arXiv:2603.04344v1 [math.CO] 4 Mar 2026

考茨有向图上的全到全路由：规则路由优于最短路径

Vance Faber NoahStreib计算
科学中心

摘要

我们研究 Kautz 有向图 $K(d,\ D)$ 中的分组路由，其中任意一对不同顶点之间都由唯一的最短有向路径连接。先前工作中提出的规则路由可在 $\tau(d,\ D) = (D-1)d^{D-2} + Dd^{D-1}$ 步内调度所有有序对。我们证明，对于每个固定的出度 $d \geq 2$，当直径 D 足够大时，没有任何最短路径路由方案能达到这一完工时间。更确切地说，我们证明，当 D 足够大时，$K(d,\ D)$ 中存在一条边，其最短路径拥塞严格大于 $\tau(d,\ D)$。我们的构造使用取自一组三元无边界平方自由词的边词，并结合修剪不等式，将距离 D 处的高拥塞传递至更短距离。针对 $d = 2$ 和较小 D 的计算表明，对于所有 $D \geq 4$，$K(2,\ D)$ 中都存在一条拥塞大于 $\tau(2,\ D)$ 的边。

1 引言

Kautz 有向图 $K(d,\ D)$ 是一个直径为 D、出度为 d 的规则有向图，其中任意一对不同顶点（$u,\ v$）之间都由唯一的有向最短路径（测地线）连接。用于全对全通信的路由方案为每个有序对（$u,\ v$）指定一条从u 到 v的有向路径。路由方案的完工时间是满足以下条件的最小 T：使用 $\{0, 1, \ldots, T-1\}$ 中的边-时间标签调度每条路径时，不会发生冲突。

在 [8] 中提出的规则路由方案仅使用长度为 $D-1$ 和 D 的游走来路由数据包。与直觉相反，Li、Lu 和 Su [7] 的实验研究发现，与最短路径路由相比，这些相同的长路径游走能够降低拥塞。在 [8] 中，研究表明该规则路由方案的完工时间为

$$\tau(d, D) = (D-1)d^{D-2} + D\,d^{D-1}.$$

一个根本性问题是，对于较大的 D，最短路径路由能否达到这一完工时间。

对于 $K(d, D)$ 中的一条边 e，令 cong(e) 表示经过 e 的测地线数量。如果存在一条边 e 满足 cong(e) $> \tau(d, D)$，那么任何最短路径路由方案都无法在 $\tau(d, D)$ 步内完成调度；从这个意义上说，规则路由优于所有最短路径方案。

主要结果。令人惊讶的是，当 D 足够大时，这样的边总是存在，而且还可以选择只使用 $d+1$ 个可用符号中的三个：

定理。对于每个固定的出度 $d \geq 2$，存在 $D_0(d)$，使得对于所有 $D \geq D_0(d)$，Kautz 有向图 $K(d,\ D)$ 都包含一条边 e，其最短路径拥塞满足

$$\text{cong}(e) \ > \ \tau(d, D).$$

该定理的证明分为两个在概念上相互独立的层次。

（1）度数为2 的情形。每条边都可以视为字母表中由 $d+1$ 个符号组成的长度为 $D+1$ 的词。当 $d=2$ 时，所选边词是三元词，并受到对某些类型重复的约束。我们确定了一个由 $7/4^{+}$ 个 $\mathcal{F}$ 无平方词组成的族 $[10,5]$，这些边词既是无边界的，又对子词重复的规模和间隔有所限制。对于这些边，我们证明，对所有充分大的 D，$\mathcal{F}$ 中所有元素的 cong(e) 均为 $>\tau(2,\ D)$。

（2）无边界平方自由词与一般情形。Currie 和 Shur 的经典结果 $[2,3]$ 保证了每个长度 $N\geq 18$ 都存在循环平方自由三元词（即经过循环移位后仍然无边界且无平方的词）。无边界平方自由三元词族在 $d>2$ 时包含 $\mathcal{F}$，但修剪不等式采用的亏损分析限制更少。因此，在此情形下，对于每个 $K(d,\ D)$，无边界平方自由词都具有异常大的拥塞，从而证明定理 1。

论文结构。 第 2 节回顾 Kautz 有向图及其唯一测地线性质。第 3 节考察边词的重复性质。第 4 节说明，若有许多条长度为 D 、经过边 e 的最短路径，则会迫使许多条经过 e 的较短最短路径出现。第 5 节针对出度为 2 的情形，详细建立拥塞与亏量框架。第 6 节结合这些要素证明我们的主要 $d=2$ 结果，并将论证推广到一般出度 d。第 7 节展示计算证据，包括对若干经过测试的直径下循环无平方边词的穷举数据。我们在第 8 节提出若干开放问题，并在第 9 节作结。附录 A 展示了关于 $d=2$ 和较小 D 的计算结果；附录 B 则介绍一种显式的回溯构造，用于构造循环 $7/4^{+}$-无平方词。

2 Kautz 有向图与唯一最短路径

设 $[n]=\{0,1,2\cdots,n-1\}$。Kautz 有向图 $K(d,\ D)$ 的顶点为

$$V=\{x_0x_1\cdots x_{D-1}\in[d+1]^D : x_i\neq x_{i+1}\},$$

和有向边

$$x_0x_1\cdots x_{D-1}\to x_1x_2\cdots x_{D-1}x_D,\qquad x_D\in[d+1]\setminus\{x_{D-1}\}.$$

对于顶点 $u,v\in V$，我们用 dist(u,v) 表示它们之间的有向距离。

定义 2.1。 设 x,y 是 $K(d,D)$ 的顶点。长度为 $L\geq 0$、从 x 到 y 的词路径，或游走词，是一个词

$$w_0w_1\cdots w_{D+L-1}$$

在 $[d+1]$ 上，使得：

1. 相邻字母互不相同（Kautz 条件），即对于所有 i，$w_i\neq w_{i+1}$；

2. 前 D 个字母构成 x：$x=w_0w_1\cdots w_{D-1}$；3. 后 D 个字母构成 y：$y=w_Lw_{L+1}\cdots w_{L+D-1}$。

等价地，长度为 D的窗口

$$w_0w_1\cdots w_{D-1},\ w_1\cdots w_D,\ \ldots,\ w_L\cdots w_{L+D-1}$$

是从 x 到 y、长度为 L 的有向游走上的相继顶点。

引理2.2. 设 u, v为 $K(d,\ D)$的顶点，并设

$$\mathrm{ov}(u,v) := \max\Big\{ j : 0 \le j \le D,\ \text{the last } j \text{ letters of } u \text{ equal the first } j \text{ letters of } v \Big\}.$$

那么 u和 v 之间的有向距离为

$$\mathrm{dist}(u,v) \ = \ D - \mathrm{ov}(u,v).$$

此外，从 u 到 v 存在一条长度为 $\mathrm{dist}(u,v)$ 的唯一有向路径。

证明。 这是一个标准练习，利用重叠长度为 j所确定的词路径即可轻松得出。在这种情况下，不重复该重叠部分会生成一条长度为 $D-j$的（唯一）词路径，它对应于 $K(d,D)$中从 u到 v的一条长度为 $\mathrm{dist}(u,v)$ 的唯一路径。 □

3 边词与子词重复性质

本节中，我们关注三元 词，即 $K(2,D)$中的顶点。根据定义 2.1，每条有向边 $e:\ u \to v$ 都确定一条长度为 $D+1$的词路径，

$$w(e) = a_0 a_1 \cdots a_D, \qquad u = a_0 \cdots a_{D-1},\ v = a_1 \cdots a_D,$$

满足考茨约束 $a_i \neq a_{i+1}$。

定义 3 .1（有边界词与无边界词）。 若词 $a_0 \cdots a_D$具有长度为 ℓ 的边界，则

$$a_0 a_1 \cdots a_{\ell-1} = a_{D-\ell+1} \cdots a_D.$$

如果不存在长度为 $1 \le \ell \le D$的边界，则称其为无边界的 。

直观地说，无边界性可以防止短的有向回路，否则这些回路会限制穿过 e的测地线的增长。

定义 3.2（α-幂、 α-自由和 α^+-自由）。 设 W是一个词，且 $\alpha > 1$。如果 W包含一个 α-幂，则称其满足该条件；如果 W 含有形式为 $x^k y$的子词，其中 x 非空， $k \ge 1$ 是一个整数，且 y 是 x的一个（可能为空的）前缀，使得

$$\frac{|x^k y|}{|x|} \ \ge \ \alpha.$$

等价地，记作 $|x^k y| = k|x| + |y|$，该条件为 $|y|/|x| \ge \alpha - k$。如果 W不包含任何 α-幂，则称 W 是 α-自由 的。如果 W 不包含满足 $\frac{|x^k y|}{|x|} > \alpha$的子词 $x^k y$，则称 W 是 α^+-自由 的。 ——

定义 3.3（循环 α幂自由）。 词 W 是循环 α自由 的（分别是循环α^+自由的），当且仅当 W 的每个循环移位都是 α自由的（分别是 α^+自由的）。

注 3.4。A 个平方恰好是形如 XX的 2 次幂，因此无平方与 2-无等价。更一般地，若 $\alpha \le \beta$，则 α-无蕴含 β-无（反之亦然，若 α^+-无，则蕴含 β^+-无），因为禁止更大的指数限制较弱；例如，无平方严格弱于 $7/4^+$-无。若一个循环β-无词满足 $\beta \le 2$，则它必定无边界：任何非平凡边界都会导致某个循环移位以平方 PP（指数为 2）开头。在三元循环情形中，当 $n \notin \{5,7,9,10,14,17\}$ [4]时存在循环平方自由词，而循环 $7/4^+$-无词还会在 $n \in \{16,22\}$ 时不存在

[10]。因此，循环平方自由词存在、但循环 $7/4^{+}$-无词不存在的最小长度是 $n=16$ （即 $D=15$）。例如，

$$w = 0121020102120102$$

是一个长度为 16 的循环无平方三元词，但它不是 $7/4^{+}$-自由的。事实上，子词 10201210201 具有 x^1y 的形式，其中 $x=102012$ 且 $|y|=5$，因此其重复指数为 $|x^1y|/|x| = 1+5/6 > 7/4$。尽管存在这一障碍，计算检验表明，即使在 $n=16$ 时，循环无平方边词的拥塞也已经远高于完工时间，因此我们不认为充分条件在较小的 D 下会是紧的。

本文采用两种情形： $\alpha=2$ （无平方）和 $\alpha=7/4$ （$7/4^{+}$-自由）。我们将证明，对于给定的 d，每条长度足够大的循环 $7/4^{+}$- 自由边，其拥塞都大于 τ （d, D）。

4 测地线层的修剪不等式

在 K（d, D）中固定一条有向边 e，以及整数 $1 \le k \le D$、 $1 \le t \le k$。

定义 4.1. 令 $N(e;\, k, t)$ 表示满足以下条件的有序顶点对 (x, y) 的数量：

1. $\mathrm{dist}(x, y) = k$，且

2. 从 x 到 y 的唯一测地线在位置 t经过 e。

定义

$$U_k(e) := \sum_{t=1}^{k} N(e; k, t), \qquad \mathrm{cong}(e) = \sum_{k=1}^{D} U_k(e).$$

对于固定的 k和 t， $N(e;\, k, t)$ 的最大可能值为 d^{k-1}：一旦与边词对应的内部（$D+1$）字母窗口被固定， x 和 y 中剩余的字母各自贡献d种选择。我们需要研究 $N(e;\, D, t)$ 与该最大值相差多少。但首先，我们量化如下观察：若一条边位于许多长度为 D 的测地线上，则它也必然位于许多更短长度的测地线上。

引理4.2 （修剪不等式）**.** 对于 $K(d, D)$ 中的任意有向边 e，

$$U_{D-1}(e) \;\ge\; \frac{D-1}{dD}\, U_D(e).$$

证明。 记 $a_t := N(e;\, D,\ t)$ 和 $b_t := dN(e;\, D-1,\ t)$，其中 $t = 1,\ \ldots,\ D-1$。

向前修剪。 删除一条使用位置 t 处的 e 的长度为 D 的测地线的最后一条边，会得到一条使用位置 t 处的 e 的长度为 $(D-1)$ 的测地线；而每条长度为 $(D-1)$ 的测地线向前延伸至多有 d 种方式。因此 $a_t \le b_t$。

向后修剪。 删除一条使用位置 $t+1$ 处的 e 的长度为 D 的测地线的第一条边，会得到一条使用位置 t 处的 e 的长度为 $(D-1)$ 的测地线；而每条这样的测地线向后延伸至多有 d 种方式。因此 $a_{t+1} \le b_t$。

因此

$$b_t \;\ge\; \max(a_t, a_{t+1}) \qquad (t = 1, \ldots, D-1).$$

求和可得

$$dU_{D-1}(e) = \sum_{t=1}^{D-1} b_t \;\geq\; \sum_{t=1}^{D-1} \max(a_t, a_{t+1}).$$

在和固定为 $S = \sum_{t=1}^{D} a_t = U_D(e)$的非负 a_1，……， a_D 中，量 $\sum_{t=1}^{D-1} \max(a_t,\ a_{t+1})$在所有 a_t 相等时达到最小，此时其值等于$(D-1)(S/D)$。

Thus

$$dU_{D-1}(e) \;\geq\; \frac{D-1}{D}\, U_D(e),$$

这就是所求的不等式。 □

同一论证对所有长度都成立，并给出一个望远镜界。

引理4.3. 设 e 是入度和出度均为2的有向图中的一条有向边。则对每个整数 $k \geq 2$,

$$U_{k-1}(e) \;\geq\; \frac{k-1}{dk}\, U_k(e).$$

证明。 与引理4.2相同，只是用 k替换 D 。 □

从长度 D 向下迭代引理4.3，可得到总拥塞关于仅经过 e 且长度为 D 的测地线数目的一个下界。

推论 4.4。 对于 $K(d,\ D)$ 中的任意边 e ,

$$U_k(e) \;\geq\; \frac{k}{D}\, d^{-(D-k)}\, U_D(e) \qquad \text{for every } 1 \leq k \leq D,$$

因此

$$\sum_{k=1}^{D} U_k(e) \;\geq\; \frac{d}{d-1}\left(1 - \frac{1}{D(d-1)}\right) U_D(e).$$

证明。 反复应用引理4.3可得

$$U_k(e) \;\geq\; \left(\prod_{m=k+1}^{D} \frac{m-1}{dm}\right) U_D(e) \qquad (1 \leq k \leq D).$$

乘积可望远镜式消去:

$$\prod_{m=k+1}^{D} \frac{m-1}{m} = \frac{k}{D}, \qquad \prod_{m=k+1}^{D} \frac{1}{d} = d^{-(D-k)},$$

因此 $U_k(e) \geq \frac{k}{D} d^{-(D-k)} U_D(e)$。由此

$$\sum_{k=1}^{D} U_k(e) \;\geq\; \frac{U_D(e)}{D} \sum_{k=1}^{D} k\, d^{-(D-k)} \;=\; \frac{U_D(e)\left(d^2 - d - \frac{d}{D} + \frac{d^{1-D}}{D}\right)}{(d-1)^2}$$

去掉分子中的最后一项即可证明第二个不等式。 □

5 距离 D 处的亏损与见证模板

本节中，除非另有说明，我们假设 $d = 2$ 。

定义 5.1（长度为 D 时的亏损）。 对于固定的边 e 和固定的位置 $t \in \{1, \dots, D\}$，定义<style id='8'>亏量

$$\Delta_t(e) \;:=\; 2^{D-1} - N(e; D, t),$$

并记为

$$\Delta(e) = \sum_{t=1}^{D} \Delta_t(e)$$

长度为 D 时的总亏损。于是

$$U_D(e) = \sum_{t=1}^{D} N(e; D, t) = D\,2^{D-1} - \Delta(e).$$

固定一条边 e，其边词为 $a_0 a_1 \cdots a_D$。如果一条长度为 D 的测地线在位置 $t \in \{1, \dots, D\}$ 使用了 e，那么它可由一个词路径编码

$$W = w_0 w_1 \cdots w_{2D-1}$$

该词路径从某个源顶点 $x = w_0 \cdots w_{D-1}$ 到某个目标顶点 $y = w_D \cdots w_{2D-1}$，长度为 D，其含义见定义 2.1，其中块 $a_0 \cdots a_D$ 作为连续子词出现。

更具体地，对于每个位置 t，边窗口 $a_0 \cdots a_D$ 在 W 中有唯一的放置方式，使得 a_0 是游走中的第 t 个字母。令 $\ell(t) = t - 1$ 表示 W 中位于 a_0 之前的字母数，令 $r(t) = D - t$ 表示位于 a_D 之后的字母数。我们分别将 $\ell(t)$ 和 $r(t)$ 个字母称为 e 在位置 t 处的**左侧翼**和**右侧翼**。

5.1 一般位置 t 与重叠 r

固定一个直径 $D \geq 2$，并在 $K(2, D)$ 中进行讨论。令 e 为一条固定的边，其边词为 $w(e) = a_0 a_1 \cdots a_D$，并固定一个位置 $t \in \{1, \dots, D\}$。考虑一个长度为 $2D$ 的游走词 $W = w_0 w_1 \cdots w_{2D-1}$，它对应于一条从 x 到 y、长度为 D 的游走（不一定是测地线），其中 $x = w_0 w_1 \cdots w_{D-1}$，且 $y = w_D w_{D+1} \cdots w_{2D-1}$。假设该游走在位置 t 使用了 e，即边词窗口 $a_0 a_1 \cdots a_D$ 出现在 W 中，起始索引为 $t - 1$，因此边窗口为

$$I_E \;=\; [\,t - 1,\; D + t - 1\,],$$

长度为 $D + 1$ 的区间。

现在假设我们考察的是一对非测地对（$x,\ y$），其重叠长度为 $r := \mathrm{ov}(x,\ y) \geq 2$。因此，$w_{D-r} \cdots w_{D-1} = w_D \cdots w_{D+r-1}$。我们将发生重叠的两个区间记为

$$I_L = [\,D - r,\; D - 1\,], \qquad I_R = [\,D,\; D + r - 1\,],$$

并记作

$$J = I_L \cup I_R = [\,D - r,\; D + r - 1\,]$$

表示重叠块的两个副本的并集。

排除边内平方情形。始终假设 $w(e)$ 是无边界且无平方的。如果重叠 I_L 和 I_R 的两个副本都完全位于边窗口 I_E内，那么 $w(e)$

将包含一个长度为 $2r$ 的非平凡平方 $\beta\beta$，这与无平方性矛盾。因此 $J \not\subseteq I_E$：J 至少有一个端点必须位于边窗口之外。

用不等式表示，这意味着有两种可能：

$$\begin{aligned} &\text{(L)} \quad D - r < t - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t + r > D + 1, \\ &\text{(R)} \quad D + r - 1 > D + t - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r > t. \end{aligned}$$

因此，对于每个在位置 t 产生亏量且重叠量为 $r \geq 2$ 的非测地对 $(x,\ y)$，至少有以下两种情况之一成立：$t + r > D + 1$ 或 $r > t$。

围绕中点平衡位置 t。位置 t 可能是"左偏"或"右偏"，具体取决于边窗口 $I_E = [t-1, D+t-1]$ 相对于中点 D 的位置：

$$2t \ \leq \ D + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t - 1 \ \leq \ D - t,$$

在其 中，边在中点左侧延伸得比右侧更远；或者

$$2t \ > \ D + 1,$$

在这种情况下，它向右侧延伸得更远。这两种可能性在反向游走 $W \mapsto w_{2D-1} \cdots w_0$ 时互为对称，因此只需详细分析其中一种，再利用左右对称性得到另一种。在本小节余下部分，我们讨论

$$2t \ \leq \ D + 1,$$

即，边窗口相对于中点更偏左而非偏右。

情形 A： $2t \leq D + 1$ **且** $t + r > D + 1$

假设 $2t \leq D + 1$ 且 $t + r > D + 1$（等价地，$r > D - t + 1$）。由于 $2t \leq D + 1$ 蕴含$D - t + 1 \geq t$，我们实际上也有 $r > t$。因此，重叠区间 $J = [D - r,\ D + r - 1]$ 延伸超过边窗口 $I_E = [t - 1,\ D + t - 1]$ 的两端。

在此情形下，重叠条件迫使 $w\,(e)$ 成为跨越某个平方的中点的子词，因此 $w\,(e)$ 具有非平凡边界。因此，每当 $w\,(e)$ 是无边界的时，情形 A 都不可能（见引理 5.2）。

情形 B： $2t \leq D + 1$ **且** $r > t$

现在假设

$$2t \ \leq \ D + 1, \qquad r > t, \qquad t + r \ \leq \ D + 1, \qquad r \geq 2.$$

由 $t + r \leq D + 1$ 可得 $D - r \geq t - 1$，因此

$$t - 1 \ \leq \ D - r \ \leq \ D - 1 < D < D + t - 1 < D + r - 1 \leq 2D - 1.$$

因此，重叠部分的左侧副本完全位于边的左半部分内：$I_L \subseteq [\,t-1,\ D-1\,] \subseteq I_E$，而重叠部分的右侧副本从边内开始，但向右突出：$I_R \cap I_E = [\,D,\ D + t - 1\,]$ 和 $I_R \setminus I_E = [\,D + t,\ D + r - 1\,]$。

$[0, 2D - 1]$ 上的相关切点为

$$0,\ t-1,\ D-r,\ D-1,\ D,\ D+t-1,\ D+r-1,\ 2D-1,$$

由此得到 W对应的子词:

$$\begin{aligned}
&\mu := w_0 w_1 \cdots w_{t-2} && \text{(far left prefix)},\\
&A := w_{t-1} \cdots w_{D-r-1} && \text{(part of } x \text{ before the left overlap)},\\
&U := w_{D-r} \cdots w_{D-1} && \text{(left copy of the overlap block)},\\
&B := w_D \cdots w_{D+t-1} && \text{(portion of the right copy inside the edge)},\\
&V := w_{D+t} \cdots w_{D+r-1} && \text{(portion of the right copy outside the edge)},\\
&\chi := w_{D+r} \cdots w_{2D-1} && \text{(far right suffix)}.
\end{aligned}$$

根据构造， U 和 BV 是两个长度为 r的相等重叠块，因此

$$U = BV.$$

因此，游走词可分解为

$$W = \mu\, A\, U\, B\, V\, \chi \;=\; \mu\, A\, (BV)\, B\, V\, \chi.$$

边窗口 $I_E = [t-1, D+t-1]$ 恰好覆盖 A、 U和 B的连接:

$$w = a_0 \cdots a_D = w_{t-1} \cdots w_{D+t-1} = A\, U\, B = A\, (BV)\, B.$$

这里 U 的长度为 $r \geq 2$ ， B 的长度为 t，而

$$|A| = (D-r) - (t-1) = D + 1 - t - r \;\geq\; 0,$$

其中 A 可能为空，但仅限于边界 $t + r = D + 1$处。

引理 5.2. 在 C 中 情形 A（$2t \leq D+1$ 与 $t+r > D+1$），边词 $w(e)$ 不可能是无边界的 .

Proof. 设 $U := w_{D-r} \cdots w_{D-1}$。根据长度为 r 的重叠的定义，我们有 e

$$w_{D-r+i} = w_{D+i} \qquad (0 \leq i \leq r-1),$$

因此子词 $w_{D-r} \cdots w_{D+r-1}$等于平方 UU。在情形 A 中，我们有 $D-r < t-1$（等价地$t + r > D + 1$），并且还有 $r > t$（因为 $2t \leq D+1$ 蕴含 $D - t + 1 \geq t$ 与 $r > D - t + 1$），故

$$t - 1 \;\geq\; D - r + 1 \qquad \text{and} \qquad D + t - 1 \;\leq\; D + r - 2.$$

因此整个边窗口 $[t-1,\, D+t-1]$ 位于 $[D-r,\, D+r-1]$ 之内，所以 $w(e)$ 是 UU 的子词。特别地， $w(e)$ 具有周期 r。

由于 $r \leq D$，我们有 $|w(e)| = D + 1 > r$，并且任何长度为 L、周期为 $r < L$ 的词都具有长度为 $L - r$ 的非平凡边界。因此 $w(e)$ 是有边界的，这与 $w(e)$ 是无边界的这一假设相矛盾。 □

因此，对于无边框无平方边词和 $2t \leq D + 1$，在位置 t 产生亏量的每个非测地对都源自情形 B。由于游走词 $W \mapsto w_{2D-1} \cdots w_0$ 具有左右对称性，对于 $2t > D + 1$，交换左侧翼和右侧翼的角色后，同样的结构描述也成立。

5.2 见证模板与代价

现在，我们从情形 B 中提取一个“模板”和一个具体的代价函数。

固定 t，其中 $2t \le D+1$，以及可在位置 t 出现的重叠长度 $r \ge 2$，针对非测地对（x, y）。情形 B 中的分析给出一个分解

$$W = \mu\, A\, U\, B\, V\, \chi, \qquad U = BV,$$

with

$$w(e) = a_0 \cdots a_D = A\, U\, B = A\,(BV)\, B,$$

其中 $|B| = t$ 且 $|U| = r$。我们还有

$$2t \;\le\; D+1, \qquad r > t, \qquad t + r \;\le\; D+1, \qquad r \ge 2$$

并且重叠区间 $J = [\,D-r,\; D+r-1\,]$仅在线段 $[D+t, D+r-1]$处与侧翼相交，对应于右侧翼中的子词 V。因此， V 的字母由 w（e）以及两个重叠块副本必须重合这一要求唯一确定，而所有其他侧翼字母除通常的Kautz邻接约束外仍保持自由。

特别地,

$$|V| = r - t$$

是exa 恰好是位于 (t, r) 的重叠模式所强制 的侧翼字母个数 .

定义 5.3（见证模板与代价）。 固定一条边 e，其无边框无平方边词为$w(e)$，以及一个位置 t，使得 $2t \le D+1$。

- 一个见证于 (t, r) 是一个非测地对 (x, y)，其重叠长度为 $\mathrm{ov}(x, y) = r \ge 2$，且其游走词 W 分解为

  $$W = \mu\, A\, U\, B\, V\, \chi, \qquad U = BV, \qquad w(e) = AUB = A(BV)B,$$

  其中 $|B| = t$ 与 $|U| = r$，如情形 B。
- 见证模板 $\mathcal{T}(t, r)$ 是通过记录哪些侧翼位置位于重叠区间 J 中因而被强制、哪些侧翼位置仍保持自由而得到的集合。
- 该模板的代价 为

  $$m(\mathcal{T}(t, r)) := m(t, r) = r - t,$$

  即，由 $w(e)$ 及两个重叠副本相等这一条件唯一确定的侧翼字母的值的数量。

由于边词 $w(e)$ 已固定，一旦 (t, r) 固定，分解 $w(e) = A(BV)B$（如果存在）便是唯一的： B 是 $w(e)$ 长度为 t 的后缀，而 BV 是长度为 r 的后缀。因此，对每个 (t, r)，模板 $\mathcal{T}(t, r)$至多有一个 。

定义 5.4（位置 t 处的可容许重叠长度）。 设 w 是长度为 n 的词，并固定$t \ge 1$。记 B 为 w 长度为 t 的后缀。若存在词 A, V 使得 $V \ne \epsilon$，其中 ϵ 表示空词，且 r 是满足 $t+1 \le r \le n-t-1$ 的整数，则称其在位置 t 处可容许。

$$w \;=\; A\, B\, V\, B, \qquad |B| = t, \qquad |BV| = r. \tag{1}$$

定义

$$R_t(w) \;:=\; \big\{\, r \in \{t+1, \ldots, n-t-1\} :\; r \text{ is admissible at position } t \,\big\}.$$

（在下面的应用中， w 将是一个长度为 $n = D+1$的边词 $w(e)$。分解(1)恰好是由见证模板 $\mathcal{T}(t, r)$ 产生的“$ABVB$”重叠模式，其代价为$m = r - t = |V|$。 ）

5.3 示例

在继续证明之前，我们先暂停一下，给出一个示例，用以说明本节所阐述的概念。

设 u 与 v 为 $K(2,7)$ 中的顶点，且 $u = 0120210$ 与 $v = 1202102$ 使得 $e = uv$ 是 $E(K(2,7))$ 中的一条边，其边词

$$w(e) \;=\; 01202102.$$

注意， $w(e)$ 是循环无平方的。

设 $t = 2$。考虑长度为 D、具有这些参数的游走词 W，它从某个未指定的顶点 x 到另一个未指定的顶点 y:

$$W \;=\; \cdot\,0\,1\,2\,0\,2\,1\,|\,0\,2\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot$$

其中“·”表示一个未指定的字符，“|”表示中点，即将 x 的字符串与 y的字符串分隔开。

我们可以通过选择 $r \in \{3,4,5,6\}$来满足情形 B 的条件。然而，在本例中，该集合中唯一的可行选择是 $r = 3$ （因而也是 $J = [4,9]$），这是通过设定$B = 02$ 与 $V = 1$ （以及 $A = 012$）得到的。也就是说，为了在 $(2,3)$ 处产生一个见证，有 $|V| = 1$ 个侧翼位置是被强制的（字符集合 $\{w_9\}$）——它必须是字符串 1，以强制 W 中字符串 021 的重复——而其余未指定的字符（集合 $\{w_0, w_{10}, w_{11}, w_{12}, w_{13}\}$）仍然自由。见证模板 $\mathcal{T}(2,3)$ 的代价为 $m(t,r) = 1$，该模板的可能见证数 (x,y) 至多为 2^5。

5.4 界引理

现在我们证明一系列引理，它们将在第 6 节和第 7 节中发挥作用。

引理 5.5 （固定 t 时可容许重叠长度的强分离）。 设 w 是长度为 n 的无平方词，并固定 $t \geq 1$。若 r, $r' \in R_t(w)$ 两两不同，则

$$|r - r'| \;\geq\; t + 1.$$

特别地， $R_t(w)$ 不含两个连续整数。

证明。 固定 t，并令 B 为 w 长度为 t 的后缀。取 $r = \min R_t(w)$，于是根据定义 5.4，我们可以写成

$$w = A\,B\,V\,B$$

其中 $V \neq \epsilon$、 $|B| = t$ 和 $|BV| = r$。

现在令 $r' \in R_t(w)$，其中 $r' > r$。相同后缀 B 的对应出现位置比上文使用的出现位置早 $r' - r$个位置，因此我们可以写成

$$w = A'\,B\,X\,V\,B$$

其中 $|X| = r' - r$ （即这两个起始位置之间的间隔为 $|X|$）。

反设 $|X| \leq t$。由于 $w = A\,B\,V\,B$，词 $B\,V\,B$是 w的一个后缀。因为 $w = A'BXVB$，词 XVB也是 w的一个后缀，因此 XVB是 BVB的一个后缀。若$|X| \leq t$，这个后缀就始于 BVB中开头的 B内部，因此 X是 B的一个后缀。令 $B = YX$。那么 $BX = YXX$包含平方 XX，它是 w的一个因子，这与 w无平方相矛盾。

因此 $|X| \geq t + 1$，即 $r' - r \geq t + 1$。由于 $r < r'$是 $R_t(w)$中任意两个不同的元素，结论得证。

□

引理 5.6。 固定一条边 e 和一个位置 t，满足 $2t \le D+1$，并且

$$R_t(e) = \Big\{ r \in \{t+1, \dots, D-t\} : \text{a witness template } \mathcal{T}(t,r) \text{ exists} \Big\}.$$

对于每个 $r \in R_t(e)$，相应模板的代价为 $m = r-t$，且至多有 $2^{D-1-r+t} = 2^{D-1-m}$个有序对 (x,y) 实现该模板。因此

$$0 \le \Delta_t(e; \mathcal{T}(t,r)) \le 2^{D-1-r+t}, \qquad \text{and consequently} \qquad \Delta_t(e) \le \sum_{r \in R_t(e)} 2^{D-1-r+t}.$$

证明。 固定 $r \in R_t(e)$，并令 $\mathcal{T} = \mathcal{T}(t,r)$ 为见证模板。根据模板参数的定义，重叠区间（或强制窗口）的长度为 $m = r-t$，因此 $\mathcal{T}$ 的代价 为$m = r-t$。

现在计算实现 $\mathcal{T}$ 的有序对 (x,y) 的个数。实现 $\mathcal{T}$意味着宽词（等价地，有序对 (x,y)）在由$\mathcal{T}$所强制的每一个位置上都与该模板一致。模板 $\mathcal{T}(t,r)$ 固定了强制窗口之外的 $D-1-r+t$ 个“自由”坐标以外的所有坐标，并且每个自由坐标有两种选择（在双符号子字母表中对下一个字母的二元选择，或等价地，考茨约束中的两种可容许延续）。因此实现的个数至多为 $2^{D-1-r+t}$。每个实现对模板特定亏量 $\Delta_t(e;\mathcal{T})$ 的贡献至多为 1，并且贡献非负，因此

$$0 \le \Delta_t(e; \mathcal{T}) \le 2^{D-1-r+t}.$$

对所有 $r \in R_t(e)$ 求和，得到所述的 $\Delta_t(e)$ 上界。 □

引理 5.7。 固定一条边 e 以及一个满足 $2t \le D+1$ 的整数 t。假设 $w(e)$ 无平方。若$R_t(w(e)) \neq \emptyset$, 令 $r_0 = \min R_t(w(e))$。则

$$\Delta_t(e) \;\le\; \frac{1}{1-2^{-(t+1)}}\, 2^{D-1-r_0+t}.$$

证明。 将 $R_t(w(e))$ 中的元素按递增顺序列为 $r_0 < r_1 < r_2 < \cdots$。由引理 5.5 可得，对所有 k 均有 $r_{k+1} - r_k \ge t+1$，因此

$$r_k \ge r_0 + k(t+1) \qquad (k \ge 0).$$

因此

$$\sum_{r \in R_t(w(e))} 2^{D-1-r+t} = \sum_{k \ge 0} 2^{D-1-r_k+t} \le \sum_{k \ge 0} 2^{D-1-(r_0+k(t+1))+t},$$

这是一个公比为 $2^{-(t+1)}$ 的几何级数，从而得到所述上界。 □

引理 5.8。 对于 $K(2,D)$ 的一条边 e 以及满足 $2t \le D+1$ 的 t，并且

$$R_t(e) = \{\, r \in \{t+1, \dots, D-t\} : \text{ a witness template } \mathcal{T}(t,r) \text{ exists} \,\},$$

定义加权稀疏度

$$\Omega(e) := \sum_{t=1}^{\lceil (D+1)/2 \rceil} \; \sum_{r \in R_t(e)} 2^{-(r-t)}.$$

Then

$$\Delta(e) \le 2^D \Omega(e), \qquad \text{and hence} \qquad U_D(e) \ge (D - 2\Omega(e))\, 2^{D-1}.$$

证明。 固定 $t \le \lceil (D+1)/2 \rceil$。类型为 (t,r) 的见证的代价为 $s = r - t \ge 1$，这意味着它固定了 s 个侧翼符号，并留下 $D-1-s$ 个侧翼符号可自由取值。因此，对于一个固定的 (t,r)，对 $\Delta_t(e)$ 有贡献的补全数量至多为 $2^{D-1-(r-t)}$。对所有可容许的 r 求和可得

$$\Delta_t(e) \le \sum_{r \in R_t(e)} 2^{D-1-(r-t)} = 2^{D-1} \sum_{r \in R_t(e)} 2^{-(r-t)}.$$

对 $t \le \lceil (D+1)/2 \rceil$ 求和并利用对称性 $\Delta_t(e) = \Delta_{D+1-t}(e)$，可得 $\Delta(e) \le 2^D \Omega(e)$。由于 $U_D(e) = D 2^{D-1} - \Delta(e)$，所述关于 $U_D(e)$ 的下界随即成立。

□

引理 5.9. 若 $D > 3$ 且

$$\Omega(e) < \frac{D-3}{8},$$

则 $\mathrm{cong}(e) > \tau(2, D)$。

证明。 根据引理 5.8，

$$U_D(e) \ge (D - 2\Omega(e))\, 2^{D-1}.$$

将推论 4.4 特化为 $d = 2$，

$$\mathrm{cong}(e) = \sum_{k=1}^{D} U_k(e) \ge \Big(2 - \frac{2}{D}\Big) U_D(e) \ge \frac{D-1}{D} (D - 2\Omega(e))\, 2^D.$$

由于 $\tau(2, D) = (D-1)2^{D-2} + D 2^{D-1} = (3D-1)2^{D-2}$，不等式 $\mathrm{cong}(e) > \tau(2,D)$ 随之 if

$$4 \frac{D-1}{D} (D - 2\Omega(e)) > 3D - 1.$$

若 $\Omega(e) < \frac{D}{8}(D-3)$，则该式成立，这意味着当 $\Omega(e) < \frac{D-3}{8}$ 时它同样成立。

□

6 一般出度 d 下的高拥塞

在证明主要定理之前，我们将亏量–加–修剪策略从 $K(2,D)$ 推广到出度为 $d \ge 2$ 的 Kautz 有向图 $K(d,D)$。我们的主要观点是，充分无重复的三元边词已足以在每一个 $K(d,D)$ 中迫使出现高最短路径拥塞：我们可以将三元字母表 $\{0,1,2\}$ 视为 $[d+1]$ 的子集，并对所有 d 使用同一边词。

6.1 $K(d,D)$ 中的边词与重叠

$K(d, D)$ 的顶点是由字母表 $[d+1]$ 中的字母组成、长度为 D 且相邻字母不重复的词。每个顶点的出度为 d：从 $u = u_0 \cdots u_{D-1}$ 出发，可以追加 $[d+1] \setminus \{u_{D-1}\}$ 中的任意符号。每条边 $e : u \to v$ 都有一个边词

$$w(e) = a_0 a_1 \cdots a_D, \qquad u = a_0 \cdots a_{D-1},\ v = a_1 \cdots a_D.$$

与度为 2 的情形一样，对于固定的边 e 和位置 $j \in \{1, \dots, D\}$，选择（$D-1$）侧翼符号可确定一条长度为 D 的游走，该游走在位置 j 使用 e。此类侧翼选择最多有 d^{D-1} 种，记作

$$\Delta_j(e) := d^{D-1} - N(e; D, j), \qquad \Delta(e) := \sum_{j=1}^{D} \Delta_j(e),$$

其中 $N(e;\, D, j)$ 表示距离为 D 的有序对 (x, y) 的数量，这些有序对所选的长度为 D的测地线在位置 j经过 e 。亏量 $\Delta_j(e)$ 来自非测地线侧翼选择，即所得有序对的重叠长度为 $r \geq 2$的那些选择。

对于带有 $2j \leq D+1$ 的 j，令

$$R_j(e) := \{\, r \in \{j+1, \ldots, D-j\} : \text{a witness template } \mathcal{T}(j, r) \text{ exists} \,\}.$$

与引理 5.6 中完全相同，长度为 r 的重叠受其代价 $m = r - j \geq 1$ 控制：代价为 m 的见证会固定 m 个侧翼符号，并使 $D-1-m$ 个侧翼符号保持自由。因此，对于每个固定的 j,

$$\Delta_j(e) \;\leq \sum_{r \in R_j(e)} d^{D-1-(r-j)}.$$

定义 6.1 （ K（d, D）中的加权重叠计数）。定义

$$\Omega_d(e) \;:=\; \sum_{j=1}^{\lceil (D+1)/2 \rceil} \; \sum_{r \in R_j(e)} d^{-(r-j)}.$$

Le引理 6.2。设 e 是 K（d, D）中的一条边，其边词是无平方的。则

$$\Delta(e) \;\leq\; 2\, d^{D-1}\, \Omega_d(e), \qquad \text{and hence} \qquad U_D(e) \;\geq\; \big(D - 2\Omega_d(e)\big)\, d^{D-1}.$$

证明。固定带有 $2j \leq D+1$ 的 j。由上面的代价界，

$$\Delta_j(e) \;\leq \sum_{r \in R_j(e)} d^{D-1-(r-j)} = d^{D-1} \sum_{r \in R_j(e)} d^{-(r-j)}.$$

对 $j \leq \lceil (D+1)/2 \rceil$ 求和，并利用对称性 $j \mapsto D+1-j$ 乘以二，得到

$$\Delta(e) \leq 2\, d^{D-1} \sum_{j=1}^{\lceil (D+1)/2 \rceil} \; \sum_{r \in R_j(e)} d^{-(r-j)} = 2\, d^{D-1}\, \Omega_d(e).$$

代入 $U_D(e) = D d^{D-1} - \Delta(e)$ 后，得到所述下界。 □

6.2 基于 $7/4^{+}$-自由性的普适代价界

对于一般的 d，关键的组合学输入是：任意位于位置 的可容许重叠，其代价存在一个下界 $r - j$。这里用到了 $7/4^{+}$-幂自由性。

引理 6.3。设 w 是一个 $7/4^{+}$-幂自由词。假设 w 含有一个形如 BVB 的子词，其中$|B| = t \geq 1$ 且 $|V| = m \geq 1$。那么 $m \geq \lceil t/3 \rceil$。

证明。设 $x := BV$，于是 $|x| = t + m$，并注意到 $BVB = x \cdot B$，其中 B是 x的前缀。因此，BVB 是一个周期为 $|x|$ 的 α-幂，且

$$\alpha = \frac{|BVB|}{|x|} = \frac{2t+m}{t+m} = 1 + \frac{t}{t+m}.$$

若 $m < t/3$ 则 $t/(t+m) > t/(t+t/3) = 3/4$，从而 $\alpha > 1 + 3/4 = 7/4$。这与$7/4^{+}$-幂自由性矛盾。因此 $m \geq t/3$，从而 $m \geq \lceil t/3 \rceil$。 □

在我们的设定中，位置 j 处的见证模板对应于将边词分解为 $w(e) = ABVB$，其中 $|B| = j$ 且代价为 $r - j = |V|$。因此，引理 6.3 表明，位置 j 处的每一个可容许重叠的代价至少为 $\lceil j/3 \rceil$。将这一代价界与引理 5.5（可用，因为 $7/4^+$-自由蕴含无平方）相结合，便得到 $\Omega_d(e)$ 的一致界。

引理 6.4. 设 $d \geq 2$，并设 e 是一条边，其边词 $w(e)$ 无边界且无 $7/4^+$ 次幂。于是

$$\Omega_d(e) \;\leq\; \frac{4}{d-1}.$$

证明。 固定 $j \leq \lceil (D+1)/2 \rceil$。每个 $r \in R_j(e)$ 都对应一个子词 BVB，满足 $|B| = j$ 和 $|V| = r - j$，因此由引理 6.3 可得 $r - j \geq \lceil j/3 \rceil$。此外，由于 $W(e)$ 无平方，引理 5.5 表明 $R_j(e)$ 中的不同元素之间至少相隔 $j + 1 \geq 2$。因此

$$\sum_{r \in R_j(e)} d^{-(r-j)} \;\leq\; \sum_{\ell \geq 0} d^{-(\lceil j/3 \rceil + \ell(j+1))} = \frac{d^{-\lceil j/3 \rceil}}{1 - d^{-(j+1)}} \;\leq\; \frac{d^{-\lceil j/3 \rceil}}{1 - d^{-2}} \;\leq\; \frac{4}{3}\, d^{-\lceil j/3 \rceil},$$

将 $d^{-2} \leq 1/4$ 用于 $d \geq 2$。对 $j \geq 1$ 求和可得

$$\Omega_d(e) \;\leq\; \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{\infty} d^{-\lceil j/3 \rceil}.$$

最后，注意到 $\lceil j/3 \rceil = m$ 恰好出现 $j = 3m-2,\ 3m-1,\ 3m$ 次，因此

$$\sum_{j=1}^{\infty} d^{-\lceil j/3 \rceil} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(d^{-m} + d^{-m} + d^{-m} \right) = 3 \sum_{m=1}^{\infty} d^{-m} = \frac{3}{d-1}.$$

因此 $\Omega_d(e) \leq (4/3) \cdot (3/(d-1)) = 4/(d-1)$。 □

6.3 对所有 $d \geq 2$，基于 $7/4^+$-自由词的主定理

定理 6.5（对所有 d 的主定理）。固定 $d \geq 2$。设 e 是 $K(d,\ D)$ 的任意一条边，其边词 $w(e)$ 是一个长度为 $D+1$、无边界且无 $7/4^+$ 次幂的三元词，并视作位于 $[d]+1$ 内。则取显式常数

$$C_d := \frac{8}{d-1},$$

我们有

$$U_D(e) \;\geq\; (D - C_d)\, d^{D-1} \qquad \text{and} \qquad \operatorname{cong}(e) \;\geq\; \frac{d}{d-1}\Big(1 - \frac{1}{D(d-1)}\Big)(D - C_d)\, d^{D-1}.$$

因此，对所有 $D \geq \frac{8d^2+2d-1}{d-1}$，我们有 $\operatorname{cong}(e) > \tau(d,\ D)$。

证明。 根据引理 6.4，我们有显式上界

$$\Omega_d(e) \;\leq\; \Omega_d^* := \frac{4}{d-1}.$$

由此，引理 6.2 给出

$$U_D(e) \;\geq\; (D - 2\Omega_d^*)\, d^{D-1} \;=\; \Big(D - \frac{8}{d-1}\Big) d^{D-1},$$

因此我们可以取 $C_d := 2\Omega_d^* = 8/(d-1)$。应用推论 4.4，可得 cong($e$) 的所述下界。我们需要 D 的一个下界，使得

$$\frac{d}{d-1}\Big(1-\frac{1}{D(d-1)}\Big)(D-C_d)\,d^{D-1} > \tau(d,D) = \left(D+\frac{D-1}{d}\right)d^{D-1}. \tag{2}$$

令 $X := (d-1)D$。经过一些变形后，我们可以看到，(2) 等价于以下二次不等式

$$X^2 - \big(8d^2+2d-1\big)X + 8d^2 > 0.$$

特别地，只需取

$$X \geq 8d^2+2d-1, \qquad \text{i.e.} \qquad D \geq \frac{8d^2+2d-1}{d-1}.$$

□

推论 6.6. 设 $d=2$，且设 e 是一条边，其边词 $w(e)$ 是一个长度为 $D+1$ 的无边界 $7/4^+$-次幂自由三元词。那么对所有 $D \geq 35$，cong(e) $> \tau(2,D)$。

证明。 这是取 $d=2$ 时的定理 6.5。 □

定理 6.7（关于 $d=2$ 的主要定理）。对于所有 $D \geq 4$，存在一条边 $e \in E(K(d,D))$，使得 cong(e) $> \tau(d,D)$。

证明。 推论 6.6 对 $D \geq 35$ 证明了这一结论。对于其余情形，我们使用计算机程序计算了精心挑选的边的拥塞。这些结果完成了证明，列于附录 A。$K(2,3)$ 中一条边的最大拥塞为 15，小于 $\tau(2,3) = 16$；因此，所述界是紧的。

□

6.4 当 $d \geq 3$ 时的推论：循环平方自由词

对于 $d \geq 3$，只需假设循环平方自由性，就能得到一个较简单（尽管假设条件不那么一般）的结论。

推论 6.8。 设 $d \geq 3$，并设 e 是一条边，其边词是长度为 $D+1$ 的循环无平方三元词（在 $[d{+}1]$ 中考察）。那么存在 $D_0(d)$，使得对于所有 $D \geq D_0(d)$，都有

$$\mathrm{cong}(e) > \tau(d,D).$$

证明。 只使用无平方性（以及相应的分离引理），并结合修剪不等式，重复一致的 Ω_d 估计即可得到此结论。由于定理 6.5 对所有 $d \geq 2$ 都成立且结论更强，我们省略类似的推导细节。

□

7 计算证据

本节记录支持两项主要实证观察的数值证据，这两项观察促使我们采用解析方法：

1. 对于我们能够穷举检验的小直径，当 $D > 3$ 和 时，循环无平方边词已经迫使 cong(e) $> \tau(2,D)$

2. 引理 5.8 中出现的加权稀疏度 $\Omega(e)$ 对于循环无平方（及相关）边词而言非常小，而且似乎会随着 D 增大而保持有界。

所有计算 在 $K(2,\ D)$ 中执行，以枚举最短路径并精确计算 cong(e) .

7.1 循环无平方边：拥塞统计

对于每个 D，我们枚举了所有长度为 $D+1$ 的边词 $w(e)$，这些边词是循环无平方的，并计算了每个这样的边 e的 cong(e)。

对于 $D=11$，我们发现：

- 72 个循环无平方边词；
- 在此类中，cong(e) 的取值范围为 18383 至 19911；
- $\tau(2,\ 11) = (3\cdot 11-1)2^9 = 16384$，因此，即使循环无平方类中的最小拥塞也比 $\tau(2,\ 11)$ 高约 12%。

对于 $D=9,\ 10$，也存在同样的现象：所有测试过的循环无平方边都满足 cong(e) $>\tau(2,\ D)$。

7.2 加权稀疏度值 $\Omega(e)$

引理 5.9 表明

$$\Omega(e) \ < \ \frac{D-3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{cong}(e) > \tau(2, D).$$

循环无平方类。对于每个 D 从 20 到 40 的循环平方自由词，以及每个 D 不超过 70 的范围内随机选取的少数词，我们计算了 $\Omega(e)$ 并记录了

$$\Omega_{\max}(D) \ := \ \max\{\, \Omega(e) : \ \Omega(e) \text{ circular square-free of length } D+1 \,\}.$$

在所有测试案例中，$\Omega(e)$ 都保持较小（通常在 1 到 1.5 之间），并且对于每个测试过的 $D \geq 14$，我们都观察到

$$\Omega_{\max}(D) \ \leq \ \frac{D-3}{8}.$$

对于较小的直径（$D \leq 13$），这个不等式可能不成立，尽管上文直接计算拥塞的结果仍表明，对于在 $D=9$、10、11 处测试的每条循环平方自由边，cong(e) $>\tau(2, D)$。

7.3 无平方无边框满行边

我们还考察了距离 $D-2$处的“满行”类，它提供了具有高拥塞的边的另一种来源。

定义 7.1（距离 k处的满行边）。 固定 $D \geq 2$，并在 $K(2,\ D)$中讨论。对于边 e 以及整数 $1 \leq k \leq D$、 $1 \leq t \leq k$，回顾 $N(e;\ k,\ t)$表示有序顶点对$(x,\ y)$的数目，这些顶点对满足dist$(x,\ y) = k$，且其从 x 到 y的唯一测地线在位置 t使用 e。我们称 e 为满行于距离 k，如果

$$N(e; k, t) = 2^{k-1} \qquad \text{for every } t = 1, \ldots, k,$$

即,

$$U_k(e) \ = \ \sum_{t=1}^{k} N(e; k, t) \ = \ k\, 2^{k-1}.$$

当 $k = D-2$ 我们简单地说， e 是满行（距离为 $D-2$）。

对于每个 D，我们用 $\mathcal{F}_D$ 表示距离为 $D-2$ 时满行的边，

$$\mathcal{U}_D := \{\, e \in \mathcal{F}_D : w(e) \text{ is unbordered} \,\}$$

无边框满行边。受内部重复对测地线路径流量影响的启发，我们进一步将 $\mathcal{G}_D$ 定义为这样一组边：其边词在$D-2$处同时满足满行、无边界和无平方。

表1总结了 $D = 9,\ 10$ 时这些类别的情况。在两种情况下，集合 $\mathcal{G}_D$ 的规模都相对较小，但其中的元素拥塞程度极高：其平均最短路径拥塞比 $\tau(2,\ D)$ 高出 10% 以上。

D	$\tau(2,\ D)$	$\lvert\mathcal{F}_D\rvert$	$\lvert\mathcal{U}_D\rvert$	$\lvert\mathcal{G}_D\rvert$	$\dfrac{1}{\lvert\mathcal{G}_D\rvert}\displaystyle\sum_{e\in\mathcal{G}_D} \mathrm{cong}(e)/\tau(2,D)$
9	3328	414	222	24	1.1403
10	7424	630	240	30	1.1487

表1：$D = 9,\ 10$ 时，$K(2,\ D)$ 中的无平方无边框满行边。

在测试的两种直径下，$\mathcal{F}_D$ 上的最大拥塞均由 $\mathcal{G}_D$中的边达到，而且 $\mathcal{G}_D$ 中的平均拥塞显著高于 $\mathcal{U}_D$ 或 $\mathcal{F}_D$上的平均值。这支持了一般性启发：禁止边框和强内部重复，会使测地线路径流量集中经过少数几条边。

8 开放问题

本文表明，对于足够大的出度 $d \geq 2$ 和直径 D，$K(d,\ D)$ 的某条边所承载的最短路径流量，必然超过可在常规路由完工时间 $\tau(d,\ D)$ 内调度的流量。我们的证明使用了非常特殊的边词族（循环无平方，或循环 $7/4^{+}$-自由），而第7节中的计算表明，拥塞较大的边集远大于我们所采用的集合。这里我们记录几个值得进一步研究的自然方向。

8.1 对于 $d = 2$，循环无平方边是否足够？

主要定理（定理 6.5）的证明用到了循环 α-幂自由词对 $\alpha < 2$ 的存在性。对于 $d = 2$，我们不知道还有其他方法可以完成证明；然而，正如第7节所述，我们的计算表明，循环无平方词或许已经足够。能否证明这一点？具体而言，证明对于 $d = 2$ 和所有足够大的 D，存在（甚至是每个）循环无平方边词都满足如下形式的不等式：$\Omega(e) \leq c_0 + c_1 D$，其中$c_1 < 1/8$。任何这样的界与引理 5.9 结合，都能推出对于所有足够大的 D，$\mathrm{cong}(e) > \tau(2,\ D)$。也就是说，或许无需使用 α-幂自由词就能证明主要结果，其中 $\alpha < 2$。

8.2 满行圆形无平方边

在第 7.3 节中，我们引入了距离 k 处的满行 边这一概念，尤其是在 $K(2,\ D)$ 中距离$D-2$处的情形：如果对于每个位置t，边 e 在距离 $D-2$ 处都是满行的，则 $N(e;\ D-2,\ t) = 2^{D-3}$，因而 $U_{D-2}(e) = (D-2)2^{D-3}$。对于可通过穷举搜索研究的小直径，我们观察到了一小类 $\mathcal{G}_D$ 边，其边词同时是无边界的、无平方的，并且在距离 $D-2$ 处满行；这些边的拥塞明显高于典型边。

开放问题 *1*。 对于 $d = 2$，是否存在无穷多个直径 D，使得存在一条边 $e \in E(K(2, D))$，其边词是循环无平方的，并且在距离$D-2$处满行？更广泛地说，对于固定出度 $d \geq 2$，是否存在（对于无穷多个 D） $K(d, D)$ 中的边，使其边词是循环无平方的，并且在某个较大距离 k（例如 $k = D - 2$）处满行？

8.3 高拥塞边的密度

令 $\mathcal{H}_D \subseteq E(K(d, D))$ 表示最短路径拥塞超过常规路由完工时间的边集：

$$\mathcal{H}_D = \big\{e \in E(K(d, D)) : \mathrm{cong}(e) > \tau(d, D)\big\}.$$

我们的构造给出了明确的见证 $e \in \mathcal{H}_D$，但没有说明 $\mathcal{H}_D$ 有多大。例如，即使只考虑循环无平方三元边词（嵌入到 $[d{+}1]$ 中），已知随着 D 增大，由此得到的边集在所有边中是指数稀疏的（[2, 4]）。

开放问题 *2*。 对于固定的 $d \geq 2$，渐近密度

$$\frac{|\mathcal{H}_D|}{|E(K(d, D))|}\,?$$

这个比值是否与 0（或 1）保持正距离？它是否随着 $D \to \infty$ 增大而趋于 0（或 1）？还是说它不收敛？

8.4 容量增强的最短路径

最短路径路由具有实际优势（局部性、简洁性），但如本文所示，在单位容量下，对于全互通流量，它无法达到常规路由完工时间 $\tau(d, D)$。一种自然的放宽方式是允许容量不均匀：为每条有向边 e 分配容量 $c(e) \geq 1$（每个时间步的数据包数），选择一个最短路径路由方案，并测量有效拥塞

$$\max_{e \in E(K(d,D))} \frac{f_{\mathrm{SP}}(e)}{c(e)},$$

其中，$f_{\mathrm{SP}}(e)$ 是使用 e的所选最短路径数量。人们希望将有效拥塞降低到 $\tau(d, D)$，同时仅在可忽略比例的边上增加总容量。

开放问题 *3*。 ([9]) 固定 $d \geq 2$。对于每个 D，是否存在一个子集 $S \subseteq E(K(d, D))$、边容量 $c(e) \geq 1$，使得仅对 $e \in S$有 $c(e) > 1$，并存在一个最短路径路由方案，使得

$$\max_{e} \frac{f_{\mathrm{SP}}(e)}{c(e)} \;\leq\; \tau(d, D)$$

and

$$\frac{1}{|E(K(d, D))|} \sum_{e \in S} (c(e) - 1) \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{as } D \to \infty?$$

换句话说，能否只在比例趋于零的边上“撒上一点带宽”，使某种最短路径方案对全互通流量而言可调度，且完工时间不超过常规路由完工时间？

9 结论

我们用 e表示长度为 k 且经过 e的测地线数量$U_k(e)$，从而将 $K(2,\ D)$中边 e 的最短路径拥塞 cong(e) 表示出来，并证明了一个修剪不等式：一旦 $U_D(e)$足够大，所有较短长度的总贡献就会自动变大。

为了从下方界定 $U_D(e)$，我们引入了一个基于模板的重叠见证计数方法，并根据加权重叠计数 $\Omega(e)$ 对由此产生的亏量 $\Delta(e)$进行了界定。这将 $d = 2$ 与常规路由完工时间 $\tau(2, D)$ 的比较归结为：对于某个合适的边词族，获得 $\Omega(e)$ 的一个界。我们的计算表明，对于循环无平方边词，$\Omega(e)$ 保持较小，并且对于所有测试过的直径，都满足能够迫使 cong(e) $> \tau(2, D)$（ $D > 3$）的充分不等式。然而，我们无法在一般情形下证明这一点，而是依赖于 $7/4^{+}$-幂自由词的存在性。由此可为除有限个较小直径外的所有直径证明存在高拥塞边，而这些较小直径可以通过直接计算处理。

最后，同一个见证模板框架还可扩展到 $K(d, D)$（ $d \geq 3$）：一个固定的三元边词可以嵌入大小为 d+1的字母表中，重叠模板保持不变，而补全数量则随 d变化。这给出了一个显式的边族；对于所有充分大的 D（特别是所有 $D \geq {}^{8d^2+2d-1}_{d-1}$ ），该边族的最短路径拥塞超过常规路由完工时间 $\tau(d, D)$，从而表明，在任意出度的 Kautz 有向图上，规则路由的渐近性能都优于任何最短路径路由方案。

10 致谢

我们谨此感谢 ChatGPT [11] 在生成证明思路、使我们了解有关 $7/4^{+}$-幂自由词的文献，以及撰写本文初稿方面提供的帮助。我们也感谢 Amanda Streib 提供了有益见解，帮助我们完成相关计算，以收集附录7中展示的数据。

参考文献

[1] W. H. Kautz，关于有向（$d,\ k$）图的界，细胞逻辑网络与机器理论，AFCRL-68-0668，最终报告，1968年。[2] J. D. Currie，对于所有 $n \geq 18$，都存在长度为 n 的三元循环无平方词，组合电子期刊**9**（2002），研究论文10。[3] A. M. Shur，关于三元循环无平方词，整数序列杂志**16**（2013），文章13.3.4。[4] J. D. Currie 和 J. T. Johnson，存在长度为 n、适用于 $n \neq 5$，7、9、10、14、17 的等高三元循环无平方词，应用数学进展 **121**（2020），102074。[5] M. Lothaire，词组合学，剑桥大学出版社，1997年。[6] M. Crochemore、C. Hancart 和 T. Lecroq，字符串算法，剑桥大学出版社，2007年。[7] D. Li、X. Lu 和 J. Su，Kautz 拓扑与 DHT 方案的图论分析，载于网络与并行计算（*NPC 2004*），计算机科学讲义，第3222卷，施普林格，2004年，第420–427页。[8] V. Faber 和 N. Streib，正则有向图及其线图上的网络路由，《调度学杂志》**27**（2024），第6期，557–564页。[9] Sky Faber，Kautz 网络中的容量增强的最短路径，私人通信，2025年。[10] J. D. Currie、L. Mol 和 N. Rampersad，若干小字母表上的循环重复阈值：Gorbunova 猜想的最后几个情形，组合电子期刊 **26**（2019），第2期，论文编号 #P2.31。[11] OpenAI，$ChatGPT$，https://chatgpt.com，2026年。

$d = 2$ 的拥塞与较小的 D

在表2中，我们展示了对于 $4 \leq D \leq 34$， $K(2, D)$ 中拥塞大于 $\tau(2, D)$ 的边，从而完成定理6.7 的证明。在可能的情况下，我们选择循环平方自由边作为代表。对于具有 $D \leq 15$ 的所有其他情况，所示边对于 $K(2, D)$ 具有最大拥塞。

D	e	cong(e)	$\frac{\text{cong}(e)}{\tau(2,D)}$	循环无平方
4	01210	45	1.023	
5	012102	113	1.009	✓
6	0121020	299	1.099	
7	01210201	691	1.080	✓
8	012102120	1753	1.191	
9	0120210201	3953	1.188	
10	01210212021	8559	1.153	✓
11	012010212021	18383	1.122	✓
12	0121021202102	42307	1.180	✓
13	01210201021012	96546	1.241	
14	010201210120212	197297	1.175	✓
15	0121020102120102	431623	1.197	✓
16	01210201021010212	893023	1.160	
17	012021020102120102	1984207	1.211	✓
18	0102120121021202102	4218027	1.214	✓
19	01202120121021202102	9022627	1.229	✓
20	012102120102101202102	19337955	1.250	✓
21	0120210201210212012102	39896619	1.227	✓
22	0121021202102010212010 2	84835399	1.245	✓
23	0102120102012102120121 02	173173275	1.214	✓
24	0102120210201210212012102	367958155	1.236	✓
25	0102101201020121021201 2102	764885203	1.232	✓
26	0102101202102012102120 2102	1601680339	1.240	✓
27	0120212010212021020102120102	3374890767	1.257	✓
28	0102101210201210120212012 1012	6960049727	1.250	✓
29	0102101202120102012102120 2102	14422073299	1.249	✓
30	0121020102101201021202101201021	30100578799	1.260	✓
31	012010210121021202102012102120 21	61391316303	1.243	✓
32	012021020121021201021012102120102	128665668047	1.261	✓
33	010201202120102012101202102012 1012	262444521151	1.247	✓
34	012102010210121021202102012102120 21	548535054079	1.265	✓

表2：当 D 较小时， $K(2, D)$ 中的边满足 cong(e) $> \tau(2, D)$。

表2底部所表示的图规模相当大。例如，直径为34的图有超过250亿个顶点和超过500亿条边。为了使这些计算能够完成，我们实际上从未构造过这些图。我们转而依赖引理2.2，它可以根据表示路径两端顶点的字符串来计算最短路径。

B 附录：构造循环 α 幂自由边词

本节概述一种实用的方法，用于生成定理 6.5（及其 α 次幂变体）证明中使用的边词。目标是：给定直径 D 和选定的阈值$\alpha > 1$，构造一个词

$$w = a_0 a_1 \cdots a_D \in \{0,1,2\}^{D+1}$$

使得

(i) $a_i \neq a_{i+1}$ 对所有 i 均成立（考茨约束），

(ii) w 作为线性词是 α 幂自由的，并且

(iii) w 是 循环 α 幂自由的，也就是说， w 的每个循环移位都是 α 幂自由的。

任意这样的词都可以用作 $K(2, D)$ 中一条边 e 的边词，方法是取

$$u = a_0 \cdots a_{D-1}, \qquad v = a_1 \cdots a_D.$$

α 有两种选择在本文中特别值得关注：

$$\alpha = 2 \quad \text{(square-free)}, \qquad \text{and} \qquad \alpha = \tfrac{7}{4}^{+} \quad \text{(i.e. } (7/4+\varepsilon)\text{-power-free for some fixed } \varepsilon > 0).$$

在这两种情况下，都适用相同的回溯框架；只有局部重复检测有所不同。

我们介绍一种针对 6 状态自动机的回溯过程，该自动机与 Shur [3] 的 $K(2, 2)$ 视角密切相关。

一个 6 状态自动机

由于相邻的相同字母不允许出现，词的局部状态由最后两个符号决定：

$$\Sigma = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$$

但考茨约束排除了 00，11，22，因此剩下 6 个合法状态：

$$S = \{01, 02, 10, 12, 20, 21\}.$$

我们将 S 视为有向图 G 的顶点集；当且仅当 abc 是长度为 3 的合法 Kautz 词，且满足 a、b、$c \in \{0,1,2\}$ 时，图中存在边 $ab \to bc$。

一条路径

$$s_0 \to s_1 \to \cdots \to s_{L-2}$$

在 G 中，满足 $s_i = a_i a_{i+1}$ 的路径编码了一个满足考茨约束的词 $a_0 a_1 \cdots a_{L-1}$。该词不含（循环）α-次幂的条件会对路径施加额外的禁用模式；回溯算法会对此进行约束。

在线 α-次幂检测

设 $w = a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$ 是一个部分词，并且 $\alpha > 1$ 已固定。追加字母 a_k 时，我们必须确保新词的 后缀 中不会出现 α-次幂。具体来说，我们检查词尾是否出现形如 $x^m y$ 的子词，其中 $x \neq \emptyset$、$m \geq 1$，且 y 是 x 的一个（可能为空的）前缀，并且

$$\frac{|x^m y|}{|x|} \;\geq\; \alpha.$$

等价地，记作 $|x^m y| = m|x| + |y|$，则这就是 $|y|/|x| \geq \alpha - m$。

一个简单（但有效）的暴力后缀测试是：

- 对于每个候选周期 $p = 1,\ 2,\ \ldots\ldots k$（长度为 $|x|$），
- 对于每个满足 $mp \le k+1$ 的整数 $m \ge 1$，
- 令 $L := k+1$，并令 $q := L - mp$（因此最后的 mp 个字母是一个候选 x^m）；检查最后的 mp 个字母是否由 m 个长度为 p 的块重复组成。若不是，则继续。
- 若是，则令 $0 \le \ell < p$ 为最大的前缀长度，使得最后的 $mp+\ell$ 个字母等于$x^m y$，其中 y 是 x 中长度为 ℓ 的前缀。（等价地，通过比较接下来的 ℓ 个字母来延长匹配。）
- 若 $(mp+\ell)/p \ge \alpha$，则拒绝。

对于 $\alpha = 2$，这就简化为熟悉的"平方后缀"检验（其中 $m = 2$ 和 $\ell = 0$）。对于 $\alpha = \frac{7}{4}^{+}$,可以固定一个较小的 $\varepsilon > 0$，并在不等式中使用 $\alpha = 7/4 + \varepsilon$。

实现说明。对于本文涉及的直径，上述朴素检验在实践中速度很快。如有需要，可以像 [6]中那样，使用标准字符串工具（例如边界表、前缀函数/KMP机制）来加速检查。

循环闭合检验

为了得到长度为 $D+1$ 的循环 α-幂自由词，我们回溯至长度 $D+1$，然后检验已完成的词的所有 循环旋转是否均为 α-幂自由。

给定一个 c 由在线检验生成的候选词 $w = a_0 \cdots a_D$，构造循环词

$$\widetilde{w} = a_0 a_1 \cdots a_D a_0 a_1 \cdots a_D$$

其长度为 2($D+1$)，并检查 α-幂子词 $x^m y$ 是否出现在 $\widetilde{w}$ 中，且其起始位置位于 $\{0, 1, \ldots, D\}$。这等价于要求 w 的每个循环旋转都是 α-幂自由的。

回溯算法

现在总结完整的构造。

1. 固定 $D \ge 1$，并设定 $L = D+1$ 和阈值 $\alpha > 1$。
2. 选择一个初始对 $s_0 = a_0 a_1 \in S$。
3. 递归地构造一条路径

$$s_0 \to s_1 \to \cdots \to s_{L-2}$$

在自动机 G 中，其中 $s_i = a_i a_{i+1}$，通过尝试 s_i 的所有合法后继 s_{i+1}（等价地，选择 $a_{i+1} \ne a_i$，然后由所选状态确定 a_{i+2}）。在每一步：

- 追加新字母 a_{i+2};
- 对当前前缀执行在线 α 次幂测试;
- 如果测试未通过，则回溯并尝试另一个后继节点。

4. 当路径达到长度 $L-1$（因此 $w = a_0 \cdots a_D$ 的长度为 L）时，应用循环闭合检验。如果检验通过，我们就构造出了长度为 L的循环 α-幂无平方词。如果未通过，则回溯并继续。

存在性与两种选择 $\alpha = 2$ 和 $\alpha = \frac{7}{4}^{+}$

对于 $\alpha = 2$，长度为 n 的三元循环无平方词的存在性已在 [2, 3, 4]中讨论。对于$\alpha = \frac{7}{4}^{+}$，关于循环三元 $7/4^{+}$-无平方词（等价地，对于某个固定的 $\varepsilon > 0$，循环 $(7/4 + \varepsilon)$-幂无平方词）也有存在性结果；特别是，所有足够大的长度都存在此类词（见 [10]）。

从词到边

找到一个循环 α-幂自由词 $w = a_0 a_1 \cdots a_D$后，我们可以对其进行旋转，使所得边词便于计算（例如，固定 $a_0 = 0$ 和 $a_1 = 1$）。然后定义 $u = a_0 a_1 \cdots a_{D-1}$和 $v = a_1 a_2 \cdots a_D$，并将 e: $u \to v$取作 $K(2, D)$ 中待在正文分析其拥塞情况的边。

备注

- 上文所述的回溯算法足以生成我们实际所需直径对应的示例。它还为实验探索更大 D的见证模板提供了一种方便的方法。

- 若要采用更具结构性的构造，则可以改用 [2, 3, 4] 中介绍的等长态射和“层级”构造（针对 $\alpha = 2$），以及用于避免重复阈值的类似态射构造（参见 [10] 及其中的参考文献），以构造 $\alpha = \frac{7}{4}^{+}$。