arXiv:2603.04357v1 [quant-ph] 4 Mar 2026

关于泡利信道的错误阈值一些答案与更多问题

Avantika Agarwal[1,2],Alan Bu[1,3],Amolak Ratan Kalra[1,2,4], Debbie Leung[1,4,5], Luke Schaeffer[1,2], Graeme Smith[1,6]

[1]量子计算研究所，滑铁卢大学[2]戴维·切里顿计算机科学学院，滑铁卢大学[3]物理系，哈佛大学[4]圆周理论物理研究所[5]组合与优化系，滑铁卢大学[6]应用数学系，滑铁卢大学

摘要

本文聚焦于泡利信道的错误阈值。我们利用 DiVincenzo、Shor 和 Smolin 于 1998年 开创的陪集重量枚举器解析框架，对阈值的下界进行了数值计算。具体而言，我们研究了各种小型稳定子码及其级联的潜在非可加性，并报告了若干长度较短、表现出显著非可加性的新级联稳定子码。我们还给出了级联相位翻转和比特翻转重复码的陪集重量枚举器的闭式表达式。借助这一形式体系中的洞见，我们估计了大长度级联重复码的阈值。最后，对于若干小型稳定子码的级联，我们针对在相应信道的哈希点处导致最大非可加性的信道进行了优化。我们还从非可加性和阈值问题的角度，讨论了各种稳定子码的性能，以补充这些结果。我们报告了正面和负面的结果，并强调了一些反直觉的观察，以支持后续关于错误阈值下界的研究。

1 引言

1948年，香农在其具有里程碑意义的论文中 [Shannon48] 根据输入与输出之间的互信息（在输入分布上取最大值），推导出了任意噪声通信信道的信道容量公式。为此，他证明了这一优化表达式是信道容量的上界，并且利用随机码可以达到这一码率。此外，当在两个并行使用的信道上对这一优化表达式求值时，其联合最大值恰好是各自最大值之和；相应地，这一优化问题被称为具有一种名为可加性的性质。香农的工作确立了二元对称信道的信道容量为 $1 - h$ 其中， h 是错误概率的二元熵。

量子版的信道容量问题要复杂得多。其复杂性在量子比特退极化信道上已充分显现，该信道是二元对称信道的推广。在 [BDSW96], 随机稳定子码[1] [Got96] 被发现可达到码率 $1 - h'$ 其中h' 是泡利错误的熵。此外，该码率也与量子汉明界给出的上界相匹配 [Got96] 该上界针对使用非简并码纠正典型错误的情形。因此，人们或许会认为这一结果为退极化信道的信道容量提供了恰当的量子推广。然而，当 [SS96]的作者指出，可以先对噪声信道应用一个小型简并码，再与随机稳定子码级联，从而超越随机码时，这着实令人惊讶。此外，他们还证明，当 h' 略高于 1 时，这种方法可以达到正码率。因此，量子容量并非总能由随机码达到。

在 [SS96] 中提出的新型编码技术，在 [DSS98] 中得到进一步发展；与此同时，一系列研究 [Sch96; SN96; Llo97; Cer98; BNS98; BKN00] 深入阐明了任意含噪量子信道的量子容量，并最终促成了量子信道容量定理 [Llo97; Sho02; Dev05] 。该定理给出的量子信道容量表达式基于信道输出的相干信息，并对所有输入态取最大值。然而，与经典情形不同，最大化后的相干信息并不具有可加性，因此我们需要对信道的多次使用 (n) 联合最大化相干信息，再除以 n ，以得到容量表达式。这个过程称为正则化，它使得大多数量子信道的容量无法写成封闭形式。此外，目前没有已知的一般算法可以判断给定信道的量子容量是零还是正值，我们甚至不知道正则化 [Cub+15] 的值 n 存在什么上界。

利用容量公式，先前的结果 [SS96; DSS98] 可被解释为展现相干信息非可加性的编码示例。此外，自 [SS07; SY08; SSW08; FW08; SSY11; BOS12; Cub+15; Jac17; LLS18;BL20; BL21; LLSSS23; BL25]以来，已证明了多种此类非可加性结果。然而，它们更像是量子非可加性效应的杂集，只提供线索，而并未形成关于哪些量子纠错码能够达到信道容量的理论。更令人惊讶的是，尽管有这些结果，我们仍然不知道许多自然量子信道（例如退极化信道）具有正信道容量的最大错误率。该问题有时被称为信道容量中的“阈值问题”。

[1]参考文献 [BDSW96] 建立了纠缠纯化与量子纠错之间的等价关系。本文始终采用后者的框架。BDSW96] 中用于纠缠纯化的随机哈希方法，随后被转化为一种随机量子纠错码，通常称为随机稳定子码 [Got96]。

鉴于容量公式及其对错误率的连续性，寻找更好的阈值下界归结为寻找展现显著非可加性的编码。本文利用陪集重量枚举器 [DSS98]的框架，研究泡利信道的非可加性与阈值问题（定义见下一节）。

1.1 既有研究

这一问题此前已在多项研究中得到探讨。本节将回顾这些结果，并概述目前对该问题的认识。

全文中，概率向量 $(p_I,\ p_X,\ p_Y,\ p_Z)$ 与混合泡利信道$\mathcal{N}(\rho)\ =\ p_I\rho + p_X X\rho X + p_Y Y\rho Y + p_Z Z\rho Z$相关联，其中 $X,\ Y,\ Z$是量子比特泡利算符。该概率向量的熵也称为信道熵。

1996年，Bennett、DiVincenzo、Smolin 和 Wootters [BDSW96]证明，使用随机稳定子码（等价于对 EPR 对进行随机哈希）可以达到 1 减去信道熵的码率，因此只要信道熵小于 1，信道容量就为正。对于 $(1-3p,p,p,p)$ 退极化信道，这意味着信道容量在 $p\ =\ 0.063096$ 以内非零。与此同时，Shor 和 Smolin [SS96] 证明，使用 5量子比特相位翻转重复码进行编码（再与随机稳定子码级联），可使码率在 $p = 0.063466$ 以内为正。1998年，DiVincenzo、Shor 和 Smolin [DSS98], 进一步改进了这一结果： 5×5 级联比特与相位翻转重复码可使码率在 $p\ =\ 0.06352$ 以内为正。（ $k\times l$ 级联比特与相位翻转重复码首先将逻辑量子比特编码到一个 l 量子比特相位翻转重复码中，然后将其中每个 l 量子比特分别编码到一个 k 量子比特比特翻转重复码中，再通过噪声信道传输每个lk 量子比特。） [DSS98] 中的编码首先用随机稳定子码对逻辑量子比特进行编码，然后再用 $k\times l$ 重复码对随机码中的每个量子比特进行编码。为避免行文冗长，我们大多时候省略与随机稳定子码级联这一环节，但要达到相应码率，始终需要这一步。2007年，Smith 和 Smolin [SS07] 基于重复码简并性的思想进一步推进了分析；他们提出的5×16 级联相位与比特翻转重复码使码率在改进后的$p = 0.063626$以内为正。作者还开始研究其他相关泡利信道的阈值问题，例如错误概率为 $((1-p)^2,p(1-p)\ p^2,p(1-p)$ 的独立 X-Z 信道，以及错误概率为 $(1-2p,p,0,p)$ 的 2-Pauli 信道。

2008年，Fern 和 Whaley [FW08] 改进了上述三种泡利信道的错误阈值下界。他们的蒙特卡洛数值方法适用于由小型编码构成、码长极大的多级级联。具体而言，他们发现，在随机稳定子码与级联比特与相位翻转重复码之间加入若干级距离为 3 的五量子比特码的自级联后，对于退极化信道，正码率可达到 $p\ =\ 0.063766$ ；对于 2-Pauli 信道，正码率可达到 $p = 0.11398$ ；对于独立 X-Z 信道，正码率可达到 $p = 0.11277$ 。值得注意的是，这些编码将单个量子比特编码为 $\sim5^{10}$ 个量子比特。如果仅考虑级联重复码，表现最佳的编码包括：用于退极化信道的 5×51 重复码（正码率可达到 $p = 0.0637338273$）、用于 2-Pauli 信道的 5×74 重复码（正码率可达到 $p\ =\ 0.1139425214$），以及用于独立 X-Z 信道的 5×77 重复码（正码率可达到 $p = 0.1127458434$）。

最近， [BL25] 采用置换不变码研究了阈值问题。

这些码改进了 2-Pauli 信道和独立 X-Z 信道阈值的下界，最优码长分别为 $n = 24$ 和 $n = 18$ 。这些并非稳定子码，而码的对称性使得对中等码长的分析成为可能。这些码并未改进退极化信道阈值的下界。尽管已有上述结果以及一些较新的研究 [FSJCF25；BL21；BL20], 但对于哪些量子码最有可能进一步提高阈值下界，目前仍缺乏深入理解。

1.2 我们的结果

我们研究长级联重复码以及若干小型稳定子码及其级联的阈值和非可加性。我们还针对能够产生最大相干信息的泡利信道进行优化。具体而言，我们得到以下结果：

- 我们对若干小型稳定子码（见表1、7）和级联稳定子码（见表2、3、4、5、8）进行了搜索，发现了若干新编码，它们在退极化信道和独立 X-Z 信道上的表现都优于随机稳定子码。我们研究的编码包括重复码的级联、 $[[4, 2, 2]]$ 编码、5量子比特码、7量子比特码、 $[[8, 2, 2]]$环面码、 [CV20]中提出的用于偏置错误的 9 量子比特码，以及 [FSJCF25]提出的全息码。我们使用的所有稳定子码列表见附录A，其中还列出了它们的生成元和逻辑算子。

- 我们发现，将 5 重复码与偏置 9 量子比特码级联可获得更好的阈值[2] 优于仅使用单层 5 重复码，对退极化信道和独立 X-Z 信道均如此（见表2、8）。

- 我们发现，将重复码与全息码级联通常可提高阈值，对退极化信道和独立 X-Z 信道均如此（见表 3、8）。请注意，5量子比特码也是全息码的一个例子 [PYHP15] ，将重复码与其多层级联可在退极化信道上获得最佳阈值[FW08]。

- 我们估计了长度高达 15 $\times$7000 的长重复码级联在全部三种泡利信道上的阈值（见图 6、8 和 10）。这是一个比以往探索显著更大的搜索空间。我们发现，增加第一个重复码的长度通常会导致更差的阈值。增加第二个重复码的长度会在达到某一长度前改善阈值，随后变差；这一规律此前已在短长度重复码中观察到。然而，长级联重复码是我们所能找到的、在 2-Pauli 信道上优于哈希的唯一例子。

- 使这种搜索成为可能的主要结果，是采用 [DSS98]在这一研究背景下首次提出的陪集重量枚举器框架。我们还在第3节给出了级联重复码的陪集重量枚举器的闭式表达。

- 为进一步理解能够提高阈值的级联结构，我们研究了不同级联码组合的表现。特别是，我们发现，3 层重复码的效果不如单层重复码（如表 4 所示）。因此，继续级联重复码不应带来更高的阈值。在将重复码与 5量子比特码级联的特定

[2]对于固定的信道，每种编码与随机稳定子码级联后，在某个噪声参数范围内都能达到正码率。码率恰好降为零时的噪声水平称为该编码的阈值。这是该信道阈值噪声水平的一个下界。

情况下，我们发现，将 5量子比特码置于中间层比置于末端能获得更高的阈值。最后，我们发现，对于 $n \leq 7$，当将重复码与置换码级联时，对于退极化信道，最佳的置换码本身就是重复码。

- 对于若干级联稳定子码，我们固定编码并改变底层泡利信道，寻找在相应哈希点（随机稳定子码的码率为零时）使相干信息达到最大的信道。需要注意的是，相干信息也量化了所表现出的非可加性程度。（见表 10和 11）。我们发现，即使经过优化，有些码仍未表现出非可加性。大多数码在偏置程度很高的泡利信道上表现出最高的相干信息，少数码则在两种错误的概率大致相等的信道上表现出最高的相干信息。从存在偏置噪声时的量子纠错角度来看，这些结果也具有独立的研究价值。

- 如果有两个码 C1 和 C2，且 C1 的阈值优于 C2，那么当 C1 和 C2 分别与第三个码 C3 级联时，其性能排序未必保持不变。特别是，以下情况是可能的：

$$\text{threshold}(C_1) > \text{threshold}(C_2), \text{但 } \exists\, C_3 \text{ 使得 } \text{threshold}(C_1 \times C_3) < \text{threshold}(C_2 \times C_3)$$

例如，当 C1 为 7 重复码、C2 为 3 重复码且 C3 为 7 重复码时，我们确实会看到这种性能反转。这一神秘现象大大复杂化了我们的研究，因为这意味着我们无法逐层优化编码。

注： 所有编码、图 6、图 8 和图 10 的交互式绘图，以及包含所有数据的电子表格，均可在 GitHub [ABK26]上获取。我们使用的所有稳定子码列表见附录A ，其中还列出了它们的生成元和逻辑算子。全文中的表格均按阈值降序排列。

1.3 一些经验

在本小节中，我们重点介绍一些从结果中观察到的违反直觉的现象，这些现象揭示了寻找具有更高阈值的编码所面临的障碍。我们将在展示相应数值结果时对其进行详细讨论。

- **简并性优于距离。** 每个具有非平凡距离的编码（例如 5量子比特码和 7量子比特码）在作为单层使用时，其阈值都比单独使用随机稳定子码更差。即使在第二层将它们与重复码进行级联，这一结论仍然成立。这一观察结果完全违背了这样一个事实：距离大致是可纠错错误数量的两倍；同时也挑战了我们的直觉，即噪声信道编码是纠错的一种具体应用。在达到级联码的更高层级之前，熵减似乎主导着阈值问题，而不是对错误进行充分纠正。

- **定制编码很有帮助。**将重复码与针对偏置程度很高的泡利信道错误而定制的编码进行级联，可以提高阈值。因此，将第二层的编码定制为针对第一层典型的有效信道，或许是个不错的策略。

• **层数太多？并非越多越好！**鉴于短码长的级联比特翻转与相位翻转重复码在阈值问题上取得了成功，人们或许会认为，交替使用这两种重复码构建多层结构是个好策略，但我们的发现恰恰相反。使用三层或更多层重复码得到的阈值比单层还差！三层结构的表现也不如将中间层替换为5量子比特码。

• **长重复码会惨遭失败。** 随着级联重复码长度增加，整体阈值会变差。在固定第一个重复码后，增加第二个重复码的长度，阈值会先改善到某个长度，随后又开始变差。直观地说，一类错误的纠错能力增强，是以另一类错误传播得更广为代价的，但我们尚未从操作层面理解这些最优码长。

• **多样性或许是关键！** 另一个颇具吸引力的想法是，采用 5×51 比特翻转和相位翻转重复码，再级联第三个重复码，以找到可能非常非常长的最优码长，从而达到相应的阈值。但我们发现，只使用最多两层短重复码和其他一些编码，就能获得很好的阈值；这种方案在实践中效率更高，也更易于分析。

• **置换不变码与稳定子码。** 在[BL25] 中，置换不变码对 2-Pauli 信道和独立 X-Z 信道阈值的改善情况非常相似，但对退极化信道则并非如此。与此同时，我们研究的级联稳定子码对退极化信道和独立 X-Z 信道阈值的改善情况非常相似，而 2-Pauli 信道的阈值对这些编码的反应则截然不同。总之，对于 2-Pauli 信道，置换不变码表现出色，而稳定子码表现不佳。对于独立 X-Z 信道，稳定子码和置换不变码都表现出色。对于退极化信道，稳定子码表现出色。

• **最佳的小型置换不变码 = 是重复码。** 将重复码与用于退极化信道的置换不变码级联后，我们发现，对于较短的码长，最佳的置换不变码是重复码。

•**非可加性无处不在！** 我们发现，非可加性是一种相当普遍的现象：对于大多数稳定子码，都存在一种泡利信道，使得该编码表现出非可加性。

2 预备知识

2.1 设置与构造

本节回顾 [DSS98]用于计算退极化信道错误阈值下界的设置（见图1）。Bennett、DiVincenzo、Smolin 和 Wootters 在 [BDSW96]中，首次使用 n 量子比特上的随机稳定子码（带有$n-k$ 随机稳定子生成元），给出了错误阈值的下界，其中 n 是退极化信道的使用次数。具体而言，他们证明，随机稳定子码的选取以高概率满足：每次综合征测量都会使系统的熵减少 1 比特。由于退极化信道大约有$2^{n\mathsf{H}(1-3p,p,p,p)}$ 种典型泡利错误，因此可以通过 $\approx n\mathsf{H}(1-3p,\ p,\ p,\ p)$ 次综合征测量识别并纠正泡利错误。这里，H 是熵函数。

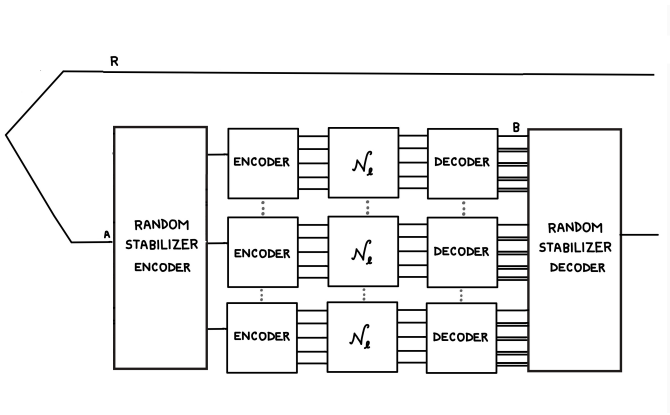

图 1：信道容量设置示意图 [DSS98]。首先使用随机稳定子码对输入进行编码，然后使用码 C 对每个输出量子比特进一步编码。最终的编码量子比特通过信道 $\mathcal{N}_l = \mathcal{N}^{\otimes l}$。随后，解码器先对码 C 执行综合征测量，再对随机稳定子码执行综合征测量。

因此，码率 $1 - \mathrm{H}(1-3p,\ p,\ p,\ p)$ 是可实现的，而错误阈值 p^* 是使 $\mathrm{H}(1-3p,\ p,\ p,\ p) = 1$ 的 p值，约为 $p^* = 0.063096$。
然而， [SS96；DSS98] 表明，在更高错误率下也有可能实现正码率。他们使用五量子比特重复码对随机稳定子码中的每个 n 量子比特进一步编码，然后将所得的 $5n$ 编码量子比特通过退极化信道，从而在错误率最高达到 $p = 0.063466$ 时仍获得正码率。之后，电路测量每个五量子比特重复码的综合征，以恢复 n 量子比特。完成这些 $n-k$ 测量后，再对随机稳定子码的稳定子生成元进行测量，以识别错误并将其纠正。电路示意见图 1 。最后， [SS96；DSS98] 给出了用系统的冯·诺依曼熵表示码率的公式 RB。

$$Q = \frac{1}{l}(1 - S_{RB}) \tag{1}$$

其中 l 是用于编码该态的编码长度，本例中为 5。

记号。 我们采用以下记号约定来指代级联码（见图2 中的电路）：

1. 我们使用记号 Code $A \times$ Code B 表示以下级联顺序：首先使用 Code B对状态进行编码，然后使用 Code A对输出量子比特进行编码。随后将所得量子比特传入信道。信道作用后，先对 Code A 进行综合征测量，再对 Code B 进行综合征测量，最后对剩余量子比特执行随机哈希。2. 换言之，我们使用“Code A 与 Code B级联”这一记法，表示上述级联顺序。3. 我们使用“第一”层指代上述级联顺序中的 Code A ，使用“第二”层指代 Code B。

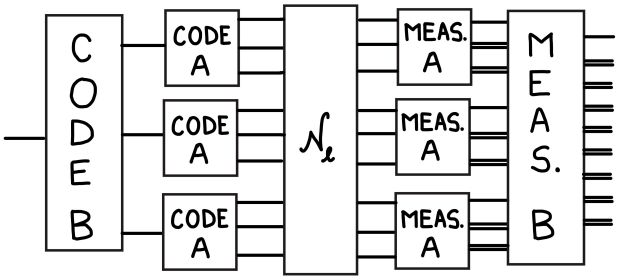

图2：码串接顺序

2.2 重量枚举式回顾

本节将介绍如何利用陪集重量枚举器框架，计算编码态通过退极化信道传输后的熵 [DSS98], ，进而计算错误阈值。重量枚举多项式此前已多次用于量子纠错和量子信息论，参见[CRSS98; Rai02b; Rai02a; Rai99; DSS98; Got24; KP25]。我们首先回顾稳定子码的重量枚举式定义。请注意，在接下来的讨论中，我们只考虑不带相位的泡利群。

定义2.1（重量枚举式 [Got24]）。一个 $[[n,k,d]]$ 量子稳定子码（其稳定子集合为 S）的重量枚举式是齐次多项式 $W(x,\ y)$，次数为 n，定义如下：

$$W(x,y) = \sum_{M\in S} x^{n-\mathsf{wt}(M)} y^{\mathsf{wt}(M)} \tag{2}$$

这里wt(M)是 M中非恒等泡利算符的个数。特别地，$x^{n-k}y^k$ 的系数是重量为 k的稳定子的个数。

注意，若我们将 $W(x,\ y)$ 在 $x=1-3p,\ y=p$处求值，便得到 $(1-3p,\ p,\ p,\ p)$ 退极化信道施加错误 $M\in S$ [SL97]的概率。我们还可以定义类似的齐次多项式，用以刻画任意子集 $T\subseteq E$ 中、作用于 n个量子比特上的泡利错误的重量分布，如下：

$$P_T(x,y) = \sum_{M\in T} x^{n-\mathsf{wt}(M)} y^{\mathsf{wt}(M)} \tag{3}$$

我们可以利用这类多项式计算用于求解方程1中熵的不同概率。特别地，对于任意两个泡利错误 M_1 和 M_2，它们的症状相同，当且仅当$M_1^\dagger M_2 \in N(S)$。这意味着每个症状 s都对应于 $E/N(S$中的一个不同陪集。对于某个特定的陪集代表元 $M\in E$，我们将相应的正规化子陪集记为 $[M]_{N(S)}$。那么，观测到相应症状 s_M的概率等于 $P_{[M]_{N(S)}}(1-3p,\ p)$。

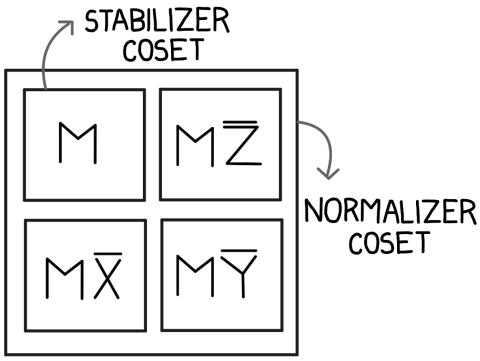

图 3：由稳定子陪集划分的正规化子陪集

此外，对于任意两个错误 M_1、M_2，输出态相同，当且仅当 $M_1^\dagger M_2 \in S$。因此，可以用 E/S 中互不相同的陪集来刻画输出态。对于某个特定的陪集代表元$M \in E$，我们将相应的稳定子陪集记为 $[M]_S$。注意，$[M]_{N(S)} = [M]_S \sqcup [MZ]_S \sqcup [MX]_S \sqcup [MY]_S$，其中四个稳定子陪集将正规化子陪集划分为四个部分，而 X、Y、Z表示逻辑 X、Y、Z算符（见图 3）。此外，对于来自不同划分的任意错误 M_1、M_2，所得状态彼此正交，因为 $\langle\Phi|I \otimes (M_1^\dagger M_2)|\Phi\rangle = 0$。因此，我们可以通过计算退极化信道对 $[M]_{N(S)}$ 的不同划分施加错误的条件概率的香农熵，来计算由症状 s_M 产生的状态的冯·诺依曼熵。退极化信道对某个特定划分 $[M]_S$施加错误的概率为 $P_{[M]_S}(1-3p, p)$。

对于某个正规化子陪集 $T \in E/N(S)$，假设我们选取一个陪集代表元 M_T。那么，我们将稳定子陪集 $[M_T]_S$、$[M_T Z]_S$、$[M_T X]_S$、$[M_T Y]_S$分别记为 T_I、T_Z、T_X、T_Y。然后，我们可以使用重量枚举式，通过以下表达式，利用公式 S_{RB} 1计算熵：

$$\sum_{T \in E/N(S)} P_T(1-3p,p) H\left(\frac{P_{T_I}(1-3p,p)}{P_T(1-3p,p)}, \frac{P_{T_X}(1-3p,p)}{P_T(1-3p,p)}, \frac{P_{T_Y}(1-3p,p)}{P_T(1-3p,p)}, \frac{P_{T_Z}(1-3p,p)}{P_T(1-3p,p)}\right) \tag{4}$$

为了研究具有独立 X 和 Z 噪声的信道的阈值概率，其中 X 和 Z 错误分别以概率 p 独立发生，我们需要区分错误的X、Y、Z 分量，因为它们以不同的概率发生。完全重量枚举式是实现这一点的有用工具，也是编码理论中的一种知名工具 [MS77]。

定义 2.2（完全重量枚举式）。对于 $T \subseteq E$量子比特上的泡利错误子集，其完全重量枚举式是一个齐次多项式 $W(i, x, y, z)$，次数为 n，定义如下：

$$W(i,x,y,z) = \sum_{M \in T} i^{\mathrm{wt}_I(M)} x^{\mathrm{wt}_X(M)} y^{\mathrm{wt}_Y(M)} z^{\mathrm{wt}_Z(M)} \tag{5}$$

这里，$\mathrm{wt}_O(M)$表示泡利算符 O 在 M中出现的次数。特别地，$i^a x^b y^c z^d$ 的系数表示 T 中的错误数，其中 I 作用于 a 个量子比特，X 作用于 b 个量子比特，Y 作用于 c个量子比特，且 Z 作用于 d 个量子比特。

3 重复码的重量枚举器

本节将给出重复码和级联重复码的陪集重量枚举器的闭式表达式。我们首先介绍长度为 n的重复码的重量枚举器。这些表达式也曾在 [DSS98], 中计算过，不过他们采用了不同的方法：先考察测得的症状中非零比特的数量，再计算相应陪集的概率。我们的方法有一个优点，即易于推广到级联重复码；此外，我们计算出的表达式稍后也会作为级联重复码的一个特例推导出来。我们考虑 $[[n,1]]$ 具有 Z型稳定子的重复码。

$[[n,1]]$ 重复码的稳定子集合由集合 $\{Z^{\otimes 2}\otimes I^{\otimes n-2}, I\otimes Z^{\otimes 2}\otimes I^{\otimes n-3}, \ldots, I^{\otimes k}\otimes Z^{\otimes 2}\otimes I^{n-2-k}, \ldots, I^{\otimes n-2}\otimes Z^{\otimes 2}\}$生成，因此等于所有满足 $\mathrm{wt}(Z) = 0 \bmod 2$ 且 $\mathrm{wt}(X) = \mathrm{wt}(Y) = 0$ 的泡利串所构成的集合。我们为逻辑 Z, X, Y 操作分别选取代表元$Z\otimes I^{\otimes n-1}, X^{\otimes n}, Y\otimes X^{\otimes n-1}$ 和 Z, X, Y。我们还将使用以下函数来简洁地表示重量枚举式:

$$f_n^e(x,y) = \frac{(x+y)^n + (x-y)^n}{2}$$
$$f_n^o(x,y) = \frac{(x+y)^n - (x-y)^n}{2}$$
$$g_{k,n}(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^{n-k}(2y)^k$$

这里， $f_n^e(x,y)$ $f_n^o(x,y)$分别是所有偶重量和奇重量二进制串集合的重量枚举式。多项式$g_{k,n}(x,y)$是四元串的重量枚举式（例如符号a,b,c,d），其中 a 的重量为 0，其余三个的重量为 1。项$(x+y)^{n-k}$是某些 $n-k$ 个索引上的所有 a,b 字符串集合的重量枚举式。项 1 2$(2y)^k$ 是某些 k 个索引上的所有满足 $\mathrm{wt}(c) = 0 \bmod 2$（或 $\mathrm{wt}(c) = 1 \bmod 2$）的 c,d 字符串集合的重量枚举式。现在，我们可以计算 E/S中各陪集的重量枚举式。在接下来的分析中，对于泡利串 $M\in E$，我们将讨论 $\mathrm{wt}_X(M)$ 和 $\mathrm{wt}_Z(M)$，其中 $\mathrm{wt}_X(M)$ 分别表示 M中 X和 Y的数量，而 $\mathrm{wt}_Z(M)$ 分别表示 M中 Z和 Y的数量。这里要指出的是，这种记号不同于第 2.2 节中使用的记号，本文不会使用后者。注意，对于任意泡利串 $M\in E$，它都等价于一个模稳定子相差的字符串 M'，满足 $\mathrm{wt}_Z(M') = \mathrm{wt}_Z(M) \bmod 2$，且 $\mathrm{wt}_X(M') = \mathrm{wt}_X(M)$，其中 Z重量取自第一个量子比特，因此我们现在只考虑这种形式的陪集代表元 M。给定一个代表字符串 M，使得 $\mathrm{wt}_X(M) = k$且 $\mathrm{wt}_Z(M) = b$（其中 $b\in\{0,1\}$），陪集$[M]_S$ 的重量枚举式将具有以下形式:

- 情形 1：$(b=0, k=0)$这是当 $M = I^{\otimes n}$ 时的情形，我们要计算稳定子的重量枚举式，该稳定子由所有偶数 Z重量的 $\{I,Z\}$ 字符串组成。由此得到表达式

$$P_{[I^{\otimes n}]_S}(x,y) = f_n^e(x,y).$$

- 情形 2：$(b=1, k=0)$ 这是 $M = Z\otimes I^{\otimes n-1}$ 时的情形，我们想要计算 $[M]_S$ 的重量枚举式，它由所有奇数 Z-重量的 $\{I,Z\}$ 字符串组成。由此得到表达式

$$P_{[Z\otimes I^{\otimes n-1}]_S}(x,y) = f_n^o(x,y).$$

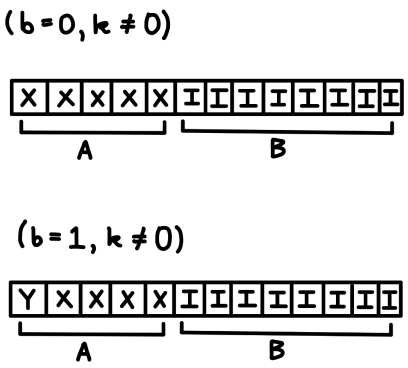

图4：情形3和情形4的图示

• 情形 3（参见图 4）：（$b=0,\ k\neq 0$）我们要将 M 与所有偶数重量的 $\{I,Z\}$ 字符串相乘。有两种可能：稳定子在两个区域中都具有奇数 Z-重量A，且 B 或在两个区域中都具有偶数 Z-重量。在区域 A 中，重量始终为 k，因为将 Z 相乘会把 X 转换为 Y。由此得到表达式

$$\begin{aligned}P_{[M]_S}(x,y) &= f^e_{n-k}(x,y)2^{k-1}y^k + f^o_{n-k}(x,y)2^{k-1}y^k\\ &= \frac{1}{2}(2y)^k(f^e_{n-k}(x,y)+f^o_{n-k}(x,y))\\ &= \frac{1}{2}(x+y)^{n-k}(2y)^k\\ &= g_{k,n}(x,y).\end{aligned}$$

• 情形4（见图4）：$(b=1,k\neq 0)$我们希望将 M与所有偶重量的 $\{I,Z\}$ 字符串相乘。等价地，可以考虑字符串 M'，它与 M 是同一字符串，但不含 Z，并将其与所有奇重量的 $\{I,Z\}$ 字符串相乘。有两种可能：要么区域 A 中为奇 Z重量且区域 B中为偶 Z重量，要么区域 A 中为偶 Z 重量且区域 B中为奇 Z重量。在区域 A中，重量始终为 k，因为 Z 的乘法会将 X 转换为 Y。由此得到如下表达式

$$\begin{aligned}P_{[M]_S}(x,y) &= f^e_{n-k}(x,y)2^{k-1}y^k + f^o_{n-k}(x,y)2^{k-1}y^k\\ &= \frac{1}{2}(2y)^k(f^e_{n-k}(x,y)+f^o_{n-k}(x,y))\\ &= \frac{1}{2}(x+y)^{n-k}(2y)^k\\ &= g_{k,n}(x,y).\end{aligned}$$

注意，对于 M 中 X 的 k 个可能位置，每种情况出现的频率均为 $\binom{n}{k}$。为了计算正规化子陪集 $E/N(S)$ 的重量枚举式，我们可以将相关稳定子陪集的重量枚举式相加。特别地，$[M]_{N(S)} = [M]_S \sqcup [MZ]_S \sqcup [MX]_S \sqcup [MY]_S$。如果 M 满足 $\mathrm{wt}_Z(M) = b$，$\mathrm{wt}_X(M) = k$，那么利用我们为 Z，X，Y 选择的代表元，我们总能为陪集 $[MO]_S$ 选取一个代表元 M_O，使得 $O \in \{X,Y,Z\}$

满足以下条件：

$$\begin{aligned} &\mathsf{wt}_Z(M_Z) = 1-b && \mathsf{wt}_X(M_Z) = k \\ &\mathsf{wt}_Z(M_X) = b && \mathsf{wt}_X(M_X) = n-k \\ &\mathsf{wt}_Z(M_Y) = 1-b && \mathsf{wt}_X(M_Y) = n-k \end{aligned}$$

因此， $[M]_{N(S)}$ 的重量枚举式可以通过将上述陪集的重量枚举式相加得到：

$$P_{[M]_{N(S)}}(x,y) = 2(g_{k,n}(x,y) + g_{n-k,n}(x,y))$$

这里我们利用了如下事实：当 $k=0$ 时， $f_n^e(x,y) + f_n^o(x,y) = 2g_{0,n}(x,y)$。我们只考虑 $b=0$ 的情形，因为此时 $\mathsf{wt}_Z(M_Z)=1$，且 M_Z没有单独的陪集。因此，对于 M 中 X 的 k 个可能位置的选择，这种情形出现的频率为 $\binom{n}{k}$。此外，我们现在只考虑 $k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，因为 $\mathsf{wt}_X(M_X) = n-k$，所以 M_X没有单独的陪集。进一步地，如果 n 为偶数，那么当 $k=n/2$ 时，我们只计入 $\binom{n}{k}$ 种选择中的一半，因为对于每个这样的 M，都会有一个对应的 M_X，使得 $\mathsf{wt}_X(M_X) = n/2$，而它没有单独的陪集。以上讨论可总结为以下关于陪集重量枚举式闭式表达的定理：

定理 3.1。考虑一个具有 Z 型稳定子的 $[[n,1]]$ 重复码。设 $M = X^{\otimes k} \otimes I^{\otimes(n-k)}$ 是作用于 n 个量子比特上的泡利错误。M 的稳定子陪集和正规化子陪集重量枚举器为：

$$\begin{aligned} P_{[M]_S}(x,y) &= \begin{cases} f_n^e(x,y) & if\ M = I^{\otimes n} \\ g_{k,n}(x,y) & otherwise \end{cases} \\ P_{[M\overline{Z}]_S}(x,y) &= \begin{cases} f_n^o(x,y) & if\ M = I^{\otimes n} \\ g_{k,n}(x,y) & otherwise \end{cases} \\ P_{[M\overline{X}]_S}(x,y) &= g_{n-k,n}(x,y) \\ P_{[M\overline{Y}]_S}(x,y) &= g_{n-k,n}(x,y) \\ P_{[M]_{N(S)}}(x,y) &= 2(g_{k,n}(x,y) + g_{n-k,n}(x,y)) \end{aligned}$$

其中 $[M]_S$ d 表示 M 的稳定子陪集，而 $[M]_{N(S)}$ 表示 M 的正规化子陪集 .

3.1 级联重复码的重量枚举器

本节将介绍级联重复码的稳定子陪集的重量枚举式。我们首先使用具有 Z 型稳定子生成元 S_Z 的 $[[m,1]]$ 重复码对状态进行编码，然后使用具有 X 型稳定子生成元 S_X 的 $[[n,1]]$ 重复码对每个输出量子比特进行编码，从而得到级联 $[[mn,1]]$ 码 C。我们将 mn 个量子比特视为 m 个块，每块包含 n 个量子比特（其中第 i^{th} 个块称为 M_i），参见图5。我们选取 $Z_m = Z \otimes I^{\otimes m-1}$、$X_m = X^{\otimes m}$、$Y_m = Y \otimes X^{\otimes m-1}$ 作为 $[[m,1]]$ 重复码逻辑操作的代表元，并选取 $Z_n = Z^{\otimes n}$、$X_n = X \otimes I^{\otimes n-1}$、$Y_n = Y \otimes Z^{\otimes n-1}$ 作为 $[[n,1]]$ 重复码逻辑操作的代表元。给定集合 T 和泡利串 P，我们用记号 $T \otimes P$ 表示集合

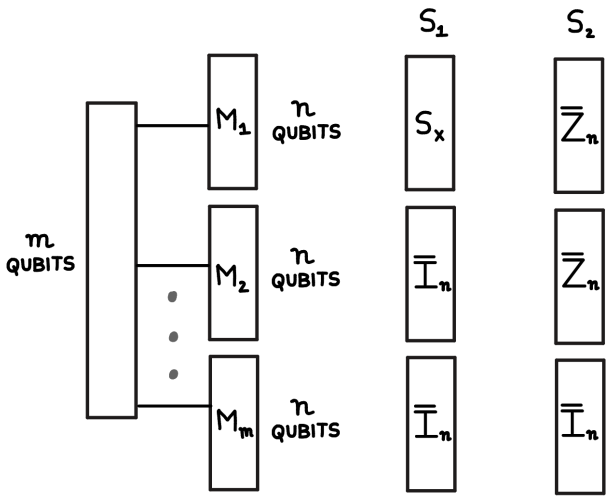

图5：级联重复码中编码量子比特的划分。

$T' := \{M \otimes P | M \in T\}$。给定两个集合 $S_1, S_2 \subseteq E$，我们定义集合 $S_1 \cdot S_2 := \{s_1 \cdot s_2 | s_i \in S_i\} \subseteq E$。由此得到的稳定子集合 S 以及 C 逻辑操作的代表元如下：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \langle S_X \otimes \overline{I}_n^{\otimes m-1}, \overline{I}_n \otimes S_X \otimes \overline{I}_n^{\otimes m-2}, \ldots, \overline{I}_n^{\otimes m-1} \otimes S_X \rangle \\
S_2 &= \langle \overline{Z}_n^{\otimes 2} \otimes \overline{I}_n^{\otimes m-2}, \overline{I}_n \otimes \overline{Z}_n^{\otimes 2} \otimes \overline{I}_n^{\otimes m-3}, \ldots, \overline{I}_n^{\otimes m-2} \otimes \overline{Z}_n^{\otimes 2} \rangle \\
S &= S_1 \cdot S_2 \\
\overline{Z} &= \overline{Z}_n \otimes \overline{I}_n^{\otimes m-1} \\
\overline{X} &= (X \otimes I^{\otimes n-1})^{\otimes m} \\
\overline{Y} &= (Y \otimes Z^{\otimes n-1}) \otimes (X \otimes I^{\otimes n-1})^{\otimes m-1}
\end{aligned}
$$

请注意，S_1 由所有这样的字符串组成：在每个量子比特块中，都有一个（可能彼此不同的）S_X元素作用于其中；而 S_2 由这样的字符串组成：$Z^{\otimes n}$ 作用于偶数个量子比特块，$I^{\otimes n}$ 作用于其余量子比特块。我们将 S_1, S_2中选取的每一对字符串相乘，以得到稳定子集合。我们将使用以下函数简洁地表示重量枚举式：

$$
\begin{aligned}
F_n^e(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i) + \prod_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\right] \\
F_n^o(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i) - \prod_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\right] \\
h_{k,n}^b(x, y) &= \begin{cases} f_n^e(x, y) & \text{if } k = 0, b = 0 \\ f_n^o(x, y) & \text{if } k = 0, b = 1 \\ g_{k,n}(x, y) & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

这里，$F_n^e(\vec{x}, \vec{y})$ $F_n^o(\vec{x}, \vec{y})$ 将向量值变量 $\vec{x}, \vec{y}$作为输入，每个变量的长度为 n。多项式$F_n^e(\vec{x}, \vec{y})$ ($F_n^o(\vec{x}, \vec{y})$)包含对每个 i 选择 x_i 或 y_i 的所有可能情况，其中从 F_n^e 中选出的变量数量为偶数（奇数）

。多项式 $h^{b}_{k,n}(x,y)$ 计算了相较于非级联重复码情形下不同情况的重量分布。现在我们可以计算 E/S中各陪集的重量枚举式。在接下来的分析中，对于泡利串 $M \in E$，我们将讨论 wt $\vec{x}(M)$、wt $\vec{z}(M)$：我们把 M分成 m个长度为 n的块，将第 i^{th}个块记为 M_i，并分别统计每个块的泡利重量。于是，wt $\vec{x}(M)$、wt $\vec{z}(M)$ 是长度为 m的向量，其中 wt $\vec{x}(M)$（wt $\vec{z}(M)$）的第 i^{th}个分量表示 M的第 i^{th}个块中 X和 Y（Z和 Y）的数量。注意，对于任意 $M \in E$，通过与 S_1的稳定子元素相乘，它在相差稳定子的意义下等价于一个字符串 M'，满足 wt $\vec{z}(M')$ =wt $\vec{z}(M)$ 且 wt $\vec{x}(M')$ =wt $\vec{x}(M)$ mod 2；并且 M 每个块中的 X 重量都位于该块的第一个量子比特上。现在我们只考虑$\vec{\quad}\ \vec{\quad}\ \vec{\quad}\ \vec{M}$这种形式，其 wt $\vec{x}(M) = b$、wt $\vec{z}(M) = k$，其中 $b \in \{0,1\}^m, k \in [n]^m$。于是我们可以如下计算 $[M]_S, [MZ]_S, [MX]_S, [MY]_S$的重量枚举式：

- 对于 $[M]_S$：我们希望计算将 M 与来自 S_1、S_2 的字符串对相乘所生成的全部字符串集合的重量枚举式。我们将首先关注第一个块（M_1）中的重量分布。假设我们从 S_2 中选取一个在第一个块中具有 $I^{\otimes n}$ 的字符串。然后我们希望计算将 M_1 与 S_X 中所有稳定子串相乘后所得字符串的重量分布，因为 S_2 由每个块中都含有 S_X 的一个元素的字符串组成。具体而言，我们希望计算将M_1 与所有偶数重量的 $\{I, X\}$ 字符串相乘后所得字符串的重量分布。根据 b_1 和 k_1 的值，这将与我们从非级联重复码中考虑过的情形之一相同。因此该表达式将为 $h^{b_1}_{k_1、\ n}$（x、y）。如果我们从 S_2中选取一个在第一个块中具有 $Z^{\otimes n}$的字符串，则可以等价地考虑一个字符串 M_1'，它满足 wt$_Z$（M_1'）$= n - k_1$、wt$_X$（M_1'）$= b_1$，然后计算将 M_1'与所有偶数重量的 $\{I, X\}$字符串相乘后所得字符串的重量分布。因此该表达式将为 $h^{b_1}_{n-k_1、\ n}$（x、y）。现在，为了计算完整的重量分布，我们希望考虑 M 的所有块。具体而言，在乘以 S_2 中的元素时，将有偶数个块被乘以 $Z^{\otimes n}$。这些块将具有重量分布 $h^{b_i}_{n-k_i、\ n}$（x、y），其余块将具有重量分布 $h^{b_i}_{k_i、\ n}$（x、y）。因此我们将考虑一个长度为 m 的向量值函数 $\vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{k}、\ \vec{n}}$（$x$、$y$），其中第 i^{th} 个坐标为 $h^{b_i}_{k_i、\ n}$（x、y）。于是总体重量分布为

$$P_{[M]_S}(x,y) = F^{e}_{m}(\vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{k},\vec{n}}(x,y), \vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{n}-\vec{k},\vec{n}}(x,y)).$$

- 对于 $[MZ]_S$：注意 $Z = Z_n \otimes I_n^{\otimes m-1}$。为了计算 $[MZ]_S$ 的重量分布，我们要将 MZ 与来自 S_1、S_2 的字符串对相乘。注意，S_2 中的每个字符串与 Z 相乘后，都会变成一个字符串，其中 $Z^{\otimes n}$ 出现在奇数个块中，而$I^{\otimes n}$ 出现在偶数个块中。因此，我们可以进行与 $[M]_S$ 类似的计算，但让奇数个块与 $Z^{\otimes n}$ 相乘。这些块的重量分布为 $h^{b_i}_{n-k_i、\ n}(x、\ y)$，其余块的重量分布为 $h^{b_i}_{k_i、\ n}(x、\ y)$。那么总的重量分布为

$$P_{[M\overline{Z}]_S}(x,y) = F^{o}_{m}(\vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{k},\vec{n}}(x,y), \vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{n}-\vec{k},\vec{n}}(x,y)).$$

- 对于 $[M\overline{X}]_S$：注意 $X = (\overline{X} \otimes I^{\otimes n-1})^{\otimes m}$。为了计算 $[MX]_S$ 的重量分布，我们希望将 MX写来自 S_1, S_2 的字符串对相乘。由于与 X 相乘会改变 wt $\vec{x}(M)$ 中每一项的奇偶性，我们可以选择 $[MX]_S$ 的一个代表元 M'，它具有

$\text{wt}\,\vec{x}(M') = (\text{wt}\,\vec{x}(M))^c$（其中 $\vec{v}^c$表示逐项取补），以及 $\text{wt}\,\vec{z}(M') = \text{wt}\,\vec{z}(M)$。然后我们可以进行与 $[M]_S$ 类似的计算，其中我们希望将 M' 与来自 S_1, S_2 的字符串对相乘。于是总体重量分布为

$$P_{[M\overline{X}]_S}(x,y) = F_m^e(\vec{h}^{\vec{b}^c}_{\vec{k},\vec{n}}(x,y), \vec{h}^{\vec{b}^c}_{\vec{n}-\vec{k},\vec{n}}(x,y)).$$

- 对于 $[M\overline{Y}]_S$：注意 $Y = (Y \otimes Z^{\otimes n-1}) \otimes (X \otimes I^{\otimes n-1})^{\otimes m-1} = (Z_n \otimes \overline{I_n^{\otimes m-1}})((X \otimes I^{\otimes n-1})^{\otimes m})$。现在，为了计算 $[MY]_S$ 的重量分布，我们可以选取 $[MY]_S$ 的一个代表元 M'，它满足 $\text{wt}\,\vec{x}(\overline{M'}) = (\text{wt}\,\vec{x}(M))^c$，且 $\text{wt}\,\vec{z}(M') = \text{wt}\,\vec{z}(MZ)$。此外，将 $(Z_n \otimes \overline{I_n^{\otimes m-1}})$ 与 S_2 中的字符串相乘，会把每个字符串转换成含有奇数个具有 $Z^{\otimes n}$ 的块的字符串。这些块的重量分布为 $h^{b_i}_{n-k_i,\,n}(x,\,y)$，其余块的重量分布为 $h^{b_i}_{k_i,\,n}(x,\,y)$。于是，总体重量分布为

$$P_{[M\overline{Y}]_S}(x,y) = F_m^o(\vec{h}^{\vec{b}^c}_{\vec{k},\vec{n}}(x,y), \vec{h}^{\vec{b}^c}_{\vec{n}-\vec{k},\vec{n}}(x,y)).$$

要计算正规化子陪集 $E/N(S)$ 的重量枚举式，我们可以将相关稳定子陪集的重量枚举式相加。具体而言，要计算 $P([M]_{N(S)})$：

$$\begin{aligned} P_{[M]_{N(S)}}(x,y) &= P_{[M]_S}(x,y) + P_{[M\overline{Z}]_S}(x,y) + P_{[M\overline{X}]_S}(x,y) + P_{[M\overline{Y}]_S}(x,y) \\ &= \left(\prod_{i=1}^m (h^{b_i}_{k_i,n}(x,y) + h^{b_i}_{n-k_i,n}(x,y))\right) + \left(\prod_{i=1}^m (h^{1-b_i}_{k_i,n}(x,y) + h^{1-b_i}_{n-k_i,n}(x,y))\right) \end{aligned}$$

其中我们利用了以下事实：$F_n^e(\vec{x},\ \vec{y}) + F_n^o(\vec{x},\ \vec{y}) = \prod_{i=1}^n (x_i + y_i)$。上面的讨论可以概括为以下关于陪集重量枚举器闭式表达式的定理：

定理 3.2。考虑一个 $n \times m$ 串接比特翻转与相位翻转重复码。设 $M \in E$ 是作用于 mn 个量子比特上的泡利错误。M 的稳定子陪集和正规化子陪集重量枚举式为：

$$\begin{aligned} P_{[M]_S}(x,y) &= F_m^e(\vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{k},\vec{n}}(x,y), \vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{n}-\vec{k},\vec{n}}(x,y)) \\ P_{[M\overline{Z}]_S}(x,y) &= F_m^o(\vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{k},\vec{n}}(x,y), \vec{h}^{\vec{b}}_{\vec{n}-\vec{k},\vec{n}}(x,y)) \\ P_{[M\overline{X}]_S}(x,y) &= F_m^e(\vec{h}^{\vec{b}^c}_{\vec{k},\vec{n}}(x,y), \vec{h}^{\vec{b}^c}_{\vec{n}-\vec{k},\vec{n}}(x,y)) \\ P_{[M\overline{Y}]_S}(x,y) &= F_m^o(\vec{h}^{\vec{b}^c}_{\vec{k},\vec{n}}(x,y), \vec{h}^{\vec{b}^c}_{\vec{n}-\vec{k},\vec{n}}(x,y)) \end{aligned}$$

$$P_{[M]_{N(S)}}(x,y) = \left(\prod_{i=1}^m (h^{b_i}_{k_i,n}(x,y) + h^{b_i}_{n-k_i,n}(x,y))\right) + \left(\prod_{i=1}^m (h^{1-b_i}_{k_i,n}(x,y) + h^{1-b_i}_{n-k_i,n}(x,y))\right)$$

其中，$[M]_S$表示 M的稳定子陪集，$[M]_{N(S)}$表示 M的正规化子陪集，而 $\vec{b}$和 $\vec{k}$的定义与上文讨论相同。

3.2 阈值估计算法的描述

概述： 回顾一下，熵 S_{RB} 可以根据陪集重量枚举器计算如下：

$$\sum_{T\in E/N(S)} P_T(1-3p,p)H\left(\frac{P_{T_{\overline{I}}}(1-3p,p)}{P_T(1-3p,p)},\frac{P_{T_{\overline{X}}}(1-3p,p)}{P_T(1-3p,p)},\frac{P_{T_{\overline{Y}}}(1-3p,p)}{P_T(1-3p,p)},\frac{P_{T_{\overline{Z}}}(1-3p,p)}{P_T(1-3p,p)}\right).$$

这个表达式可以改写为稳定子陪集和正规化子陪集所对应的熵之差。

$$\underbrace{\sum_{T\in E/S} -P_T(1-3p,p)\ln P_T(1-3p,p)}_{\text{entropy of stabilizer coset}} - \underbrace{\sum_{T\in E/N(S)} -P_T(1-3p,p)\ln P_T(1-3p,p)}_{\text{entropy of normalizer coset}}$$

本节介绍一种算法，利用上一节中的重量枚举式，估算级联重复码中该表达式的两部分。这样，我们就能高效地分析 S_{RB} 关于 p 的函数，并在 $S_{RB}=1$ 时求出错误阈值 p_*。

稳定子陪集熵： 利用第3.1节中的级联重量枚举式，观测到稳定子陪集 $[M]_S$ 的概率为

$$P_{[M]_S}=\frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{m}(h_{k_i,n}^{b_i}+h_{n-k_i,n}^{b_i})+\prod_{i=1}^{m}(h_{k_i,n}^{b_i}-h_{n-k_i,n}^{b_i})\right],$$

因此，可以将稳定子陪集所对应的熵计算为

$$\sum_{[M]_S\in E/S} -P_{[M]_S}(1-3p,p)\ln P_{[M]_S}(1-3p,p)=\mathbb{E}[-\ln P_{[M]_S}(1-3p,p)]$$

$$=\ln 2+n\,\mathbb{E}[-\ln(h_{k,n}^b+h_{n-k,n}^b)]+\mathbb{E}\left[-\ln\left(1+\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{h_{k_i,n}^{b_i}-h_{n-k_i,n}^{b_i}}{h_{k_i,n}^{b_i}+h_{n-k_i,n}^{b_i}}\right)\right)\right],$$

其中，成对选择 $(k_i,\ b_i)^{i\in[n]}$ 彼此独立。项 $\mathbb{E}[-\ln(h_{k,\ n}^b+h_{n-k,\ n}^b)]$ 与 m 无关，可在 $O(n)$ 时间内计算。对于每一对 $(k,\ b)\in[n]\times\{0,1\}$，我们定义系数

$$q_{k,n}^b=\frac{h_{k,n}^b-h_{n-k,n}^b}{h_{k,n}^b+h_{n-k,n}^b}\in(-1,1).$$

最后一项被重新表示成可由算法高效计算的形式

$$\mathbb{E}\left[-\ln\left(1+\prod_{i=1}^{m}q_i\right)\right],\ \text{each}\ q_i\sim Q,$$

其中，Q 是$q_{k,\ n}^b$的单信道分布。随后，算法将由 $q\sim Q$ 推导出的 $(\text{sign}(q),\ln|q|)\in\mathbb{Z}/2\times\mathbb{R}$ 的分布与自身卷积 n 次，并计算所得分布上 $-\ln(1\pm e^x)$的期望，其中 $\pm$ 的取值由$\prod q_i$的整体符号给出，而 x 是$\ln\ |q_i|$之和。由此得到归属于稳定子陪集的熵。

正规化子陪集熵：根据第3.1节，观测到正规化子陪集$[M]_{N(S)}$的概率为

$$P_{[M]_{N(S)}} = \prod_{i=1}^{m}(h_{k_i,n}^{b_i} + h_{n-k_i,n}^{b_i}) + \prod_{i=1}^{m}(h_{k_i,n}^{1-b_i} + h_{n-k_i,n}^{1-b_i}).$$

因此，归属于正规化子陪集的熵可计算为

$$\sum_{[M]_{N(S)}\in E/N(S)} -P_{[M]_{N(S)}}(1-3p,p)\ln P_{[M]_{N(S)}}(1-3p,p) = \mathbb{E}[-\ln P_{[M]_{N(S)}}(1-3p,p)]$$

$$= n\,\mathbb{E}[-\ln(h_{k,n}^{b} + h_{n-k,n}^{b})] + \mathbb{E}\left[-\ln\left(1+\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{h_{k,n}^{1-b} + h_{n-k,n}^{1-b}}{h_{k,n}^{b} + h_{n-k,n}^{b}}\right)\right)\right],$$

其中，各对$(k_i,b_i)^{i\in[n]}$的取值彼此独立。第一项可以重复使用。对于每一对$(k,b) \in [n]\times\{0,1\},$，我们定义系数

$$r_{k,n}^{b} = \frac{h_{k,n}^{1-b} + h_{n-k,n}^{1-b}}{h_{k,n}^{b} + h_{n-k,n}^{b}} \in \mathbb{R}_{+}.$$

The 相关项被重新表示为一种可由算法高效计算的形式 m

$$\mathbb{E}\left[-\ln\left(1+\prod_{i=1}^{m} r_i\right)\right],\ \text{each } r_i \sim R,$$

其中，R是$r_{k,n}^{b}$的单信道分布。随后，算法将分布$\ln\ R$与自身卷积$\ n$次，并在所得分布上计算$-\ln(1+e^{x})$的期望。这给出了归属于正规化子陪集的熵。

为了对$\ \mathbb{R},$进行卷积，我们将分布$\ Q$和$\ R$按比例因子$\ \alpha\cdot\mathbb{Z}$取整分箱，比例因子为$\ \alpha\in\mathbb{R}_{+}$，并对离散化数据进行快速傅里叶变换。我们在$\ O($n个不同尺度上重复这一分箱与卷积过程，然后重新组合卷积后的数据。分箱过程和尺度的选择详见 GitHub 仓库 [ABK26]。[3]

请注意，该算法在第二层中对于非常长的长度会变得不稳定，我们仅报告不同长度下的稳定值。

4 稳定子码搜索

4.1 退极化信道

本节研究计算退极化信道阈值的问题。为求完整，我们也报告一些先前研究中[FW08]报告过的数值。我们首先考察各种稳定子码的单层情形。这些码的阈值

[3]参见文件夹“阈值估计”

Code	阈值
5 次重复	0.06345202939
7 次重复	0.06341083749
3 重复	0.06337664297
Shor码（9 量子比特）	0.06335987828
4 次重复	0.06329834885
哈希	0.0630965616
5 量子比特	0.06298730942
偏置13量子比特	0.0628392531
$[[11, 1, 5]]$	0.06283811205

Code	阈值
13量子比特循环编码	0.06277288597
定制 $[[7, 1, 3]]$ H	0.06276470396
$[[6, 1, 3]]$ H	0.0627509475
偏置9量子比特	0.06275087308
$[[4, 2, 2]]$	0.06261572
7量子比特 (Steane)	0.06259214551
CD Steane H	0.06259214551
环面码 $[[8, 2, 2]]$	0.06247322092
SCF H	0.06236285581

表1：各种稳定子码的错误阈值（退极化信道）。带H的编码指全息码，讨论见 [FSJCF25]。SCF是表面码片段 [HCMBS20]。CD Steane是Clifford变形Steane码。 [[6,1,3]] 和定制 [[7,1,3]] 编码分别在 [FHMS21；RGBF17]中提出。

见表1。只有重复码或 Shor 码（由两个重复码级联而成）能取得优于哈希的阈值。值得注意的是，即便是具有非平凡距离的码（例如 5量子比特码），表现也不如随机哈希。这与量子纠错中的情况形成对比，在量子纠错中，5量子比特码、Steane码和环面码等码在不同场景下表现良好。例如，对于魔态蒸馏，5量子比特码在 T态上具有最佳阈值 [Ral17；KP25]。

请注意，重复码是经典码（稳定子仅为单一类型X或Z），因此直观上人们会预期它们只对具有单一类型错误的信道表现良好。关于重复码良好性能的一种可能解释已在 [SS96；SS07], 中提出，他们认为重复码对Z错误是简并的，并且能够纠正X错误，从而有助于降低该态的总体熵。然而另一方面，诸如在偏置信道上表现良好的偏置9量子比特码和十三量子比特码等编码 [CV20]（但并非完全经典）具有显著更差的阈值。

随后，我们研究重复码与若干小型稳定子码级联后的错误阈值。这些阈值列于表 2。我们考虑的一个问题是，是否存在任何小型级联能够优于 5 重复码（单层情形下的最优选择）。我们首先将重复码与偏置 9 量子比特码级联，以考察其是否能提高阈值。在 [CV20] 中设计的偏置 9 量子比特码用于纠正一个一般错误以及一个额外的 Z错误。我们进行此类级联，是基于如下观察：带有 Z 稳定子的重复码的输出信道显著偏向 Z错误，因此与偏置9量子比特级联应有助于提高阈值。我们发现，对于 5 重复码和 7 重复码确实如此，但对于三重复码则不然。在三重复码上未见改善的一个原因可能是，5 重复码和 7 重复码会产生偏置更强的有效信道。还需注意，尽管 7 重复码在级联后有所改善，其阈值仍劣于与偏置9量子比特级联的 5 重复码情形。请注意，此类级联此前尚未被研究过。

重复码与 5量子比特码级联后，在除三重复码以外的所有情况下都能提高阈值。7量子比特码则不会呈现这种规律，级联后总会使阈值

Code	阈值
5 重复 Z × 5 重复码 X	0.06352047429
5 重复 Z ×偏置9量子比特	0.063514550053
5 次重复 × 5量子比特	0.06350293118
7 重复 Z ×偏置9量子比特 (E)	0.063480612253
7 次重复 × 5量子比特	0.06345748411
5 次重复	0.06345202939
7 次重复	0.06341083749
5 重复 X ×偏置9量子比特	0.063409518776
3 重复	0.06337664297
3 重复 × 7量子比特	0.06336876052
3 重复 × 环面码 [[8,2,2]]	0.06335777052
3 重复 × 偏置13量子比特 (E)	0.06334324161
3 重复 Z ×偏置9量子比特	0.063340626283

Code	阈值
4 次重复 × [[4,2,2]]	0.06333945247
3重复码 × 5量子比特	0.06333924742
3重复码 X × 13-量子比特编码 (E)	0.06332969723
4 次重复 ×环面码 [[8,2,2]]	0.0633281095
3 重复 × [[4,2,2]]	0.06332006618
4 次重复 × 5量子比特	0.06330111376
5 次重复 × [[4,2,2]]	0.06329169236
3 重复 X ×偏置9量子比特	0.063291502219
5 次重复 ×环面码 [[8,2,2]]	0.06324287112
5 次重复 × 7量子比特	0.06310170543
哈希	0.0630965616
7 次重复 × 7量子比特	0.0627916763

表 2：重复码与小型稳定子码级联时的错误阈值（退极化信道）。将 5 重复码与偏置 9 量子比特码级联可提高阈值。标有 (E) 的条目表示基于蒙特卡罗的估算值。

变差。与 [[8,2,2]] 环面码和 [[4,2,2]] 编码级联后，4重复码的阈值会提高，但奇数长度的重复码不会。不过，这种提升还不足以使其表现优于5重复码。重复码与环面码级联时，增加重复码的长度会使阈值变差。

我们开展的下一组数值实验旨在研究重复码与全息码级联时的阈值。阈值结果列于表 3中。本实验受到近期研究结果的启发： [FSJCF25], 作者指出，全息码在偏置噪声信道中的表现优于哈希。我们发现，将重复码与全息码级联后，其中若干种全息码的表现优于单独使用重复码。对于小规模码级联，这些码以及偏置 9 量子比特码是首批在第二层使用时能够提高阈值的非重复码稳定子码。

对于 5 重复码，与定制 [[7,1,3]] 码、 [[6,1,3]] 码和 CD Steane码级联均能提高阈值。这些码与 7 重复码级联时也都能提高阈值。将 5 重复码与定制 [[7,1,3]] 码级联可获得最高阈值。对于 4 重复码，与 [[6,1,3]] 码和 SCF码级联能够提高阈值，其中 [[6,1,3]] 码带来的阈值最高。将 5量子比特、7量子比特或 [[4,2,2]] 码等非重复码与全息码级联，所得阈值总是低于哈希。值得注意的是，此前尚未研究过这些级联方案。

接下来，我们研究若干在概念上颇有意思、此前尚未探索过的编码的阈值。阈值列于表 4 中。在这些实验中，我们首先研究 3 层重复码的阈值，所用的重复码长度为 3 和 5。研究这些级联的一项原因是，两层重复码的阈值优于单层，因此自然会想知道继续级联是否能进一步提高阈值。在这两种情况下，阈值都不如采用单层重复码时得到的阈值。研究这 3 层重复码的另一项原因是，两层重复码之后的输出信道会高度偏向某一种错误；在这种情况下，再级联一层重复码应该有助于纠正该错误，从而降低整体状态的熵。不过，

级联码	值
5 次重复 × 定制 [[7,1,3]] H	0.063513617158
5 次重复 × 5量子比特	0.06350293118
5 次重复 X × [[6,1,3]] H	0.063485121221
5 次重复 × CD Steane H	0.06347779536
7 次重复 × 定制 [[7,1,3]] H	0.06347148479
7 次重复 × 5量子比特	0.06345748411
5 次重复	0.06345202939
7重复X码 × [[6,1,3]] H	0.063446922
7 次重复 × CD Steane H	0.06343681225
7 次重复	0.06341083749
3 重复	0.06337664297
3 重复 × SCF H	0.06334961171
4 次重复 × [[6,1,3]]H	0.06334802787
4 次重复 × SCF H	0.06333589217
Shor码 × [[6,1,3]] H	0.06333181819
3 重复 ×定制 [[7,1,3]]H	0.063331611435

级联码	值
3 重复 X × [[6,1,3]] H	0.063314378012
4 次重复 × CD Steane H	0.06331188169
5 重复 Z × [[6,1,3]] H	0.06330793247
4 次重复 × 定制 [[7,1,3]] H	0.06330435597
3 重复 Z × [[6,1,3]] H	0.063299275357
3 重复 × CD Steane H	0.06329370446
5 次重复 × SCF H	0.06325328184
7 次重复 Z × [[6,1,3]] H	0.063124747103
哈希	0.0630965616
7 次重复 × SCF H	0.06305013433
5量子比特	0.06298730942
5量子比特 × [[6,1,3]] H	0.06298013551
5量子比特 ×SCF H	0.06296798167
7量子比特 ×SCF H	0.06266241974
7量子比特 × [[6,1,3]] H	0.06266195636
[[4, 2, 2]] × [[6,1,3]] H	0.0625556411

表 3：与全息码级联的稳定子码的错误阈值（退极化信道）。多次级联可提高阈值。

Code	阈值
5 重复 X × 5 量子比特 × 5 重复码 Z	0.063552 (E)
5 次重复 × 7置换	0.06354354568
5 重复 X × 5 重复码 Z × 5 量子比特	0.063535（E）
5 次重复 × 5置换	0.06352047429
5 重复 X × 5 量子比特 × 5 量子比特	0.063519（E）
5 重复码 Z ×偏置9量子比特	0.063514550053
5 次重复 × 3置换	0.06349265479
3 重复 × 7置换	0.0634785941
5 次重复	0.06345202939
3 重复 × 5置换	0.06341736499
5 次重复 X ×偏置9量子比特	0.063409518776
3 重复 Z ×偏置9量子比特	0.063340626283
3 重复 X ×偏置9量子比特	0.063291502219
5 次重复 X × 5 重复码 Z × 5 重复码 X	0.063278 (E)
3 重复 X × 3 重复码 Z × 3 重复码 X	0.06327013619
哈希	0.0630965616

表4：一些在概念上颇有意思的编码（退极化信道）。带有 (E) 的条目表示基于蒙特卡罗的估计。Perm 指置换不变码；对于我们的示例，我们发现最优的置换不变码是重复码。

Code	阈值
Shor（3 个 X 重复码 × 3 Z 重复码）× 5Z 重复码	0.06360871676
Shor（3 个 X 重复码 × 3 Z 重复码）× 4Z 重复码	0.06358111943
Shor（3 个 X 重复码 × 3 Z 重复码）× 3Z 重复码	0.06352919792
哈希	0.0630965616
5量子比特 × 5重复码	0.06302575933
5量子比特 × 4重复码	0.06302519416
5量子比特 × 3重复码	0.06302258398
偏置9量子比特 × 3 重复码 Z	0.062809473853
偏置9量子比特 × 3 重复码 X	0.062726557443
[[4,2,2]] × 4重复码	0.06270942
[[4,2,2]] × 3重复码	0.06264641
7量子比特 × 3重复码	0.06260170793
7量子比特 × 4重复码	0.06257099182
7量子比特 × 5重复码	0.062537073

表5：稳定子 × 重复码的错误阈值（退极化信道）。请注意，在这些示例中，当第一个编码不是重复码时，级联并不能取得优于哈希的效果。

这一结果与之前的结果（表2和3）形成对比，在之前的结果中，使用偏置信道编码进行级联可以提高阈值。这可能是因为第三层中的重复码只有一种类型的稳定子，而其他编码同时具有 X 型和 Z 型稳定子。

接下来，我们研究以下编码组合的阈值：2 层重复码和 1 层 5量子比特码。在 [FW08] 中曾使用过这种编码组合，以实现最佳阈值（尽管码长要长得多）。我们将这些编码安排成不同的配置，以研究哪种配置能够产生最佳阈值：5 次重复 X × 5量子比特 × 5重复码 Z 和 5 次重复 X × 5 重复码 Z × 5 量子比特。我们看到，第一种配置具有更好的阈值，并且两种配置都优于两层 5 重复码。我们注意到，先前的研究尚未考察过将 5量子比特码置于中间层的任何级联。此外，我们看到，将 5 重复码与两层 5 量子比特码进行级联，比与单层 5 量子比特码进行级联具有更好的阈值；而后者又比仅使用 5 重复码具有更好的阈值。最后，受 [BL25]近期结果的启发，我们将重复码与置换不变码进行级联，并针对较短码长优化置换不变码的选择。与 [BL25] 关于退极化信道的结果类似，我们发现，即使与第一层的重复码进行级联，最佳的置换不变码仍然是重复码。

本节最后，我们通过研究级联重复码的性能来结束讨论。对于规模较小的重复码，我们精确计算了阈值，其中一些数据点也曾在 [FW08]中报告。精确计算结果汇总于表6。此外，利用第3 节的结果，我们得以估算较长重复码的级联的阈值（长度最高达 15 × 7000）。据我们所知，此前尚未探索过这些搜索空间。阈值绘于图6。我们发现，随着第一个重复码长度增加，阈值始终变差（从 3 重复码增至 5 次重复时除外）；在我们尝试的所有长度中，最高阈值由

外层 \ 内层 3 重复		4 次重复	5 次重复	7 次重复
3 重复	0.06335987939	0.06338621397	0.06341736592	0.06347859503
4 次重复	0.06328107294	0.06327018271	0.06325722134	0.063226464487
5 次重复	0.06349265709	0.06350743142	0.06352047426	0.06354354564
7 次重复	0.06344003002	0.06345122519	0.06346101398	0.063477579990
无编码	0.06337664297	0.06329834885	0.06345202939	0.06341083749

表 6：级联重复码阈值（精确，退极化信道）。

给出的 5×51 重复码取得。固定第一个重复码的长度并改变第二个重复码的长度时，阈值会逐渐改善，达到某一长度后又开始变差。这些结果提供了若干新的例子，表明级联重复码的性能优于哈希。它们进一步增强了这一观点的证据：使用更长的重复码不应带来更好的阈值。

以往工作中所有的阈值改进都将第一个码取为 5 重复码。这样做的一个原因是，对于单层，5 重复码给出最佳阈值。这引出一个自然的问题：是否可能找到一对码 A，B 进行级联，使得码 $A \times$ 码 B 的阈值优于 5 重复码 $\times$ 码 B，尽管码 A本身的阈值比 5 重复码更差。我们看到，确实可以找到这样的码。例如，对于单层，7 重复码的阈值优于 3 重复码，但 3×7-重复码的阈值优于 7×7-重复码，见表 6。对于更长的长度，5 重复码的阈值优于 7 重复码，但 7×95-重复码的阈值优于 5×95-重复码，见图 6。

4.2 独立 X-Z 信道

本节研究参数为 $((1-p)^2,\ p(1-p)\ p^2,\ p(1-p))$ 的独立 X-Z 信道的阈值问题。该信道也称为 BB-84 信道。一开始需要指出的一个一般性观察是，该信道的编码阈值行为与退极化信道相似。鉴于该信道中 Y 错误的概率非常小，这一点颇为令人意外，因为人们可能会认为它在定性上应类似于双泡利信道。然而，正如我们将在第 4.3 节中看到的，事实并非如此。为了开始对阈值进行数值研究，我们首先计算使用单层稳定子码编码量子态时该信道的阈值。阈值列于表 7 中。再次，表现优于哈希的唯一编码是重复码。

接下来，我们研究了与小型稳定子码级联的重复码的阈值（包括上一节讨论的全息码和偏置码）。阈值列于表8中。请注意，再次将重复码与全息码和偏置 9 量子比特码级联可以提高阈值。单层情况下，最佳性能来自 7 重复码和 5 重复码，而最适合进行级联的全息码是定制[[7,1,3]], 5-量子比特、[[6,1,3]] 以及 CD Steane 码。将 5 重复码与偏置 9 量子比特码级联也显示出阈值的显著提升。请注意，这些值此前尚未被报告。

我们估算了独立 X-Z 信道下长长度级联重复码的阈值。它们的表现都优于哈希，其中许多还优于 7 重复码

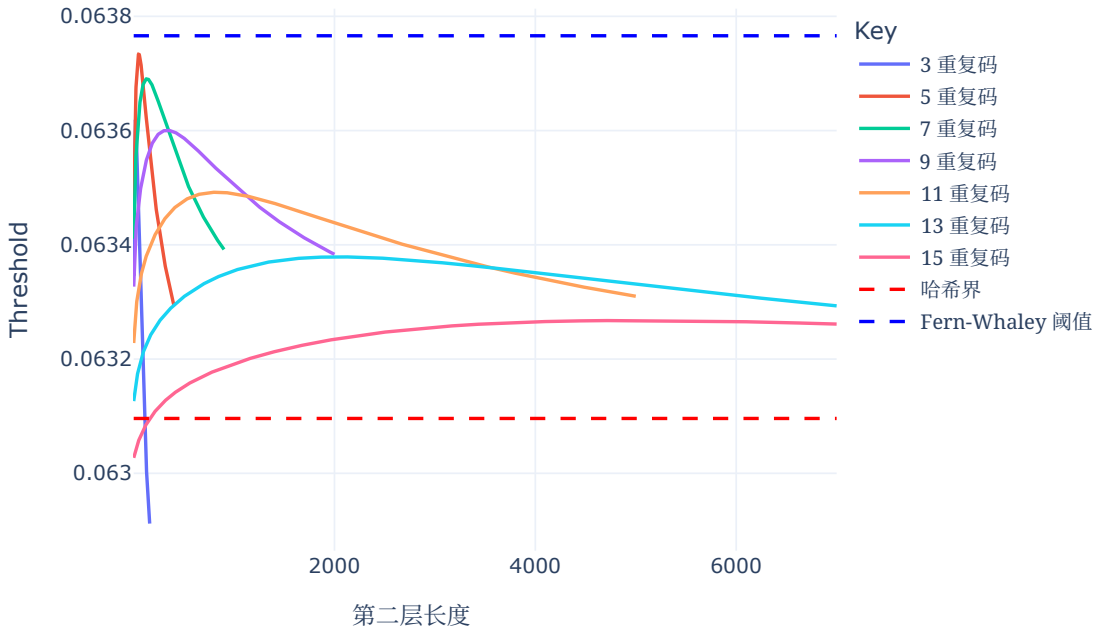

图 6：退极化信道下长级联重复码的性能估计。请注意，横轴表示重复码第二层的长度。

Code	阈值
7 次重复	0.1121074112
5 次重复	0.1121042613
3 重复	0.1116520369
Shor码（9 量子比特）	0.1116273012
4 次重复	0.1116162734
哈希	0.1100278644
偏置13量子比特	0.1095450642
$[[11, 1, 5]]$	0.1095144549
偏置9量子比特	0.1094880471

Code	阈值
5 量子比特	0.1094667453
7量子比特	0.1094285595
CD Steane	0.109428519548
$[[6,1,3]]$ H	0.109375692549
定制 $[[7, 1, 3]]$ H	0.1093749886
$[[4, 2, 2]]$	0.1092750072
13量子比特循环码	0.109176800515
$[[8, 2, 2]]$	0.1086302482
SCF H	0.107975087086

表 7：各种稳定子码的错误阈值（独立 X-Z 信道）。唯一优于随机哈希的非级联码是重复码。

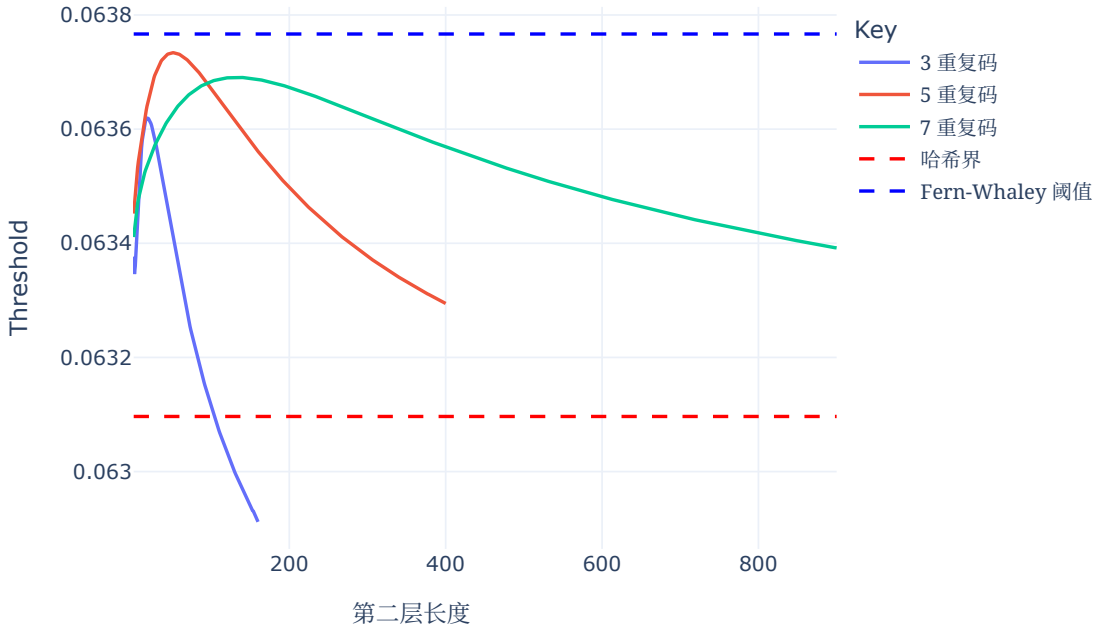

图7：放大查看去极化信道下 3x、5x、7x 级联重复码的阈值估计。请注意，横轴为重复码第二层的长度。

Code	阈值
7重复X码 × 定制 [[7,1,3]] H	0.1121999678
5 重复 Z ×偏置9量子比特	0.112199245744
5 重复 X × 定制 [[7,1,3]] H	0.112195710485
5 重复 Z ×定制 [[7,1,3]] H	0.11219113341
7 次重复 × 5量子比特	0.1121760184
5 次重复 × 5量子比特	0.1121740643
7重复X码 × [[6,1,3]] H	0.112160908299
5 重复 X × [[6,1,3]] H	0.112147430289
7 次重复 × CD Steane H	0.1121454277
5 次重复 × CD Steane H	0.1121390516
7 重复	0.1121074112
5 次重复	0.1121042613
4 次重复 × SCF H	0.1118931344
3 重复 × 7量子比特	0.1118663697
4 次重复 × [[4, 2, 2]]	0.1118332576
4 次重复 Z × [[6,1,3]] H	0.111824435304
5 重复 Z × [[6,1,3]] H	0.111816604543
5 次重复 × [[4, 2, 2]]	0.1118009187
3 重复 × SCF H	0.1117956372

Code	阈值
5 次重复 × SCF H	0.1117609539
4 次重复 × 7量子比特	0.1116669006
3 重复	0.1116520369
4 次重复 X × [[6,1,3]] H	0.111625259524
3 重复 × [[4, 2, 2]]	0.1116243095
4 次重复 × CD Steane H	0.1115988745
4 次重复 × 5量子比特	0.1115748657
4 次重复 X ×定制 [[7,1,3]] H	0.111563933
3 重复 Z × [[6,1,3]] H	0.11156195318
3 重复 × 5量子比特	0.111530293
3 重复 Z ×定制 [[7,1,3]] H	0.11152247055
3 重复 X ×定制 [[7,1,3]] H	0.111519718682
3 重复 Z ×偏置9量子比特	0.111516956
3 重复 × CD Steane H	0.1114983542
7 次重复 Z × [[6,1,3]] H	0.111479474652
3 重复 X × [[6,1,3]] H	0.111457260799
5 次重复 × 7量子比特	0.1114316579
7 次重复 × SCF H	0.1113603815
哈希	0.1100278644

表 8：重复码与稳定子码级联（独立 X-Z 信道）。与全息码和偏置 9 量子比特码级联时，阈值有所提升。

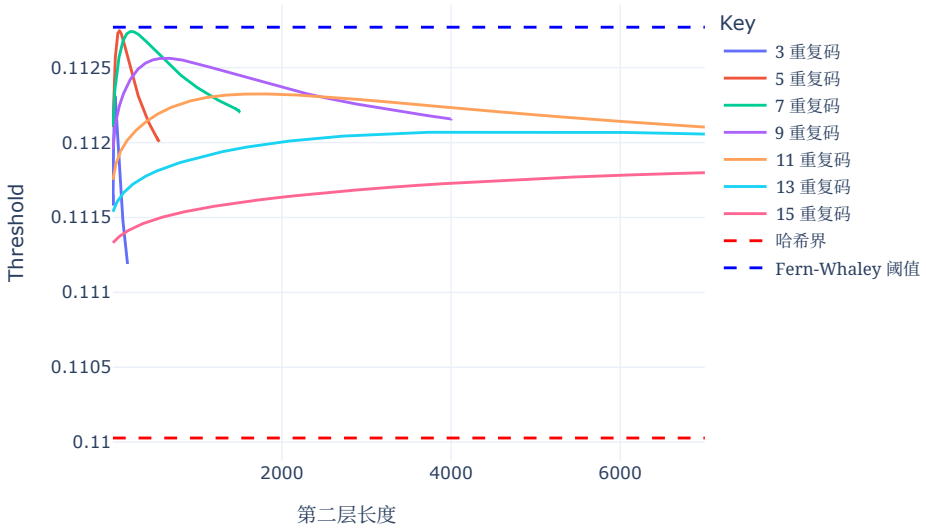

图 8：独立 X-Z 信道下长级联重复码的阈值估计。请注意，横轴表示重复码第二层的长度。

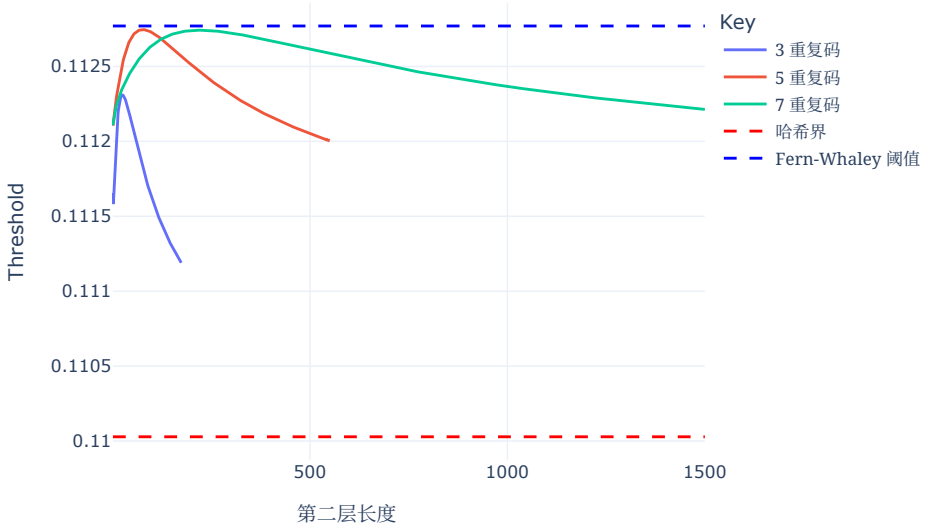

图 9：独立 X-Z 信道下 3x、5x、7x 级联重复码阈值估计的放大图。请注意，横轴表示重复码第二层的长度。

外层 \ 内层 3 重复		4 次重复	5 次重复	7 次重复
3 重复	0.1116273012	0.1116758826	0.1117431391	0.111872313296
4 次重复	0.111549439	0.1115223945	0.1114951008	0.1114356246
5 次重复	0.1121585875	0.1121812393	0.1122021756	0.1121911334
7 次重复	0.1121487919	0.1121656721	0.1121808508	0.112207468445
无编码	0.1116520369	0.1116162734	0.1121042613	0.1121074112

Table 9：级联重复码阈值（精确，独立 X-Z 信道).

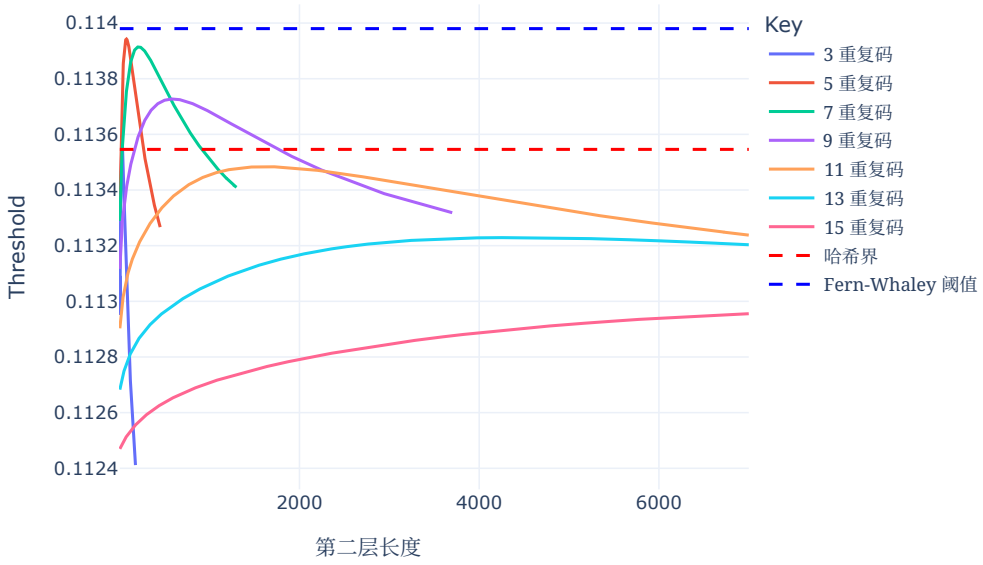

图 10：2-Pauli 信道上长级联重复码的阈值估计。请注意，横轴是重复码第二层的长度。

编码。尽管它们都没有优于 [FW08], 中的阈值，5 重复码与 7 重复码级联的峰值非常接近该阈值。这些峰值 $p = 0.1127458434$, $p = 0.1127420360$ 也分别在 [FW08], 中报告过，但我们想指出，我们的工作首次计算了独立 X-Z 信道上极长重复码的阈值，从而给出了许多非可加性的新例子。这些重复码的总体趋势与退极化信道类似，即阈值随长度增加而变差。

4.3 2-Pauli 信道

我们估算了多种长码长级联重复码的阈值，发现其中许多都优于哈希。然而，它们都不及

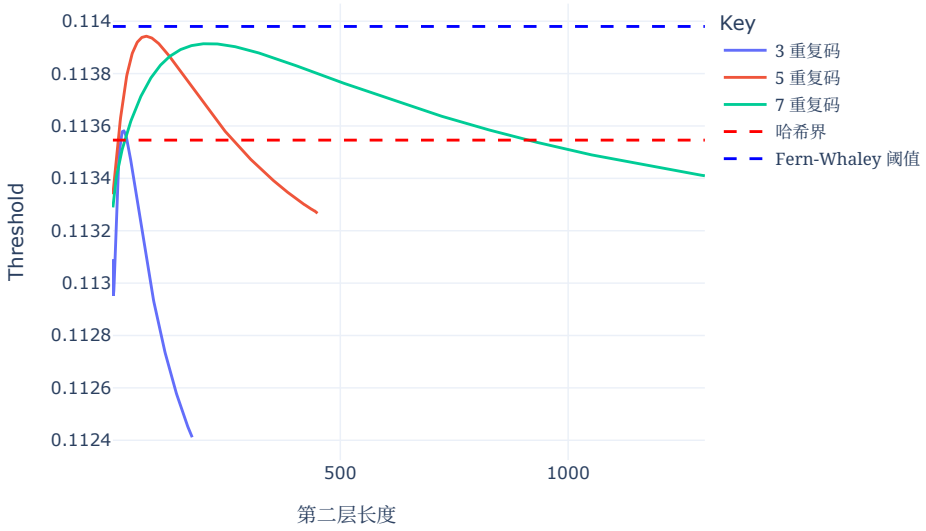

图 11：放大查看 2-Pauli 信道下 3x、5x、7x 级联重复码的阈值估计。请注意，横轴是重复码第二层的长度。

[FW08]中的最佳阈值。请注意，这里得到的 5 次重复 $\times$ 74 重复码峰值也曾在 [FW08], 中被（精确地）报告过，但我们的工作首次估算了其他长重复码的阈值。此外，根据前几节的结果，人们可能会认为非可加性主要是小码块长度下的现象。然而，我们发现，对于 2-Pauli 信道而言，事实并非如此。

具体而言，对于 2-Pauli 信道，我们没有发现任何其他小型稳定子码（或级联）优于哈希。我们报告这些结果，只是为了记录如下事实：从该信道的非可加性来看，这些编码并无用处。尽管我们尝试过的所有编码都不如哈希，但只有在与另一个重复码或全息码进行级联时，我们才会看到级联编码带来的改进。有关小型稳定子码阈值的详细表格，请参见 GitHub 仓库 [ABK26]。[4]

5 信道优化

在本节中，我们反过来处理这个问题：不再尝试寻找能针对特定信道达到更高阈值的编码，而是固定编码并改变信道参数，以最大化相应信道在哈希点处的相干信息。单层码的这项优化结果汇总于表10 ，级联码的结果则汇总于表

[4]参见文件 Code Thresholds.pdf

Code	X 系数 Y 系数 Z	系数 非可加性			哈希点
4 次重复	0.06609142	0.91039291	0.02351567	0.012959633	0.2810011867
3 重复	0.08519012	0.0277214	0.88708848	0.01274328527	0.2683777284
5 次重复	0.05116499	0.0208338	0.92800121	0.01259428267	0.2928465458
7 次重复	0.0374894	0.01589898	0.94661162	0.0114603097	0.3093972342
5 量子比特	0.02058418	0.0205851	0.95883071	0.008869175026	0.3223408279
定制 [[7, 1, 3]] H	0.01496641	0.01825069	0.96678289	0.008533622316	0.3338306974
Shor码（9 量子比特）	0.01488571	0.96882848	0.01628581	0.008297933843	0.3370935218
偏置9量子比特	0.01216847	0.01216844	0.9756631	0.007489070428	0.349643758
13量子比特循环码	0.98030287	0.00961704	0.01008009	0.00672953481	0.3599226452
偏置13量子比特	0.00862734	0.00862735	0.98274531	0.00637290432	0.3661221308
[[6, 1, 3]]H	0.95454889	0.01609587	0.02935524	0.005887070178	0.3175941557
CD Steane H	0.02960147	0.01339475	0.95700378	0.002980713554	0.321036373
[[11, 1, 5]]	0.01404342	0.01172789	0.97422869	0.00123245788	0.3468338078
7量子比特	0.47099554	0.4707756	0.05822885	-0.00086150789	0.2079492418
SCF H	0.41043731	0.52427592	0.06528677	-0.0021075336	0.2072578017
环面码 [[8, 2, 2]]	0.07057851	0.49868546	0.43073603	-0.00233821885	0.205903352
[[4,2,2]]	0.47089171	0.05821602	0.47089227	-0.00307897972	0.2079497163

表10：优化信道的参数为（$1-p$， $c_X p$， $c_Y p$， $c_Z p$），总错误为 p。哈希点列中的条目告诉我们，对于该信道，随机稳定子码在 p_{hash} 处的信道容量为 0。非可加性列中的条目告诉我们在 p_{hash} 处达到的信道容量。

11。具体而言，令 (c_X, c_Y, c_Z) 分别表示表中 X, Y, Z 系数 10、11。那么，优化后的信道参数为 $(1-p, c_X p, c_Y p, c_Z p)$，总错误率为 p。[5]哈希点一栏中的数值表示：对于该信道，随机稳定子码的信道容量为 0 时的 p_{hash} 值，也就是说，此时信道错误的熵为 1。非可加性一栏中的数值表示：在随机哈希之前使用特定码时，p_{hash} 所达到的信道容量。请注意，我们使用这些数值是为了呈现总体趋势。

我们在表格中排列编码时，首先列出那些在信道对某一种错误类型有极强偏置时能够呈现最大相干信息的编码。表格底部的编码则是在两种错误类型的概率大致相等、第三种错误类型的概率较小时，呈现最大相干信息的编码。请注意，这些编码即使经过信道优化，也不会表现出非可加性（7量子比特Steane码、 [[4,2,2]], 环面码 [[8,2,2]] 和 SCF）。对于退极化信道和独立 X-Z 信道，这些编码也都位于阈值表的底部，表现远不如哈希。我们还看到，表10 中较长编码的相干信息明显低于较短重复码的相干信息。如11所示，在重复码的第一层之后级联其他编码会降低相干信息，这可能是由于编码长度更长所致。这些表格中的结果或许有助于在偏置噪声区间选择编码，并可能与纠错和信道容量均有关。

[5]我们针对范围 (0.0001, 1) 内的系数进行优化。

级联码	X 系数 Y 系数 Z	系数 非可加性			哈希点
3 重复 X × 5 重复码 Z	0.00840665	0.980756	0.01083735	0.00688476977	0.3611050233
5 次重复 X × 3 重复码 Z	0.01454433	0.9761731	0.00928257	0.00673676503	0.3509685235
3 重复 X × 5 量子比特	0.01256495	0.00740623	0.98002881	0.00638679074	0.3596135389
3 重复 Z × 7 重复码 X	0.00827083	0.98581108	0.00591809	0.00586846919	0.3750748571
3 重复 Z ×Shor 九量子比特码	0.01215838	0.94775012	0.04009151	0.0051414728	0.3116335074
5 重复 X × 5 重复码 Z	0.00584507	0.98816151	0.00599342	0.0050847667	0.38276095094
5 重复 Z × 5 量子比特	0.00519623	0.9855565	0.00924727	0.0049542287	0.3745254396
3重复码 X ×偏置9量子比特	0.00550621	0.0044036	0.99009019	0.00440877222	0.39012831
3 重复 X × 7 量子比特	0.13300218	0.83074256	0.03625527	0.002980809573	0.2470615767
3 重复 Z ×偏置9量子比特	0.02340259	0.89070293	0.08589448	0.002962751111	0.2710045173
5 重复 Z × 7 重复码 X	0.02967107	0.77531338	0.19501555	0.002175342298	0.2361625619

表11：所选级联码的信道优化。此处各列的含义与上一表相同。

6 讨论与展望

本文旨在了解稳定子码的哪些性质有助于获得更好的阈值或实现非可加性。为此，我们尝试了若干大型重复码以及新的稳定子码级联方案。我们选择用于实验的编码时，依据了以下几个因素：

- 简并性：我们分析并运行了大型重复码，以了解其简并性在多大程度上能够改善阈值。我们发现，随着级联重复码长度的增加，阈值反而变差。这引出了以下问题：我们知道，简并性是证明非可加性的必要条件 [SS96]但如何量化简并性的程度随编码长度的变化，目前尚不清楚。更复杂的是，在信道容量的语境下，我们关注的是特定编码相对于典型错误的简并性；这在概念上不同于我们对纠错码简并性的定义，后者通常是在对抗性低权重错误的语境下进行的。

- 作为纠错码的性能：我们选取了诸如 5量子比特码、7量子比特码、环面码、 $[[4,2,2]]$ 编码和 11量子比特码，因为它们具有有趣的纠错特性。衡量这一点的一个自然指标是编码的距离，因为更大的距离应该能让编码纠正更多错误。然而，正如我们从阈值中看到的，这些编码的表现并不优于随机稳定子码，而距离为 1 的重复码却优于随机稳定子码。此外，在第二层将这些编码与重复码级联，效果不如随机稳定子码。为了说明距离在概念上与信道容量有何不同，我们注意到 [Rai02a；Rai98]的距离界表明，没有稳定子码能够纠正权重超过 $\lfloor \frac{n+1}{6} \rfloor$ 的错误，这对应的错误率约为 16。6%。然而，我们发现，使用随机码可以达到信道容量，错误率约为 18。9%。这种差异是因为这些编码的设计目标是纠正权重为 1 的错误，但在信道容量设定下，这类错误极不可能发生，因此可以忽略。鉴于我们对简并性和纠错的了解，一个不错的测试是研究低密度奇偶校验码的性能；它们具有低权重稳定子（因此有利于简并性），同时也具有较大的距离。

- 偏置信道编码：我们考察的许多编码都是为偏置信道实现更好的阈值而定制的。由于经过重复码后的有效信道具有偏置，我们将重复码与这些码族级联，并研究其阈值。在这种情况下，我们的直觉得到了验证，确实观察到了阈值的提升。另请注意，我们考察的所有偏置码都具有非平凡的距离。 [FW08] 通过级联多层 5量子比特码，在退极化信道上取得了最佳阈值结果，这引出了一个问题：当信道的偏置足够大时，码距是否会开始发挥作用。此外，我们没有尝试级联大量编码层，因此，级联任意一种偏置码的多层结构能否带来更好的阈值，仍有待研究。

现在，我们对探索这一问题期间开展的其他一些小型实验做些说明。由于编码的第一层距离似乎并不重要，我们尝试生成长度不超过 $n = 7$ 的随机稳定子码，并计算所得编码样本的阈值。我们在退极化信道和独立 X-Z 信道中都发现了若干非可加性的例子，但在 2-Pauli 信道中没有发现。为了了解在接近 2-Pauli 信道时，非可加性会在何处消失，我们尝试研究该信道的极限情形。数值结果表明，只要引入极小的 Y 错误概率，小型重复码就开始表现出非可加性。然而，这些极限信道仍与独立 X-Z 型信道相去甚远。

对于 2-Pauli 信道，我们只有极少数稳定子码（需要非常长的码长）表现出非可加性。最近， [BL25]表明，采用短码长的置换不变码，在 2-Pauli 信道和独立 X-Z 信道中都会表现出非可加性（但在退极化信道中不会）。由此可以立即得出一个结论：置换不变码在这两种信道中的表现相似，这与稳定子码的情况形成对比。对于后者，我们看到独立 X-Z 信道与退极化信道的阈值表现相似。这促使我们思考如何更好地理解稳定子码方法与置换不变码方法之间的联系。要搭建二者之间的桥梁，第一步可以是用表示论的语言重新表述陪集重量枚举器框架。

致谢

AA 获得滑铁卢大学计算机科学学院颁发的 Cheriton 研究生奖学金的部分资助。ARK 感谢 CryptoWorks 21 项目的支持。AB 获得 Mitacs Globalink 研究实习项目和实验量子信息处理本科暑期学校的资助。周界理论物理研究所和量子计算研究所的研究由加拿大政府通过加拿大创新、科学与经济发展部，以及安大略省通过研究、创新与科学部提供支持。

本研究部分得益于安大略计算（www.computeontario.ca）和加拿大数字研究联盟（www.alliancecan.ca）提供的支持。计算设施也使用了 AWS 云。

我们也感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）提供的支持。AA 和 ARK 获得了 NSERC联盟量子联合体资助（ALLRP 578455-22）的部分支持。DL 获得 RGPIN-2024-03823 项目支持，LS 获得

RGPIN-2025-04875 项目支持，GS 获得 NSERC-NSF 联盟资助 ALLRP-586858- 2023年和 NSERC 发现基金 RGPIN-2025-02094 的支持。

参考文献

[ABK26] A. Agarwal、A. Bu 和 A. R. Kalra。信道容量。https://github.com/avantikaag03/Channel-Capacity。2026年。[BDSW96] C. H. Bennett、D. P. DiVincenzo、J. A. Smolin 和 W. K. Wootters。“混合态纠缠与量子纠错。”载于：《物理评论A》54.5（1996年），第3824页。[BKN00] H. Barnum、E. Knill 和 M. Nielsen。“关于量子保真度和信道容量。”载于：IEEE信息论汇刊46.4（2000年），第1317–1329页。 DOI：10 .1109/18.850671。[BL20] J. Bausch 和 F. Leditzky。“来自神经网络的量子码。”载于：《新物理学杂志》22.2（2020年），第023005页。[BL21] J. Bausch 和 F. Leditzky。“任意泡利噪声的错误阈值。”载于：《SIAM计算杂志》50.4（2021年），第1410–1460页。[BL25] S. Bhalerao 和 F. Leditzky。通过置换提高量子通信码率

不变码。2025年。arXiv: 2508.09978 [量子物理].[BNS98] H. Barnum、M. A. Nielsen 和 B. Schumacher。“通过含噪量子信道传输信息。”发表于：《物理评论A》57（6，1998年），第4153–4175页。 DOI：10.11 03/PhysRevA.57.4153。[BOS12] F. G. Brandao、J. Oppenheim 和 S. Strelchuk。“噪声何时会提升量子容量？”发表于：Physical review letters 108.4（2012年），第040501页。[Cer98] N. J. Cerf。“量子克隆与泡利信道的容量。”发表于：arXiv预印本 quant-ph/9803058（1998年）。[CRSS98] A. R. Calderbank、E. M. Rains、P. M. Shor 和 N. J. Sloane。“通过 GF (4) 上的码实现量子纠错。”发表于：IEEE信息论汇刊 44.4（1998年），第1369–1387页。[Cub+15] T. Cubitt、D. Elkouss、W. Matthews、M. Ozols、D. P´erez-Garc´ıa 和 S. Strelchuk。“检测量子容量可能需要无限多次使用信道。”发表于：Nature communications 6.1（2015年），第6739页。[CV20] M. Chiani 和 L. Valentini。“针对一种主要泡利错误类型的量子信道短码。”发表于：《IEEE信息论精选领域期刊》1.2（2020年），第480–486页。[Dev05] I. Devetak。“私有经典容量和量子信道的量子容量。”发表于：IEEE信息论汇刊 51.1（2005年），第44–55页。[DSS98] D. P. DiVincenzo、P. W. Shor 和 J. A. Smolin。“高噪声信道的量子信道容量。”发表于：《物理评论A》57.2（1998年），第830页。

[FHMS21] T. Farrelly、R. J. Harris、N. A. McMahon 和 T. M. Stace。“张量网络码。”发表于：物理评论快报 127（4，2021年），第040507页。 DOI：10.1103/PhysRevLett.127.0405 07。[FSJCF25] J. Fan、M. Steinberg、A. Jahn、C. Cao 和 S. Feld。《采用张量网络解码的零码率全息码的偏置噪声阈值》。2025年。arXiv: 2408 . 06232[量子物理].[FW08] J. Fern 和 K. B. Whaley。“泡利信道非零容量的下界。”发表于：《物理评论A》78（6，2008年），第062335页。 DOI：10.1103/PhysRevA.78.062335。[Got24] D. Gottesman。“在经典世界中作为量子计算机生存。”发表于：教科书手稿预印本 8（2024年）。[Got96] D. Gottesman。“达到量子汉明界的一类量子纠错码。”发表于：《物理评论A》54（3，1996年），第1862–1868页。 DOI：10.1103/Phy sRevA.54.1862。[HCMBS20] R. J. Harris、E. Coupe、N. A. McMahon、G. K. Brennen 和 T. M. Stace。“使用整数优化解码器对全息码进行解码。”发表于：《物理评论A》102（6，2020年），第062417页。 DOI：10.1103/PhysRevA.102.062417。[Jac17] T. B. Jackson。《简并码与量子信道容量》。博士论文。圭尔夫大学，2017年。[KP25] A. R. Kalra 和 S. Prakash。“不变理论与魔态蒸馏。”发表于：arXiv预印本 arXiv:2501.10163（2025年）。[Llo97] S. Lloyd。“含噪量子信道的容量。”发表于：Physical Review A 55.3（1997年），第1613页。[LLS18] F. Leditzky、D. Leung 和 G. Smith。“退相位擦除信道与相干信息的超可加性。”发表于：Physical review letters 121.16（2018年），第160501页。[LLSSS23] F. Leditzky、D. Leung、V. Siddhu、G. Smith 和 J. A. Smolin。“简单信道中量子容量的普遍非可加性。”发表于：Physical review letters 130.20（2023年），第200801页。[MS77] F. J. MacWilliams 和 N. J. A. Sloane。《纠错码理论》。第16卷。爱思唯尔，1977年。[PYHP15] F. Pastawski、B. Yoshida、D. Harlow 和 J. Preskill。“全息量子纠错码：体/边界对应的玩具模型。”发表于：高能物理学杂志 2015.6（2015年），第1–55页。[Rai02a] E. M. Rains。“量子影子重量枚举式。”发表于：IEEE信息论汇刊 45.7（2002年），第2361–2366页。[Rai02b] E. M. Rains。“量子重量枚举式。”发表于：IEEE信息论汇刊 44.4（2002年），第1388–1394页。[Rai98] E. Rains。“自对偶码的影子界。”发表于：IEEE信息论汇刊 44.1（1998年），第134–139页。 DOI：10.1109/18.651000。[Rai99] E. M. Rains。“对可蒸馏纠缠的严格处理。”发表于：Physical Review A 60.1（1999年），第173页。

[Ral17] P. Rall.「带符号量子权枚举器刻画量子比特魔态蒸馏。」载于：arXiv预印本 arXiv:1702.06990（2017年）。[RGBF17] A. Robertson、C. Granade、S. D. Bartlett 和 S. T. Flammia。「面向小型量子存储器的定制码。」载于：《物理评论应用》8（6，2017年），第064004页。 DOI：10.110 3/PhysRevApplied.8.064004。[Sch96] B. Schumacher。「通过有噪量子信道传送纠缠。」载于：《物理评论A》54（4，1996年），第2614–2628页。 DOI：10.1103/PhysRevA.54.2614。[Sha48] C. E. Shannon。「通信的数学理论。」载于：《贝尔系统技术期刊》27.3（1948年），第379–423页。 DOI：10.1002/j.1538-7305.1948.tb0 1338.x。[Sho02] P. W. Shor。「量子信道容量与相干信息。」载于：MSRI量子计算研讨会讲义。第5卷。2002年。[SL97] P. Shor 和 R. Laflamme。「经典编码理论中 MacWilliams 恒等式的量子类比。」载于：《物理评论快报》78.8（1997年），第1600页。[SN96] B. Schumacher 和 M. A. Nielsen。「量子数据处理与纠错。」载于：《物理评论A》54（4，1996年），第2629–2635页。 DOI：10.1103/PhysRevA.54.2629。[SS07] G. Smith 和 J. A. Smolin。「泡利信道的简并量子码。」载于：《物理评论快报》98.3（2007年），第030501页。[SS96] P. W. Shor 和 J. A. Smolin。《量子纠错码未必会完全揭示错误综合》。1996年。arXiv：量子物理/9604006 [量子物理]。[SSW08] G. Smith、J. A. Smolin 和 A. Winter。「具有对称辅助信道的量子容量。」载于：IEEE信息论汇刊54.9（2008年），第4208–4217页。[SSY11] G. Smith、J. A. Smolin 和 J. Yard。「通过零量子容量高斯信道进行量子通信。」载于：《自然光子学》5.10（2011年），第624–627页。[SY08] G. Smith 和 J. Yard。「通过零容量信道进行量子通信。」载于：《科学》321.5897（2008年），第1812–1815页。

A 稳定子生成元和逻辑算子

Code	稳定子生成元	逻辑算子
3 重复 (X)	XXI, XIX	XII, ZZZ
3 重复 (Z)	ZZI, ZIZ	XXX, ZII
4 次重复 (Z)	ZZII, ZIZI, ZIIZ	XXXX, ZIII
5 Rep (Z)	ZZIII, ZIZII, ZIIZI, ZIIIZ	XXXXX, ZIIII
7 Rep (X)	XXIIIII, XIXIIII, XIIXIII, XIIIXII, XIIIIXI, XIIIIIX	XIIIIII, ZZZZZZZ
5量子比特	XZZXI、IXZZX、XIXZZ、ZXIXZ	XXXXX, ZZZZZ
7量子比特 (Steane)	IIIXXXX, IXXIIXX, XIXIXIX, IIIZZZZ, IZZIIZZ, ZIZIZIZ	XXXXXXX, ZZZZZZZ
定制 [[7,1,3]] H	XZIZXII, IXZIZXI, IIXZIZX, XIIXZIZ, ZXIIXZI, IZXIIXZ ，ZIZXIIX	XXXXXXX, ZZZZZZZ
[[6,1,3]] H	ZIZIII, XZYYXI, XXXXZI, IZZXIX, XYXYIZ	XZXZII, XYYXII
CD Steane H	XZZIIIX ， XIZXZII ， XIIIZZX ， ZXXIIIZ ， ZIXZXII ， ZIIIXXZ	XZZXZZX ，ZXXZXXZ
SCF H	XXIXI ，IIXXX ，ZIZZI ，IZIZZ	XIXII ，IIZIZ
Shor	ZZIIIIIII ， ZIZIIIIII ， IIIZZIIII ， IIIZIZIII ， IIIIIIZZI ，IIIIIIZIZ ，XXXXXXIII ，XXXIIIXXX	XXXXXXXXX ，ZZZZZZZZZ
11量子比特	ZZZZZZIIIII, XXXXXXIIIII, IIIZXYYYYXZ, IIIXYZZZZYX ， ZYXIIIZYXII ， XZYIIIXZYII ， IIIZYXXYZII ， IIIXZYZXYII ， ZXYIIIZZZXY ， YZXIIIYYYZX	IIIIIIXXXXX, IIIIIIZZZZZ
13量子比特	XIZZIXIIIIIII, IXIZZIXIIIIII, IIXIZZIXIIIII, IIIXIZZIXIIII ， IIIIXIZZIXIII ， IIIIIXIZZIXII ， IIIIIIXIZZIXI ， IIIIIIIXIZZIX ， XIIIIIIIXIZZI ， IXIIIIIIIXIZZ ，ZIXIIIIIIIXIZ ，ZZIXIIIIIIIXI	XXXXXXXXXXXXX, ZZZZZZZZZZZZZ
偏置9量子比特	ZZIZIZIXY, XZZIZZIIX, IXZIIZZZY, IZXZZIZIY, ZIZXZIIZY ，ZZIIXIZZX ，ZIZZIXZIX ，IIIZZZXZX	IIIIXXIIX, ZZZZZZZZZ
偏置13量子比特	XZIZZZIZIIIZX, IXZIZZZZZIIIY, ZZXZIIIZZZIIY, IIZXIZIZIZZZY ， ZIZZXIZZIIZIX ， IZIZZXZIIZZIY ， IIZZZIXIZZIZX ， ZIIIZZIXZZZIX ， ZZZIZIIIXIZZY ， IZIIIIZZZXZZX ，ZIIZIZZIZIXZY ，ZZZIIZZIIZIXX	XIIXXXIXIIXIX, ZZXXIXIXIIXII
[[4,2,2]]	XXXX, ZZZZ	XXII, IXXI, IZZI, ZZII
环面 [[8,2,2]]	XXIIXIXI, IIXXXIXI, XXIIIXIX, ZIZIZZII, IZIZZZII, ZIZIIIZZ	XIXIIIII, IIIIXXII, ZZIIIIII ，IIIIZIZI