arXiv:2603.04386v1 [math.PR] 4 Mar 2026

有限锥类型图上的高斯波

Amir Dembo斯坦
福大学
ade
mbo@stanford.edu

Theo McKenzie
斯坦福大学
theom@stanford.edu

摘要

我们证明，对于任意满足温和扩张条件的有限锥类型无限树，在其顶点上，协方差由格林函数诱导的典型过程只有高斯波。此结果推广了 Backhausz 和 Szegedy 的一项结果；他们证明了这一结论对度为 $d \geq 3$ 的无限正则树成立。我们的证明方法是将问题归约为一个关于我们的过程与格林函数各列内积之分布的命题，而该分布可以直接计算。

因此，对于随机二部双正则图，特征向量局部邻域的分布必须近似于高斯波。此外，对于包括随机提升在内的一般配置模型，从任意小谱窗口中均匀选取的特征向量，其局部分布同样收敛于高斯波。

1 引言

Berry 随机波猜想是量子混沌系统研究中的一项基础性预言 [10, 11]。该猜想认为，特征函数的局部统计会收敛到高斯随机波的局部统计。这个问题的离散版本已得到广泛研究，而大型稀疏图长期以来一直被用作研究量子混沌的系统 [32]。一般而言，人们启发式地认为，这些图的谱测度会收敛到其局部弱极限；而 Berry 猜想则指出，对于混沌模型，我们可以超越这种弱收敛，转而考察一种涉及局部统计的更强概念。

___ 我们将通过格林函数来明确这一点。定义 $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im[z] > 0\}$ 及其闭包$\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im[z] \geq 0\}$。对于具有邻接算子$A_{\mathcal{G}}$ 且$z \in \mathbb{C}^+$ 的图 $\mathcal{G}$，我们将格林函数定义为

$$G(z, \mathcal{G}) := [A_{\mathcal{G}} - z\mathbb{I}]^{-1}.$$

于是，我们可以将定义扩展到实线：对于 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$G(\lambda, \mathcal{G}) := \lim_{\eta \to 0^+} G(\lambda + \mathrm{i}\eta, \mathcal{G}).$$

如果 $\mathcal{G}$ 是顶点集为 $[N]$, 的有限图，我们将 斯蒂尔切斯变换 $m(z\ \mathcal{G})$ 定义为格林函数的归一化迹，即 $\frac{1}{N}\sum_{x\in[N]} G_{xx}$。我们可以将其理解为：从图中均匀随机选取一个顶点时，格林函数对角元的期望。更一般地，如果 $\mathcal{G}$ 是一个幺模随机图 （参见 [2]，其中有全面的综述），我们可以对图的根取期望。因此，对于 $\mathcal{G}$，其 $z \in \mathbb{C}^+$ 的斯蒂尔切斯变换定义为

$$m(z, \mathcal{G}) := \mathbb{E}_o[G(z, \mathcal{G})_{oo}],$$

其中 $\mathbb{E}_o[\cdot]$ 表示根据幺模测度对随机选取的根取期望 e.

我们称 $\lambda \in \mathbb{R}$ 属于 纯绝对连续谱，如果

$$0 < \Im(m(\lambda)) < \infty. \tag{1.1}$$

点谱对应于局域态，而绝对连续谱对应于量子算子的动力学退局域化（例如 [1, 定理 2.6]），因此我们可以在此观察到混沌

现象，即 Berry 猜想所描述的特征函数行为。Backhausz 和 Szegedy 的杰出工作 [8] 证明，除了特征值为 d 的平凡特征向量外，每个特征向量在无限正则树上的局部统计都符合高斯过程 $\mathcal{T}_d$（见定理 1.4）。由于无限正则树上的邻接算子的谱是纯绝对连续的，这为 Berry 猜想提供了证据。

d 正则图具有一项关键的简化特征：它的局部弱极限是无限正则树，而后者拥有庞大的自同构群。这是因为它是顶点传递的，而且更强地说，它还是距离正则的（对于任意一对长度相同的路径，都存在一个自同构将一条路径映射到另一条路径）。任何极限波都必须遵循这种对称性，而这种不变性在识别并求解极限过程相关公式时起着决定性作用。

然而，没有理由认为正则树的对称性对于混沌行为至关重要；我们证明了一项结果，支持 Berry 猜想，并将其推广至一类更广泛的随机图模型，这类模型是随机正则图的推广。具体而言，对于一大类配置模型——即具有指定度分布的随机图——我们证明，特征向量呈现高斯型统计特征，而其驱动因素仅为局部扩张性质。一项主要创新是借助格林函数对无限树上的高斯过程进行结构性分解，从而清楚地揭示这一机制。高斯波可以表示为一种高斯过程：通过预解式将独立同分布高斯噪声映射得到。也就是说，对于 $z=\lambda+\mathrm{i}\eta\in\mathbb{C}^+$，图 $\mathcal{T}$，以及一族 $\{\xi_x\}_{x\in V(\mathcal{T})}$ 满足 $\xi_x\sim\mathcal{N}(0,1)$ 分布的独立同分布随机变量，高斯波 $\Psi^z(\mathcal{T})$（见定理1.1）可表示为

$$\Psi^z(\mathcal{T})\overset{d}{=}\sqrt{\eta}\sum_{x\in V(\mathcal{T})}\xi_x G(z,\mathcal{T})_x, \tag{1.2}$$

其中 $G(z\ \mathcal{T})_x(\cdot):=G(z\ \mathcal{T})_{\cdot x}$ 表示核 $G(z\ \mathcal{T})$ 中对应于 $x\in V(\mathcal{T})$ 的列。为了证明任何候选分布都必须是高斯分布，我们考察其熵；其中一个关键洞见是，要找到高斯波的熵，只需考虑以下形式的矩

$$\{\langle\Psi^z(\mathcal{T}),G(z,\mathcal{T})_x\rangle\}_{x\in V(\mathcal{T})}.$$

当然，由于 Ψ^z 具有（1.2）中的分解，上式很容易计算。

虽然协方差的格林函数表示是已知的（见 [26, 第 1 节。1]），但将这一分解视为主要的分析工具，可以直接比较 $z\in\mathbb{C}^+$ 和 $z\in\mathbb{R}$ 两种情形，并为分析高斯波的熵提供一个清晰的框架。（1.2）可以与 Berry 猜想相关的启发式观点相比较：在双曲流形上，泊松核的傅里叶系数应当是独立同分布的高斯变量 [6, 35]。事实上，我们预计这种类型的分解在许多模型中都成立，并且对未来的研究有所帮助。

为了准确陈述我们的结果，我们给出如下定义：协方差由格林函数确定的特征向量过程。这一定义已在 [21], 中针对正则树给出，但更一般的定义如下。

定义 1.1. 在（可能是无限的）图 $\mathcal{T}$ 上，对于 $z\in\mathbb{C}^+$，一个特征向量过程 $\Phi^z(\mathcal{T})$ 是定义在 $V(\mathcal{T})$ 上的实值过程，该过程自同构不变且均值为零，并且对于每个 $x,y\in V(\mathcal{T})$，$\mathbb{E}[\Phi^z(\mathcal{T})_x\Phi^z(\mathcal{T})_y]=\Im[G(z\ \mathcal{T})_{xy}]$。

高斯波 $\Psi^z(\mathcal{T})$是唯一的实值高斯特征向量过程。

由 $z\in\mathbb{C}^+$，格林函数的虚部是半正定的，因此构成有效的协方差矩阵。此外，(1.2) 根据 Ward 恒等式 (B.4)具有正确的协方差。对于 $z\in\mathbb{R}$，当且仅当z 属于纯绝对连续谱时，高斯波是非平凡且具有有限方差的。

对于有限随机图族，我们将关注其万有覆盖上的高斯波，定义如下。

定义 1.2. 对于任意有限图 $\mathcal{G}$，其万有覆盖 $\mathcal{T}$ 是这样一棵树：它的顶点是 $\mathcal{G}$ 中的非回溯游走，相邻关系由此类游走的一步延拓给出。存在一个典范投影 $\pi:V(\mathcal{T})\to V(\mathcal{G})$，将每条游走映射到其在 $\mathcal{G}$ 中的终点。为了得到一棵幺模随机有根树，我们从 $V(\mathcal{G})$ 中均匀随机选取一个根 o，并考虑 $\mathcal{T}$ 中对应于从 o 出发的游走的连通分支。

$\mathcal{G}$ 的标记 是一个函数 $f:V(\mathcal{G})\to Y$，其中 Y 是一个可分可度量化拓扑空间。这样的标记会在万有覆盖上诱导出一个标记 $\hat{f}:V(\mathcal{T})\to Y$，其定义为

$$\hat{f}(x):=f(\pi(x)).$$

我们将这个随机取根的带标记万有覆盖的概率分布记为分布$^*(f)$。

我们研究上述定义的分布的弱极限，因此，为弱拓扑定义 L´évy-Prokhorov 度量（见 [19, 第 11 节。3]）。

定义 1.3. 对于 $m \in \mathbb{N}$ 以及博雷尔集 $A \in \mathbb{R}^m$，我们记 $A^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^m : \inf_{y\in A} |x-y| < \varepsilon\}$。对于两个随机向量 X、$Y \in \mathbb{R}^m$，我们将 X 与 Y 之间的 L´evy-Prokhorov 距离 $d_{LP}(X,Y)$ 定义为

$$d_{LP}(X,Y) := \inf\Big\{\varepsilon \geq 0 : \mathbb{P}(X \in A) \leq \mathbb{P}(Y \in A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ for all Borel sets } A\Big\}. \tag{1.3}$$

对于 $\mathfrak{T}$ 上的过程 Φ，经规范化使得 $\mathrm{Var}[\Phi] = 1$，我们通过如下量来度量它与高斯波 $\Psi^\lambda(\mathfrak{T})$ 在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及 $k \in \mathbb{N}$ 下的距离

$$\Xi_k^\lambda(\Phi) := \inf_{0\leq\sigma\leq \mathrm{Var}[\Psi^\lambda]^{-1/2}} \Big\{ d_{LP}(B_k(\Phi^\lambda), B_k(\sigma\Psi^\lambda))\Big\}, \tag{1.4}$$

其中 $B_k(\cdot)$给出 $\mathfrak{T}$ 中随机选取的顶点周围半径为 k 的球的分布。

因此，Ξ_k^λ取 Φ 到方差至多为 1 的 Ψ^λ 的任意倍数之间的 L´evy-Prokhorov 距离的下确界。事实上，根据其定义，$\mathrm{Var}[\Psi^z] = \Im[m(z)]$。利用上述定义，我们可以陈述 [8] 的主要定理。

定理 1.4 ([8]的定理 2.2)。对于任意 $d \geq 3, \varepsilon > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $\geq N_0$, 的 N, 以至少 $1-\varepsilon$ 的概率（在从 N 个顶点的均匀随机 d-正则图 $\mathcal{G}$ 中选取图的情况下），以下结论成立：对于每个满足 $\|\psi\| = 1$ 的向量 ψ，如果存在满足 $\lambda \leq d-\varepsilon$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $\|(A_\mathcal{G} - \lambda)\psi\| \leq \delta$，那么 $\Xi_k^\lambda\big($分布$^*(\sqrt{N}\psi)\big) < \varepsilon$.

根据弗里德曼定理 [23], , 均匀随机选取的正则图以高概率具有如下性质：所有非平凡特征值的绝对值至多为 $2\sqrt{d-1} + o_N(1)$。因此，定理 1.4 涵盖了所有与全一向量分离的近似特征向量。

本文考虑一类更广泛的图。具体而言，我们研究其万有覆盖具有有限锥类型的随机图。这是一类研究充分的模型，其定义如下。

定义 1.5。对于带有有向边(o,x)的无限树 $\mathfrak{T}$，定义由(o,x) 确定的锥为包含 x 的 o 的连通分支，并以 x 为根。若以此方式构造出的锥只有有限多个同构类，则称该树 $\mathfrak{T}$ 具有有限锥类型。

为了说明这一约束的作用，请注意，一般而言，树上的格林函数值 $\mathfrak{T}$ 可以由舒尔补公式推导得出（见（B.1））,

$$G(z,\mathfrak{T})_{oo} = (-z - \sum_{x\sim o} G(z,\mathfrak{T}^{(o)})_{xx})^{-1}; \qquad G(z,\mathfrak{T}^{(o)})_{xx} = (-z - \sum_{\substack{y\sim x\\ y\neq o}} G(z,\mathfrak{T}^{(x)})_{yy})^{-1}. \tag{1.5}$$

因此，给定这样一棵树，就可以直接确定其谱在任意 λ处的行为。具体而言，对于任意有限锥类型树 $\mathfrak{T}$, 都存在一个有限离散集 $\mathfrak{D} \in \mathbb{R}$，在该集合之外，谱和格林函数表现良好（见定理B.3）。

这种易于处理的分析使这一类树成为一个富有成果的研究领域。最初，人们利用这一闭式表达式分析这些树上的随机游走 [30, 31]。近年来，研究发现这些树上的安德森模型具有纯绝对连续谱 [28, 29] , 且其特征函数已知是量子遍历的 [3–5]。此外，在许多例子中，我们可以 量化谱中绝对连续部分的范围；这既适用于无限正则树和无限双正则树等具体情形，也适用于更一般的情形 [9, 14, 29]。

为了构造一族万有覆盖为给定确定性树的图，我们采用一种具有固定顶点类型集合的广义随机模型。我们不允许度序列任意变化，而是固定有限种顶点类型，并规定每种类型向其他每种类型连接多少条边。

定义 1.6 节。对于固定的 $k \in \mathbb{N}$，矩阵 $\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_{ij}\}_{i,j=1}^k \in \mathbb{N}^{k\times k}$称为扩张度矩阵 *if:*

1. 当$\mathbf{d}_{ij} > 0$时，则$\mathbf{d}ji > 0$；*2.* 对任意 i、j $\ell \in [k]$, , 若$\mathbf{d}ji$、$\mathbf{d}\ell j$、$\mathbf{d}_{\ell i} \neq 0$，则

$$\frac{\mathbf{d}_{ij}}{\mathbf{d}_{ji}} \cdot \frac{\mathbf{d}_{j\ell}}{\mathbf{d}_{\ell j}} = \frac{\mathbf{d}_{i\ell}}{\mathbf{d}_{\ell i}};$$

3. $\mathbf{d}$ 是不可约的；

4. 最大$_i\sum_j \mathbf{d}_{ij} \geq 3$和 最小$_i\sum_j \mathbf{d}_{ij} \geq 2$。

对于$\mathbf{d}$ 扩张度矩阵，我们将由以下方式构造的随机图系综记为 $\mathcal{G}(N,\mathbf{d})$：将顶点划分为集合 $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_k$，然后在约束条件下均匀随机抽取一个图，使得对于每个 i、$j \in [k]$,，每个顶点 $x \in V_i$ 到 V_j 的度为$\mathbf{d}_{ij}$。

我们将任意图 $\mathcal{G}(N, d)$ 的万有覆盖记为 $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$，并将满足以下条件的最小集合记为 $\mathfrak{D}_{\mathbf{d}} \subset \mathbb{R}$：对于所有 $\lambda \in spec(A^{\mathcal{T}_{\mathbf{d}}})\backslash\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$、每条边 $(x,y) \in \mathcal{T}_{\mathbf{d}}$, $|G_{xx}(\lambda)|$, $|G^{(y)}_{xx}(\lambda)| < \infty$，以及 $\Im[G^{(y)}_{xx}(\lambda)] > 0$，其中 $spec(A)$ 是 A 的谱，即满足 λ 使得 $(A - \lambda I)$ 不可逆的值的集合。根据定理 *B.3*，$\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$ 是有限的。

$\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ 具有有限锥类型，因为该锥完全由与所选边 (o,x) 对应的条目 d_{ij} 确定。此外，集合 $|\mathrm{V}_i|$的大小也完全由 d 决定，因为当这些条目非零时，$|\mathrm{V}_i|/|\mathrm{V}_j| = \mathrm{d\,ji}/\mathrm{dj}$；根据假设，d 是不可约的。概括而言，我们对 d 的条件尽可能一般。前两个条件确保 d 与配置模型相容。第三个条件保证生成的随机图是连通的。第四个条件要求局部扩张：在万有覆盖中，每个顶点都有无穷多个后代，从而确保图的大小趋于无穷，并可能出现谱混沌。例如，在 d-正则模型中，我们要求 $\mathrm{d} \geq 3$ 才能观察到混沌行为；类似地，只要满足我们的约束，二部双正则图 $\mathcal{G}(\mathrm{N}, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2)$ 也适用于这一框架，其中 $\max\{\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2\} \geq 3$ 且 $\min\{\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2\} \geq 2$。

这一框架包含若干常见的图族。重要示例包括以下几类：

(1) 随机 d-正则图的形式为 $\mathcal{G}(N, d)$。

(2) 随机二部双正则图的形式为 $V = V_1 \sqcup V_2$，且 $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & d_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} d$。我们将此模型记为 $\mathcal{G}(N, d_1, d_2)$，其中 d_1 和 d_2 分别是 V_1 和 V_2，中顶点的度。

(3) 固定图的随机提升对应于矩阵 $\mathbf{d}$ 是无向多重图的邻接矩阵这一特殊情形。提升模型中谱的混沌行为本身就是一个活跃的研究领域 [12, 13, 17]。

尽管二部双正则图来自具有固定度的配置模型，但当$\mathbf{d}_{ij} \neq \mathbf{d}_{ji}$时，它们并非来自固定图的一系列提升。它们的谱统计已有充分研究，并且已知若干关于谱混沌的一般性结果 [15, 20, 36],，这些结果部分受到编码理论应用以及随机 0–1 矩阵的奇异向量应用的推动。

对于 $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ 有限锥类型，刻画集合 $\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$ 是直接的；事实上，对于任意 $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$，$\mathrm{spec}(A^{\mathcal{T}_{\mathbf{d}}})\backslash\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$ 都对应谱中的一个非平凡部分（见 [14, 第 1.6] 节和 [9, 定理 3.1]）。直观地说，$\mathrm{spec}(A^{\mathcal{T}_{\mathbf{d}}})\backslash\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$ 正是我们预期会出现混沌行为的区域，因为它避开了点谱，也保证每个子树上的谱统计都是非平凡的。例如，根据 [5,第 4.2], 节，$\mathrm{spec}(A^{\mathcal{T}_{\mathbf{d}}})\backslash\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$ 恰好是我们预期会出现量子遍历性的区域，而量子遍历性是特征向量离域的另一种统计性质。

我们的第一个主要结果针对最一般的模型。为了适用于这种一般情形，我们放弃对单个特征向量的控制，转而研究从一个较小的谱窗口中随机选取的特征向量。

定义 1.7。设 $\mathcal{G}$ 是一个图，其顶点集为 $[N]$,，且 $\{\psi_i\}_{i\in[N]}$ 是 $A^{\mathcal{G}}$ 的一组正交归一特征基，对应的特征值为 $\{\lambda_i\}_{i\in[N]}$。对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon > 0$，从谱$(A^{\mathcal{G}}) \cap [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$中按概率均匀随机选取一个特征值 λ_i（计重数），并令 ψ_i 为相应的单位特征向量。定义标记

$$f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon} := \sqrt{N}\,\psi_i.$$

此外，定义随机近似特征向量

$$\widetilde{\psi}^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon} := \frac{1}{\sqrt{|\{\lambda_i \in [\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]\}|}} \sum_{\lambda_i\in[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]} g_i\,\psi_i,$$

其中，g_i 是相互独立的标准高斯随机变量。

我们的第一个结果是，上述分布具有高斯统计。

定理 1.8。对于任意扩张度矩阵 $\mathbf{d}$、任意 $k \in \mathbb{N}$，以及任意下降得足够慢的序列 $\varepsilon_N = o_N(1)$，以 $1 - o_N(1)$ 的概率（关于 $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}(N,\mathbf{d})$），以下结论成立：对于每个 λ 使得谱$(A^{\mathcal{T}_{\mathbf{d}}}) \cap [\lambda - \varepsilon_N, \lambda + \varepsilon_N]$ 避开有限集 $\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$ 的情形，我们有 $\Xi^{\lambda}_k\left(\text{分布}^*(f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon_N})\right) < \varepsilon_N$。

如果将 $f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon_N}$ 替换为近似特征向量 $\sqrt{N}\,(\widetilde{\psi}^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon} + \nu_N)$，其中 ν_N 是任意一个满足条件 $\|\nu_N\| \leq \delta_N$ 的序列（对充分小的 $\delta_N > 0$），则同样的结论仍然成立。

我们的结果可以理解为对特征向量“含噪”分布的分析：我们不研究某个特定的特征向量 ψ，而是考察从任意小的谱窗口中抽样得到的特征向量的分布。均匀抽样也可以替换为在该窗口上足够平坦的任意分布（每个特征向量的概率均为 $O(1/N)$，其中 ε固定）。

在这种广义设定下，并非每个 $\lambda \in \mathrm{spec}(\mathcal{T}_{\mathbf{d}}) \setminus \mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$ 都必然具有高斯统计的特征向量。例如，如果我们将 $\mathcal{G}(N, \mathbf{d})$ 取为一个随机提升，则可能出现植入特征值，其特征向量的分布与基图中的特征向量相同。例如，4 团 K_4 的每个提升都有一个特征值为 -1 的（未归一化）特征向量，其中四分之一的分量为 3，四分之三的分量为 -1，尽管对于 $\mathbf{d} = d \geq 3$，$\mathfrak{D}_{\mathbf{d}} = /0$。

我们必须在一个窗口上取平均，这源于一般有限锥类型树缺乏对称性：其结构不足以保证经验协方差收敛到特征向量过程的协方差。若要具备这样的结构，只需施加径向对称性，也就是说，若o 是一个根，那么以顶点x和y为根重新确定图的根时，只要 $\mathrm{dist}(o, x) = \mathrm{dist}(o, y)$，所得有根图便同构。这一对称性条件促成了无限树上其他一些精确的谱结果 [29]。特别是，该条件适用于随机双正则图，使我们得以证明定理1.4的一个类似结果。

定理 1.9. 对于任意 $\varepsilon > 0$、$k \in \mathbb{N}$ 和度数 (d_1, d_2)，其中 $d_1 \geq 3$ 且 $d_2 \geq 2$，存在 N_0 和 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $N \geq N_0$, 的情形，在随机选取的二部图 $\mathcal{G}_N \sim \mathcal{G}(N, d_1, d_2)$上，以至少 $1 - \varepsilon$的概率，以下结论成立：对于每个满足 $\|\psi\| = 1$ 且满足 $\|(A_{\mathcal{G}_N} - \lambda)\psi\| \leq \delta$ 的 ψ，当 $|\lambda| \leq \sqrt{d_1 d_2} - \varepsilon$ 时，并且若 $d_1 \neq d_2$,$|\lambda| \geq \varepsilon$，则有

$$\Xi_k^{\lambda}\left(\mathrm{distr}^*(\sqrt{N}\psi)\right) < \varepsilon.$$

我们对 λ 的条件避开了 0 处的点谱以及平凡特征值 $\pm\sqrt{d_1 d_2}$。事实上，根据 [15,定理 4]，我们的条件等价于要求：对于 $d_1 \geq d2$，$\sqrt{d_1 - 1} - \sqrt{d_2 - 1} - o_N(1) \leq |\lambda| \leq \sqrt{d_1 - 1} + \sqrt{d_2 - 1} + o_N(1)$。此外，同样的思路也能简化定理 1.4 的证明。

我们的工作可与以下研究进行比较：[26], 其中作者证明，在特征值是k 个最小值之一或k 个最大值之一的特定情形下，随机正则图的高斯波收敛（其中 k 固定），因此该结论适用于满足 $||\lambda| - 2\sqrt{d-1}| = N^{-2/3+o_N(1)}$的特征值。事实上，他们无需对所有 σ 取下确界（见（1.4））， 而可以直接确定性地设定 $\sigma =$方差$(\Psi^z)^{-1/2}$，从而证明完全 ℓ_2去局域化。他们通过应用文献 [27]中给出的随机正则图格林函数的局部定律普适性来实现这一点。相较之下，我们的方法不使用任何格林函数局部定律；相反，我们证明，对于任意一棵树，（1.2）中的高斯过程具有易于分析的熵。

我们还指出，（1.2）立即意味着，对于任意图 $\mathcal{G}$ 以及绝对连续谱 $\lambda \in \mathbb{R}$ 中任意属于$A\mathcal{G}$ 的值，高斯波都是独立同分布过程线性因子的极限（调整 ξ_x的方差后，当 λ 属于点谱时，也有类似结论）。这推广了 [25, 定理 4]，；该定理将顶点传递性作为额外假设，确立了这一结果，并将其用作研究无限图独立数率的工具。因此，我们认为（1.2）本身也值得独立关注。

1.1 关键熵不等式

中的关键观察是：[8] 配置模型中的特征向量经验分布是一个典型过程，这意味着它定义了一个标记；在弱拓扑中，该标记以高概率必定接近于从随机选取的图上实现的标记。

定义 1.10。设 Y 是一个可分的、可度量化的拓扑空间，并设 μ 是 $Y^{V(\mathcal{T}_{\mathbf{d}})}$上过程的一个概率分布。若存在一个递增序列 N，使得对于 $\mathcal{G}_N \sim \mathcal{G}(N, \mathbf{d})$，以概率 1，存在标记 f_N：$V(\mathcal{G}_N) \to Y$，使得 $\mathrm{distr}^*(f_N)$ 在弱拓扑中收敛于 μ，则称 μ 是典型的。

我们的主定理如下。

定理 1.11。对于任意扩张度矩阵 $\mathbf{d}$ 以及任意 $\lambda \in \mathrm{spec}(\mathcal{T}_{\mathbf{d}}) \setminus \mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$，在 $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ 上的 λ 处，唯一的典型特征向量过程是高斯波 $\Psi^{\lambda}(\mathcal{T}_{\mathbf{d}})$。

定理 1.8和定理 1.9 化归为定理 1.11 可由下式得到：[8, 命题 5。1]；为完整起见，我们在第 A节中重现证明。本文的其余部分致力于证明定理 1.11。

2 预备知识

2.1 记号与约定

我们列出全文通用的记号。固定扩张度矩阵 $\mathbf{d}$及其对应的万有覆盖 $\mathfrak{T}_{\mathbf{d}}$。记 $V_{\mathbf{d}}$ 为 $\mathfrak{T}_{\mathbf{d}}$的顶点集。对于顶点 $u \in V_{\mathbf{d}}$，定义 δ_u 为顶点 u上的指示向量。对于顶点集 $\Gamma \subset V_{\mathbf{d}}$，定义边界 $\partial\Gamma \subseteq \Gamma$ 为与$\mathfrak{T}_{\mathbf{d}}\backslash\Gamma$相邻的顶点所组成的子集。

对于 $z \in \mathbb{C}^+$，在我们对格林函数 $G^z := G(z, \mathfrak{T}_{\mathbf{d}})$ 的分析中，我们常常考虑函数$G^z_x(y) := G^z(y,x)$，它是 G^z 的核的一列。更一般地，我们有 $G^z_\Gamma \in \mathbb{C}^{V_{\mathbf{d}}\times|\Gamma|}$。我们将略去对 z 的依赖，只要 z 可由上下文明确。现在我们引入记号，用以考虑边缘分布上的概率测度。

定义 2.1. 对于任意可分、可度量化的拓扑空间 Y 以及概率分布 μ 在 Y 上$^{V_{\mathbf{d}}}$，定义μ_Γ 为在 $\Gamma \subset V_{\mathbf{d}}$上的边缘分布。受我们的分解 (1.2)的启发，对于概率测度 μ （与过程 Φ^λ相关联），我们进而定义 μ^η 为在 $\mathbb{R}^{V_{\mathbf{d}}}$上的概率测度，其中 $u \in V_{\mathbf{d}}$被标记为 $-\eta_{\mathbf{i}}\langle\Phi^\lambda, G_u^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\rangle$。

接下来 [8], 我们将问题归结为一个熵不等式。由于以下原因，定义熵时需要格外谨慎:

(1) 由于任何分布都必须在每个顶点处满足特征向量方程，因此连通子图 Γ 上 $\Gamma\backslash\partial\Gamma \neq /0$ 的分布不是满秩的。(2) 我们希望得到一个适用于任意分布的熵不等式，而香农熵是为离散分布定义的，微分熵则是为光滑分布定义的。

对于 (1)，我们不在整个环境空间中计算熵，而是投影到内在子空间。对于 (2)，我们先将过程离散化，再计算所得离散分布的香农熵。离散化是在满秩的 $|\partial\Gamma|$ 维子空间中进行的，而非逐坐标进行，因此熵能够反映分布的实际维数。为此，我们考虑一组基，使其在内部的每个顶点处都满足特征向量方程。

定义 2.2 (尺度 a 下的离散化)。 对于任意 $\Gamma \subset V_{\mathbf{d}}$，我们固定一组标准正交基 $\Pi(\Gamma) = (\chi_1, \ldots, \chi_{|\partial\Gamma|})$，其向量与所有形如 $\lambda\delta_u - \sum_{v\sim u}\delta_v$ 的向量正交，其中 $u \in \Gamma\backslash\partial\Gamma$。注意， μ_Γ 的概率分布由

$$\big(\langle\Phi^\lambda, \chi_1\rangle, \ldots, \langle\Phi^\lambda, \chi_{|\partial\Gamma|}\rangle\big).$$

因此，对于 $a > 0$，我们将 $\mu_{\Gamma,\,a}$ 定义为.....的离散概率测度

$$\frac{1}{a}\big(\lfloor a\langle\Phi^\lambda, \chi_1\rangle\rfloor, \ldots, \lfloor a\langle\Phi^\lambda, \chi_{|\partial\Gamma|}\rangle\rfloor\big).$$

由于我们主要关注的量是熵，而熵在酉变换下保持不变，因此选择哪一组向量基并不重要。

具体而言，我们最关注的量是星与边的熵之差。因此，我们考虑星 C_o，它由顶点 $o \in V_{\mathbf{d}}$ 及其邻居组成。我们将 o 与i 之间的边记作 e_{oi}。对于离散概率测度 μ，我们考虑香农熵 $\mathbb{H}(\mu) = \mathbb{E}[-\log(\mu(X))]$, , 其中$X$ 是一个服从 μ 的随机变量。那么，对于任意固定的$k \in \mathbb{N}$，我们比较

$$\Delta_k(\mu) := \lim_{a\to\infty} \mathbb{E}_o[\mathbb{H}(\mu_{B_k(C_o),a}) - \frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{H}(\mu_{B_k(e_{oi}),a})], \tag{2.1}$$

其中，再次地，$B_k(\Gamma)$ 是以顶点集合 Γ 为中心、半径为 k 的球。我们通常会特别考虑$\Delta_0(\mu) = \lim_{a\to\infty}\mathbb{E}_o[\mathbb{H}(\mu_{C_o,\,a}) - \frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{H}(\mu_{e_{oi},\,a})]$。

我们有如下关系（见 [18, 定理 8.3。1]）： 对于任何具有光滑密度的概率分布 μ ,

$$\mathbb{H}(\mu_{\Gamma,a}) = |\partial\Gamma|\log a + \mathbb{D}(\mu_{\Pi(\Gamma)}) + o_a(1). \tag{2.2}$$

其中，对于与 $\mu_{\Pi(\Gamma)}$ 相对应的密度函数 $f^{\mu_{\Pi(\Gamma)}}$， $\mathbb{D}(\mu) := -\int_{\mathbb{R}^{|\partial\Gamma|}} f^{\mu_{\Pi(\Gamma)}}(x)\log f^{\mu_{\Pi(\Gamma)}}(x)\mathrm{d}x$表示在与形如 $\lambda\delta_u - \sum_{v\sim u}\delta_v$ 的向量正交的 $|\partial\Gamma|$ 维子空间上的微分熵。

因此，当 μ 是光滑特征向量过程的概率分布时，我们可以等价地写成

$$\Delta_k(\mu) = \mathbb{E}_o[\mathbb{D}(\mu_{\Pi(B_k(C_o))})] - \frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{\Pi(B_k(e_{oi}))})], \tag{2.3}$$

利用对数a 项恰好相互抵消这一点。这一点尤其适用于我们考虑高斯波，或通过向另一个特征向量过程添加高斯波分量进行平滑处理后的特征向量过程时。

2.2 定理1.11 的证明

本小节中，我们在若干命题成立的假设下证明定理 1.11 。在后续各节中，我们将证明本节引用的各个命题。

首先，我们通过以下对 [7, 定理 4]的一般化来量化典型性。

命题 2.3. 回顾 Δ_k 在(2.1)中的定义。设 Y 是一个可分、可度量化的拓扑空间，并设是 Y 上过程的一个概率分布)。若 μ 具有典型性，则

$$\Delta_0(\mu) \geq 0. \tag{2.4}$$

我们对Y 的限制足够宽松，因此定理2.3 可推出对每个$k \in \mathbb{N}$，都有 $\Delta_k(\mu) \geq 0$；因为我们可以用$B_k(u)$中的标签向量标记顶点u，这意味着单个顶点上的熵等于原过程中的整个球的熵。下一步是证明，对于高斯波，这个不等式实际上是等式。一个关键观察是，对于任意 ℓ_2 向量 $\chi \in \mathbb{R}^{V(\mathcal{T}_\mathbf{d})}$、任意特征向量过程 Φ^λ以及任意 η,

$$\langle \Phi^\lambda, G^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\chi\rangle = -\mathrm{i}\eta^{-1}\langle \Phi^\lambda, \chi\rangle. \tag{2.5}$$

这意味着，对于任意一组向量 $\chi_1, \dots \chi_k \in \mathbb{R}^{V(\mathcal{T}_\mathbf{d})}$，随机变量的联合分布

$$\left\{-\mathrm{i}\eta\langle \Phi^\lambda, G^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\chi_i\rangle\right\}_{i\in[k]}. \tag{2.6}$$

不依赖于 η。因此，当我们应用一个固定的线性变换时，对于测度分别为 μ 和 ν 的任意特征向量过程,

$$\Delta_0(\mu^\eta) - \Delta_0(\nu^\eta) = \Delta_0(\mu) - \Delta_0(\nu). \tag{2.7}$$

考虑不同的 η 的优势在于，向量 $G^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\chi$ 的内积会随 η 而变化，从而调整（2.6）的熵。具体而言，我们证明以下结果，这是我们工作的主要创新之一。

命题 2.4。对于具有概率测度 μ 的高斯波 Ψ^λ，回顾一下，$\mathcal{T}_\mathbf{d}$ 上的概率测度 μ^η 对应于如下分布：顶点 u 处的值为 $-\mathrm{i}\eta\langle \Psi^\lambda, G_u^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\rangle$。那么对于任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\eta\to 0^+}\Delta_k(\mu^\eta) = 0. \tag{2.8}$$

事实上，这个证明具有足够的普适性，因此也可以将 Δ 定义为任意两个边界大小相同的集合之间的熵差。接下来，我们证明高斯分布是微分熵的唯一最大化者。

命题 2.5. Δ_0（μ）在所有特征向量过程中由 μ 对应于 Ψ^λ 高斯波的概率测度唯一最大化。

为此，我们改编了 [8, 第 11], 节的一般论证，其中我们证明，加热该随机变量会增大 Δ_0，对任何其他分布都成立。然而，由于对称性少得多，因此需要一些新的处理。在先前的结果中，作者使用 de Bruijn 恒等式（见定理5.2）以及一个未知的基，再利用图的对称性推导该基的性质。在本工作中，我们基于格林函数找到一个表现良好、且适用于任何配置模型的典范基。

最后一步是从已知高斯是 Δ_0 的唯一最大化者，外推到它是 Δ_k 上对所有k的唯一最大化者。为此，我们证明如下。这与 [8, 第 10] 节中关于正则图的论证完全相同，但为完整起见，我们将证明收录于第A.3节。

引理 2.6。对于 $\mathbb{R}^{V_\mathbf{d}}$ 上的任意概率测度 μ，有

$$\Delta_k(\mu) \leq \Delta_{k-1}(\mu).$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，当且仅当该分布是2-马尔可夫时等式成立，也就是说，在给定任意一条边的条件下，该边两侧的分布相互独立。

定理 1.11 的证明。考虑一个具有概率测度 μ 的典型特征向量过程 $\Phi^{\lambda}(\mathcal{T}_{\mathbf{d}})$。对于每个 η 和 k，μ^{η}Bk，将顶点 u 标记为向量 $\{-\mathrm{i}\eta\langle\Phi^{\lambda},\mathrm{G}_{w}^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\rangle\}_{w\in B_k}(\mathrm{u})$ 的过程是典型的。因此，根据定理 2.3，$\Delta_k(\mu^{\eta}) \geq 0$ 对所有 $\mathrm{k} \geq 0$ 和 $\eta \geq 0$ 均成立。因此，结合定理 2.4 、定理 2.5 和 (2.7)，Φ^{λ} 在星上的边缘分布是高斯分布。如果该分布是 2-马尔可夫的，那么星上的边缘分布就确定了整个分布，而该分布就是高斯波。现在，假设我们的测度 μ 不是 2-马尔可夫的。我们将其与测度 ν 进行比较，后者是高斯波。于是存在某个固定半径 k，使得半径为 k 的球上的边缘分布不同，因此根据定理 2.6，$\Delta_k(\mu^{\eta}) < \Delta_k(\nu^{\eta})$ 对所有 $\eta \geq 0$ 均成立。再次利用 (2.5)、定理 2.3 和定理 2.4，我们得到 μ 不是典型的。 □

本文其余部分将用于证明本节中提出的命题。在第 3 节中，我们将说明如何像定理 2.3 中那样，通过边缘分布刻画典型过程。这是对 [7, 定理 5], 的直接推广，但或许能帮助不熟悉这一主题的读者获得一些直观认识。在第 4 节中，我们将利用格林函数的基本性质证明定理 2.4 。最后，在第 5 节中，我们将通过精心选取一组基，并利用格林函数的更多性质分析加热后的随机变量，从而证明定理 2.5 。

3 典型过程的熵恒等式

对于离散测度 μ，如果存在一种图顶点标记方式，使得顶点上的分布为 μ，那么，以这种方式标记一个顶点集，使其 N 个顶点上的顶点标记经验分布为 μ 的方法数为 $\mathrm{e}^{(1+o_N(1))N\mathbb{H}(\mu)}$。除了顶点标记外，我们现在还希望考虑连通点对 $(i,\ j)$ 的标记。对于从V_i 到其自身的边，这一点此前已经完成。

引理 3.1 （ [7]中的引理 4.1）。 设 V 和 S 为有限集，且 $|V| = N$。设 μ_e 是 $S\times$上的概率分布，其两个坐标上的一维边缘测度均为 μ。定义 M^f 为满足随机边上的分布为 μ_e的完美匹配集合。若 M^f 非空，则满足

$$|M_f| = (N!!)\mathrm{e}^{(1+o_N(1))N(\frac{1}{2}\mathbb{H}(\mu_e)-\mathbb{H}(\mu))}.$$

现在，我们将这一结果推广到相应的二部图版本。

引理 3.2 （二部图版本）。 考虑两个有限顶点集 $|V_1| = |V_2| = N$，以及 μ_e $S\times S$ 上的一个概率分布。定义 μ_1 和 μ_2 分别为第一和第二个坐标上的边缘分布，其对应分布为 f_1和 f_2。定义 $M_{f_1}f_2$ 为从 V_1 到 V_2 的完美匹配集合；对于一个标记图，其边上的边缘分布为 μ_e。若 $M_{f_1}f_2$ 非空，则

$$|M_{f_1 f_2}| = (N!)\mathrm{e}^{(1+o_N(1))N(\mathbb{H}(\mu_e)-(\mathbb{H}(\mu_1)+\mathbb{H}(\mu_2)))}.$$

证明。 考虑满足 μ_e 的完美匹配标记集合 M' 。我们将用两种方法计算 $|M'|$。第一种方法是先标记边缘分布为 f_1 和 f_2，的边，然后进行匹配。通过这种计数方式，我们可以看到 $|M'| = |M_{f_1 f_2}|\mathrm{e}^{(1+o_N(1))N(\mathbb{H}(\mu_1)+\mathbb{H}(\mu_2))}$。

第二种计数方法是：共有 $N!$ 个完美匹配。给定一个完美匹配，计算可行标记的数量，得到 $|M'| = (N!)\mathrm{e}^{(1+o_N(1))N\mathbb{H}(\mu_e)}$。结合这两个等式即可得出结论。 □

现在我们可以用这一点来比较星与边。

定理 2.3 的证明。考虑一个标记 $\mathrm{f}: \vec{\mathrm{E}}(\mathcal{T}_{\mathbf{d}}) \to \mathrm{S}\times\mathrm{S}$，其中 $\vec{\mathrm{E}}(\mathcal{T}_{\mathbf{d}})$ 是 $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ 的半边集合。我们要求，如果两个半边 $\vec{\mathrm{e}}_1$ 和 $\vec{\mathrm{e}}_2$ 起源于同一个顶点，那么 $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{e}}_1)$ 和 $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{e}}_2)$ 的第一个坐标相同。

我们通过匹配半边来构造配置模型，使类型 $\mathrm{i}\to\mathrm{j}$、标签为 $(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2)$ 的半边与类型 $\mathrm{j}\to\mathrm{i}$、标签为 $(\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_1)$ 的半边配对。定义 $\mathcal{G}_{\varepsilon}(\mathrm{N},\mathrm{d}\ \mu)$ 为标记图的集合，其中星和边的边缘分布对于所有 i、j 均分别与 μ_{C_i} 和 $\mu_{e_{ij}}$ 相差不超过全变差 ε。我们将 $|\mathcal{G}_{\varepsilon}(\mathrm{N},\mathrm{d}\ \mu)|$ 与配置模型中的图总数 $|\mathcal{G}(\mathrm{N},\mathrm{d})|$ 进行比较。后者与简单图总数相差一个常数因子（见 [34, 定理 2.2]）。定义 $\mathrm{q}_i := |\mathrm{Vi}|/\mathrm{N}$ 为类型 i 的顶点比例，则有

$$|\mathcal{G}(N,\mathbf{d})| = \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{(\mathbf{d}_{ii}q_iN)!!}{(\mathbf{d}_{ii}!)^{q_iN}}\right)\left(\prod_{1\leq i<j\leq k}\frac{(\mathbf{d}_{ij}q_iN)!}{(\mathbf{d}_{ij}!)^{q_iN}(\mathbf{d}_{ji}!)^{q_jN}}\right), \tag{3.1}$$

通过匹配所有半边得到，同时考虑了同一类型的半边。

我们可以通过以下方式在 $\mathcal{G}_\varepsilon(N, \mathbf{d}, \mu)$ 中构造一个图：首先随机抽取标记，使其在星上的分布正确；对于这些标记，其数量为 $e^{(1+o_N(1))N\sum_i q_i\mathbb{H}(\mu_{C_i})}$。然后，我们以符合匹配的方式匹配 V_i 与 V_j 之间的边。由于类型 $i \to j$ 的边与其他类型对之间的边相互独立，我们可以通过对每个 (i, j) 计算 $|\mathcal{G}_\varepsilon(N,\mathbf{d},\mu)|$ 来求得结果，即计算 $|M_{ij}|$（ε 内部的匹配数量，其中 $\mu_{e_{ij}}$）。由于半边的熵等于半边与其配对反向边之并的熵，我们应用定理 3.1 得到

$$|M_{ii}| = \frac{(\mathbf{d}_{ii}q_iN)!!\,e^{(1+o(1))\mathbb{H}(\mu_{e_{ii}})\mathbf{d}_{ii}q_iN/2}}{(\mathbf{d}_{ii}!)^{q_iN}\,e^{\mathbb{H}(\mu_{e_{ii}})\mathbf{d}_{ii}q_iN}},$$

其中 $o(1)$是一个当我们令 N 趋于无穷大时趋于零的项，然后 ε 趋于 0。我们除以 $(\mathbf{d}_{ii}!)^{q_iN}$，因为我们不区分来自同一顶点的边。同样地，根据定理 3.2，

$$|M_{ij}| = \frac{(\mathbf{d}_{ij}q_iN)!\,e^{(1+o(1))\mathbb{H}(\mu_{e_{ij}})\mathbf{d}_{ij}q_iN}}{(\mathbf{d}_{ij}!)^{q_iN}(\mathbf{d}_{ji}!)^{q_jN}\,e^{(\mathbf{d}_{ij}q_i+\mathbf{d}_{ji}q_j)N\mathbb{H}(\mu_{e_{ij}})}}.$$

因此，为了估计 $\mathcal{G}_\varepsilon(N,\ \mathbf{d}\ \mu)$，我们有

$$\begin{aligned}|\mathcal{G}_\varepsilon(N,\mathbf{d},\mu)| &= \exp\left((1+o(1))N\sum_i q_i\mathbb{H}(\mu_{C_i})\right)\left(\prod_{1\le i\le k}|M_{ii}|\right)\left(\prod_{1\le i<j\le k}|M_{ij}|\right)\\ &= \exp\left((1+o(1))N\sum_i q_i\Big(\mathbb{H}(\mu_{C_i})-\frac{1}{2}\sum_j \mathbf{d}_{ij}\mathbb{H}(\mu_{e_{ij}})\Big)\right)|\mathcal{G}(N,\mathbf{d})|,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中在最后一行，我们使用了（3.1）。

由于 μ 是典型的，对于任意 $\varepsilon>0$，我们有

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{|\mathcal{G}_\varepsilon(N,\mathbf{d},\mu)|}{|\mathcal{G}(N,\mathbf{d})|} \ge c_{\mathbf{d}}, \tag{3.3}$$

对于 $c_{\mathbf{d}} \ge \exp[(1-(\max_i\{\sum_j \mathbf{d}_{ij}\})^2)/4]$ 配置模型中抽取的图为简单图的概率。结合（3.3）与（3.2），得到（2.4）。

□

4 高斯波的熵

我们首先需要确认协方差矩阵的秩确实等于边界的大小。这也将为第 5 节接下来的分析做一个预热。

引理 4.1。 对于任意 $\Gamma \in \{B_k(C), B_k(e)\}_{k\in\mathbb{N}}$，$\lim_{\eta\to 0^+}\Im(G_\Gamma^{\lambda+i\eta})$ 的秩为 $|\partial\Gamma|$。

证明。 对于任意 $\eta \ge 0$，$\Im[G_\Gamma^{\lambda+i\eta}]$ 是 $\{\sqrt{\eta}G_x^{\lambda+i\eta}\}_{x\in\Gamma}$的格拉姆矩阵，根据 (B.4)。因此，只需给出后一个矩阵的最小奇异值的下界。我们构造一个显式的线性变换，使其产生$|\partial\Gamma|$ 正交向量。设 $x \in \partial\Gamma$，并令 $y \in \Gamma$ 表示它的父节点。根据舒尔补公式（B.2），

$$G_x^{(y)} = G_x - \frac{G_{xy}}{G_{yy}}G_y, \tag{4.1}$$

其中，$G^{(y)} = [A^{\mathcal{T}^{(y)}} - z\mathrm{I}]^{-1}$ 是移除y 后的图的格林函数。

若$x_1 \ne x_2$是 $\partial\Gamma$ 中两个不同的顶点，其对应的父节点分别为$y_1, y_2 \in \Gamma$，则向量$G^{(y_1)x1}$和$G^{(y_2)x2}$的支撑集位于互不相交的前向锥上，因此彼此正交。因此，$\{\sqrt{\eta}G_x^{(y)}\}_{x\in\partial\Gamma}$ 是一个大小为 $|\partial\Gamma|$ 的正交族，故对于每个 $\eta>0$ 都线性无关。

定义线性算子 T，规定其各行为 $(T G_\Gamma)_x = G^x - G_{xy}G_{yy}G^{\ y}$，其中$x \in \partial\Gamma$，使得 $T(\sqrt{\eta}\,G_\Gamma) = \{\sqrt{\eta}\,G_x^{(y)}\}_{x\in\partial\Gamma}$。应用奇异值不等式 $\sigma_{\min}(M) \ge \sigma_{\min}(TM)/\|T\|$，可得

$$\sigma_{|\partial\Gamma|}(\sqrt{\eta}\,G_\Gamma) \ge \frac{\min_{x\in\partial\Gamma}\Im[G_{xx}^{(y)}]}{\|T\|},$$

这里用到了 $\|\sqrt{\eta}G_x^{(y)}\|^2 = \Im[G_{xx}^{(y)}]$。由于 $\lambda \notin \mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$，每个量 $\Im[G_{xx}^{(y)}]$ 在$\eta \to 0^+$时都存在有限的正极限。此外，$\|T\|$ 在此极限下保持一致有界，因为它只取决于比值 $G_{xy}/G_{\underline{yy}}$，而这些比值也都收敛。因此，$\eta \to 0^+$时，$\sqrt{\eta}G_\Gamma$ 的最小非零奇异值仍与零保持正距离。

□

根据（2.5）和（2.2），我们可以通过直接处理微分熵来分析高斯分布的熵。

定理2.4的证明。作为高斯向量，其熵由协方差矩阵 Σ 和格拉姆矩阵 M定义。具体而言，定义 Σ^η 为满足 $\Sigma_{uv}^\eta = \mathrm{Cov}(\langle \Psi^\lambda, \eta G_u^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\rangle, \langle \Psi^\lambda, \eta G_v^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\rangle)$的矩阵，并定义 M为满足 $M_{uv} = \eta^2\langle G_u^{\lambda+\mathrm{i}\eta}, G_v^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\rangle$的矩阵。假设 M 是满秩的，则维数为 m 的多元高斯分布的微分熵为

$$\frac{m}{2}\log(2\pi e) + \frac{1}{2}\log\det(\Sigma) - \frac{1}{2}\log\det(M).$$

考察M，根据 Ward 恒等式（B.4）可将其化简为

$$M_{uv} = \eta^2 (G_u^{\lambda+\mathrm{i}\eta})^* G_v^{\lambda+\mathrm{i}\eta} = \eta \Im[G_{uv}^{\lambda+\mathrm{i}\eta}]. \tag{4.2}$$

另一方面，根据（2.5），

$$\Sigma_{uv} = \lim_{\zeta \to 0} \Im(G_{uv}^{\lambda+\mathrm{i}\zeta}). \tag{4.3}$$

因此，对于任意集合 Γ，我们可以利用（2.2）写成

$$\begin{aligned}
&\mathbb{D}(\mu_\Gamma^\eta) \\
&= \mathbb{D}(\Psi_{\Pi(\Gamma)}) \\
&= \frac{|\partial\Gamma|}{2}\log(2\pi e) + \frac{1}{2}\log\det(\Sigma_{\Pi(\Gamma)}) - \frac{1}{2}\log\det(M_{\Pi(\Gamma)}) \\
&= \frac{|\partial\Gamma|}{2}\log(2\pi e) + \frac{1}{2}\log\det(\lim_{\zeta\to 0^+}\Im(G_{\Pi(\Gamma)}^{\lambda+\mathrm{i}\zeta})) - \frac{|\partial\Gamma|}{2}\log(\eta) - \log\det(\Im(G_{\Pi(\Gamma)}^{\lambda+\mathrm{i}\eta})).
\end{aligned}$$

在熵之差 $\mathbb{E}_o\left[\mathbb{D}(\mu^{\eta}{}_{Bk(Co)}) - \frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu^{\eta}{}_{Bk(eoi)})\right]$ 中，对于 $o \sim i$，距离k 于 i的边界顶点和距离$k+1$ 于 o的边界顶点，在左侧各出现一次，在右侧各出现两次，且每项的前因子均为1/2。因此，项 $\frac{|\partial\Gamma|}{2}(\log 2\pi e - \log\eta)$ 恰好抵消，剩下

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_o\left[\mathbb{D}(\mu_{B_k(C_o)}^\eta) - \frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{B_k(e_{oi})}^\eta)\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_o\left[\log\det(\lim_{\zeta\to 0^+}\Im(G_{\Pi(B_k(C_o))}^{\lambda+\mathrm{i}\zeta})) - \log\det(\Im(G_{\Pi(B_k(C_o))}^{\lambda+\mathrm{i}\eta}))\right] \\
&- \frac{1}{4}\mathbb{E}_o\left[\sum_{i\sim o}\left(\log\det(\lim_{\zeta\to 0^+}\Im(G_{\Pi(B_k(e_{ij}))}^{\lambda+\mathrm{i}\zeta})) - \log\det(\Im(G_{\Pi(B_k(e_{ij}))}^{\lambda+\mathrm{i}\eta}))\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

根据定理 4.1，Π 恰好投影掉了 0 特征子空间。因此，$\lim_{\zeta\to 0^+}\Im(G_{\Pi\,\Gamma}^{\lambda+\mathrm{i}\zeta}{}_{()})$ 的特征值与 0 之间存在一致的正距离。此外，当 $\lambda \notin \mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$时，这些特征值一致有界。因此，逐项收敛意味着当 $\eta \to 0$时，(4.4) 收敛到 0。

□

5 最大化熵不等式

我们希望对经过热化的随机变量使用 de Bruijn 恒等式。因此，方便起见，我们将问题简化为只考虑光滑过程。

命题 5.1。 Ψ^λ 是 $\Delta_0(\Phi^\lambda)$ 在光滑特征向量过程 Φ^λ 上的唯一最大化者。

我们首先说明这为何足够。

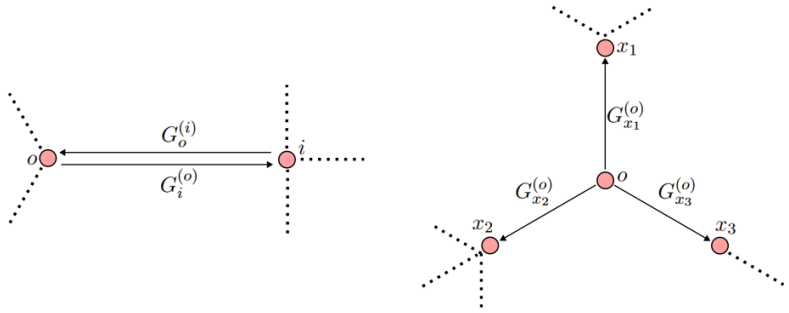

图 1: 边和星分解为正交分量，如式（5. 2).

定理证明2.5。回顾由（1.2）可知，Ψ^λ 是因子独立同分布过程的弱极限。因此，若 Φ^λ 是一个典型的特征向量过程，根据 [8, 引理 C.1],，$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi^\lambda + \Psi^\lambda)$ 也具有这一性质，其中求和项是独立过程。这是一个光滑特征向量过程，因此根据定理 5.1，它必为高斯过程。由于 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi^\lambda + \Psi^\lambda)$ 和 Ψ^λ 都是高斯过程，Φ^λ 必为高斯波。 □

本节余下部分将给出定理 5.1 的证明。我们将证明分为几个步骤。首先，我们要为概率空间选取一个便于处理的基。

正交部分分解

我们希望定义一个与格林函数对应的典范基。因此，我们定义

$$\xi_y^{(x)} := \lim_{\eta\to 0^+} -\mathrm{i}\eta\langle \Phi^\lambda, G_y^{(x)}(\lambda+\mathrm{i}\eta)\rangle = \langle \Phi^\lambda, \delta_y - \frac{G_{yx}}{G_{xx}}\delta_x\rangle.$$

类似地，我们可以定义

$$\xi_o := \lim_{\eta\to 0} -\mathrm{i}\eta\langle \Phi^\lambda, G_o\rangle, \qquad \xi_\chi := \lim_{\eta\to 0} -\mathrm{i}\eta\langle \Phi^\lambda, \chi\rangle. \tag{5.1}$$

其中 χ 是 $\{G_x\}_{x\in V(\mathcal{T}_\mathbf{d})}$ 的任意线性组合。此外，我们将关注这类 χ 的内积；因此，我们将内积定义为

$$\langle \chi_i, \chi_j\rangle := \lim_{\eta\to 0} \eta\chi_i^*\chi_j,$$

这是保证内积非平凡的正确归一化。在本节余下部分中，除非另有说明，我们记 $G := \lim_{\eta\to 0^+} G^{\lambda+\mathrm{i}\eta}$。对于任意 ξ，我们将其归一化形式记为

$$\widetilde{\xi} := \frac{\xi}{\sqrt{\mathbb{E}[|\xi|^2]}}.$$

对于同时与x相邻的 $y_1 \neq y_2$，我们再次利用 $\Im[G_\Gamma^{\lambda+\mathrm{i}\eta}]$ 是 $\{\sqrt{\eta}G_x^{\lambda+\mathrm{i}\eta}\}$ 的格拉姆矩阵。由此可知，若 $y_1, y_2 \sim x$，但$y_1 \neq y_2$,，那么

$$\mathbb{E}\left[\overline{\xi_{y_1}^{(x)}}\xi_{y_2}^{(x)}\right] = \lim_{\eta\to 0}\eta\mathbb{E}[\overline{G_{y_1}^{(x)}(\lambda+\mathrm{i}\eta)}G_{y_2}^{(x)}(\lambda+\mathrm{i}\eta)] = 0,$$

因为对于每个 η，$G_{y_1}^{(x)}$和$G_{y_2}^{(x)}$的支撑集位于互不相交的前向锥上。因此，$\{\widetilde{\xi}_x^{(y)}\}$ 为由星G_C 的格林函数张成的空间以及由边G_e 的格林函数张成的基提供一个各向同性基。由于熵在固定的满秩线性坐标变换下保持不变，Δ_0 可化为这些边界坐标联合分布的有限维泛函。因此，要证明定理5.1，只需证明该固定线性变换（根据定理4.1）

$$\mathbb{E}_o\left[\mathbb{D}((\widetilde{\xi}_i^{(o)})_{i\sim o}) - \frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\widetilde{\xi}_i^{(o)}, \widetilde{\xi}_o^{(i)})\right] \tag{5.2}$$

在光滑分布中，高斯实现了最大化。

极大化子必须具有某种独立性。

我们首先证明，任何最大化者在许多方向之间都具有独立性。对于任意常数 c，

$$\Delta_0(c\Phi^\lambda(G)) = \Delta_0(\Phi^\lambda(G)),$$

因为微分熵按每个坐标平移 $\log|c|$，而这些平移在星形–边差中相互抵消。因此，只需证明：当 Φ^λ 不是高斯波时，对于某个 $t>0$，有 $\Delta_0(\Phi^\lambda) < \Delta_0(\Phi^\lambda + \sqrt{t}\Psi^\lambda)$，其中 Ψ^λ 是 $\mathfrak{T}_{\mathbf{d}}$ 上的高斯波的一个独立副本。为此，我们将使用 de Bruijn 恒等式，该恒等式根据 Fisher 信息给出熵的变化。其简化版本如下。

引理 5.2。 *[定理 17.7.2（[18]]* 对于任意分布 Φ，其具有光滑密度函数 f：$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，我们加入一个各向同性高斯向量 Ψ。则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{D}(\hat{\Phi}+\sqrt{t}\hat{\Psi}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^m}\frac{(\partial_i f(x_1,\dots x_m))^2}{f(x_1,\dots x_m)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m.$$

为应用这一结果，我们需要比较一条边的密度函数和一个星的密度函数。具体来说，当我们取 $\Phi^\lambda + \sqrt{t}\Psi^\lambda$ 时，我们希望比较 $(\xi(o)\, j)_{j\sim o}$ 的分布变化与 $(\xi(o)\, i\, \xi(i)o)$ 的分布变化。现在固定 $i\sim o$，$\xi^{(o)} i$ 包含于这两个空间中。另一方面，为了用与 $(\xi(o)\, j)_{j\sim o}$ 相关的变量表示 $\xi(i)o$，我们注意到，根据 (B.3)，对于 $v \in V(\mathfrak{T}_{\mathbf{d}}\backslash\{o,i\})$，

$$G^{(i)}_{ov} = -\sum_{x\sim o, x\neq i} G^{(i)}_{oo}G^{(o)}_{xv}. \tag{5.3}$$

因此，当 $\lambda \notin \mathfrak{D}_{\mathbf{d}}$ 时，$\lim_{\eta\to 0^+} G_x^{\lambda+i\eta}$ 的各项有界，但根据 Ward 恒等式（B.4），$\lim_{\eta\to 0^+} G_x^{\lambda+i\eta}$ 的范数也为无穷大。因此，

$$\xi^{(i)}_o = -G^{(i)}_{oo}\sum_{x\sim o, x\neq i}\xi^{(o)}_x. \tag{5.4}$$

因此，对于固定的 $i\sim o$，我们取 U_{oi} 为如下空间：$\{\chi \in G_{C_o} :\ \chi \perp G^{(i)}_o,\ G^{(o)} i\ \}$（这里的垂直是指 (5.1) 中的意义）。接着，我们将通过取 $\chi_1, \dots \chi_{d_o-2}$ 为 U_{oi} 的任意标准正交基，来分析 $\Phi^* G_{C_o}$ 的 d_o 维密度，然后考察 $(\widetilde{\xi}(i)o\quad \widetilde{\xi}(o)\, i\, \widetilde{\xi}_{\chi_1},\dots,\widetilde{\xi}_{\chi_{d_o-2}})$。将这个随机向量的密度函数记为 $f(z_1,z_2,w)$。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(\partial_1 f_{e_{oi}}(z_1,z_2))^2}{f_{e_{oi}}(z_1,z_2)}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\left(\int_{U_{oi}}\partial_1 f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\right)^2}{\int_{U_{oi}} f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{U_{oi}}\frac{\partial_1 f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})}{f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})}\cdot\frac{f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})}{\int_{U_{oi}} f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}}\mathrm{d}\mathbf{w}\right)^2\left(\int_{U_{oi}} f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\right)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\\
&\le \int_{\mathbb{R}^2}\int_{U_{oi}}\left(\frac{\partial_1 f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})}{f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})}\right)^2\cdot\frac{f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})}{\int_{U_{oi}} f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}}\mathrm{d}\mathbf{w}\left(\int_{U_{oi}} f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\right)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{U_{oi}}\frac{(\partial_1 f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w}))^2}{f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})}\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\\
&= \int_{\mathbb{R}^{d_o}}\frac{(\partial_1 f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w}))^2}{f_{C_o}(z_1,z_2,\mathbf{w})}\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

中间我们使用了 Jensen 不等式。根据上述不等式，我们可以按照单模测度对半边取期望。于是得到

$$\mathbb{E}_o\left[\sum_{j=1}^{d_o}\int_{\mathbb{R}^{d_o}}\frac{(\partial_j f_{C_o}(z_1,z_2,\dots,z_{d_o}))^2}{f_{C_o}(z_1,z_2,\dots,z_{d_o})}\mathrm{d}\mathbf{z}\right] \ge \frac{1}{2}\mathbb{E}_o\left[\sum_{i\sim o}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(\partial_1 f_{e_{oi}}(z_1,z_2))^2+(\partial_2 f_{e_{oi}}(z_1,z_2))^2}{f_{e_{oi}}(z_1,z_2)}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\right]. \tag{5.6}$$

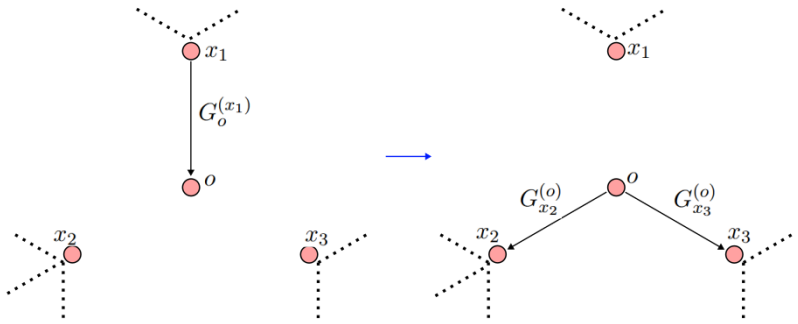

图 2：在（5.3）中，我们可以 将流入某个顶点的格林函数写成流出该顶点的格林函数之和 it.

我们将 $\nu_{(t)}$ 的概率测度记为 $\Psi^\lambda + \sqrt{t}\Psi^\lambda$。要使 Φ^λ 具有典型性，根据定理 2.3 和定理 2.4，

$$\lim_{\zeta\to 0}\Delta_0(\nu^\zeta_{(0)}) \geq 0 = \lim_{t\to\infty}\lim_{\zeta\to 0}\Delta_0(\nu^\zeta_{(t)}).$$

根据（5.6），$t \mapsto \Delta_0(\nu_{(t)})$ 是非递减的。因此，回想（2.7），要使 Φ^λ 具有典型性，（5.6）对于每个 t 都必须取等号。因此，对于每个 $t \geq 0$ 以及每条边 (o,i)，在给定 $\xi_{(i)o}$ 的条件下，变量 $\xi_{(i)o}$ 与 $\{\xi_\chi\}_{\chi\in U_{oi}}$ 相互独立。事实上，利用下面的引理，我们还能得出更强的结论。

引理 5.3 （[8] 的引理 A.6）。假设对于每个 $0 \leq t \leq \infty$，过程 $\Phi^\lambda + \sqrt{t}\Psi^\lambda$ 都满足以下条件：在给定 $\xi_{(y)x}$ 的条件下，随机变量 $\xi_{(x)y}$ 和 $\{\xi_\chi\}_{\chi\in U_{xy}}$ 相互独立。那么在 $t = 0$ 时，以下情形必有一种成立：

1. $\xi_{(y)x}$ 与 $\xi_{(x)y}$ 独立，且满足 $\{\xi_\chi\}_{\chi\in U_{xy}}$*(类型 1)*；
2. $\{\xi_\chi\}_{\chi\in U_{xy}}$ 与 $\xi_{(x)y}$ 和 $\xi_{(y)x}$ 独立（类型 *2*）。

因此，对于每个典型过程，定理 5.3 中的两种情况之一必然对每条边成立。

部分独立性蕴含完全高斯性

现在我们要证明，这种程度的独立性足以使底层分布成为高斯分布。为此，我们使用以下结果。

引理 5.4 （达莫瓦–斯基托维奇定理，见 [16]中的定理 5.3.1）。设 ξ_1、ξ_2、…、ξ_d 是相互独立的随机变量。若存在非零系数 a_1,b_1、…、a_d、b_d，使得 $\sum_{i=1}^d a_i\xi_i$ 与 $\sum_{i=1}^d b_i\xi_i$ 独立，则 $(\xi_1$、ξ_2、…、$\xi_d)$ 是一个高斯向量。

为应用这一结果，我们考虑定理 5.3中的两种情形：类型 1 和类型 2。如果 (o,i) 属于类型 1，我们通常会考虑 $\xi_{(o)\,i}$。现在我们引入通常用于 $(o\cdot i)$ 类型 2 的随机变量。在这种情况下，我们可以根据（B.3）和（5.4）对格林函数进一步分解，写成

$$\xi_o = -G_{oo}\xi_i^{(o)} + \frac{G_{oo}}{G_{oo}^{(i)}}\xi_o^{(i)}. \tag{5.7}$$

因此，我们取 χ_i 为 $\{G_o^{(i)},G^{(o)}{}_i\}$ 张成空间中的单位向量，且它与 G_o 正交。χ_i 在相差一个单位标量的意义下唯一；我们声称，对于每个 $i,j\sim o$，$\langle\chi_i,\chi_j\rangle \neq 0$ 都成立。为证明这一点，我们可以将 $G^{(o)}{}_i$ 写成 $c1,_iG_o + c2,_i\chi_i$，其中 $c1,_i$ 和 $c2,_i$ 均非零。于是

$$0 = \langle G_i^{(o)}, G_j^{(o)}\rangle = \langle c_{1,i}G_o + c_{2,i}\chi_i, c_{1,j}G_o + c_{2,j}\chi_j\rangle = c_{1,i}c_{1,j}\Im(G_{oo}) + c_{2,i}c_{2,j}\langle\chi_i,\chi_j\rangle.$$

S由于 $c1,_ic1,_j\Im(G_{oo}) > 0$，第二项必须非零才能将其抵消，因此 $\langle\chi_i,\chi_j\rangle \neq 0$。

G鉴于此，假设o的度至少为 3。然后，我们将分析分为不同的情形 os.

- 至少存在两条类型 2 的有向边，记为 (o, i) 和 (o, j)。于是 χi j := χi − ⟨χi χj⟩χj ∈Uo j，这意味着 ξχj 与 ξχij 相互独立。同样，ξχi 与 ξχji 也相互独立。因此，根据定理 5.4，由于 ≥3、χi j 和 χji 均为非平凡的，随机变量 ξχ对于 χ属于由满足 (o, w) 为类型 2 的 χw 张成的空间时，是高斯的。此外，由于 ξχij 和 ξχji 与 ξo 独立，ξo 与 ξχ 在该空间中的 χ 独立。

• 存在一条类型 1 的边 (o,i) 和一条类型 2 的边 (o, j)。我们知道 ξ(o) i 独立于 ξ(j)o − ⟨G(o) i , G(j)o ⟩ξ(o) i。同样，ξ(j)o 独立于 ξ(o) i − ⟨G(o) i , G(j)o ⟩ξ(j)o，因为 (o, j) 属于类型 2。因此，根据定理 5.4，由类型 1 的 ξ(o) i 和类型 2 的 ξ(j)o 张成的空间是高斯的。

综合这些情形，如果 $d_o \geq 3$，且至少有 1 条类型 1 的边和 2 条类型 2 的边，则对于 (o,i) 类型 1 的 $G^{(o)}$ i 以及 (o, j) 类型 2 的 χj，由它们张成的空间是高斯的。我们断言，这实际上就是整个空间。为此，我们将通过依次添加向量来构造一个基。我们从 (o, j) 类型 2 的 $\{\chi_j\}$j 开始。该组向量是满秩的，因为添加向量 G_o 所张成的线性空间，也可以由 $\{G^{(o)}\, j \}_j$ 和 G_o 张成；只要至少存在一条类型 1 的边 (o, i)，该空间就是满秩的。接下来，由 $\{\chi j\}$j 张成的空间不可能包含任何 $G^{(o)}$ i，因为它只包含与 G_o 正交的向量。因此，当我们依次将形如 $G^{(o)}$ i 的、对应于 (o,i) 类型 1 的向量添加到基中时，这些向量中的每一个都与部分基中的所有向量线性无关，因为当 $i \neq \ell$ 时，$G^{(o)}$ i 与 $G^{(o)}_\ell$ 正交。

如果恰好有一条 $G^{(o)}{}_i$ 边属于类型 2，由于其他每条边都属于类型 1，独立性关系迫使剩下的类型 2 边也满足类型 1 条件。

接下来，我们需要证明在顶点 o 满足非常特定的条件时的高斯性，我们将这些条件称为 A 型和 B 型：

(A) C_o 中的所有有向边（o,i）都属于类型 1，此时我们需要证明所有变量 $\xi_{(o)\,i}$ 都是高斯的（我们称之为 A 型）；或 (B) 所有边都属于类型 2，此时只需证明 ξ_o 是高斯的（B 型）。

我们首先考察 $\xi_x^{(o)}$一个 C_o 为 A 型的星。然后利用（5.4）将其分解为与以 x为中心的星相关联的变量。如果 x 的度至少为 3，这始终是一个非平凡的（即包含多个非零系数）独立分量分解，要么分解为 $\xi_y^{(x)}$（对于 C_x A 型），要么分解为 ξ_x 和一个高斯变量（对于 C_x B 型）。如果 x 的度为 2，根据（5.4），我们可以将 $\xi_x^{(o)}$写成 $\xi_y^{(x)}$的标量倍数，其中 y 是 x 除 o之外的唯一邻居。我们可以继续执行这一转换，直到到达另一个度至少为 3 的顶点，从而得到相同的分解。

如果C_o 是 B 型，那么我们可以参照特定的邻居 x 展开 (*5.7*)，写成

$$\begin{aligned}\xi_o &= -G_{oo}\xi_x^{(o)} + \left(\frac{G_{oo}}{G_{oo}^{(x)}}\right)\xi_o^{(x)} \\ &= G_{oo}G_{xx}^{(o)} \sum_{w\neq o, w\sim x} \xi_w^{(x)} + \left(\frac{G_{oo}}{G_{oo}^{(x)}}\right)\xi_o^{(x)}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

假设 x 的度至少为 3。如果 C_x 是 A 型，那么 (5.8) 立即给出一个非平凡分解。如果C_x是 B 型，我们将 (5.8) 与

$$\xi_x = -G_{xx} \sum_{w\neq o, w\sim x} \xi_w^{(x)} - G_{xx}\xi_o^{(x)}.$$

因此，我们可以用 ξ_x 和一个独立高斯变量来表示 ξ_o。类似地，如果x 的度为 2，我们可以沿着路径o，x…，$x_r = x$，再次进行上述分解，直到下一个度至少为 3 的顶点，如下所示：

$$\xi_o = -G_{oo}\left(\prod_{i=1}^{r}\left(-G_{x_i}^{(x_{i-1})}\right)\right) \sum_{w\neq o, w\sim x} \xi_w^{(x)} - \left(\frac{G_{oo}}{\prod_{i=1}^{r}\left(-G_{x_{i-1}}^{(x_i)}\right)}\right)\xi_o^{(x)}. \tag{5.9}$$

在这种情况下，除非

$$\prod_{i=1}^{r} G_{x_i}^{(x_{i-1})} = \left(\prod_{i=1}^{r} G_{x_{i-1}}^{(x_i)}\right)^{-1},$$

这将迫使（5.9）中的两个系数相互抵消，从而得到一个平凡的分解。然而，设我们的路径从 o 的一个副本通向另一个副本（由于 **d** 是不可约的，这样的副本必然存在），如果这条路径上所有度至少为 3 的顶点都是 B 型，那么根据定理 B.4，我们必有

$$\left|\prod_{i=1}^{r} G_{x_i}^{(x_{i-1})}\right| < 1 < \left|\left(\prod_{i=1}^{r} G_{x_{i-1}}^{(x_i)}\right)^{-1}\right|,$$

并且这条路径上存在某种非平凡部分的分解。

因此，对于度至少为 3 的顶点，我们对 A 型顶点取 $\widetilde{\xi}^{(o)}{}_i$，对 B 型顶点取 $\widetilde{\xi}_o$。由于 $\mathfrak{T}_{\mathbf{d}}$ 具有有限锥型，这些变量构成一个关于方差为 1 的随机变量分布的有限线性方程组。将 ζ_i 写成其中一个变量后，我们可以将其写为

$$\zeta_i \overset{d}{=} \sum_j \alpha_{i,j}\zeta_j + \alpha_i \zeta$$

其中每个 $|\alpha_{i,j}| < 1$、$|\alpha_i| < 1$ 和 ζ 都是独立高斯变量。我们声称，这里的每个变量都必须是高斯的。为此，取 ζ_i 为微分熵最小的变量。根据熵功率不等式（参见 [18, 定理 17.8。1]），将其写成右侧的形式，其微分熵必然更高，除非 ζ_i 是高斯的。

如果 o 的度为 2，那么我们可以利用（5.4）将 $\xi^{(o)}{}_i$ 化为度至少为 3 的最近顶点的标量倍数，这意味着这些变量也都是高斯的。至此，定理 5.1的证明完成。

A 从有限图到无限图

A.1 均值与协方差的收敛

我们证明，定理1.8 和定理 1.9中定义的相关随机变量，其均值和协方差收敛到所需的极限。对于一般的配置模型，我们证明$f_\lambda, \varepsilon^{\mathcal{G}}$ 具有正确的统计性质。对 $\widetilde{\psi}^{\mathcal{G}}_{\lambda},\varepsilon$也可使用完全相同的证明。

引理 A.1. 设$\mathbf{d}$ 是一个扩张度矩阵，且 $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}(N,\mathbf{d})$。回顾定理*1.7*中的分布 $f^{\mathcal{G}}_{\lambda},\varepsilon$。那么，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，以及配置模型中的任意一个部分 V_i，若 o 从 V_i 中均匀随机抽取，则有 $\mathbb{E}_o\left[f^{\mathcal{G}}_{\lambda},\varepsilon(o)\right] = O(1/N)$。

证明。 矩阵$\mathbf{d}$ 是与等正则划分$V(\mathcal{G}) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$，其中$k$与$N$无关且固定。对于块常值向量的集合$F := \{f\colon V(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}\colon f$在每个$V_i$上为常值$\}$，$\dim F = k$，且$F$在邻接算子$A_{\mathcal{G}}$下保持不变。若$\mathbf{d}$为$k \times k$，则 $\mathcal{G}$ 恰有k 个特征向量属于F，它们由将$\mathbf{d}$ 的特征向量提升为$V(\mathcal{G})$上的块常值函数得到。其余所有特征向量都与F正交。

由于 λ 属于绝对连续谱，定义$f^{\mathcal{G}}_{\lambda}$，$\varepsilon$ 的窗口包含 Θ个（N）特征值。因此$f^{\mathcal{G}}_{\lambda}$，$\varepsilon$ 是通过对线性数量的特征向量取平均得到的。由于其中至多$O(1)$个可能属于F，块常值子空间对该平均值的贡献为$O(1/N)$。因此，对从V_i中均匀抽取的o 取期望，可得 $\mathbb{E}_o\left[f^{\mathcal{G}}_{\lambda},\varepsilon(o)\right] = O(1/N)$，如上所述。

□

现在我们可以处理协方差了。

引理 A.2. 我们为 $\mathfrak{T}_{\mathbf{d}}$ 固定一个根 o，并令 i 为距 o 有限距离的任意顶点。接着，对于 $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}(N,\mathbf{d})$，我们考虑随机选取的根 o_N 上的分布，其中 o_N 是在 o 所覆盖的所有顶点中均匀随机选取的一个顶点。然后令 i_N 为 i 所覆盖的对应顶点。

对于函数$f^{\mathcal{G}}_{\lambda}$，$\varepsilon$ 来自定理 *1.7*，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{o_N,i_N}[f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon}(o_N) f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon}(i_N)]}{\mathbb{E}_{o_N}[f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon}(o_N)^2]} = \frac{\Im[G_{oi}]}{\Im[G_{oo}]},$$

证明。 对于配置模型，我们使用众所周知的事实（参见例如 [33,定理 4.1]）：固定稀疏度的配置模型局部收敛到其局部弱极限。因此，对于每个固定的整数 k，

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_o[\langle \delta_{i_N}, A^k_{\mathcal{G}} \delta_{o_N}\rangle] = \mathbb{E}_o[\langle \delta_i, A^k_{\mathfrak{T}_{\mathbf{d}}} \delta_o\rangle]. \tag{A.1}$$

因此，定义

$$\mu^N_{oi} := \frac{1}{N} \sum_{\lambda \in \mathrm{spec}(A_{\mathcal{G}})} \mathbb{E}_o[\psi^N_\lambda(o_N)\psi^N_\lambda(i_N)]\delta_\lambda,$$

以及由其矩定义的 μ_{oi}

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}\mu_{oi} = \langle \delta_i, A^k_{\mathcal{T}_{\mathbf{d}}} \delta_o \rangle.$$

由于谱一致有界，且矩可以确定测度，因此所有矩的收敛意味着 μ^N_{oi} 弱收敛到 μ_{oi}。

由 λ 属于谱的绝对连续部分这一事实，根据 Stieltjes反演公式（参见 [1,公式 2.11]），对于充分小的 ε,

$$\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\mu_{oo}(x) \geq \frac{1}{2}\Im[G_{oo}]\varepsilon.$$

此外，由弱收敛可知，对于任意 $\alpha > 0$，都存在充分大的N 使得

$$\left| \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\mu^N_{oi}(x) - \mathrm{d}\mu_{oi}(x) \right|, \left| \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\mu^N_{oo}(x) - \mathrm{d}\mu_{oo}(x) \right| < \alpha. \tag{A.2}$$

因此，当 $\mathbb{E}_o[\mathrm{f}^{\mathcal{G}}_{\lambda}$ 时，$\varepsilon(\mathrm{o}_N)\,\mathrm{f}^{\mathcal{G}}_{\lambda},\varepsilon(\mathrm{i}_N)] = \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\mu^N_{oi}(\mathrm{x})$；根据 (A.2)，对于 $\alpha \leq \frac{1}{4}\Im[\mathrm{G}_{oo}]\varepsilon$，我们利用 $\frac{\mathrm{x}+\alpha}{\mathrm{y}-\alpha} - \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} = \frac{\alpha(\mathrm{x}+\mathrm{y})}{\mathrm{y}(\mathrm{y}-\alpha)}$，得到

$$\left| \frac{\mathbb{E}_o[f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon}(o_N) f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon}(i_N)]}{\mathbb{E}_o[f^{\mathcal{G}}_{\lambda,\varepsilon}(o_N)^2]} - \frac{\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\mu_{oi}(x)}{\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\mu_{oo}(x)} \right| \leq 16\Im[G_{oo}]^{-1}\varepsilon^{-1}\alpha. \tag{A.3}$$

因此，当 α i s 任意，固定 ε 并令 α 趋于 0，我们看到它收敛于 0。因此，(1.1) 和 (A.3) 给出

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} \frac{\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\mu^N_{oi}(x)}{\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\mu^N_{oo}(x)} = \frac{\Im[G_{oi}]}{\Im[G_{oo}]}.$$

□

现在我们为二部双正则图给出类似的分解。

引理 A.3。 对于 $d_1 \geq d_2, d_1 \geq 3$ 和 $d_2 \geq 2$，模型 $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}(N, d_1, d_2)$ 满足以下性质。

(1) 二部双正则无限树 $\mathcal{T}_{d_1,d_2}$ 在 $d_1 > d_2$ 时，其谱除 $\mathfrak{D}_{d_1,d_2} = 0$之外均为纯绝对连续。若 $d_1 = d_2$，则其谱连同 $\mathfrak{D}_{d_1,d_2} = /0$均为纯绝对连续。*(2)* 所有特征值为 $|\lambda| < \sqrt{d_1 d_2}$ 的特征向量，都与配置模型的两个部分 $V_1 \sqcup V_2$ 上分别为常数的向量组成的集合正交。

证明。 (1) 由谱的分解可立即得出 [24,推论 4。5]。对于(2)，我们可以仿照定理 A.1进行类似论证，因为 $\pm\sqrt{d_1 d_2}$ 特征子空间对应于在每个部分上均为常数的向量。

□

引理 A.4. 固定 $k \geq 0$。对于无限双正则树 $\mathcal{T}_{d_1,\ d_2}$，我们固定一个根 o $(\mathcal{T}_{d_1,\ d_2})$，并令 i 为距离 o 为 k 的任意顶点。接着，对于随机二部双正则图 $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}(N, d_1, d_2)$，我们考虑随机选取的顶点 o_N （由 o 覆盖）上的分布，并令 i_N 为 i 在投影到 $\mathcal{G}$后的像。对于任意 $\lambda \in$谱$(\mathcal{T}_{\mathbf{d}})$ 及其任意特征向量 ψ,

$$\frac{\mathbb{E}_{o_N,i_N}[\psi_{o_N}\psi_{i_N}]}{\mathbb{E}_{o_N}[\psi^2_{o_N}]} = \frac{\Im[G_{oi}]}{\Im[G_{oo}]}.$$

证明。 我们通过将 ψ 提升到 distr$^*(\psi)$ 来计算此协方差。由于无限双正则树具有径向对称性，只需计算 $o \in V$ 与距离为 k 的任意顶点之间的协方差，因为根据自同构不变性，这些协方差都相同。令 $S_o(k)$表示与 o距离恰为 k 的顶点集合。于是

$$\mathbb{E}[\psi_o\psi_i] = \frac{1}{|S_o(k)|}\mathbb{E}\left[\psi_o \sum_{w\in S_o(k)} \psi_w\right].$$

假设与o 相距偶数距离的顶点的度为d_1，与其相距奇数距离的顶点的度为d_2。反复应用特征向量方程可得到递推关系

$$\begin{pmatrix} \sum_{y\in S_o(2j+1)} \psi_y \\ \sum_{y\in S_o(2j)} \psi_y \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -(d_1-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -(d_2-1) \end{pmatrix}\right]^j \begin{pmatrix} \lambda\psi_o \\ \psi_o \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

这意味着， $\mathbb{E}[\psi_k \psi_o]/\mathbb{E}[\psi_o^2]$ 可以表示为关于 λ、d_1,d_2,的显式多项式，并且任何特征向量都必须满足这一关系。由于 $\lim_{\eta\to 0}\|(A-(\lambda+i\eta)\mathrm{I})(G_o)\|/\|G_o\|=0$，格林函数也满足相同的递推关系。

□

注 A.5. 将(A.4)替换为正确的度序列后，该证明同样适用于正则树（事实上，也适用于任何具有径向对称性的图）。

A.2 高斯波的收敛

定理 *1.8* 的证明。根据定理A.1，该过程是中心化的；根据定理A.2，我们的过程的协方差矩阵为 $\sigma^2\Im[G],$，其中某个 $0\le\sigma^2\le \Im[\ ^1_{m(\lambda)}]$。因此，只需证明任意收敛子序列都是典型的。

定义 $\mathcal{P}$ 为 $\mathrm{V}(\mathfrak{T}_d)$ 上二阶矩至多为 1 的博雷尔概率测度集合。由于 $\mathcal{P}$ 是紧的，它在度量 d_{LP} 下（见(1.3)）是紧致的。接下来，我们希望在图上定义相应的度量。对于任意图 $\mathcal{G}$，可以取集合 $\mathrm{S}(\mathcal{G}):=\{\mathrm{distr}^*(\mathrm{f}):\mathrm{f}\in\mathbb{R}^{V(\mathcal{G})},\ ^1\mathrm{N}\sum_{i=1}^N \mathrm{f}(\mathrm{i})^2\le 1\}$，该集合在弱拓扑下同样是紧致的。因此，我们可以定义 $\mathrm{d}_N(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)=\mathrm{d}_H(\mathrm{S}(\mathcal{G}_1),\mathrm{S}(\mathcal{G}_2))$，其中 d_H 是关于 d_{LP} 的豪斯多夫距离。等价地，$\mathrm{d}_N(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)$ 是满足以下条件的 δ 的下确界：对于满足 $^1\mathrm{N}\sum_{i\in[N]}\mathrm{f}_1(\mathrm{i})^2\le 1$ 的 $\mathcal{G}_1$ 的任意标记 f_1，存在 $\mathcal{G}_2$ 的一个标记 $\hat{}\mathrm{f}_1$，使得 $\mathrm{d}_{LP}(\mathrm{distr}^*(\mathrm{f}_1),\mathrm{distr}^*(\hat{}\mathrm{f}_1))\le\delta$；并且对于 $\mathcal{G}_2$ 的每个标记 f_2，都存在 $\mathcal{G}_1$ 的一个标记 $\hat{}\mathrm{f}_2$，使得 $\mathrm{d}_{LP}(\mathrm{distr}^*(\mathrm{f}_2),\mathrm{distr}^*(\hat{}\mathrm{f}_2))\le\delta$。

闭子集之间的紧致度量的豪斯多夫距离是紧致的。因此，存在一个有限的 $\varepsilon/3$ 覆盖 M，覆盖集合 $\mathrm{S}(\mathcal{G})$。这意味着存在一个子集族 T，使得我们的随机选取的图 $\mathcal{G}$满足 $\mathrm{d}_H(\mathrm{S}(\mathcal{G}),\mathrm{T})\le\varepsilon/3$的概率至少为 $1/|\mathrm{M}|$。因此，将随机变量 $\mathrm{X}(\mathcal{G})$定义为随机选取的图 $\mathcal{G}\sim\mathcal{G}(\mathrm{N},\mathrm{d})$ 的 $\mathrm{d}_H(\mathrm{S}(\mathcal{G}),\mathrm{T})$。执行一次切换时，任意固定顶点的邻域发生变化的概率为 $\mathrm{O}(1/\mathrm{N})$，当 $\mathrm{N}\to\infty$时。因此，对于 Lévy-Prokhorov 距离，这种变化造成的改变量至多为 $\mathrm{O}(1/\mathrm{N})$。这意味着我们可以对杜布鞅使用麦克迪尔米德不等式（显式推导见[34, 定理 2.19]），从而证明对于某个固定的 $\mathrm{c}>0$，以至少 $1-\exp(-\mathrm{cN}^{1/3})$ 的概率，$|\mathrm{X}(\mathcal{G})-\mathbb{E}[\mathrm{X}(\mathcal{G})]|\le\mathrm{N}^{-1/3}$。因此，当 N 充分大时，必有 $\mathbb{E}[\mathrm{X}]\le\varepsilon/2$。也就是说，根据三角不等式，以概率 $1-\exp(-\mathrm{cN}^{1/3})$，$\mathrm{d}_N(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)\le\varepsilon$。根据博雷尔-坎泰利第二引理，这意味着如果存在一个收敛到某个测度的无限子序列，那么该测度实际上是 ε-典型的。由于ε 是任意的，这说明极限是典型的。

□

定理 1.9 的证明与定理 1.8的证明相同，只需将定理 A.1 和定理 A.2替换为定理 A.3 和定理A.4。

A.3 比较层级

定理 *2.6*的证明。 我们利用以下事实： $\mathbb{D}(X,Z)+\mathbb{D}(Y,Z)-\mathbb{D}(Z)\ge\mathbb{D}(X,Y,Z)$，当且仅当 X与Y 在给定 Z的条件下条件独立时，等号成立。由此得到以下方程，其中 d_o 是 o 的度：

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(\mu_{B_k(C_o)})&\le\left(\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{B_k(e_{oi})})\right)-(d_i-1)\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_o)})\\ \mathbb{D}(\mu_{B_k(e_{oi})})&\le\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_o)})+\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_i)})-\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(e_{oi})}).\end{aligned}\tag{A.5}$$

式（A.5）中的第一个方程成立，是因为我们可以用 $B_k(C_o)$覆盖，其中包含 d_o 个球，每条从中心顶点出发的边对应一个球。这将产生额外的重叠，涉及 d_o-1 个半径为 $k-1$的球。当且仅当d_o 个非连通分量 $B_k(C_o)\backslash B_{k-1}(C_o)$条件独立时，等号成立。

同理，对于（A.5）的第二个方程，我们可以用两个球覆盖 $B_k(e_{oi})$，每个顶点周围各有一个球，且两球重叠部分是一个半径为 $k-1$ 的球。只有在以 $B_{k-1}(e_{oi})$为条件时，$B_k(e_{oi})\backslash B_{k-1}(e_{oi})$的两侧相互独立，等号才成立。

因此，对根取平均后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_o\left[\mathbb{D}(\mu_{B_k(C_o)})-\frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{B_k(e_{oi})})\right]\\
\le&\,\mathbb{E}_o\left[\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{B_k(e_{oi})})-(d_o-1)\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_o)})-\frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{B_k(e_{oi})})\right]\\
=&\,\mathbb{E}_o\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{B_k(e_{oi})})\right)-(d_o-1)\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_o)})\right]\\
\le&\,\mathbb{E}_o\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_o)})+\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_i)})-\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(e_{oi})})\right)-(d_o-1)\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_o)})\right].
\end{aligned}\tag{A.6}$$

现在来统计 $\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_o)})$ （A.6）中的项数。我们有 $\frac{1}{2}\sum_i \mathbf{d}_{oi}-d_o+1$ 来自类型 i，以及 $\frac{1}{2}\sum_i \mathbf{d}_{oi}$ 来自 o 的邻居。由于 $\sum_i \mathbf{d}_{oi}=d_o$，（A.6）的最后一行化简为

$$\mathbb{E}_o\left[\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(C_o)})-\frac{1}{2}\sum_{i\sim o}\mathbb{D}(\mu_{B_{k-1}(e_{oi})})\right].$$

对于每个 k，当且仅当对于每个 k，等式（A.5）成立时，等式才成立；这意味着该分布是 2-马尔可夫的。

□

B 格林函数的性质

在本节中，令 $G=(H-z\mathrm{I})^{-1}$ 表示厄米算子 H 在 $z=E+\mathrm{i}\eta$ 处的格林函数。我们回顾格林函数的基本递归性质。首先是舒尔补公式。

引理 B.1 （引理 7.2，见 [22]）。对于任意指标子集 $\mathbb{T}$，

$$G|_{\mathbb{T}}=(H|_{\mathbb{T}}-z\mathbb{I}-H|_{\mathbb{T}\mathbb{T}^c}G^{(\mathbb{T})}H|_{\mathbb{T}^c\mathbb{T}})^{-1}.\tag{B.1}$$

接下来是格林函数的分解。

引理 B.2 （ [22]中的引理 8.3）。 以下关于格林函数的结论成立。

1. 对于 $y,w\neq x$

$$G^{(x)}_{yw}=G_{yw}-\frac{G_{yx}G_{xw}}{G_{xx}}.\tag{B.2}$$

2. 若 $x\neq y$，则

$$G_{xy}=-G_{xx}\sum_{w\neq x}H_{xw}G^{(x)}_{wy}.\tag{B.3}$$

3. （*Ward* 恒等式）我们有

$$\sum_y|G_{xy}|^2=\frac{\Im(G_{xx})}{\eta}.\tag{B.4}$$

我们汇总以下结果，出自 [5,命题 4.2]。

引理 B.3。 （1）对于任意有限锥类型的树 $\mathcal{T}$，存在一个有限集合 $\mathfrak{D}_1\subset\mathbb{R}$，使得对于每条边 $(x,y)\in\mathcal{T}$，$G^{(y)}_{xx}(\lambda+\mathrm{i}\eta)$,$G_{xx}(\lambda+\mathrm{i}\eta)$ 对所有 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\mathfrak{D}_1$ 都是有限的。映射 $\lambda\mapsto G^{(y)}_{xx}(\lambda+i0)$ 在 $\mathbb{R}\setminus\mathfrak{D}_1$ 上连续。

(2) 此外，还存在一个有限集合 $\mathfrak{D}_2$，使得对于 $\lambda\in$谱$(\mathcal{T})\setminus(\mathfrak{D}_1\cup\mathfrak{D}_2)$，对每条边 (x,y)，$\Im[G^{(y)}_{xx}]>0$和 $\Im[G_{xx}]>0$。

我们还介绍了对一般选取的z而言，格林函数的一个一般性质。

引理 B.4。 对于扩张度矩阵$\mathbf{d}$，$\lambda\in$谱$(\mathcal{T}_\mathbf{d})\setminus\mathfrak{D}_\mathbf{d}$，考虑 $G:=$极限$_{\eta\to0}G^{\lambda+\mathrm{i}\eta}$。假设存在一个作用于 $\mathcal{T}_\mathbf{d}$ 的自同构，将有向边(x,y)映射到有向边(x',y')，且该路径至少有一个度为 *3* 的顶点。那么对于路径 $x=\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_t=x'$，

$$\prod_{i\in[t]}|G^{(\gamma_{i-1})}_{\gamma_i\gamma_i}|<1.$$

证明。 对格林函数取范数，并对（B.3）反复迭代，可得

$$\|G_y^{(x)}\|^2 \geq \left(\prod_{i\in[t]} |G_{\gamma_i\gamma_i}^{(\gamma_{i-1})}|^2 \right) \|G_y^{(x)}\|^2 + \|X\|^2$$

其中X 具有非零 范数，因为至少引入了一个新的前向锥。这直接蕴含了该结果。 □

致谢。

TA.D. 的研究部分得到美国国家科学基金会项目 DMS-1954337 以及项目 DMS-234814 的资助。 2.

参考文献

[1] Michael Aizenman 和 Simone Warzel。《随机算子》，第168卷。美国数学会，2015。[2] David J Aldous 和 Russell Lyons。单模随机网络上的过程。《电子概率杂志》，12：1454–1508，2007。[3] Nalini Anantharaman、Maxime Ingremeau、Mostafa Sabri 和 Brian Winn。在谱离域区域内扩张量子图的量子遍历性。《纯粹与应用数学杂志》，151：28–98，2021。[4] Nalini Anantharaman 和 Mostafa Sabri。图上的量子遍历性：从谱离域到空间离域。《数学年刊》，189(3)：753–835，2019。[5] Nalini Anantharaman 和 Mostafa Sabri。图上量子遍历性的最新成果及进一步研究。载于《图卢兹科学学院年刊：数学》，第28卷，第559–592页，2019。[6] Ralf Aurich 和 Frank Steiner。强混沌系统高度激发量子本征态的统计性质。《物理学D：非线性现象》，64(1-3)：185–214，1993。[7] Agnes Backhausz 和 Bal´azs Szegedy。关于大围长正则图及树上的随机过程。《随机结构与算法》，53(3)：389–416，2018。[8] Agnes Backhausz 和 Bal´azs Szegedy。关于随机正则图的近似特征向量。《概率年刊》，47(3)：1677–1725，2019。[9] Jess Banks、Jorge Garza-Vargas 和 Satyaki Mukherjee。万有覆盖树上周期算子的点谱。《国际数学研究通知》，2022(22)：17713–17744，2022。[10] Michael V Berry。规则与不规则的半经典波函数。《物理学杂志A：数学与一般》，10(12)：2083，1977。[11] Michael V Berry。规则与不规则运动的半经典力学。《莱苏什讲座系列》，36：171–271，1983。[12] Charles Bordenave。弗里德曼第二特征值定理及其对随机提升的推广的新证明。《高等师范学校科学年刊》（第4辑），53(6)：1393–1439，2020。[13] Charles Bordenave 和 Benoˆıt Collins。随机提升的特征值与随机置换矩阵的多项式。《数学年刊》，190(3)：811–875，2019。[14] Charles Bordenave、Arnab Sen 和 B´alint Vir´ag。均值量子渗流。《欧洲数学会杂志》，19(12)：3679–3707，2017。[15] Gerandy Brito、Ioana Dumitriu 和 Kameron Decker Harris。随机二部双正则图中的谱隙及其应用。《组合学、概率与计算》，31(2)：229–267，2022。[16] Wlodzimierz Bryc。《正态分布：刻画及其应用》。载于《统计学讲义》，施普林格，1995。[17] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas、Joel A Tropp 和 Ramon Van Handel。强收敛的新方法。arXiv预印本 arXiv:2405.16026，2024。[18] Thomas M. Cover 和 Joy A. Thomas。《信息论基础》。John Wiley & Sons，1999。[19] Richard M Dudley。《实分析与概率》。Chapman and Hall/CRC，2018。

[20] Ioana Dumitriu 和 Yizhe Zhu。随机双正则二部图的全局特征值涨落。《随机矩阵：理论与应用》，12(03)：2350004，2023。[21] Yehonatan Elon。正则树上的高斯波。arXiv预印本 arXiv:0907.5065，2009。[22] L´aszl´o Erd˝os 和 Horng-Tzer Yau。《随机矩阵理论的动力学方法》，第28卷。美国数学会，2017。[23] Joel Friedman。Alon第二特征值猜想的证明及相关问题。美国数学会，2008。[24] Chris D Godsil 和 Bojan Mohar。无限图的游走生成函数与谱测度。《线性代数及其应用》，107：191–206，1988。[25] Viktor Harangi 和 B´alint Vir´ag。传递图中的独立数率与随机特征向量。《概率年刊》，(3)，2015。[26] Yukun He、Jiaoyang Huang 和 Horng-Tzer Yau。随机正则图的高斯波与边缘特征向量。arXiv预印本 arXiv:2502.08897，2025。[27] Jiaoyang Huang、Theo McKenzie 和 Horng-Tzer Yau。随机正则图的拉马努金性质与边缘普适性。arXiv预印本 arXiv:2412.20263，2024。[28] Matthias Keller、Daniel Lenz 和 Simone Warzel。有限锥类型树上随机算子的绝对连续谱。《数学分析杂志》，118(1)：363–396，2012。´Matthias Keller、Daniel Lenz 和 Simone Warzel。关于有限锥类型树的谱理论。《以色列数学杂志》，194：107–135，2013。[29] Russell Lyons。树上的随机游走与渗流。《概率年刊》，18(3)：931–958，1990。[30] Tatiana Nagnibeda 和 Wolfgang Woess。有限种锥类型树上的随机游走。《理论概率杂志》，15(2)：383–422，2002。[31] Uzy Smilansky。离散图——量子混沌的范式模型。载于《混沌：2010年庞加莱研讨会》，第97–124页。施普林格，2013。[32] Remco Van Der Hofstad。《随机图与复杂网络》，第2卷。剑桥大学出版社，2024。´Nicholas C Wormald。随机正则图模型。《伦敦数学会讲义系列》，第239–298页，1999。[33] Steve Zelditch。数学量子混沌的最新进展。《数学最新进展》，2009，2009：115–205，2010。[34] Yizhe Zhu。关于随机二部双正则图的第二特征值。《理论概率杂志》，36(2)：1269–1303，2023。