arXiv:2603.04369v1 [math.ST] 4 Mar 2026

关于 d维环面上正弦偏斜族中费 Fisher 信息矩阵的奇异性

预印本

Emily Schutte阿姆斯特丹大学 荷兰
e.j.schutte@uva.nl

Sophia Loizidou卢森堡大学 卢森堡
sophia.loizidou@uni.lu

Vincent Laheurte卢森堡大学 卢森堡
vincent.laheurte@uni.lu

摘要

偏斜分布是对 d 维环面上的非对称数据进行建模的基础。在此背景下，非对称性通过正弦偏斜机制引入；据文献所载，这是唯一一种已在超环面上提出的偏斜机制。已知某些正弦偏斜模型在对称性附近会出现费 Fisher 信息矩阵奇异的情况，这对推断目的构成了重大问题。哪些正弦偏斜模型会出现 Fisher 信息奇异性，仍是一个悬而未决的问题。本文在一般的 d 维情形下，对具有这种奇异性的模型类别给出了通用刻画。

关键词 方向统计学 · 非对称性 · Fisher 信息奇异性

1 引言

许多现实世界的数据集都可以自然地表示为 d 维环面上的数据。值得注意的例子来自生物信息学领域，尤其是蛋白质折叠预测问题，其中角度起着核心作用 [14, 20, 21]。其他例子包括 RNA数据 [24] 以及小鼠两种不同组织的昼夜节律钟 [18]。除生物信息学领域外，环面数据还出现在各种领域：动物运动的方向 [22]，人类神经元的形态学数据 [29], 风向数据 [13] 以及地震前后的最速下降方向 [28],，仅举这些例子。

文献中已提出许多分布来建模 d 维角度数据。在圆上（$d = 1$），重要的分布包括冯·米塞斯分布、心形分布、缠绕柯西分布和缠绕正态分布等。在二维环面上，常用的模型包括双变量缠绕柯西分布 [15, 13],、双变量冯·米塞斯分布 [19] 及其子模型——正弦 [31] 和余弦 [21] 分布。对于更高维的情形，三元包裹柯西 copula [14] 可用于对三个角度建模，而多变量缠绕正态分布 [6] 以及正弦和余弦分布的多变量扩展 [20] 则可用于任意维度。有关概述，请参阅 [17] 和 [26]。

上述模型的一大局限在于其对称性，因此无法捕捉圆形和环面数据中可观察到的非对称现象 [2, 27, 10]。认识到圆上的这一需求后， [32] 和 [1]借鉴了 [5] 提出的广受欢迎的偏斜正态分布，并提出了圆上的正弦偏斜分布。 [3] 将这一方案推广到 d维环面，从而得到如下形式的密度

$$\boldsymbol{\theta} \mapsto f_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\vartheta}) := f_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\vartheta})\left(1+\sum_{j=1}^{d}\lambda_j \sin(\theta_j-\mu_j)\right) \tag{1}$$

满足 $\sum_{j=1}^{d}|\lambda_j| \leq 1$，其中 f_0 是 d维环面上的对称基准密度（如上文提及的所有密度）， $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots\ldots, \mu_d)^\intercal \in [-\pi,\pi)^d$是位置参数， $\boldsymbol{\vartheta}$ 表示任意非位置参数，而$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_d)^\intercal \in (-1, 1)^d$则起到偏度参数的作用。本文其余部分为便于阅读，将省略记号中的 $\boldsymbol{\vartheta}$。

这些偏斜模型满足了对非对称分布的需求，并提高了 d维环面上分布的灵活性，但这也带来了代价。事实上，这些模型的费 Fisher 信息矩阵（Fisher 信息矩阵）及由此引发的推断挑战，构成了一个主要问题。在实数轴上， [5] 发现，当 $\lambda = 0$时，也就是接近对称时，偏斜正态分布的 Fisher 信息矩阵会变得奇异。大量文献探讨了这一问题，详见 [8] 的全面论述。不幸的是，按照（1）中定义的正弦偏斜分布族也会出现这种奇异性，这并不令人意外，因为其构造遵循了与 [5]的偏斜正态分布相同的原理。 [16] 指出，在圆周情形下，当且仅当对冯·米塞斯分布应用正弦偏斜变换时，接近对称处的 Fisher 信息矩阵才会奇异，因此其他对称密度均不会产生这一结果。这一现象源于位置得分与偏斜度得分之间不幸的共线性。 [4] 指出，在二维情形下，正弦偏斜余弦分布也会出现奇异性。这一观察符合预期，因为余弦分布是冯·米塞斯模型在环面上的扩展。然而，有趣的是，正弦分布是同一模型的另一种二维扩展，却没有出现相同的问题。这种对比凸显出，将奇异性结果推广到圆周之外并非易事。

此类奇异性会带来问题，因为 Fisher 信息矩阵的奇异性表明，数据中缺乏足够信息，无法唯一识别参数。一个重要的推断后果是，最大似然估计量的渐近正态性不再成立。此外，当 Fisher 信息矩阵非奇异时，真参数的收敛速度为 $O(n^{-\frac{1}{2}})$。然而，当矩阵奇异时，这一速度可能显著变慢，而且似然也可能出现双峰性等不规则现象 [30]。这会严重影响许多依赖渐近正态性这一性质的统计程序，例如假设检验和置信区间的构造。Fisher 信息矩阵的奇异性也与（非参数）样本弗雷歇均值的涂抹性密切相关 [12]。 [11]的定理3表明，在底层密度与均匀分布首次在其 $-\pi$ 阶导数处出现差异的假设下，内蕴样本均值的收敛速度为 $n^{-\frac{1}{2(k+1)}}$，慢于前述的 $n^{-\frac{1}{2}}$ 速度。

鉴于目前尚不清楚 d维环面上哪些正弦偏斜分布会遭受FIM奇异性，我们在本文中完整回答了这一开放问题。在第2节中，我们给出超环面上对称密度函数的一般形式，该形式成立当且仅当其正弦偏斜版本在对称性附近具有奇异 Fisher 信息矩阵。在第3节中，我们考虑一些著名的分布，并研究它们是否满足所提出的刻画，从而是否遭受FIM奇异性。最后，我们在第4节以讨论结束本文。

2 d维环面的Fisher 信息奇异性

在本节中，我们建立本文的主要结果。考虑模型(1)，我们要求 f_0 为逐分量 2π-周期的、对称的密度，关于 $\boldsymbol{\mu} \in [-\pi, \pi)^d$。更形式地说，我们要求 $f_0 \in \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 定义为

$$\mathcal{F} := \left\{ f_0(\boldsymbol{\theta}) : \begin{array}{l} f_0(\boldsymbol{\theta}) > 0 \text{ a.e. } \forall \boldsymbol{\theta} \in [-\pi, \pi)^d, \\ f_0(\boldsymbol{\theta} + 2\pi \boldsymbol{k}) = f_0(\boldsymbol{\theta}) \ \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d, \\ f_0(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\theta}) = f_0(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}) \ \forall \boldsymbol{\theta} \in [-\pi, \pi)^d, \\ \int_{[-\pi,\pi)^d} f_0(\boldsymbol{\theta}) \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = 1. \end{array} \right\}.$$

我们还需要以下较弱的假设。

假设 1. 映射 $\boldsymbol{\theta} \mapsto f_0(\boldsymbol{\theta})$ 在 $[-\pi, \pi)^d$ 上可微。

在定理 1 中，我们推导出对称密度的一般表达式；当且仅当其正弦偏斜版本的 Fisher 信息矩阵在对称性附近奇异时，该表达式才成立。定理的证明基于这样一个事实：当且仅当位置参数和偏度参数对应的得分函数各元素线性相关时，Fisher 信息矩阵才是奇异的。直接计算可得，式 (1) 在对称性附近的得分函数为

$$S_{f_0} = \left(-\frac{\frac{\partial}{\partial \theta_1} f_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})}{f_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})}, \ldots, -\frac{\frac{\partial}{\partial \theta_d} f_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})}{f_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})}, \sin(\theta_1 - \mu_1), \ldots, \sin(\theta_d - \mu_d) \right)^{\intercal}. \tag{2}$$

为便于记号，我们利用以下事实，重点考察关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的偏导数：对于 $i \in \{1, \ldots, d\}$，$-\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log f_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \log f_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})$。为作说明，我们令 $f_0(\boldsymbol{\theta})$ 为余弦密度，计算式 (2)，并为方便起见在记号中省略 $\boldsymbol{\mu}$。其密度为

$$f_C(\boldsymbol{\theta}) = C_c \exp\left\{\kappa_1 \cos(\theta_1) + \kappa_2 \cos(\theta_2) + \beta \cos(\theta_1 - \theta_2)\right\} \tag{3}$$

其中 C_c 是相应的归一化常数， $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$ 为集中参数。可以计算得

$$S_{f_C} = (\kappa_1 \sin(\theta_1) + \beta \sin(\theta_1 - \theta_2), \kappa_2 \sin(\theta_2) - \beta \sin(\theta_1 - \theta_2), \sin(\theta_1), \sin(\theta_2))^\intercal$$

其元素线性相关，形式为 $\langle (1, 1, -\kappa_1, -\kappa_2)^\intercal, S_{f_C} \rangle = 0$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量的内积。这证实余弦模型在对称性附近具有奇异 Fisher 信息矩阵，如 [4]所述。在给出该定理的陈述之前，我们定义函数

$$h_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu}) := f_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu}) \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \gamma_i \cos(\theta_i - \mu_i)\right) \tag{4}$$

对于 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)^\intercal \in \mathbb{R}^d$ 与 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_d)^\intercal \in [-\pi, \pi)^d$。该定理的证明见补充材料。

定理 1. 设 $f_0 \in \mathcal{F}$ 满足假设 *1*。 $f_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})$ 的正弦偏斜版本的 *Fisher* 信息矩阵在对称性附近是奇异的，当且仅当存在向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)^\intercal \in \mathbb{R}^d$，对 $i \in \{1, \ldots, d\}$ 有 $\alpha_i \neq 0$，使得 (4) 中定义的 $h_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})$满足

$$h_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu} + t\boldsymbol{\alpha}) = h_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu}) \tag{5}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{\theta} \in [-\pi, \pi)^d$。

换言之，当且仅当其可以写成如下形式时， $f_0(\boldsymbol{\theta})$ 的正弦偏斜版本的 Fisher 信息矩阵在对称性附近会是奇异的:

$$f_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) = h_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \exp\left(-\sum_{i=1}^{d} \gamma_i \cos(\theta_i - \mu_i)\right)$$

对于满足 (5) 的 $h_0(\boldsymbol{\theta})$，此结果完整刻画了哪些对称密度函数 f_0 与正弦偏斜机制结合后会在对称性附近出现 Fisher 信息矩阵奇异性，哪些则不会，因此彻底解决了这一悬而未决的问题。下一节中，我们将把该结果应用于文献中的若干知名分布，以概述出现的 Fisher 信息矩阵奇异性。此结果非常重要，因为它能告知研究人员推断程序何时能够照常运行、何时会出现问题，正如引言中所解释的那样。

事实上，定理 1 的结果具有更广泛的适用性，因为对于任何在对称性附近具有得分向量 (2) 的偏斜机制，该结果均成立。正如 [4], 中所述，形式如下的偏斜机制

$$\boldsymbol{\theta} \mapsto f_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu}) \prod_{j=1}^{d} (1 + \lambda_j \sin(\theta_j - \mu_j)),$$

主题 至 $|\lambda_j| \leq 1$， $j = 1$，……， d，具有相同的得分函数，因此存在奇异性问题 s.

另一种偏斜机制由 [7]在二维环面上提出。所提出的模型形式为

$$\boldsymbol{\theta} \mapsto C_{m,f_0} f_0(\theta_1 - \mu_1, \theta_2 - \mu_2) \left(\frac{1 + \lambda_1 \sin(\theta_1 - \mu_1) + \lambda_2 \sin(\theta_2 - \mu_2)}{2}\right)^m$$

其中归一化常数为 $C_{m,\ f_0}$， m 为正整数， $\boldsymbol{\mu} =$ 为位置参数（μ_1， μ_2）$^\intercal \in [-\pi, \pi)^2$。该偏斜机制在对称性附近的得分函数为

$$\left(-\frac{\frac{\partial}{\partial \theta_1} f_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})}{f_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})}, -\frac{\frac{\partial}{\partial \theta_2} f_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})}{f_0(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})}, m \sin(\theta_1 - \mu_1), m \sin(\theta_2 - \mu_2)\right)^\intercal.$$

Thu因此，定理 1 的结果同样适用于该偏斜机制，只需将 γ_i 按 γ_i/m 进行缩放 .

3 个已知分布的示例

在本节中，我们将考察哪些分布能够表示为形式 (4)，其中函数 $h_0(\boldsymbol{\theta})$ 满足 (5)。换言之，我们将梳理文献中一些最著名的对称模型，并讨论哪些模型在经过正弦偏斜后容易出现 FIM 奇异性，哪些则不会。如引言中所述，圆上的冯·米塞斯分布具有奇异 FIM，因此我们将重点关注它的扩展形式。为简洁起见，记号中省略位置参数 $\boldsymbol{\mu}$。

- **独立冯·米塞斯分布的乘积：**其密度为

$$f_{ivM}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\prod_{i=1}^{d} \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_i)}\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \kappa_i \cos(\theta_i)\right)$$

其集中参数为 κ_i，对应 $i = 1$、.....、d。令 $\gamma_i = -\kappa_i$，则有

$$h_0(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_i)},$$

显然 $h_0(\boldsymbol{\theta})$ 满足（5），因为该函数为常数，因此 $f_{ivM}(\boldsymbol{\theta})$ 的正弦偏斜版本会遭遇在对称性附近奇异 Fisher 信息矩阵。

- **正弦分布：**其密度为

$$f_S(\boldsymbol{\theta}) = C_S \exp\{\kappa_1 \cos(\theta_1) + \kappa_2 \cos(\theta_2) + \beta \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\}$$

其归一化常数为 C_S，集中参数为 κ_1，$\kappa_2 \geq 0$、$\beta \in \mathbb{R}$。可知，$f_S(\boldsymbol{\theta})$ 可写成式 (4) 的形式，其中 $\gamma_1 = -\kappa_1$、$\gamma_2 = -\kappa_2$ 和

$$h_0(\boldsymbol{\theta}) = C_S \exp\{\beta \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\}.$$

为了计算 α_1，α_2，我们可以令 $t = 1$ 并求解 $h_0(\boldsymbol{\theta}) = h_0(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\alpha})$，从而得到 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi k$，其中 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。然而，对于 $t = \frac{1}{4}$，$h_0(\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}) = C_S \exp\{\beta \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\} \neq h_0(\boldsymbol{\theta})$。因此，$h_0(\boldsymbol{\theta})$ 不满足式 (5)，故 $f_S(\boldsymbol{\theta})$ 在对称性附近不会出现奇异 Fisher 信息矩阵。

- **余弦分布：**其密度由式 (3) 给出。可知，$f_C(\boldsymbol{\theta})$ 可写成式 (4) 的形式，其中$\gamma_1 = -\kappa_1$、$\gamma_2 = -\kappa_2$ 和

$$h_0(\boldsymbol{\theta}) = C_c \exp\{\beta \cos(\theta_1 - \theta_2)\}.$$

容易看出，对于 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $h_0(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\alpha}t) = C_c \exp\{\beta \cos(\theta_1 + t - \theta_2 - t)\} = h_0(\boldsymbol{\theta})$，因此$f_C(\theta_1, \theta_2)$在对称性附近会出现奇异 Fisher 信息矩阵。

- **多元冯·米塞斯分布：**记 $s(\boldsymbol{\theta}) = (\sin\theta_1, \ldots, \sin\theta_d)^\intercal$，类似地，$c(\boldsymbol{\theta}) = (\cos\theta_1, \ldots, \cos\theta_d)^\intercal$，[20] 提出了以下正弦和余弦模型的多变量扩展：
  - **正弦分布的多元扩展：**其密度为

$$f_{mvS}(\boldsymbol{\theta}) = C_{mvS} \exp\left\{\boldsymbol{\kappa}^\intercal c(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} s(\boldsymbol{\theta})^\intercal \Lambda s(\boldsymbol{\theta})\right\}$$

归一化常数 C_{mvS}, $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^d$ 以及对称矩阵 $\Lambda \in \mathbb{R}^{d\times d}$，其中 $(\Lambda)_{ii} = 0$ 对于 $i \in \{1, \ldots, d\}$。可知，$f_{mvS}(\boldsymbol{\theta})$可写成式 (4) 的形式，其中 $\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\kappa}$，且

$$h_0(\boldsymbol{\theta}) = C_{mvS} \exp\left\{\frac{1}{2} s(\boldsymbol{\theta})^\intercal \Lambda s(\boldsymbol{\theta})\right\}.$$

与正弦模型类似的计算得出结论：$h_0(\boldsymbol{\theta})$不满足(5)，因此$f_{mvS}(\boldsymbol{\theta})$在对称性附近不存在奇异 Fisher 信息矩阵。

  - **余弦分布的多元扩展：**密度由下式给出

$$f_{mvC}(\boldsymbol{\theta}) = C_{mvC} \exp\Big(\boldsymbol{\kappa}^\intercal c(\boldsymbol{\theta}) - s(\boldsymbol{\theta})^\intercal \Delta s(\boldsymbol{\theta}) - c(\boldsymbol{\theta})^\intercal \Delta c(\boldsymbol{\theta})\Big) \tag{6}$$

归一化常数为 C_{mvC}, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_d)^\intercal \in \mathbb{R}^d$，对称矩阵 $\Delta \in \mathbb{R}^{d\times d}$满足$(\Delta)_{ij} = \delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\delta_{ii} = 0$，其中 $i, j \in \{1, \ldots, d\}$。利用三角恒等式

$$\cos(\theta_i - \theta_j) = \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) + \sin(\theta_i)\sin(\theta_j)$$

对于 $i \neq j$，(6) 等价地可写为

$$f_{mvC}(\boldsymbol{\theta}) = C_{mvC} \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \kappa_i \cos(\theta_i) - \sum_{j=1}^{d}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{d} \delta_{jk} \cos(\theta_k - \theta_j)\right)$$

对于 $\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\kappa}$ 和，可将其写成形式 (4)

$$h_0(\boldsymbol{\theta}) = C_{mvC} \exp\left(-\sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{d} \delta_{jk} \cos(\theta_k - \theta_j) \right).$$

(5) 对 $(\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_d)^\intercal = (1、\ldots\ldots、1)^\intercal$ 成立，因此 $f_{mvC}(\boldsymbol{\theta})$ 在对称性附近具有奇异 Fisher 信息矩阵。

- **双变量缠绕柯西分布：**其密度为

$$f_{bwC}(\boldsymbol{\theta}) = c\{c_0 - c_1 \cos(\theta_1) - c_2 \cos(\theta_2) - c_3 \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - c_4 \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\}^{-1}$$

对于 c，c_0，c_1，c_2，c_3，c_4，如 [15] 中所给出。密度 $f_{bwC}(\boldsymbol{\theta})$ 可写成形式 (4)，其中 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^2$且

$$h_0(\boldsymbol{\theta}) = f_{bwC}(\boldsymbol{\theta}) \exp\left(\sum_{i=1}^{2} \gamma_i \cos(\theta_i) \right).$$

可以证明，$h_0(\boldsymbol{\theta})$ 不满足 (5)，因此 $f_{bwC}(\boldsymbol{\theta})$ 在对称性附近不具有奇异 Fisher 信息矩阵。将相同的推理应用于 [14] 的三变量缠绕柯西分布，也会得出相同的结论。

所有所考虑模型的结论都符合预期，并从形式上证实了 [4] 关于正弦和余弦模型的论述。有趣的是，我们可以观察到我们的结果与 [8] 的结论之间存在一些相似之处。当考虑实数轴上的一类偏斜函数 $\Pi(\cdot)$ 时，他们证明只有高斯分布在对称性附近具有奇异 Fisher 信息矩阵。在圆上，高斯分布的对应分布被认为是冯·米塞斯分布；对于其在环面上的扩展，我们证明了存在类似问题。

4 讨论

本文推导出一个一般表达式，用以刻画与正弦偏斜机制结合时会出现奇异 Fisher 信息矩阵问题的对称模型类别。正如引言中所强调的，Fisher 信息矩阵的奇异性会对推断程序产生负面影响，因此极不可取。

文献中提出的一种解决这一问题的方法，是采用重新参数化技术来消除这类奇异性。一个重要例子是 [9] 基于得分空间中的格拉姆–施密特正交化所引入的参数化方法。该方法的核心思想是对得分向量进行正交化，使其分量线性独立。然而，重新参数化往往会导致可解释性降低，而可解释性正是正弦偏斜方法原有的优势之一。因此，另一种值得探索的解决思路是构建不会遭遇相同奇异性问题的替代偏斜机制。

文献中已提出了一些适用于圆周分布的不同偏斜模型，例如见 [23]。然而，据我们所知，尚未有人为 d 维环面提出其他偏斜机制。尽管提出一种不受奇异性问题影响的偏斜机制超出了本文的研究范围，但这可以作为未来的研究方向。

定理1的证明

为证明该定理，我们将密度写作 $f_0(\boldsymbol{\theta})$，为方便起见，在记号中省略 $\boldsymbol{\mu}$。将 $\boldsymbol{\theta}$ 替换为 $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}$（或者等价地，将 θ_i 替换为 $\theta_i - \mu_i$，对于 $i = 1、\ldots\ldots、d$），所有结果仍然成立。

证明。 任意经正弦偏斜处理的对称分布 f_0 的 Fisher 信息矩阵 I_{f_0} 为

$$I_{f_0} = \mathbb{E}\left[S_{f_0} S_{f_0}^\intercal \right],$$

其中，S_{f_0} 表示在对称性附近取值的得分函数。矩阵 I_{f_0} 是奇异的，当且仅当 S_{f_0} 的分量线性相关。式 (1) 在对称性附近的得分函数对应于

(2)。因此，Fisher 信息矩阵是奇异的，当且仅当存在实系数 α_1、.....、α_d、β_1、.....、β_d，且这些系数不全为 0，满足

$$-\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\frac{\frac{\partial}{\partial\theta_i}f_0(\boldsymbol{\theta})}{f_0(\boldsymbol{\theta})}+\sum_{i=1}^{d}\beta_i\sin(\theta_i)=0,$$

可改写为

$$\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\frac{\partial}{\partial\theta_i}f_0(\boldsymbol{\theta})=f_0(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{d}\beta_i\sin(\theta_i). \tag{7}$$

我们的目标是利用特征线法（更多详情见 [25]），求解带有初始条件 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0$ 的偏微分方程 (7)。该偏微分方程的输运结构导出一族曲线，称为特征曲线；沿这些曲线，偏微分方程 (7) 可化简为常微分方程。经典上，这些曲线通过对输运系数积分来定义，在此给出如下：

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,\boldsymbol{\theta}_0)=\boldsymbol{\alpha}.$$

将此 结合初始条件 $\varphi(0,\ \boldsymbol{\theta}_0)=\boldsymbol{\theta}_0$，特征曲线即为由下式给出的直线 y

$$\varphi(t,\boldsymbol{\theta}_0)=\boldsymbol{\theta}_0+t\boldsymbol{\alpha}.$$

接下来，为了通过吸收偏微分方程 (7) 的右端项来简化该方程，我们定义

$$h_0(\boldsymbol{\theta})=f_0(\boldsymbol{\theta})\exp\left(\sum_{i=1}^{d}\gamma_i\cos(\theta_i)\right),$$

其中 $\gamma_i=\frac{\beta_i}{\alpha_i}$对于 $\alpha_i\neq0$。求解 (7) 等价于求解齐次偏微分方程

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\frac{\partial h_0(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\\&=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\frac{\partial f_0(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\cdot\exp\left(\sum_{i=1}^{d}\gamma_i\cos(\theta_i)\right)-f_0(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{d}\beta_i\sin(\theta_i)\cdot\exp\left(\sum_{i=1}^{d}\gamma_i\cos(\theta_i)\right)\\&=0.\end{aligned} \tag{8}$$

接下来我们推导出 t 该输运问题的解沿特征曲线满足的简单常微分方程 s:

$$\frac{\mathrm{d}h_0(\varphi(t,\boldsymbol{\theta}_0))}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial h_0}{\partial\theta_i}(\varphi(t,\boldsymbol{\theta}_0))\cdot\frac{\partial(\boldsymbol{\theta}_0+t\boldsymbol{\alpha})}{\partial t}=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\frac{\partial h_0}{\partial\theta_i}(\varphi(t,\boldsymbol{\theta}_0)).$$

回顾其等价表述 (8)，偏微分方程 (7) 成立，当且仅当对于所有 $t,\ \boldsymbol{\theta}_0$,

$$\frac{\mathrm{d}h_0(\varphi(t,\boldsymbol{\theta}_0))}{\mathrm{d}t}=0,$$

也就是说，如果 h_0 在每条特征曲线上保持恒定。仅
s holds if an且仅当存在 $\alpha_i\neq0$ 使得对于所有 $t\in\mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_0\in[-\pi,\pi)^d$, $h_0(\boldsymbol{\theta}_0+t\boldsymbol{\alpha})=h_0(\boldsymbol{\theta}_0)$。

□

致谢：作者谨向 Christophe Ley 致以谢意，感谢他参与建设性的讨论并提供宝贵的反馈。

资助：Sophia Loizidou 获得卢森堡国家研究基金项目 PRIDE/21/16747448/MATHCODA 的资助。

参考文献

[1] Abe, T., Pewsey, A., 2011年。通过复制与余弦扰动构建对称圆形模型。《计算统计与数据分析》55，3271–3282。[2] Ameijeiras-Alonso, J., Crujeiras, R.M., 2022年。《灵活圆形建模：交通事故案例研究》，载于：《创新应用方向统计学：纪念弗洛伦斯·南丁格尔诞辰二百周年文集》。施普林格，第93–116页。[3] Ameijeiras-Alonso, J., Ley, C., 2022年。正弦偏斜环面分布及其在蛋白质生物信息学中的应用。《生物统计学》23，685–704。[4] Anastasiou, A., Ley, C., Loizidou, S., 2025年。构造环面上对称性的最优检验及其定量误差界。arXiv:2510.06055。[5] Azzalini, A., 1985年。一类包含正态分布的分布。《斯堪的纳维亚统计学杂志》12，171–178。[6] Baba, Y., 1981年。角度数据统计：缠绕正态分布模型（日文）。《统计数理研究所年刊》28，41–54。[7] Bekker, A., Nakhaei Rad, N., Arashi, M., Ley, C., 2022年。广义偏斜对称圆形与环面分布，载于：《创新应用方向统计学：纪念弗洛伦斯·南丁格尔诞辰二百周年文集》。施普林格，第161–186页。[8] Hallin, M., Ley, C., 2012年。偏斜对称分布与 Fisher 信息——两个密度的故事。《伯努利》18，747–763。[9] Hallin, M., Ley, C., 2014年。偏斜对称分布与 Fisher 信息：偏斜正态分布的双重正弦。《伯努利》20，1432–1453。[10] Harvey, A., Hurn, S., Palumbo, D., Thiele, S., 2024年。圆形时间序列建模。《计量经济学杂志》239，105450。[11] Hotz, T., Huckemann, S., 2015年。圆上的内在均值：唯一性、轨迹与渐近性质。《统计数理研究所年刊》67，177–193。[12] Hundrieser, S., Eltzner, B., Huckemann, S., 2024年。弗雷歇均值的有限样本涂抹性及其在气候中的应用。《电子统计学杂志》18，3274–3309。[13] Kato, S., 2009年。由布朗运动生成的一对单位向量的分布。《伯努利》15，898–921。[14] Kato, S., Ley, C., Loizidou, S., Mardia, K.V., 2025年。三元包裹柯西 copula。arXiv:2401.10824。[15] Kato, S., Pewsey, A., 2015年。由莫比乌斯变换诱导的环面分布。《生物计量学》102，359–370。[16] Ley, C., Verdebout, T., 2014年。关于指定中位方向的圆形反射对称性的简单最优检验。《中华统计学志》24，1319–1339。[17] Ley, C., Verdebout, T., 2017年。《现代方向统计学》。Chapman and Hall/CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州。[18] Liu, D., Peddada, S., Li, L., Weinberg, C.R., 2006年。两个组织中昼夜节律相关基因的相位分析。《BMC生物信息学》7，87。[19] Mardia, K.V., 1975年。《方向数据统计学》。《英国皇家统计学会会刊B辑（方法论）》37，349–371。[20] Mardia, K.V., Hughes, G., Taylor, C.C., Singh, H., 2008年。一种多元冯·米塞斯分布及其在生物信息学中的应用。《加拿大统计学杂志》36，99–109。[21] Mardia, K.V., Taylor, C.C., Subramaniam, G.K., 2007年。用于角度数据的蛋白质生物信息学与双变量冯·米塞斯分布混合。《生物计量学》63，505–512。[22] Mastrantonio, G., 2022年。对具有共同特征的多只动物运动的建模。《英国皇家统计学会会刊C辑：应用统计》71，932–950。[23] Miyata, Y., Shiohama, T., Abe, T., 2024年。正弦偏斜圆形分布的扩展。arXiv 预印本 arXiv:2402.09788。[24] Nodehi, A., Golalizadeh, M., Maadooliat, M., Agostinelli, C., 2018年。环面数据的多元包裹模型估计。arXiv:1811.06007。[25] Novozhilov, A., 2023年。偏微分方程本科课程（2023年春季版）。[26] Pewsey, A., García-Portugués, E., 2021年。方向统计学的最新进展。《TEST》30，1–58。

[27] Rad, N.N., Bekker, A., Arashi, M., 2022年. 运用贝叶斯混合建模提升南非风能热点地区的风向预测。《科学报告》12, 11442.[28] Rivest, L.P., 1997年. 用于圆-圆回归的偏心预测量。《生物计量学》84, 717–726.[29] Rodriguez-Lujan, L., Bielza, C., Larrañaga, P., 2015年. 正则化多元冯·米塞斯分布，载于：《人工智能进展》。施普林格国际出版，查姆。第9422卷，第25–35页。丛书名称：《计算机科学讲义》。[30] Rotnitzky, A., Cox, D.R., Bottai, M., Robins, J., 2000年. 基于似然的奇异信息矩阵推断。《伯努利》6, 243 – 284.[31] Singh, H., Hnizdo, V., Demchuk, E., 2002年. 两个相关圆形变量的概率模型。《生物计量学》89, 719–723.[32] Umbach, D., Jammalamadaka, S.R., 2009年. 在圆分布中引入非对称性。《统计与概率快报》79, 659–663。