这些双射是自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的元素。若该群是平凡群，我们就称该网络为非对称。若 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(G)$ 是一个子群，则由 $\bowtie_\Gamma$ 在 V 上定义的关系为

$$c \bowtie_\Gamma d \iff \text{there exists } \sigma \in \Gamma \text{ such that } \sigma_V(c) = d$$

是一个平衡等价关系。此外，很容易看出，$\Delta_{\bowtie_\Gamma}$ 等于不动点子空间 $\mathrm{Fix}(\Gamma) = \{x \in P : \gamma x = x, \forall \gamma \in \Gamma\}$。因此，我们将耦合细胞网络 G 上的平衡关系 $\bowtie$ 称为不动点着色，如果对于某个 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(G)$子群，有 $\Delta_\bowtie = \mathrm{Fix}(\Gamma)$；否则，就称其为奇异。



图 3 双顶点网络（左）和三顶点网络（右）上的奇异同步模式。

自同构群平凡的图为平衡关系是奇异的提供了充分条件。图 3 展示了有向网络中包含两个和三个细胞的奇异着色最简单的例子。图 4 还展示了 Frucht 图中两个奇异平衡关系的例子；Frucht 图是一种经典的非对称无向图。

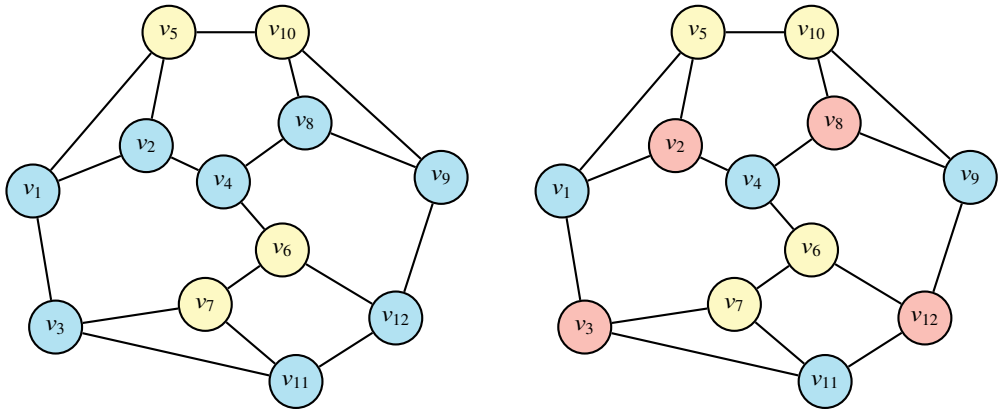


图 4 Frucht 图中的二平衡着色（左）和三平衡着色（右）。

3 树型网络中的同步模式

从现在起，术语 图 始终指简单图，也就是说，它是无向的，只有一种顶点类型和一种边类型，且没有重边或自环。众所周知，以圈图为模型的齐次网络不允许出现奇异平衡关系 [2]。圈图是第一类其同步模式完全由其自同构群决定的网络。本节将证明，树也具有同样的性质，即这一类图中不会出现奇异同步。

图 G 的两个不同顶点 c，d 若它们之间存在一条边，则称其相邻，$c \sim d$。若 G 的阶为 n，顶点集为 $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$，则 G 的邻接矩阵 是 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$，

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } v_i \sim v_j \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

若 G 是简单的，则 A 是对称矩阵，且对角线元素为零。顶点 c 的度 $\deg(c)$ 是与之相邻的顶点数，也等于 c 的输入集的基数。最后，回顾一下，G 上的路径 是由不同顶点构成的序列 $p = (v_1, \cdots, v_k)$，满足对所有 $i \in \{1, \cdots, k-1\}$ 都有 $v_i \sim v_{i+1}$。其长度 定义为 $k-1$，而 v_1 与 v_k 之间的距离记为 $\operatorname{dist}(v_1, v_k)$，即连接它们的最短路径的长度。

3.1 平衡关系的性质

本小节将用到多重集这一概念。多重集 B 是一个元素集合，其中允许重复出现的元素，并通过重数记录重复次数。给定两个多重集 B_1 和 B_2，它们的和$B_1 + B_2$ 定义为合并 B_1 和 B_2中的所有元素，并将同时出现在两者中的元素的重数相加。例如，如果 $B_1 = \{1, 2, 2, 3\}$和 $B_2 = \{2, 3, 3\}$，那么它们的和包含七个元素，即$B_1 + B_2 = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 3\}$。理解这些概念对于了解叶子——度为一的顶点——如何决定树图上平衡关系的形式至关重要。

我们首先引入 $c \in V$ 到叶子的距离，它是多重集

$$L_c = \{\operatorname{dist}(c, l) : l \text{ is a leaf of } G\}, \tag{1}$$

以及多重集 $L_c^m = \{\delta \in L_c : \delta \leq m\}$和 $L_c^m \oplus 1 = \{\delta + 1 : \delta \in L_c^m\}$。于是我们有 ：

命题 3.1 设 G 是一棵树图，c、$d \in V$ 和 $\bowtie$ 是 G 上的一个非平凡平衡关系。若 $c \bowtie d$，则 $L_c = L_d$。

证明 我们对 m 作归纳法，证明对于每个满足 $c \bowtie d$ 的 c，$d \in V$，都有 $L_c^m = L_d^m$。当 $m = 1$时，关系 $c \bowtie d$ 意味着 c 与 d 相邻的叶子数相同，因此 $L_c^1 = L_d^1$。假设结论对 m成立，现证明其对 $m+1$ 也成立。若 k_c 和 k_d 分别是 L_c^{m+1}和 L_d^{m+1} 中元素的数量，则

$$L_c^{m+1} = \min_{k_c}\left(\sum_{v \sim c} L_v^m \oplus 1\right) \qquad L_d^{m+1} = \min_{k_d}\left(\sum_{v \sim d} L_v^m \oplus 1\right),$$

其中，$\min_i(B)$ 表示由多重集 B 中最小的 i 个元素组成的多重集，并按重数计数。由于 $c \bowtie d$，我们可以将每个 $v \sim c$ 与一个 $v' \sim d$ 一一对应地关联起来，使得 $v \bowtie v'$。因此，根据

归纳假设

$$L_c^{m+1} = \min_{k_c}\Big(\sum_{v\sim c} L_v^m \oplus 1\Big) = \min_{k_c}\Big(\sum_{v\sim d} L_v^m \oplus 1\Big).$$

最后一步是证明 $k_d = k_c$。不失一般性，假设 $k_d > k_c$。那么，至少还存在一个叶子 l，其到 $m+1$ 的距离比到 c的距离更远。令 d' 为 d 在连接 d 与 l 的唯一路径上相邻的顶点，并令 c' 为与 c 相邻的 d' 的双射对应，使得 $c' \bowtie d'$。那么，至少还存在一个叶子，其到 d' 的距离比到 c'的距离更远，这与归纳假设中的 $L_{c'}^m = L_{d'}^m$ 矛盾。因此， $k_d = k_c$，由此得到 $L_c^{m+1} = L_d^{m+1}$。□

树的一个基本性质是，任意两个顶点之间都存在一条连接它们的唯一路径（例如，参见 [5, 定理 1.5。1]）。对于属于同一 $\bowtie$-类的顶点而言，这一特性与树上的平衡关系相呼应。这一现象在命题 3.3、3.5 中得到了形式化，并在图 2（左）中作了说明。

定义 3.2 设 $p = (v_0、\cdots、v_k)$ 是图 G 上的一条顶点路径，且 $\bowtie$ 是该图上的一个平衡着色。若对于每个 $i \in \{0、\cdots、k\}$ 都有 p，则称 p 是 $\bowtie$-反射的。

命题 3.3 设 G 是一棵树图， $\bowtie$ 是 G 上的一个非平凡平衡着色。对于同一个 $\bowtie$-类中的任意两个顶点，它们之间的路径都是 $\bowtie$-反射的。

证明 设 $c、d \in V$，使得 $c \bowtie d$，并考虑路径 $p = (c = v_0、v_1、\cdots、v_{k-1}、v_k = d)$。假设 $\mathrm{dist}(c、d) = k > 2$；否则，由于 c 与 d 之间至多只有一个顶点，结果立即成立。反设 p 不是 $\bowtie$-反射的，即对于某个 $i \in \{1、\cdots、k-1\}$，$v_i \not\bowtie v_{i-i}$。取满足该条件的第一个索引 i_0。由于 $\bowtie$ 是一个平衡关系，存在顶点 $v_{(1)i_0-1}、\cdots、v_{(1)k-i_0}$，使得 $v_{i_0-1} \sim v_{k-i_0}^{(1)}$，并且

$$\begin{cases} v_j^{(1)} \sim v_{j+1}^{(1)},\ j \in \{i_0-1, \cdots, k-i_0-1\} \\ v_j^{(1)} \bowtie v_j,\ j \in \{i_0-1, \cdots, k-i_0\}. \end{cases} \tag{2}$$

这些 顶点都与 p中定义的顶点互不相同，否则该树就会有一个环。

由于 $\bowtie$是平衡的，必定存在 $v_{(2)i_0-1}, \cdots, v_{k-i_0}^{(2)}$，使得 $v_{(1)i_0-1} \sim v_{(2)k-i_0}$并且确实满足(2)中的耦合/等价性质。同样，这些顶点都与先前定义的顶点互不相同，否则该树就会有一个环。图5的图示说明了这一过程。

为了遵守平衡着色，必须重复同样的过程。由于该图是有限的，该过程会在某个迭代步骤 $s \in \mathbb{N}$停止，也就是说，对于某个 $r \in \{i_0-1, \cdots, k-i_0\}$， $v_r^{(s)}$等于先前定义的某个顶点。但这是一个矛盾，因为 G 没有圈。

推论 3.4 设 $\bowtie$ 是树 G 上关于 c和 $d \in V$的一个非平凡平衡关系。若 $c \bowtie d$，则连接 c 与 d 的路径上没有顶点属于 $[c]_{\bowtie}$。

证明 考虑路径 $p = (c, v_1, \cdots, v_{k-1}, d)$，并通过缩并假设存在 $i \in \{1, \ldots, k-1\}$，使得 $v_i \in [c]_{\bowtie}$。首先注意到 $i \neq 1, k-1$，也就是说， v_i 与 c 或 d不相邻；否则，根据命题 3.3， p 的所有顶点都属于 $[c]_{\bowtie}$。根据平衡关系的定义，这将生成一条顶点均属于 $[c]_{\bowtie}$的无限路径。因此， $k \geq 4$。

三次使用命题 3.3——分别针对路径 p、c 与 v_i 之间的路径以及 v_i 与 d 之间的路径——可得 $v_1 \bowtie v_{k-1}$、 $v_1 \bowtie v_{i-1}$ 和 $v_{i+1} \bowtie v_{k-1}$。由传递性， $v_{i-1} \bowtie v_{i+1}$，因此

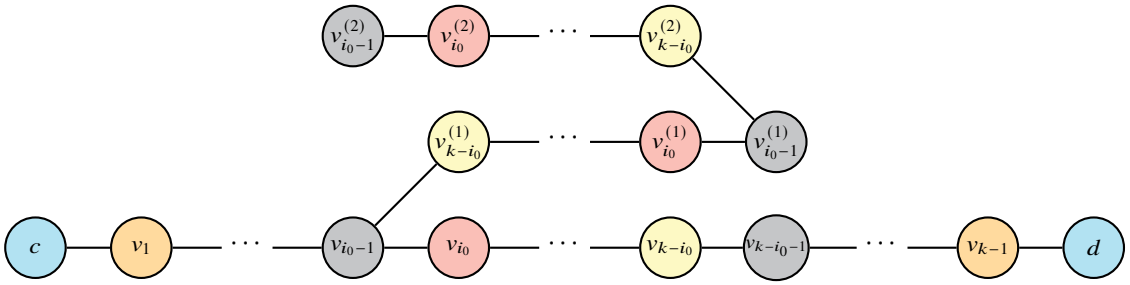


图5 命题 3.3 的证明中耦合过程的示意图。

存在一个新顶点 $v(1)_{i-1} \in V$与 c 相邻，使得 $v^{(1)}_{i-1} \in [v_{i-1}]_{\bowtie}$。现在，由于 G 没有圈，并且为了遵守平衡关系， $v^{(1)}_{i-1}$ 必须从 $[v_2]_{\bowtie}$ 中的一个新顶点接收输入，如此继续，如同命题 3.3 的证明中所给出的论证。这将在 G 上给出一条无限路径，从而构成矛盾。□

一个自然的问题是，一棵树是否可以具有一种非平凡平衡关系，使得所有叶子都属于不同的 $\bowtie$类。下面的结果表明这是不可能的。

命题 3.5 如果树图 G 具有非平凡平衡关系，则 G 的至少两个叶子属于同一个 $\bowtie$类。

证明 设 c、 $d \in V$ 互异，使得 $c \bowtie d$，并设 p 为它们之间的路径。若 c 与 d 是叶子，则论证完成。由于叶子不能与非叶子 $\bowtie$等价，我们现在假设 c 与d 不是叶子。由于 $\deg(c)$、$\deg(d) \geq 2$，存在满足 $c_1 \notin p$的 $c_1 \sim c$。我们断言必定存在$d_1 \sim d$，且满足 $d_1 \notin p$，使得 $c_1 \bowtie d_1$。事实上，鉴于 $\bowtie$ 是平衡的，若 $p = (c, d)$，则该陈述立即成立；否则存在 $\beta \in \mathrm{B}(c, d)$，它将 p 上与 c 相邻的顶点映射到 p上与 d 相邻的顶点，因为由命题 3.3， p 是 $\bowtie$ 反射的。由于 G 上不存在圈， $d_1 \notin p$、 d_1 与 c_1 互异。因此，若 c_1 是叶子，则 d_1也是叶子，从而结论成立。

现在，假设 c_1 不是叶子，并令 l为路径 $p_0 = (c, c_1, \cdots, c_{k-1}, l)$ 末端的叶子，该路径经过 c 和 c_1，其中 $k = \mathrm{dist}(c, l)$。由于 $\bowtie$ 是平衡的，且 $c_1 \bowtie d_1$，因此存在一个与 c_2不同的 $d_2 \in V$（否则 G 会包含一个环），使得 $d_2 \sim d_1$ 且 $d_2 \bowtie c_2$。同样，由于 $d_2 \bowtie c_2$，存在 $d_3 \in V$，使得 $d_3 \sim d_2$、 $d_3 \bowtie c_3$ 且 $d_3 \neq c_3$。通过这一论证，我们可以构造一条路径 $p'_0 = (d, d_1, \cdots, d_{k-1})$，使得对所有 $i \in \{1, \cdots, k-1\}$，都有 $d_i \bowtie c_i$。根据命题 3.1，并且由于 $\bowtie$是平衡的且 $c_{k-1} \bowtie d_{k-1}$，至少存在一个叶子 $l' \in V$，使得 $l' \sim d_{k-1}$ 且 $l' \bowtie l$。□

路径图是最简单的一类树，表示由连接组成的线性链——有两个叶子，其余所有顶点的度均为二。我们使用上述结果证明，在这种情况下不存在奇异同步：

推论 3.6 路径图不允许存在奇异平衡关系。

证明 设 $\bowtie$是阶为 n 的路径图 $P_n = (v_1, \cdots, v_n)$ 上的一个非平凡平衡关系。由命题 3.5 $v_1 \bowtie v_n$，以及由命题 3.3 P_n 是 $\bowtie$反射的。由于 $\mathrm{Aut}(P_n) = \{id, \phi\}$，其中对每一个 $i \in \{1, \cdots, n\}$， ϕ 将 v_i映射到 v_{n-i+1}，我们有 $\Delta_{\bowtie} = \mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}(P_n))$，从而结论成立。□

3.2 树上的不动点着色

回顾：阶为 n 的连通图 G是一棵树，当且仅当G有 $n-1$ 条边。我们利用这一刻画，给出树图上的一个剪枝过程，该过程生成一棵新的树并保持平衡关系。若 L 是 G的叶子的集合，我们用 $G\setminus L$ 表示通过删除 L 的顶点（以及与 L中的顶点关联的所有边）所得到的图。

命题 3.7 若 $\bowtie$ 是树 G上的平衡关系，则 $G\setminus L$ 是一棵树，并且 $\bowtie|_{G\setminus L}$ 是 $G\setminus L$上的平衡关系。

证明 G 有 $|V|-1$ 条边，并且 G 的每个叶子都通过一条边与树的其余部分连通。因此，移除 L G 后，我们也会移除 G的 $|L|$ 条边。但是， $G\setminus L$ 有 $|V|-|L|$ 个顶点和$|V|-|L|-1$ 条边，所以 $G\setminus L$ 是一棵树。

对于第二个结论，若 $c\bowtie d$，则存在一个输入同构 $\beta: I(c)\to I(d)$，使得对所有 $e\in I(c)$，$\mathrm{T}(e)\bowtie\mathrm{T}(\beta(e))$。若 $\mathrm{T}(e)\in L$，则 $\mathrm{T}(\beta(e))\in L$，因为叶子只能与叶子平衡等价。因此， $\beta|_{G\setminus L}$ 是一个输入同构，使得对于网络 $G\setminus L$中 c 的输入集里的所有边 e，$\mathrm{T}(e)\bowtie\mathrm{T}(\beta(e))$。□

上述剪枝过程可以通过移除 $G\setminus L$的叶子等方式重复进行。该过程在第 s步结束（假设如此），此时剩余的图要么是一个 2 个顶点（且有一条边）的图，要么是一个 1 个顶点（且没有边）的图，因为下一步将得到空图。令

$$G^0=G,\ L^0=L,\ G^i=G^{i-1}\setminus L^{i-1},\ i\in\{0,\cdots,s\},\tag{3}$$

其中， L^{i-1} 表示树 G^{i-1}的叶子集合。这个过程是一种通过迭代图的叶子以算法方式获得平衡类的方法:

引理 3.8 若 $\bowtie$ 是树 G 上的一个非平凡平衡关系，那么对每个 $c\in V$，都存在一个指标$i\in\{0,\cdots,s\}$，使得 $[c]_{\bowtie}$的所有顶点都是 G^i的叶子。

证明 这直接由命题 3.1 得出。□

命题 3.5 和推论 3.6 自然引出了这样一个问题：树是否存在奇异关系。借助上述引理，我们现在可以陈述本节的主要定理。

定理 3.9 树 G 上的每个平衡着色都是不动点着色。

证明 证明基于式 (3) 中定义并在图6中示意说明的树剪枝过程。设 $\bowtie$ 是树 G上的一个平衡关系。假设 $\bowtie$ 是非平凡的，否则 $\Delta_{\bowtie}=\mathrm{Fix}(\{id\})$，结论即得。只需构造一个自同构 $\phi: V\to V$，使得 $\Delta_{\bowtie}=\mathrm{Fix}(\phi)$。令 $i_0\in\{0,\cdots,s\}$ 为满足 $\bowtie|_{G^{i_0}}$ 是 G^{i_0} 上的平凡平衡关系的最小整数，并将 ϕ_0 定义为 $V(G^{i_0})$的平凡置换。因此， ϕ_0是 G^{i_0}的自同构，且 $\Delta_{\bowtie|_{G^{i_0}}}=\mathrm{Fix}(\phi_0)$。

记 $i_1=i_0-1$。由于 $\bowtie|_{G^{i_1}}$ 是 G^{i_1}上的非平凡平衡关系，令

$$[v_1^1]_{\bowtie|_{G^{i_1}}}=\{v_1^1,\cdots,v_1^{q_1}\},\cdots,[v_{j_1}^1]_{\bowtie|_{G^{i_1}}}=\{v_{j_1}^1,\cdots,v_{j_1}^{q_{j_1}}\}$$

是 $\bowtie|_{G^{i_1}}$的所有新等价类，即 $\bowtie|_{G^{i_0}}$中未列出的等价类。根据引理 3.8，对于每个 $r\in\{1,\cdots,j_1\}$，$[v_r^1]_{\bowtie|_{G^{i_1}}}=[v_r^1]_{\bowtie}$。现在，令 ϕ_1 为通过对每个$r\in\{1,\cdots,j_1\}$ 将置换循环 $(v_r^1\,v_r^2\cdots\,v_r^{q_r})$ 添加到 ϕ_0 中而得到的 ϕ_0 到 V（G^{i_1}）的扩展。

由于 $\bowtie|_{G^{i_0}}$ 是平凡平衡关系，对于每个 $r \in \{1, \cdots, j_1\}$，$[v_r^1]_{\bowtie|_{G^{i_1}}}$ 的所有元素都必须与 G^{i_0} 中唯一的一个顶点相邻，因为 $\bowtie|_{G^{i_1}}$ 是 G^{i_1} 上的平衡关系。因此，ϕ_1 是 $V(G^{i_1})$ 上的一个保持邻接关系的置换，也就是说，它是 G^{i_1} 的一个自同构。此外，等式 $\Delta_{\bowtie|_{G^{i_1}}} = \mathrm{Fix}(\phi_1)$ 可直接由构造得出。

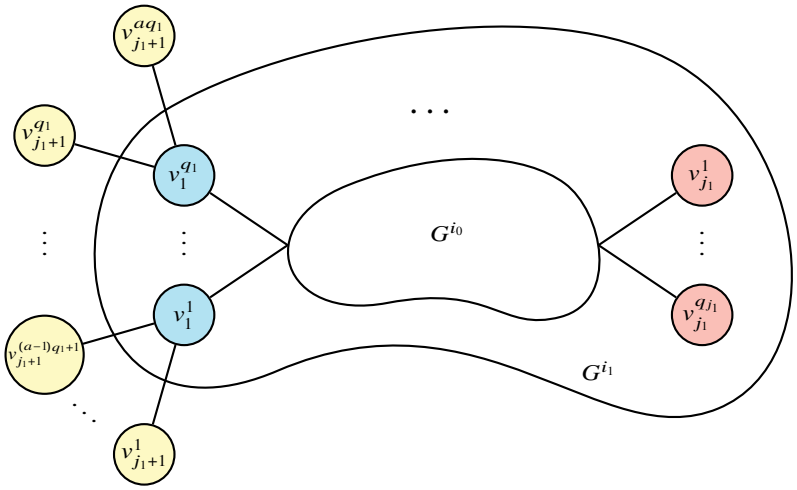


图6 定理 3.9 证明中耦合过程的示意图。

如果 $G^{i_1} \neq G$ 我们重复这一过程：定义 $i_2 = i_1 - 1$ 并令

$$[v_{j_1+1}^1]_{\bowtie|_{G^{i_2}}} = \{v_{j_1+1}^1, \cdots, v_{j_1+1}^{q_{j_1+1}}\}, \cdots, [v_{j_1+j_2}^1]_{\bowtie|_{G^{i_2}}} = \{v_{j_1+j_2}^1, \cdots, v_{j_1+j_2}^{q_{j_1+j_2}}\}$$

为$\bowtie|_{G^{i_2}}$ 的所有新等价类（即未列在$\bowtie|_{G^{i_1}}$中的等价类）。同样，根据引理 3.8，对于每个$r \in \{j_1 + 1, \cdots, j_1 + j_2\}$，都有 $[v_r^1]_{\bowtie|_{G^{i_2}}} = [v_r^1]_{\bowtie}$。一个新等价类的所有元素作为 G^{i_2} 的顶点来看时，都只与$[v_1^1]_{\bowtie|_{G^{i_1}}}, \cdots, [v_{j_1}^1]_{\bowtie|_{G^{i_1}}}$中的某一个唯一等价类的顶点相邻；否则，这将与 $\bowtie|_{G^{i_2}}$ 是平衡的这一事实相矛盾，因为在迭代的回退步骤中不可能出现 $\bowtie|_{G^{i_1}}$-类。

为了符合$\bowtie|_{G^{i_2}}$ 是平衡的且 G^{i_2} 没有圈这些事实，如果类 $[v_r^1]_{\bowtie|_{G^{i_2}}}$ 中有数目为 a 的顶点 $r \in \{j_1 + 1, \cdots, j_1 + j_2\}$与 v_b^1相邻，对于某个 $b \in \{1, \cdots, j_1\}$，则类 $[v_b^1]_{\bowtie|_{G^{i_1}}}$ 的每个顶点必须与 $[v_r^1]_{\bowtie|_{G^{i_2}}}$ 的 a 个顶点相邻且不重复，即 $q_r = aq_b$。不失一般性，必要时重新标记下标，假设 $v_r^1, v_r^{q_b+1}, \cdots, v_r^{(a-1)q_b+1}$是与 v_b^1相邻的顶点，$v_r^2, v_r^{q_b+2}, \cdots, v_r^{(a-1)q_b+2}$是与 v_b^2相邻的顶点，依此类推，即 $v_r^{q_b}, v_r^{2q_b}, \cdots, v_r^{aq_b}$是与 $v_b^{q_b}$ 相邻的顶点。利用这一记号，构造如下给出的置换循环

$$(v_r^1\ v_r^2 \cdots v_r^{q_b}\ v_r^{q_b+1} \cdots v_r^{2q_b}\ v_r^{2q_b+1} \cdots v_r^{aq_b}). \tag{4}$$

这个环遍历了该等价类的所有顶点 $[v_r^1]_{\bowtie|_{G^{i_2}}}$。

通过为每个 $r \in \{j_1+1、\cdots、j_1+j_2\}$ 添加式（4）中描述的置换循环及其对应的 $b \in \{1、\cdots、j_1\}$，令 ϕ_2 为 ϕ_1 到 V（G^{i_2}）的扩展。根据构造，ϕ_2 保持 G^{i_2} 上的邻接关系（它是 G^{i_2} 的自同构），并且 $\Delta_{\bowtie|_{G^{i_2}}} = \mathrm{Fix}(\phi_2)$。若 $G^{i_2} = G$，则论证完成。否则，只需再重复上述 i_2 步骤 $i_0 - 2$ 次。□

推论 3.10 若 G 是一棵非对称树，则 G 不存在非平凡的平衡着色。

作为引理 3.8 的推论，我们以一个关于树型图中同步的有趣事实结束本小节：同一 $\bowtie$-等价类中的两个顶点相邻，当且仅当该等价类完全由这两个顶点决定，且树修剪过程最终只剩下这两个顶点。具体如下：

命题 3.11 设 $\bowtie$ 是树 G 上的一个非平凡平衡着色，且 c、$d \in V$ 满足 $c \bowtie d$。那么c 和 d 相邻，当且仅当 $V(G^s) = [c]_\bowtie = \{c, d\}$，其中 G^s 是（3）中的第 s 步所得的树。

证明 假设 c 和 d 相邻。若 $[c]_\bowtie$中存在顶点 $v \in V$，则要么 c 位于d 与 v 之间的路径上，要么 d 位于 c 与 v之间的路径上；这两种情况都与推论 3.4 矛盾。因此，$[c]_\bowtie = \{c, d\}$。对于第一个等式，根据引理 3.8，存在一个指标 $i \in \{0, \cdots, s\}$，使得 $[c]_\bowtie$的顶点都是 G^i的叶子。由于 G^i 是一棵有两个相邻叶子的树，因此 $i = s$，从而 $V(G^s) = \{c, d\}$。反过来显然成立，因为最后一次修剪迭代中剩下的两个顶点彼此相邻。□

3.3 树的商网络

无向网络的商网络不一定是无向的；事实上，它通常是有向的。因此，在本小节中，我们采用以下有向图中环的定义：环是沿着边的方向行进、起点和终点为同一顶点的非空路径，并且该路径中的所有其他顶点（和边）均恰好出现一次。

定义 3.12 设 G 是一个只有一种边类型的有向图。G 的无向简化图 G^* 是一个简单无向图，其顶点集合与 G 相同；其边定义如下：当且仅当 G 中存在连接顶点 c 和 d 的二元环时，这两个顶点之间有一条无向边。

命题 3.13 设 G 是一个树图，$\bowtie$ 是 G 上的一个平衡关系，且 $G_\bowtie$ 是商网络。那么 $G^*_\bowtie$ 是一棵树。

证明 我们证明 $G^*_\bowtie$ 是连通且无环的。由于无向连通网络的商网络是连通的，因此连通性是显然的。这直接源于以下事实：如果 $c \sim d$ 属于 G，且 c 和 d 属于不同的 $\bowtie$类，那么 $[c]_\bowtie$ 与 $[d]_\bowtie$之间就存在一个二元环。因此，$[c]_\bowtie \sim [d]_\bowtie$ 属于 $G^*_\bowtie$，并且 G 中的每条路径都可以视为 $G^*_\bowtie$中的一条路径。

反设 $G^*_\bowtie$ 含有一个环，例如$([c_0]_\bowtie, [c_1]_\bowtie, \cdots, [c_k]_\bowtie, [c_0]_\bowtie)$。根据$G^*_\bowtie$的构造，这同样是商网络 $G_\bowtie$中的一个环。我们断言 $k \geq 2$。事实上，$k \neq 0$，因为没有顶点 $[c]_\bowtie \in G^*_\bowtie$具有自环。此外，$k = 1$将意味着 $[c_0]_\bowtie$ 与 $[c_1]_\bowtie$之间在 $G^*_\bowtie$中存在两条无向边，这与 $E_{G^*_\bowtie}$ 是集合而非多重集相矛盾。

因此，如果 $v_0, v_{k+1} \in [c_0]_\bowtie$是树 G中的不同顶点，那么存在顶点 $v_1、\cdots, v_k$属于G、$k \geq 2$，使得 $v_i \in [c_i]_\bowtie$、$i \in \{1、\cdots、k\}$。令 $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$为 v_0与v_{k+1} 之间的路径——由于 G 是树，该路径是唯一的。然而，v_0 与 v_{k+1} 之间路径上的每个顶点都属于不同的$\bowtie$类，这与命题 3.3 矛盾，因为 $k \geq 2$ 和 p 并非 $\bowtie$-反射。□

注 *3.14* 由命题 3.13 可知， $G_{\bowtie}$ 除了由两个相邻类之间的二元环形成的环之外，不存在其他环。 $G_{\bowtie}$ 可以有一个 1-圈（自环）；每当两个属于不同 $\bowtie$-类的元素在 G 上相邻时， $G_{\bowtie}$中就会出现一个二元环，因为 G 是无向的，如图 2 所示。此外，前述结果保证了 $G_{\bowtie}$ 中任意两个节点之间的路径都是唯一的。然而，观察路径上的边时，路径可能并不唯一，因为从一个顶点到另一个顶点可能存在多条有向边。

推论 3.15 设 G 为树图， $\bowtie$ 为 G 上的平衡关系， $G_{\bowtie}$ 为商网络。若 l 是 G的叶子，则 $[l]_{\bowtie}$ 是 $G^*_{\bowtie}$的叶子。

证明 这直接由顶点的度在商化运算中保持不变这一事实得出。因此，如果 l 是 G 的叶子，则 $[l]_{\bowtie}$ 在 $G_{\bowtie}$ 中的度为一，进而其在 $G^*_{\bowtie}$中的度也为一。□

4 树上的容许向量场

树结构对容许向量场施加了限制，这些限制有助于研究平衡点的稳定性或同步子空间。在第 4.1 小节中，我们讨论容许向量场的线性稳定性；在第 4.2 小节中，我们探讨樱桃——即与同一公共邻居相邻的一组悬挂顶点——在这一刻画中的重要性。受这种结构相关性的启发，我们进一步在第 4.3 小节中研究它们如何决定容许映射，以及由它们诱导的同步子空间的李雅普诺夫稳定性。

4.1 线性稳定性

在本小节中，我们假设与每个细胞相关联的相空间是一维的。在具有单一箭头类型的无向网络中，容许性意味着，与某个细胞相关联的向量场分量仅取决于其度。因此，度相同的细胞具有完全相同的向量场分量。在这些条件下，如果 $f\colon\ P \to P$ 是一个在原点处具有平衡点的容许向量场，那么对于每个细胞 c，线性化 $d_0 f$ 在原点处的 c 分量为

$$(d_0 f)_c(x) = \alpha_{\deg(c)} x_c + \beta_{\deg(c)} \sum_{v \sim c} x_v. \tag{5}$$

对于每个度 i，相应的细胞都与一对系数（α_i， β_i）相关联，这对系数决定了 $d_0 f$相应分量的变化。由于我们处理的是具有 1 种细胞类型的网络，为保持一致性，我们假设所有内部动力学系数都相同，并将这一公共系数记为 α。接下来，我们讨论 α 作为 $d_0 f$的特征值出现的情形。我们从一个例子开始。

例 *4.1* 考虑图 7 中给出的七阶二叉树图。该网络的线性化 $d_0 f$ 的矩阵形式为

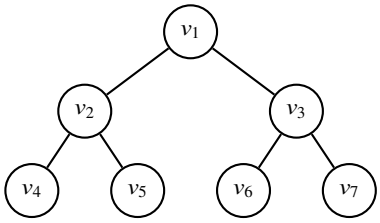


图 7 七阶二叉树。

$$[d_0 f] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3 & \alpha & 0 & \beta_3 & \beta_3 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta_3 & \beta_3 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

系数 α 是 $d_0 f$的特征值，其重数至少为二，因为 $u_1 = (0,0,0,1,-1,0,0)$和 $u_2 = (0,0,0,0,0,1,-1)$是对应于 α的特征向量。现在，对于 $a_1 = (0,1,-1,0,0,0,0)$和$a_2 = (0,0,0,1,1,-1,-1)$，我们有

$$\begin{aligned} d_0 f(a_1) &= (0, \alpha, -\alpha, \beta_1, \beta_1, -\beta_1, -\beta_1) = \alpha a_1 + \beta_1 a_2 \\ d_0 f(a_2) &= (0, 2\beta_3, -2\beta_3, \alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha) = 2\beta_3 a_1 + \alpha a_2, \end{aligned}$$

因此，span$\{a_1, a_2\}$是 $d_0 f$下的不变子空间。故

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 \\ 2\beta_3 & \alpha \end{pmatrix}$$

是 $d_0 f$的特征值，即

$$\lambda_1 = \alpha + \sqrt{2\beta_1\beta_3}, \qquad \lambda_2 = \alpha - \sqrt{2\beta_1\beta_3}.$$

对于 $b_1 = (1,0,0,0,0,0,0)$、 $b_2 = (0,1,1,0,0,0,0)$和 $b_3 = (0,0,0,1,1,1,1)$，我们有

$$\begin{aligned} d_0 f(b_1) &= (\alpha, \beta_3, \beta_3, 0, 0, 0, 0) = \alpha b_1 + \beta_3 b_2 \\ d_0 f(b_2) &= (2\beta_2, \alpha, \alpha, \beta_1, \beta_1, \beta_1, \beta_1) = 2\beta_2 b_1 + \alpha b_2 + \beta_1 b_3 \\ d_0 f(b_3) &= (0, 2\beta_3, 2\beta_3, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha) = 2\beta_3 b_2 + \alpha b_3. \end{aligned}$$

由于 u_1、 u_2、 a_1、 $a_2 \notin$ span$\{b_1$、 b_2、 $b_3\}$，其特征值为

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta_3 & 0 \\ 2\beta_2 & \alpha & \beta_1 \\ 0 & 2\beta_3 & \alpha \end{pmatrix}$$

是 $d_0 f$ 的其余特征值，分别为

$$\lambda_3 = \alpha, \qquad \lambda_4 = \alpha + \sqrt{2\beta_3(\beta_1+\beta_2)}, \qquad \lambda_5 = \alpha - \sqrt{2\beta_3(\beta_1+\beta_2)}.$$

现在，我们借助图的匹配这一概念，从这个例子进一步展开。对于一个阶数为 n、包含 $v_1 \cdots$， v_n 个细胞的一般树网络，我们有

$$d_0 f = DA + \alpha Id, \tag{6}$$

其中 $D = \mathrm{diag}(\beta_{\deg(v_1)}, \cdots, \beta_{\deg(v_n)})$。在图论中，图的匹配 M是一个边的集合，其中任意两条边都不共享顶点（例如，参见 [8, 第 3.5]小节）。此外， M 若为完美匹配，则图的每个顶点都是 M中某条边的端点；若 M 是最大匹配，则它是边数最多的匹配，记为 $\nu(G)$。经典谱定理指出，若 G 是一个阶数为 n 的树图，则 0 是邻接矩阵 A 的特征值，其重数为 $n - 2\nu(G)$（例如，参见 [13]）。这一结果用于给出特征值α的代数重数下界:

命题 4.2 设 f 是一个阶数为 n、 G 的树网络上的容许向量场，且原点是一个平衡点。那么，内部细胞动力学的系数 α 是 $d_0 f$ 的一个特征值，其重数至少为 $n - 2\nu$（G）。

证明 由于 $\ker(A) \subseteq \ker(DA)$，若 0 是 A 的特征值，则 α 是 $d_0 f$ 的特征值；由树的谱定理，结论得证。□

如果对每个细胞 c 都有 $\beta_{\deg(c)} \neq 0$，则 $\ker(A) = \ker(DA)$。此外，如果一个阶数为 n 的图 G 存在完美匹配，那么 $n = 2\nu(G)$。由此，根据树的拓扑可得一个关于 α 出现的充分条件:

推论 4.3 在命题 *4.2* 的条件下，假设对所有细胞 c， $\beta_{\deg(c)}$ 均非零。若 G 存在完美匹配，则 α 不是 $d_0 f$ 的特征值。

我们进一步讨论 α 作为 $d_0 f$的特征值时的出现情况及其重数。由等式 $\mathrm{spec}(d_0 f) = \{\alpha + \lambda : \lambda \in \mathrm{spec}(DA)\}$显然可知， α 的代数重数与 0 作为 DA的特征值时的代数重数有关。回顾例 4.1，将条件$\beta_1 = -\beta_2$ 变为一般条件 $\beta_1 \neq -\beta_2$ 时， α 的代数重数减少了两个单位。一个更广泛的问题是，在耦合参数变化时，树网络中 α 的代数重数是否会变化，以及会以何种方式变化。接下来的两个结果将探讨这一问题。

命题 4.4 如果 λ 是 DA 的一个特征值，那么 $-\lambda$也是。

证明 由于 G 是二分图，必要时我们可以重新标记顶点，从而写成

$$DA = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 B \\ D_2 B^T & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 $u = (X, Y)$ 是 DA 的对应于特征值 λ 的特征向量，则 $D_1 BY = \lambda X$e $D_2 B^T X = \lambda Y$. 因此，

$$DA \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 BY \\ D_2 B^T X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda X \\ \lambda Y \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}.$$

□

于是我们有:

推论 4.5 对于耦合参数 $\beta_{\deg(v_i)}$、 $i = 1$、. . .、 n 的任意变化，如果特征值 α 的代数重数发生变化，那么其变化量为偶数。

最后，我们给出 spec$(d_0 f)$ 中元素的一个估计，该估计取决于耦合参数 $\beta_{\deg(c)}$ 的符号。为此，给定矩阵 B，记 $\lambda_{\min}(B)$ 和 $\lambda_{\max}(B)$ 分别为 B 的最小和最大特征值。

定理 4.6 考虑上文所述的记号。如果对每个细胞 c 都有 $\beta_{\deg(c)} > 0$，那么spec$(d_0 f)$ 中的元素均为实数，并且对于所有 $\lambda \in \text{spec}(d_0 f)$，都有

$$\alpha + \lambda_{\min}(D^{\frac{1}{2}} A D^{\frac{1}{2}}) \le \lambda \le \alpha + \lambda_{\max}(D^{\frac{1}{2}} A D^{\frac{1}{2}}). \tag{7}$$

如果对某个细胞 c 有 $\beta_{\deg(c)} \le 0$，那么对于所有 $\lambda \in \text{spec}(d_0 f)$，都有

$$\alpha + \lambda_{\min}\Big(\frac{1}{2}(DA + AD)\Big) \le \text{Re}(\lambda) \le \alpha + \lambda_{\max}\Big(\frac{1}{2}(DA + AD)\Big). \tag{8}$$

证明 假设对所有细胞 c 都有 $\beta_{\deg(c)} > 0$。考虑对角矩阵

$$D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\left(\sqrt{\beta_{\deg(v_1)}}, \cdots, \sqrt{\beta_{\deg(v_n)}}\right),$$

以及相似变换 $DA = D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}} A D^{\frac{1}{2}}) D^{-\frac{1}{2}}$,- 我们有

$$\text{spec}(d_0 f) = \text{spec}(D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}} A D^{\frac{1}{2}} + \alpha Id) D^{-\frac{1}{2}}) \subset \mathbb{R}.$$

A由于 $d_0 f$ 与某个厄米矩阵相似，根据韦尔特征值不等式可得（7）。 y.

现在假设对于某个细胞 c，有 $\beta_{\deg(c)} \le 0$。由（6）可直接得出， $d_0 f$ 的厄米部分和斜厄米部分分别为

$$H = \frac{1}{2}(DA + AD) + \alpha Id, \qquad K = \frac{1}{2}(DA - AD).$$

根据谱性质，对所有 $\lambda \in \text{spec}(d_0 f)$，都有 $\text{Re}(\lambda) \in [\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$。再次应用韦尔特征值不等式，对所有 $\sigma \in \text{spec}(H)$,

$$\alpha + \lambda_{\min}\Big(\frac{1}{2}(DA + AD)\Big) \le \sigma \le \alpha + \lambda_{\max}\Big(\frac{1}{2}(DA + AD)\Big).$$

于是（8）得证。 □

4.2 樱桃结构的影响

树中的樱桃是一对与同一公共邻居相邻的叶子。这种结构是树的典型特征：Erd˝os 和 R´enyi [6] 证明，随着树的阶增大，随机树至少包含一个樱桃的概率趋于 1。下面再引入樱桃的一个更一般的概念:

定义 4.7 设 $m \geq 2$ 为一个整数。树图 G 上的 m-樱桃 C 是由 m 个与同一顶点 w相邻的叶子组成的集合， w是 C 的中心 。如果每个 C_i 都是 G 上的一个m_i-樱桃，且集合 C_i 两两不相交，则称 C_1、.....、 C_k 构成一个樱桃组 。

上述定义允许樱桃组中包含中心相同的樱桃。唯一的要求是，每片叶子不能同时属于多个樱桃。

给定树图 G 中的一组樱桃 $C_1, \ldots, C_k$，考虑置换 $\phi_{C_1,\ldots,C_k}$，其非平凡循环对应于集合 C_i，其中 $i \in \{1, \ldots, k\}$。那么，$\phi_{C_1,\ldots,C_k}$ 是 G 的自同构，因此它导出同步子空间

$$\Delta_{C_1,\ldots,C_k} = \mathrm{Fix}\big(\langle \phi_{C_1,\ldots,C_k} \rangle\big),$$

即与该樱桃组相关联的多对角子空间。我们用$W_{C_1,\ldots,C_k}$ 表示与 $\Delta_{C_1,\ldots,C_k}$正交的子空间。

若 f 是七阶二叉树（图 7）上的容许向量场，且原点是其平衡点，则例 4.1 表明，一个含两片樱桃的结构会使 α 成为 $d_0 f$ 的特征值。这是因为，例如，顶点 v_4 和 v_5 都与 v_2 相邻，而该图的任何极大匹配至多能饱和这两个顶点中的一个，因为匹配不能包含与同一顶点关联的两条边。如下文所示，这一现象适用于含两片樱桃的结构（命题 4.8），并且更一般地，适用于任意树网络中的含 m片樱桃的结构（推论 4.9）。

命题 4.8 设 G 是一个含有 2-樱桃 $C = \{l_1, l_2\}$ 的树网络，并设 f 是 G 上的一个容许向量场。若 w 是 C 的中心，且对于 $\omega \in \Delta_C$，则正交子空间 $W_{\{l_1,l_2\}}$ 在 $d_\omega f$ 下不变，并且 $\partial_1 h(\omega_{l_1}, \omega_w)$ 是 $d_\omega f$ 在 $W_{\{l_1,l_2\}}$ 方向上的一个特征值。

证明 我们不妨假设每个细胞相空间都是一维的。设 $\omega \in \Delta_{\{l_1,l_2\}}$。若 e_i 表示标准基向量（第 i 个分量为 1，除 i 外的所有分量均为 0），则 $W_{\{l_1,l_2\}} = \mathrm{e}_{l_1} - \mathrm{e}_{l_2}$；由 f 的容许性可知，对于 $d_\omega f = (a_{ij})$ 和 $i = l_1, l_2$， $d_\omega f$ 在第 i 列中仅可能有 $a_{ii} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\omega) = \partial_1 h(\omega_{l_i}, \omega_w)$ 和 $a_{wi} = \frac{\partial f_w}{\partial x_i}(\omega) = \frac{\partial f_w}{\partial x_{l_1}}(\omega)$ 这两个非零项。因此，$\mathrm{e}_{l_1} - \mathrm{e}_{l_2}$ 是 $d_\omega f$ 的一个特征向量，对应的特征值为 $\partial_1 h(\omega_{l_1}, \omega_w)$，由此即可得证。□

现在将其推广如下：

推论 4.9 设 G 为具有 m-樱桃 $C = \{l_1, \cdots, l_m\}$ 的树网络，并设 f 为 G上的一个容许向量场。若 w 是 C 的中心，且对于 $\omega \in \Delta_C$，则

- $W_C = \bigoplus_{i=2}^{m} W_{\{l_1,l_i\}}$,
- $W_{\{l_1,\, l_i\}}$ 在 $d_\omega f$ 下是不变的，其中 $i = 2、\cdots、 m$,
- $\partial_1 h(\omega_{l_1}, \omega_w)$ 是 $d_\omega f$ 的一个特征值，其代数重数至少为 $m - 1$。

证明 首先，注意到 $\omega \in \bigcap_{i=1}^{m} \Delta_{\{l_1,l_i\}} (= \Delta_C)$。根据命题 4.8，对于 $i = 2, \cdots, m$, $W_{\{l_1,l_i\}}$在 $d_\omega f$和 $\partial_1 h(\omega_{l_1}, \omega_w)$ 下是不变的，而 $\partial_1 h(\omega_{l_1}, \omega_w)$ 是 $d_\omega f$在 $W_{\{l_1,l_i\}}$方向上的特征值。由于 $\{W_{\{l_1,l_i\}}\}_{i \in \{2,\cdots,m\}}$是一个由 $m - 1$ 子空间组成的族，且两两交集均为平凡交集，因此 $\partial_1 h(\omega_{l_1}, \omega_w)$ 是 $d_\omega f$的特征值，其重数至少为 $m - 1$，并且

$$W_C = \Big(\bigcap_{i=1}^{m} \Delta_{\{l_1,l_i\}}\Big)^{\perp} = \sum_{i=2}^{m} \big(\Delta_{\{l_1,l_i\}}\big)^{\perp} = \bigoplus_{i=2}^{m} W_{\{l_1,l_i\}}.$$

4.3 樱桃同步的李雅普诺夫稳定性

我们从一个例子开始本小节:

例 *4.10* 再次考虑图 7 所示的网络。我们选取如下容许向量场f: $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$，其分量由下式给出

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,\cdots,x_7) &= x_1(x_2+x_3)^2\\
f_2(x_1,\cdots,x_7) &= x_2\tanh(x_1^2+x_4^2+x_5^2)\\
f_3(x_1,\cdots,x_7) &= x_3\tanh(x_1^2+x_6^2+x_7^2)\\
f_4(x_1,\cdots,x_7) &= -x_4(1+e^{-x_2^2})\\
f_5(x_1,\cdots,x_7) &= -x_5(1+e^{-x_2^2})\\
f_6(x_1,\cdots,x_7) &= -x_6(1+e^{-x_3^2})\\
f_7(x_1,\cdots,x_7) &= -x_7(1+e^{-x_3^2}).
\end{aligned}$$

令 π 为 $x\in\mathbb{R}^7\backslash\Delta_{\{v_4,v_5\}}$ 在 $W_{\{v_4,v_5\}}$上的正交投影。定义

$$\mathcal{V}(x)=\|\pi(x)\|^2=\frac{(x_4-x_5)^2}{2}.$$

V 沿 f的李导数为

$$\dot{\mathcal{V}}(x)=\nabla\mathcal{V}(x)\cdot f(x)=(x_4-x_5)(f_4(x)-f_5(x))=(x_4-x_5)(h(x_4,x_2)-h(x_5,x_2)).$$

应用中值定理，给定 $x\in\mathbb{R}^7$，存在介于 x_4 和 x_5 之间的 ξ，使得

$$h(x_4,x_2)-h(x_5,x_2)=\partial_1 h(\xi,x_2)(x_4-x_5).$$

对于 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\partial_1 h(a,b)=-1-e^{-b^2}<-1$，因此对于任意 $x\in\mathbb{R}^7$,

$$\dot{\mathcal{V}}(x)=\partial_1 h(\xi,x_2)(x_4-x_5)^2<(-1)(x_4-x_5)=-2\frac{(x_4-x_5)^2}{2}=-2\mathcal{V}(x).$$

由于 $\mathrm{V}(x)=0$ 当且仅当 $x\in\Delta_{\{v_4,v_5\}}$，这意味着 $\Delta_{\{v_4,v_5\}}$ 在李雅普诺夫意义下是全局指数吸引的。

注 *4.11* 设 $\Delta_{C_1,\cdots,C_k}$ 是与樱桃组 $C_1,\cdots,C_k$ 相关联的同步子空间， U 是该同步子空间的一个管状邻域，且 f 是一个容许向量场。条件 $x\in U$ 仅对叶子坐标之间的差异施加限制，而不限制叶子坐标与中心顶点坐标之间的关系。由于耦合函数 h 仅在一个叶子坐标和中心顶点处取值，因此每一对坐标都可以作为某个 $x\in U$ 中函数 h 的自变量。因此，要求 $\partial_1 h(a,b)$ 在管状邻域 U 上为负，等价于要求 $\partial_1 h(a,b)$ 对所有 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ 均为负，因此该条件必然是全局的。

前面的例子可以推广到定理 4.12，其证明依赖于相同的论证。这些论证不取决于坐标的选择，而只取决于底层的樱桃结构。对于

精确表述，我们采用以下约定：涉及 $\partial_1 h$ 的不等式，应相对于第一个细胞的变量逐分量理解。

定理 4.12 设 G 为一个树网络，$C = \{l_1, l_2\}$ 为一对樱桃，且 f 为定义在 G上的容许向量场。若$\partial_1 h < N$ 对某个负常数 N 成立，则$\Delta_{\{l_1,l_2\}}$ 是李雅普诺夫意义下全局指数吸引的。

上述关于双樱桃同步的李雅普诺夫稳定性条件可推广到樱桃组：

推论 4.13 设 G 为一个树图，C_1、$\cdots$、C_k 为一个樱桃组，且 f 为一个容许向量场。若$\partial_1 h < N$ 对某个负常数 N 成立，则 $\Delta_{C_1,\ \cdots,\ C_k}$ 是李雅普诺夫意义下全局指数吸引的。

证明 对于 每个 $i \in \{1, \cdots, m\}$，令 $l_i \in C_i$。结论直接由定理 4.12 以及以下事实得出： t

$$\Delta_{C_1,\cdots,C_k} = \bigcap_{i=1}^{n} \Delta_{C_i} = \bigcap_{i=1}^{m} \bigcap_{j \in C_i \setminus \{l_i\}} \Delta_{\{l_i,j\}}.$$

□

致谢本研究由巴西S˜ao Paulo研究基金会FAPESP资助。资助编号：2024/08713-0（N. Brito）和2019/21181-0（M. Manoel）。

参考文献

1. Aguiar, M., Dias, A., Ruan, H. 基因调控网络中的同步模式. Physica D: Nonlinear Phenomena, **429**, 133065 2022( ). 2. Amorim, T. A., Manoel, M.: 拉普拉斯网络中的同步模式. Res. Math. Sci. **11(2)**, 23 (2024). 3. Antoneli, F., Stewart, I.: 耦合细胞网络中的对称性与同步1：不动点空间. Int. J. Bifurc. Chaos **16(3)**, 559-577 (2006). 4. Dias, A., Stewart, I.: 耦合细胞网络的对称群胚与容许向量场. J. Lond. Math. Soc. **69(3)**, 707-736 (2004). 5. Diestel, R. 图论. Springer Nature (2025). 6. Erd˝os, P., R´enyi, A. 非对称图. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **14(295-315)**, 3 (1963). 7. Franci, A., Golubitsky, M., Stewart, I., Bizyaeva, A., Leonard, N. E. 打破多主体多选项动力学中的犹豫不决. SIAM J. Appl. Dyn. Sys., **22(3)**, 1780-1817 (2023). 8. Godsil, C., Royle, G. 代数图论. Springer Science & Business Media (2013). 9. Golubitsky, M., Nicol, M., Stewart, I.: 耦合细胞网络中的一些奇特现象. J. Non. Sci. **14**, 207-236 (2004). 10. Golubitsky, M., Stewart, I., Pivato, M.: 耦合细胞网络中的对称群胚与同步模式. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **2(4)**, 609-646 (2003). 11. Golubitsky, M., Stewart, I., T¨or¨ok, A.: 具有多重箭头的耦合细胞网络中的同步模式. SIAM J. Appl. Dyn. Sys. **4**, 78-100 (2005). 12. Hindmarsh, J., Rose, R.: 使用三个耦合一阶微分方程的神经元爆发模型. Proceedings of the Royal society of London. Series B. 生物科学, **221(1222)**, 87-102, (1984). 13. Ghezelahmad, S. 关于匹配积分图. Math Sci **13**, 387–394 (2019). 14. Rall, W.: 分支树突树与运动神经元膜电阻率. Experimental neurology, **1(5)**, 491-527 (1959). 15. Steel, M., Penny, D.: 简约法、似然以及模型在分子系统发育学中的作用. Molecular biology and evolution, **17(6)**, 839-850 (2000). 16. Vandermeer, J., Hajian-Forooshani, Z., Medina, N., Perfecto, I.: 用Kuramoto模型揭示的生态系统中的新结构形式. R. Soc. Open Sci. **8**, 3 (2021)

17. West, G., Brown, J., Enquist, B.：生物学中异速标度定律起源的一般模型。Science，**276(5309)**，122-126（1997）。