非典型几何上的高频电磁积分方程快速直接求解器背后的渐近谱洞见

Viviana Giunzioni*、Clément Henry†、Adrien Merlini† 和 Francesco P. Andriulli*
* 电子与电信系，都灵理工大学，10129，都灵，意大利
† 微波系，IMT Atlantique，29238，布雷斯特，法国

arXiv:2603.04316v1 [math.NA] 4 Mar 2026

摘要—**基于积分方程的电磁散射快速直接求解器能够显著降低计算成本，尤其是在存在多重激励的情况下。我们最近提出了一种新的高频快速直接求解器策略，将预条件技术与加速算法相结合。然而，将这种方法应用于非典型几何时，其有效性仍需进一步论证。本文汇集相关的半经典微局部结果，并据此评估所提出的快速直接求解器在高频区间的合理性与有效性。**

索引词—**积分方程、谱分析、高频、微局部分析、掠射。**

I. 引言

BOUNDARY 通过边界元方法离散化的积分方程，是电磁散射现象建模中的基础工具。然而，随着电磁问题的频率升高，数值求解的计算开销也随之增大，因此人们开始研究“快速”的直接与逆求解策略，即能够在达到指定精度的同时减少求解所需计算时间和资源的方法。快速迭代求解器通常结合预条件策略和加速技术，但每当激励源发生变化时，都需要求解一个全新的问题；因此，在需要处理多个右端项（RHSs）时，这种方法的效率会显著降低。相比之下，快速直接求解器旨在以较低的复杂度构造逆算子矩阵的表示，因此非常适合此类情形。

在本文中，我们旨在为一种近期提出的、基于滤波器的快速直接求解器方法提供理论依据。该方法适用于高频率区域下光滑凸二维边界上的某些 Calderón 组合场积分方程[1], [2]。具体而言，该方法依赖于以下假设：底层算子，即横磁和横电 Calderón 组合场积分算子（TM-和 TE-CCFIO），可以表示为缩放单位算子与一个记为 C 的紧扰动之和。于是，CCFIO 可以写成

$$\mathrm{CCFIO} = \frac{\mathcal{I}}{2} + C = \frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{F}\left(\mathrm{CCFIO} - \frac{\mathcal{I}}{2}\right), \tag{1}$$

其中，F 表示一个谱滤波器，用于保留 C 的全部谱贡献，即 F (C) = C。对 I/2 和 F (C) 两部分进行独立离散化，可以校正对完整算子进行离散化时产生的一些椭圆谱缺陷。随后，紧算子部分的离散化可以用具有可控误差的骨架形式进行近似；当将通过 Woodbury 公式得到的逆算子矩阵应用于一个 RHS 时，最终所得解的误差也是可控的。

在此，为评估这种快速直接求解器方法的合理性，我们证明 C 的谱内容随频率按 $k^{1/3}$ 增长，因此快速直接求解算法的计算时间最多按 $k^{4/3}$ 增长，这一点已通过实验观察到（参见 [1]，[2] 中的数值结果）。在高频区间，如果要求解误差保持恒定，偏振相关补偿现象还可能进一步降低计算负担，因此上述 $k^{4/3}$ 的增长实际上构成一个上界。为确立这些结果，我们采用半经典微局部分析和驻相技术，推断积分算子的局部谱性质，以及右端项和解函数的局部空间性质。

II. 背景与形式体系

考虑从理想电导体（PEC）圆柱体产生的时谐电磁散射，该圆柱体沿纵向 z 无限延伸。设 Ω 为描述圆柱体横截面的开集，$\gamma := \partial\Omega$ 为其二维凸光滑轮廓。外部空间 $\mathbb{R}^2\backslash\Omega$ 的特征由其阻抗 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 及相应的波数 $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 给出。我们沿曲线弧长坐标 $s \in [0, L$ 对 γ 进行参数化，并且对于曲线上的每一点，确定曲线的外法向量和切向单位向量 $n(s)$ 与 $\tau(s)$，以及曲率 $\kappa(s)$。单层、双层、伴随双层和超奇异算子定义为

$$\mathcal{S}^k f(s) := \int_\gamma G^k(R(s,s'))f(s')ds', \tag{2}$$

$$\mathcal{D}^k f(s) := \mathrm{p.v.}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial n(s')}G^k(R(s,s'))f(s')ds', \tag{3}$$

$$\mathcal{D}^{*k} f(s) := \mathrm{p.v.}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial n(s)}G^k(R(s,s'))f(s')ds', \tag{4}$$

$$\mathcal{N}^k f(s) := -\frac{\partial}{\partial n(s)} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial n(s')} G^k(R(s,s')) f(s') ds', \quad (5)$$

其中，$R(s,s') = \sqrt{(\gamma(s') - \gamma(s))^{\mathrm{T}} \cdot (\gamma(s') - \gamma(s))}$。二维自由空间格林函数为 $G^k(R) = \mathrm{i}4 H_{(1)0}(kR)$，其中 $H_0^{(1)}$ 为第一类汉克尔函数 [3]。这些是电场和磁场积分方程（EFIE 和 MFIE）的构成模块，用于将纵向和横向电流密度 J_z 与 J_t 联系到入射电磁场 (E_z, H_t) 和 (E_t, H_z) [4]。

通过对电场积分方程和磁场积分方程进行组合与预条件处理，我们构造了 Calderón 组合场积分方程 [5]，下文记为“CCFIE”。对于 TM 和 TE 极化，该方程分别为：

$$\left[\frac{k}{\tilde{k}} \mathcal{N}^{\tilde{k}} \mathcal{S}^k + \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{D}^{*\tilde{k}}\right)\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}^{*k}\right)\right](J_z)(s) = -\frac{\mathcal{N}^{\tilde{k}}}{\tilde{k}} \frac{E_z(s)}{\mathrm{i}\eta} + \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{D}^{*\tilde{k}}\right) H_t(s), \quad (6)$$

$$\left[\frac{\tilde{k}}{k} \mathcal{S}^{\tilde{k}} \mathcal{N}^k + \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}^{\tilde{k}}\right)\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{D}^k\right)\right](J_t)(s) = \tilde{k} \mathcal{S}^{\tilde{k}} \frac{E_t(s)}{\mathrm{i}\eta} - \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}^{\tilde{k}}\right) H_z(s), \quad (7)$$

~其中 $k(s) = k + \mathrm{i}k_i(s)$，且 $k_i(s) \ll k$对于 $k \to \infty$；当 γ 为半径 a的圆时，一种方便的选择是$k_i = 24^{-1/3} k^{1/3} a^{-2/3}$ [6]。

给定一个沿方向 p 传播并入射到 γ上的平面波，入射场的表达式为

$$E_z(s) = E_0 e^{\mathrm{i}kp\cdot\gamma(s)} \quad (8)$$

$$H_t(s) = -\frac{E_0}{\eta} e^{\mathrm{i}kp\cdot\gamma(s)} \left(p \cdot n(s)\right) \quad (9)$$

当极化方式为 TM 时，表达式为

$$E_t(s) = \mathrm{i}E_0 e^{\mathrm{i}kp\cdot\gamma(s)} \left(p \cdot n(s)\right) \quad (10)$$

$$H_z(s) = \mathrm{i}\frac{E_0}{\eta} e^{\mathrm{i}kp\cdot\gamma(s)} \quad (11)$$

当极化方式为 TE 时。

最后，给定积分算子 Z

$$\mathcal{Z} f(s) = \int_\gamma \ker(R(s,s')) f(s') ds' \quad (12)$$

以及谱变量 ξ，它与谱指标 q as$\xi = 2\pi q/L$ for $q \in \mathbb{Z}$ 相关，我们将局部算子象征定义为

$$\sigma^{\mathcal{Z}}(\xi, s) = \int_\gamma \ker\left(R(s,s')\right) e^{i\xi(s'-s)} ds', \quad (13)$$

使得 Z $\left(e^{i\xi s}\right) = \sigma^{\mathcal{Z}}(\xi, s)\ e^{i\xi s}$。

III. 掠射之外的微局部分析

上述积分算子的半经典主符号可通过沿着 $\mathbb{R}$ 的其核的零阶近似与典范指数的乘积进行积分来获得，

$$\sigma^{\mathcal{S}^k}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(k|x|) e^{\mathrm{i}\xi x} dx = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{k^2 - \xi^2}}, \quad (14)$$

$$\sigma^{\mathcal{D}^k}(\xi) = \sigma^{\mathcal{D}^{*k}}(\xi) = 0, \quad (15)$$

$$\sigma^{\mathcal{N}^k}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{i}k}{4} \frac{H_1^{(1)}(k|x|)}{|x|} e^{\mathrm{i}\xi x} dx = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{k^2 - \xi^2}. \quad (16)$$

给定平面波激励时，这些结果可直接用于近似阴影边界之外方程 (6) 和 (7) 的预条件右端项。将局部切向频率 $\xi_T(s)$ 定义为平面波相位的导数后，$\xi_T(s) := kp\cdot\tau(s)$，我们通过代入各算子的主符号，得到方程 (6)、(7) 的右端项可近似为

$$(6) \sim -\frac{E_0}{2\eta} e^{\mathrm{i}kp\cdot\gamma(s)} (p \cdot n(s)) \left[1 - \frac{\sqrt{\tilde{k}^2 - \xi_T(s)^2}}{\tilde{k}(p \cdot n(s))}\right], \quad (17)$$

$$(7) \sim -\mathrm{i}\frac{E_0}{2\eta} e^{\mathrm{i}kp\cdot\gamma(s)} \left[1 - \frac{\tilde{k}(p \cdot n(s))}{\sqrt{\tilde{k}^2 - \xi_T(s)^2}}\right]. \quad (18)$$

设 $\delta := k_i/k$，则 $(\tilde{k}^2 - \xi_T(s)^2) = k^2 \left(p \cdot n(s)\right)^2 + \mathrm{i}2kk_i - k_i^2$，因此

$$\left[1 - \frac{\sqrt{\tilde{k}^2 - \xi_T(s)^2}}{\tilde{k}(p \cdot n(s))}\right] = 1 - \frac{\sqrt{\left(p \cdot n(s)\right)^2 + \mathrm{i}2\delta - \delta^2}}{(1 + \mathrm{i}\delta)\ \left(p \cdot n(s)\right)}, \quad (19)$$

$$\left[1 - \frac{\tilde{k}(p \cdot n(s))}{\sqrt{\tilde{k}^2 - \xi_T(s)^2}}\right] = 1 - \frac{(1 + \mathrm{i}\delta)\ \left(p \cdot n(s)\right)}{\sqrt{\left(p \cdot n(s)\right)^2 + \mathrm{i}2\delta - \delta^2}}. \quad (20)$$

For $2\delta \ll \left(p \cdot n(s)\right)^2$, then

$$\sqrt{\left(p \cdot n(s)\right)^2 + \mathrm{i}2\delta - \delta^2} = |\left(p \cdot n(s)\right)| \left(1 + \mathrm{i}\frac{\delta}{\left(p \cdot n(s)\right)^2} + O\left(\frac{\delta^2}{\left(p \cdot n(s)\right)^4}\right)\right) \quad (21)$$

and

$$(19) = (20) = 2\Pi_L(s,p) + O\left(\frac{\delta}{\left(p \cdot n(s)\right)^2}\right), \quad (22)$$

其中 $\Pi_L(s,p)$ 是受光门函数

$$\Pi_L(s,p) = \begin{cases} 1, & \text{if } p \cdot n(s) \le 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (23)$$

通过选择 $\delta(s) \propto k^{-2/3}\kappa(s)^{2/3}$，按照通常的做法，[1], [6], 条件 $|p\cdot n(s)| \gg \sqrt{2\delta(s)}$ 得出 $|p\cdot n(s)| \gg k^{-1/3}\kappa(s)^{1/3}$。进而，将 $p\cdot n(s)$ 在 s_0 附近展开，使得 $p\cdot n(s_0) = 0$，可得 $|s - s_0| \gg k^{-1/3}\kappa(s)^{-2/3}$。因此，该分析在爬行波的福克区 [7]，或空间掠射区之外有效；在高频极限下，方程（6）、（7）的右端项除相差一个常数因子外，均收敛于物理光学解。

一致地，将算子的主符号代入方程（6）的左端（LHS），

（7），我们发现，在谱掠射区域之外，Calderón组合算子的主符号等于 $\mathrm{I}/2+\mathrm{O}(\delta)$。因此，只要在高频极限下满足 $\delta \ll 1$，CCFIO 的主符号就会收敛到缩放单位算子，从而证实第I节中的假设（1）。

IV. 掠射处的微局部分析

只要被积函数的空间振荡频率足够高，方程 (13) 就可以近似为

$$\sigma^{\mathcal{Z}}(\xi,s) \simeq \int_{\mathbb{R}} \ker\left(R(s,s')\right) e^{i\xi(s'-s)}\, \chi\left(\frac{s'-s}{\varepsilon}\right) ds', \quad (24)$$

其中 $\chi(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 是一个偶门函数，当$|t| < 1/2$时取值为 1，当 $|t| > 1$时取值为 0。通过设定 $\varepsilon \propto k^{-1/3}\kappa(s)^{-2/3}$ 覆盖空间掠射区域，$kR \to \infty$ 在 $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ 的显著部分上适用于 $k \to \infty$。将被积函数核中的汉克尔函数替换为其大自变量渐近展开 [3]，后，我们得到，在掠射谱区域，即 $\xi \sim k$ 处，积分算子的半经典过渡符号可近似为 [8]

$$\sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{S}^k}(\xi,s) \simeq \frac{e^{\mathrm{i}\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{k^2\kappa(s)}{\sqrt{3}}\right)^{-1/3} F(K) \quad (25)$$

$$= \mathrm{i}\pi \left(2k^2\kappa(s)\right)^{-1/3} \mathrm{Ai}(x)\left(\mathrm{Ai}(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{Bi}(x)\right), \quad (26)$$

$$\sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{D}^k}(\xi,s) = \sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{D}^{*k}}(\xi,s) \simeq \frac{e^{\mathrm{i}\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{3}\, F'(K) \quad (27)$$

$$= -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{Ai}(x)\left(\mathrm{Ai}(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{Bi}(x)\right)\right]', \quad (28)$$

$$\sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{N}^k}(\xi,s) \simeq -\frac{e^{\mathrm{i}\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{k^2\kappa(s)}{\sqrt{3}}\right)^{1/3} \left(KF(K) + 6F''(K)\right) \quad (29)$$

$$= -\mathrm{i}\pi \left(2k^2\kappa(s)\right)^{1/3} \mathrm{Ai}'(x)\left(\mathrm{Ai}'(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{Bi}'(x)\right), \quad (30)$$

其中 $K = K(\xi,s) = k - \xi$，s 处 $F(K) := (\,,\,) : (\,)$ $\int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{\mathrm{i}(Ku - u^3)}\, du$，$x = x(\xi,s) := -K\, 12^{1/3}$ $24^{1/3} k^{-1/3}\kappa(\,)^{-2/3}$，且 $(\,)(\,)$。此外，$(\,,\,)$ / 和 $\mathrm{Ai}(x)$、$\mathrm{Bi}(x)$ 是艾里函数 [3]。将 (28) 中的艾里函数朗斯基行列式 [3]，代入后，我们进一步得到

$$\frac{1}{2} + \sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{D}^k} \simeq -\mathrm{i}\pi\, \mathrm{Ai}'(x)\left(\mathrm{Ai}(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{Bi}(x)\right), \quad (31)$$

$$\frac{1}{2} - \sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{D}^k} \simeq \mathrm{i}\pi\, \mathrm{Ai}(x)\left(\mathrm{Ai}(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{Bi}(x)\right)'. \quad (32)$$

对于特征值的负谱指标分支，即对于 $\xi \sim -k$，可以得到对称的结果。

通过对表达式 (25)、(27)、(29) 应用驻相法和端点近似，或者等价地，利用 (26)、(28)、(30) 中艾里函数 [3] 的大参数渐近展开，可以发现，这些符号可进一步近似为

$$\sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{S}^k}(\xi,s) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8k}}(k-\xi)^{-1/2}\left(\mathrm{i} + e^{\mathrm{i}\frac{4}{3}(-x)^{3/2}}\right), & \text{if } \xi < k \\ \frac{1}{\sqrt{8k}}(\xi-k)^{-1/2}, & \text{if } \xi > k \end{cases} \quad (33)$$

$$\sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{D}^k}(\xi,s) \sim \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{2} e^{\mathrm{i}\frac{4}{3}(-x)^{3/2}}, & \text{if } \xi < k \\ \frac{\sqrt{2}}{16}\kappa(s)\sqrt{k}(\xi-k)^{-3/2}, & \text{if } \xi > k \end{cases} \quad (34)$$

$$\sigma_{\mathrm{G}}^{\mathcal{N}^k}(\xi,s) \sim \begin{cases} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}(k-\xi)^{1/2}\left(-\mathrm{i} + e^{\mathrm{i}\frac{4}{3}(-x)^{3/2}}\right), & \text{if } \xi < k \\ \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}(\xi-k)^{1/2}, & \text{if } \xi > k \end{cases}. \quad (35)$$

在高频极限下，对于 K 的固定值，这些近似均匀有效，即对于 $|k-\xi| \sim 24^{-1/3}k^{1/3}\kappa(s)^{2/3}$，并且随着 $k^{1/3}\kappa(s)^{2/3}$ 的增加，谱掠射区域也随频率增大而扩大。

在记作之后

$$\tilde{x} := (\xi - \tilde{k})2^{1/3}\tilde{k}^{-1/3}\kappa(s)^{-2/3} = \left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{1/3}\left(x - \mathrm{i}\frac{k_i}{2^{-1/3}k^{1/3}\kappa(s)^{2/3}}\right), \quad (36)$$

我们注意到，构成CCFIO的各算子的掠射符号之积的和，在频率与曲率方面于 x =0处渐近为常数，若 $k_i \propto k^{1/3}\kappa(s)^{2/3}$ 对 $k \to \infty$成立，这对应于 x取常数值。此外，对于在以0为对称中心的渐近常数区间内有界的 x（对应于谱掠射区域），若 $k_i \propto k^{1/3}\kappa(s)^{2/3}$ 对$k \to \infty$成立，则 $\tilde{x}$ 也在 $\mathbb{C}$ 的某个常数子集内有界。因此，我们推断，在此情形下，由于变量 x 与 $\tilde{x}$的有界性，CCFIO的谱掠射符号的主导部分在高频区间内渐近有界，从而导致算子 (CCFIO –I/2) 的谱内容随频率的增长至少与掠射区域的大小成正比。由于CCFIO在谱掠射区域之外按柯西主值收敛于缩放单位算子，我们最终得出结论：紧算子部分 (CCFIO –I/2) 的谱信息仅限于谱掠射区域，并在高频极限下按 $k^{1/3}$ 增长，这印证了第I节中的估计。

注意，(24)表示核$\ker(R)$的加窗（或短时）傅里叶变换。将掠射符号 $\sigma^{\mathcal{S}^k}{}_{\mathrm{G}}(\xi,s)$的逆与TM-EFIE右端项的加窗傅里叶变换相乘，并对结果进行逆变换，我们便得到掠射处TM电流 J_z 的有效近似，

$$J_{z,\mathrm{G}}(s_0+t) \sim \frac{2E_0}{\eta}\left(2k^{-1}\kappa(s_0)\right)^{1/3} e^{ik(p\cdot\gamma(s_0))}\, e^{ikt}\, I^{\mathrm{TM}}\left(\left(\frac{k\kappa(s_0)^2}{2}\right)^{1/3} t\right) \quad (37)$$

并且，类似地，由 $\sigma^{\mathcal{N}^k}{}_{\mathrm{G}}(\xi,s)$可得掠射处TE电流 J_t 的有效近似，

$$J_{t,\mathrm{G}}(s_0+t) \sim \frac{2E_0}{\eta}\, e^{ik(p\cdot\gamma(s_0))}\, e^{ikt}\, I^{\mathrm{TE}}\left(\left(\frac{k\kappa(s_0)^2}{2}\right)^{1/3} t\right), \quad (38)$$

其中 s_0 满足 $p\cdot n(s_0) = 0$ 且 $p\cdot\tau(s_0) > 0$，也就是说，s_0 位于与该分支相关的福克掠射区域

正指标特征值，$|t| < O(k^{-1/3}\kappa(s_0)^{-2/3})$，并且

$$I^{\mathrm{TM}}(\psi) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\psi x}}{\mathrm{Ai}(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{Bi}(x)}\,dx \tag{39}$$

$$I^{\mathrm{TE}}(\psi) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\psi x}}{\mathrm{Ai}'(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{Bi}'(x)}\,dx\,. \tag{40}$$

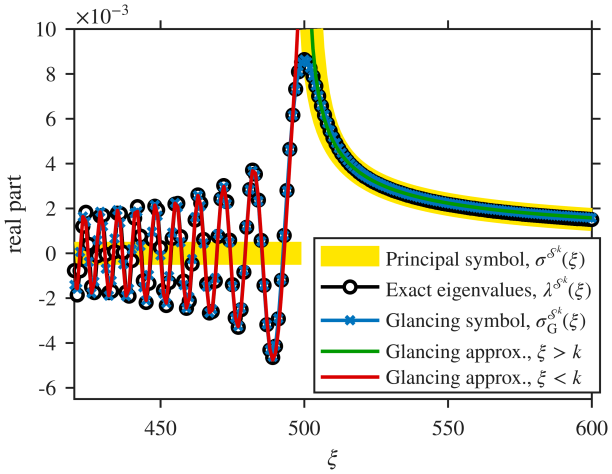
请注意，这种基于符号求解的近似方法可以视为仅适用于圆形几何的基于特征值求解精确方法的一种推广。

V. 数值结果

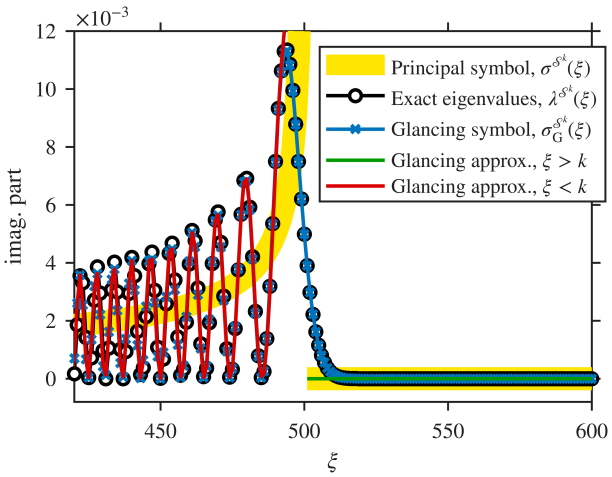
数值结果旨在验证本文提出的通用框架。首先，我们将单层算子（图 1）、双层算子（图 2）和超奇异算子（图 3）作用于圆形边界时的主符号和掠射符号，与其精确特征值谱进行比较。在所有情况下，我们都观察到，在掠射谱区域（即$\xi = k$附近），精确特征值与掠射符号吻合良好；此外，与（33）、（34）、（35）中的近似也相当一致。

其次，我们测试平面波入射椭圆柱体时掠射电流（39）和（40）的近似效果（图 4 和图 5）。我们考虑不同的入射方向 p；由于边界 γ的曲率并非常数，因此会形成大小不同的掠射区域。在所有情况下，近似电流（39）（红色）都与通过解析公式获得的精确电流（黑色）吻合良好，尤其是在曲线坐标 s 的福克（或掠射）空间区域内，其中 $|s - s_0| \le k^{-1/3}\kappa(s_0)^{-2/3}$，且 s_0 满足 $p \cdot n(s_0) = 0$，而 $p \cdot \tau(s_0) > 0$。

总体而言，这些结果表明，本文所述的半经典微局部框架可作为一种有用工具，用于阐释并预测随着频率升高，谱滤波器如何作用以及如何影响快速直接求解器的解的精度。



(a)



(b)

图 1. 在 $ka = 500$ 处沿圆形边界计算的单层算子的主符号（14）、掠射符号（26）、近似掠射符号（33）与精确特征值 $\lambda^{S^k}(\xi) = \mathrm{i}\pi a/2\, J_{a\xi}(ka) H^{(1)}_{a\xi}(ka)$ 的比较：实部（上）和虚部（下）。

致谢

本研究由欧洲创新委员会（EIC）通过欧盟地平线欧洲计划研究计划资助，资助协议编号为 101046748（CERE-BRO 项目）。

参考文献

[1] D. Consoli 等，《预条件电磁积分方程的快速直接求解》，载于*2022*年先进应用电磁学国际会议（*ICEAA*），南非开普敦：IEEE，2022年9月，第 193–195 页。doi：10.1109/ICEAA49419.2022.9899870[2] V. Giunzioni、D. Consoli、J. Bourhis、C. Henry、A. Merlini 和 F. P. Andriulli，《通过算子滤波实现新型高频快速直接求解器：凸几何与非凸几何的初步结果》，载于*2025*年 *IEEE* 印度洋无线电与天线日（*RADIO*），毛里求斯弗利康弗拉克：IEEE，2025年10月，第 1–4 页。doi：10. 1109/RADIO65825.2025.11296332[3] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，数学函数手册：含公式、图表和数学表。Courier Corporation，1964年，第 55 卷。[4] J. D. Jackson，经典电动力学，第 3 版。纽约：威利出版社，1999年。

[5] F. Andriulli、I. Bogaert 和 K. Cools，《预条件无共振公式的高频特性与稳定化》，载于*2015*年先进应用电磁学国际会议（*ICEAA*），意大利都灵：IEEE，2015年9月，第 1321–1324 页。doi：10.1109/ICEAA.2015.7297331[6] X. Antoine、M. Darbas 和 Y. Lu，《一种改进的高频声散射问题表面辐射条件》，《计算机方法在应用力学与工程中的应用》，第 195 卷，第 33–36 期，第 4060 4074， 2006 10 1016 2005 07 010 – 页，7月。。doi：.[7] /j.cma. . . V. A. Fock，《电磁衍射与传播问题》（牛津：Pergamon Press）。1965年。[8] R. B. Melrose，《局部傅里叶-艾里积分算子》，《杜克数学期刊》，第 42 卷，第 4 期，1975年12月。doi：10.1215/S0012-7094- 75-04253-2

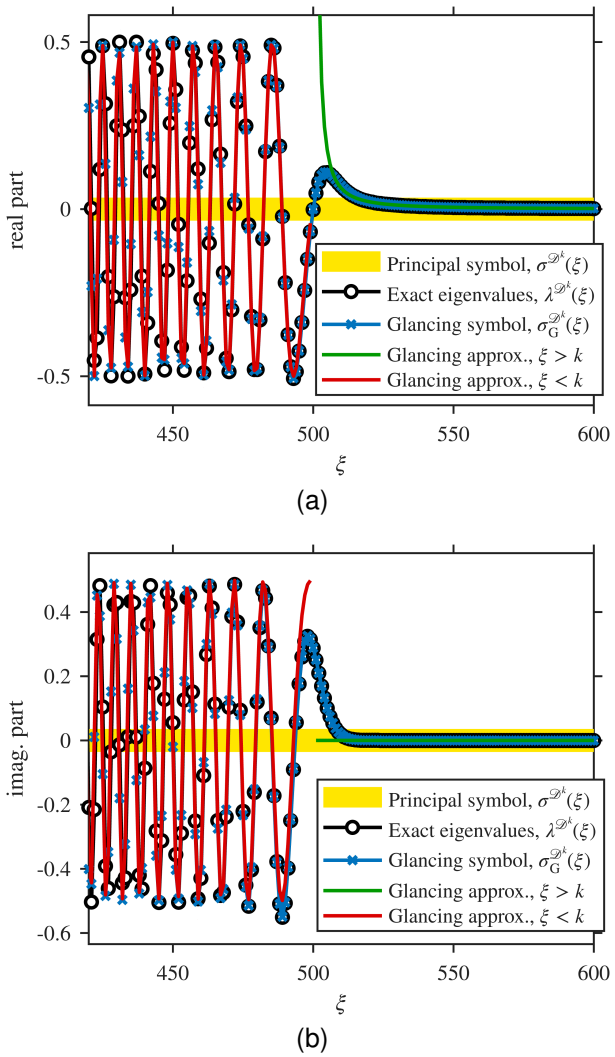


图 2. 双层算子的掠射符号 (28)、近似掠射符号 (34) 与精确特征值 $\lambda^{\mathcal{D}^k}(\xi) = \mathrm{i}\pi ak/4 \left(J_{a\xi}(ka)H_{a\xi}^{(1)}(ka)\right)'$ 在圆形边界 $ka = 500$ 上的比较：实部（上）和虚部（下）。

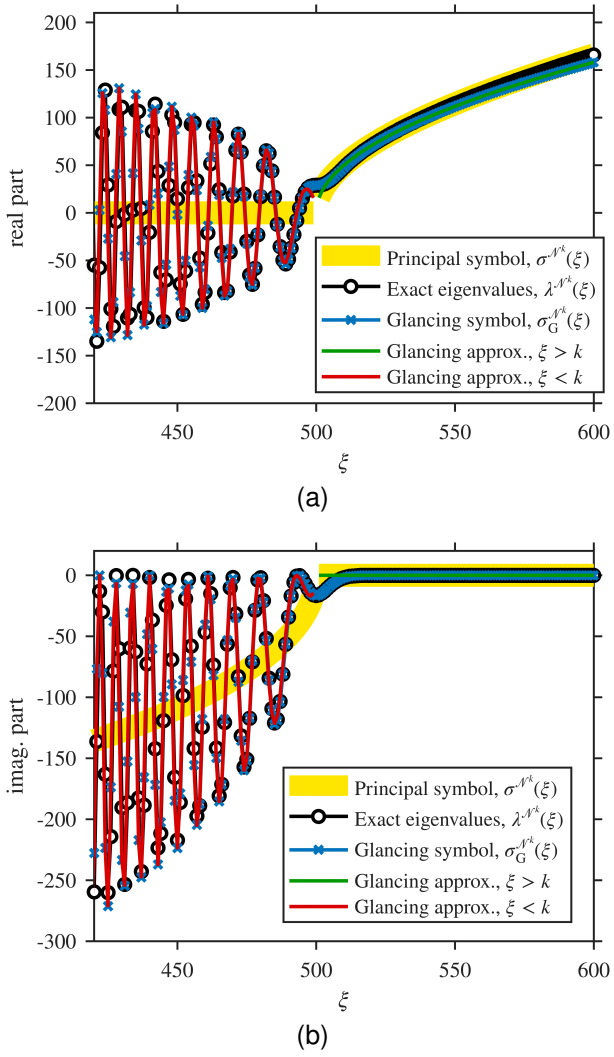
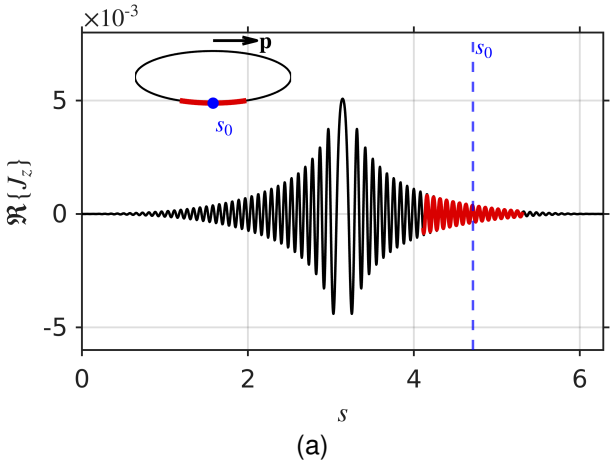
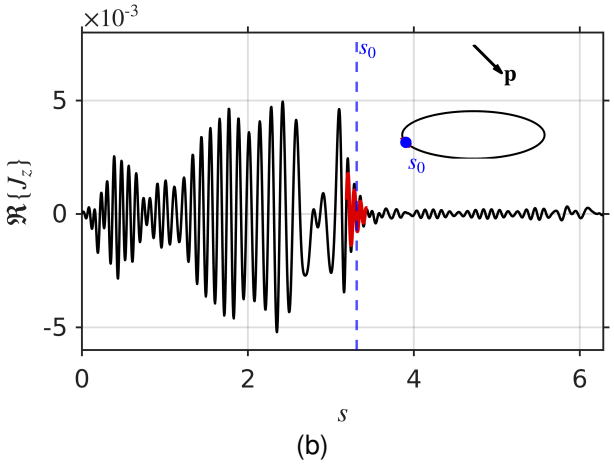


图 3. 超奇异算子的主符号 (16)、掠射符号 (30)、近似掠射符号 (35) 与精确特征值 $\lambda^{N^k}(\xi) = -\mathrm{i}\pi ak^2/2\, J'_{a\xi}(ka)H_{a\xi}^{(1)\prime}(ka)$ 在圆形边界 $ka = 500$ 上的比较：实部（上）和虚部（下）。





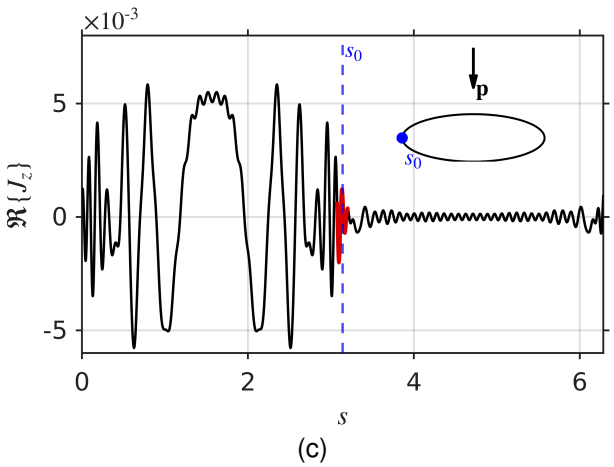
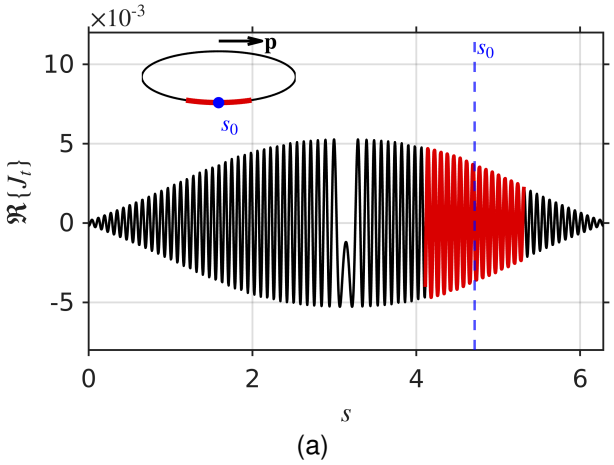
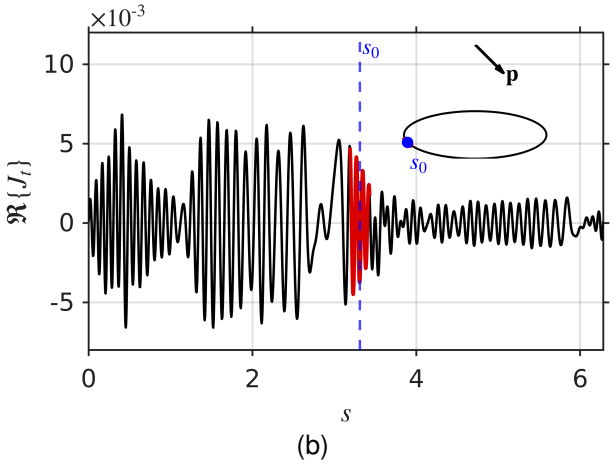


Fig. 4. 精确电流（黑色）与其近似 - 在 s_0 (37) 附近的结果（红色）在不同平面波入射方向（$kL/(2\pi)$ = 80）下的比较。





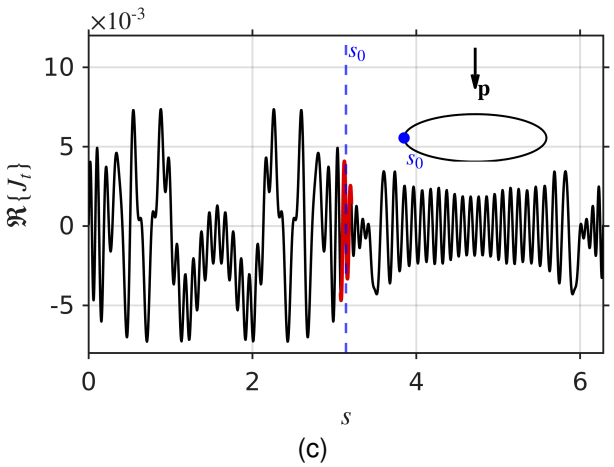


Fig. 5. 精确电流（黑色）与其近似 - 在 s_0 (38) 附近的结果（红色）在不同平面波入射方向（$kL/(2\pi)$ = 80）下的比较。