arXiv:2603.04387v1 [math.RT] 4 Mar 2026

某些雅可比代数上的超可分解纯内射模

SHANTANU SARDAR

CEMIM，*FCEyN*，马德普拉塔国立大学，*CONICET*，阿根廷

Abstract. 超可分解纯内射模的存在反映了代数上有限维表示范畴的复杂性。M. Prest 提出一个猜想：当代数是非驯性的，这类模便存在。G. Puniski 证实了该猜想对非国内串代数成立。Geiß、Labardini-Fragoso 和 Schr¨oer 证明，与带标记点的闭曲面三角剖分相关联的每个雅可比代数都是有限维且温顺的。我们证明，除球面上有四个（或更少）puncture 的情形外，都存在一类特殊的带点模，称为带点模的稠密链独立对。在此过程中，我们通过证明伽罗瓦半覆盖函子和平凡扩张保留这类独立对，说明非驯性斜温和代数及（斜）Brauer 图代数中存在这样的独立对。于是，根据 M. Ziegler 的一项结果，若代数闭域是可数的，就存在超可分解纯内射模。

1. Introduction

有限维结合代数 Λ 的分类长期以来一直是表示论学家持续进行的课题。粗略地说，若所有有限维 Λ-模均可加以描述，则 Λ 是温顺的。否则， Λ 是野的。 [5]中的Drozd定理陈述了一个著名的二分法：代数闭域 K 上的每一个有限维代数要么是温顺的，要么是野的（定义见 [41]），但不能两者皆是。得益于A. Skowro´nski，温和代数类可以按照温和代数的增长进行分层。这一分层在 [40]中区分了具有驯性增长、线性增长、多项式增长和指数增长的代数类。温和代数 Λ 的增长反映了所有有限维左 Λ-模所构成的范畴 Λ-mod的复杂性。

点标记 Λ-模的稠密链的独立对，使我们能够提出一个便于使用的充分条件，以判定超可分（即没有不可分解直和项）纯内射模的存在性。M. Ziegler [44]确立了这类模存在的一个基本判据：一个可数环 Λ 存在超可分纯内射模，当且仅当所有 pp-公式构成的格的宽度未定义。后一陈述可以用所有点标记有限表示 Λ-模所构成的格的宽度来表述。此类模的存在有助于解决分类问题，正如 Prest 提出的以下猜想所述。第一个猜想认为， Λ是温和的，当且仅当它不具有超可分纯内射模。第二猜想 [25] 认为，一个代数 Λ 是家养表示型，当且仅当不存在超可分纯内射模。G. Puniski 反驳了关于

E-mail address: shantanusardar17@gmail.com.

非驯性字符串代数 [21]的第一个猜想。本文展示了若干温和代数上此类模的存在性，包括一些雅可比代数、非驯性斜温和代数、它们的平凡扩张代数，以及可数域上的（斜）Brauer 图代数。

若干情形，其中 KG(Λ) = ∞：以下列出所有带标记模之格的宽度为无限的代数。因此，它们的KG维数未定义。M. Prest[26] 证明了严格野代数上存在超可分解纯内射模，而L. Gregory与M. Prest [11]则证明了野代数上的存在性。在 [21], 中，G. Puninski证明：若基域可数，则非多项式增长的字符串代数上存在超可分解纯内射模。随后，他在 [22] 中对任意域上的某个非多项式增长字符串代数给出了此类模的显式构造。R. Harland在 [15] 中证明管状代数上存在此类模。S. Kasjan与G. Pastuszak在 [18] 中证明，所有非多项式增长的强单连通 K-代数上都存在超可分解纯内射模。 [23] 的主要结果断言：若 Λ 是强单连通 K-代数且 K 可数，则Λ 为非国内型当且仅当存在超可分纯内射Λ-模。代数闭域上的表示无限国内标准自内射代数不具有超可分解纯内射模（见 [24,定理8.3]）。所有已知结果都支持关于超可分解纯内射模的Prest的第二猜想。在此，我们通过证明非驯性斜温和代数以及某些雅可比代数上存在带指点模的稠密链独立对以及一个超可分纯内射模，扩充了这一列表。

势 W 大致而言是完备路径代数 KQ 中循环路径的线性组合。与带势箭图 (Q,W) 关联的雅可比代数 $P(Q,W)$，是完备路径代数 KQ 关于雅可比理想 $J(W)$ 的商。这里， $J(W)$ 是由 W 关于 Q 的箭所作循环导数生成的 KQ 中理想的拓扑闭包。带势箭图由 [6] 引入，用于构造具有斜对称交换矩阵的簇代数的加性范畴化。为此， Q 的势必须是非退化的，即它可以与箭图一起任意突变。在 [9], 中，作者在一些温和假设下，为每个带标记点的定向曲面 (S,M) 引入了一个具有斜对称交换矩阵的变异有限簇代数。更确切地说，(S,M) 的每个由标记弧构成的三角剖分 T 都对应一个簇，而相应的交换矩阵则由箭图 $Q(T)$ 以一种便捷的方式编码。Labardini-Fragoso 在 [19] 中通过引入势 $W(T)$ 扩展了这一构造，并证明这些势与突变相容。特别地，这些势是非退化的。Ladkani [20] 证明，对于具有空边界的曲面，若三角剖分 T 不含自折三角形，则雅可比代数 $P(Q(T), W(T))$ 是对称的（因此也是有限维的）。由此可知，对于闭曲面 (S,M) 的任意三角剖分 T' ，雅可比代数 $P(Q(T'), W(T'))$ 都是弱对称的 [16]。在 [13], 中，作者使用退化论证证明这些代数是温顺的。此外，Y. Valdivieso-Díaz [43] 证明，除带四个或更少穿孔的球面这一情形外，这些代数均呈现指数增长。与带五个穿孔的球面相关的代数是斜温和代数的一个商；我们在关联温和代数上构造了一个“非对称”的带点模独立稠密对（见定义 3.6）（定理 4.4），该代数是非驯性的（命题 4.2）；而在其余情形中，这些代数都表示为非国内字符串代数的商（命题 4.1）。当给定代数具有一个非对称代数时，我们证明了斜群代数上存在带点模稠密链的独立对。

定理 1.1。假设特征$(K) \neq 2$ 且 F_λ : 模-$\Lambda \to$ 模-Λ 是一个伽罗瓦半覆盖，且模 θ 是半单的。

(1) 若 $((M_q, \chi_{M_q})_{q\in L_1}, (N_t, \chi_{N_t})_{t\in L_2})$ 是 Λ 上带标记模的稠密链的非对称对，则 $((F_\lambda(M_q)\chi_{F_\lambda(M_q)})_{q\in L_1}; (F_\lambda(N_t);\chi_{F_\lambda(N_t)})_{t\in L_2})$ 是 Λ 上带标记模稠密链的独立对。*(2)* 若 $(M_p; \chi_{M_p})_{p\in L_1}$ 是 P^θ_Λ 中 θ-带标记模的宽偏序集，则 $(F_\lambda(M_p); \chi_{F_\lambda(M_p)})_{p\in L_1}$ 是 P^θ_Λ 中 $\tilde{\theta}$-带标记模的宽偏序集。

根据上述定理以及定理 2.4 中陈述的 Ziegler 判据，我们得到斜温和代数的以下结果。

定理 1.2。设 Λ 是一个斜温和代数，Λ 是其关联温和代数。若 Λ 是非驯性的，则 Λ 具有超可分解模。此外，$\mathrm{KG}(\Lambda)$ 是无限的。

此外，超可分解模也存在于雅可比代数这一特定类别中。

定理 1.3。设 S 是一个闭定向曲面，带有非空有限的M *puncture*集合；唯一排除的情形是带有四个（或更少）*puncture*的球面。对于雅可比代数 $\Lambda = P(Q(T)\ W(T))$中的任意标记三角剖分 T，在 Λ-模中都存在带点模的稠密链独立对。因此，若基域 K 是可数的，则存在超可分解纯内射 Λ-模。

W我们还证明，上述雅可比代数的 KG 维数是无限的 te.

定理 1.4。设 S 是一个闭定向曲面，带有非空有限的 M *puncture*集合；唯一排除的情形是带有四个（或更少）*puncture*的球面。对于任意标记三角剖分 T，在雅可比代数 $\Lambda = P(Q(T)\ W(T))$中，Λ 的克鲁尔–加布里埃尔维数$\mathrm{KG}(\Lambda)$是无限的。

作为定理 1.1 的应用，我们证明了某些熟知代数上超可分解模的存在性，例如 Nazarova–Zavadskij 偏序集的关联代数、菱形代数、花环以及某个曲面代数。我们证明，在考虑平凡扩张代数（或关系扩张代数）时，超可分解模得以保持：

定理 1.5. 设 $\Lambda = KQ_\Lambda/I_\Lambda$ 为有限维代数，并设 $T(\Lambda) = K^{Q_{T(\Lambda)}}/I_{T(\Lambda)}$ 为其平凡扩张代数。则 $T(\Lambda)$ 中存在超可分解模，如果 Λ 中存在超可分解模。

我们给出一个反例（例 6.7），以说明上述定理的逆命题一般并不成立。（斜）布劳尔图代数（重数恒为 1）可分别作为（斜）温和代数的平凡扩张代数得到（分别见[42, 定理 3.11] 与 [39, 推论 3.14]）。布劳尔图代数是对称特殊双串的 [36], ，且（斜）布劳尔图代数可作为布劳尔图代数的斜群代数得到 [42, 命题 3.9]。我们以关于（斜）布劳尔图代数上超可分解模存在性的讨论结束本文（注 6.6）。

本文安排如下。第 (2) 节首先介绍代数上的带点模的基本信息。定理 2.3 指出，存在稠密带标记模的独立对，便可确保存在由此类模构成的宽格；这借助 Ziegler 的结果，实质上意味着该代数上存在超不可分解模（定理 2.4）。此外，我们研究斜群代数，并介绍关于从 [32]模范畴出发的伽罗瓦半覆盖函子的一些结果。我们根据注 2.9 证明，该函子确实是正合且忠实的。本节最后

以命题 2.12 收尾，该命题指出，半覆盖函子保持带点模之间的带点态射。在第 (3) 节，我们阐述了从[21] 关于任意非国内串代数上存在带点模稠密链独立对的判据的一些结果。我们证明，若某代数上存在带点模稠密链的非对称独立对，那么在伽罗瓦半覆盖函子作用下，其斜群代数上也存在带点模稠密链的独立对（定理 3.7）。此外，我们在任意与斜温和代数相关联的非驯性温和代数中找到这样的非对称对，由此在斜温和代数上产生超不可分解模，因此其 KG 维数未定义（定理 3.8）。在第 (4) 节，我们研究与具有非空有限穿孔集合的闭定向曲面相关联的雅可比代数，唯一排除的是带四个（或更少）穿孔的球面情形。与带五个穿孔的球面相关联的代数是斜温和代数的一个商；我们在其关联温和代数上构造了带点模的独立稠密对（定理 4.4），该代数是非驯性的（命题 4.2）；其余情形中的雅可比代数则表示为非国内字符串代数的商（命题 4.1）。本节最后指出，这些雅可比代数具有超不可分解模，且其 KG 维数未定义（定理 4.5 和推论 4.6）。在第 (5) 节，作为定理 3.7 的应用，我们明确展示了若干著名代数上超不可分解模的存在性，例如 Nazarova–Zavadskij 偏序集的关联代数、菱形代数、花环以及某些曲面代数。最后，在第 (6) 节，我们证明，当考虑某代数的平凡扩张代数（或关系扩张代数）时，该代数上的超不可分解模仍然存在（定理 6.2），但反过来一般不成立。我们给出一个 Brauer 图代数的反例（例 6.7）；该代数是某温和代数的平凡扩张代数。此外，我们还讨论了一般情况下非驯性（斜）Brauer 图代数上是否存在此类模。

致谢：

作者曾在 CEMIM-马德普拉塔国立大学访问，并获得 CONICET 提供的博士后奖学金。

2. Preliminaries

本节讨论带点模块格以及代数上存在超可分解模的判据。我们还介绍斜群代数和模范畴上的伽罗瓦半覆盖函子的若干基本信息（详情请参见 [18] ），以及它们与带点模之间的相互作用。

2.1. 带点模块格与超可分解模

这里我们用带标记模的稠密链的独立对，给出超可分解纯内射模存在的一个充分条件。设 θ 是一个有限表现 Λ-模。一个 θ-带点 Λ-模（或简称带点 Λ-模）表示一对 $(M; \chi_M)$，其中 M 是一个有限表现模，而 $\chi_M : \theta \to M$ 是一个模同态。若 $\theta = \Lambda$，则 χ_M 由 χ_M 的 $M(1)$ 唯一确定。这里，将 $(M; \chi_M)$ 与 $(M; \chi_M(1))$ 等同，并称其为一个带点模。当且仅当 $f(m) = n$ 时，同态 $f : M \to N$ 是从 $(M; m)$ 到 $(N; n)$ 的带点同态，并称 $f : (M; m) \to (N; n)$ 为一个带点同态。

设（M; χ_M）和（N; χ_N）是两个 θ带标记模。 θ带标记同态 f :（M; χ_M） →（N; χ_N）表示满足以下条件的同态 $f : M \to N$

$f\chi_M = \chi_N$。若 $f : M \to N$是同构，则称 $f :（M;\ \chi_M）\to（N;\ \chi_N）$ 为 θ带点同构。令 P^θ_Λ 为所有 θ同构类的 θ带标记 Λ模的集合。令 ≡为定义在 P^θ_Λ上的等价关系：当且仅当存在带点同态 $f :（M;\ \chi_M）\to（N;\ \chi_N）$ 和 $g :（N;\ \chi_N）\to（M;\ \chi_M）$时，$（M;\ \chi_M）\equiv（N;\ \chi_N）$。商集$\mathrm{P}^\theta_\Lambda := P^\theta_\Lambda/\equiv$关于如下关系 ≤构成一个偏序集：当且仅当存在带点同态 $f :（N;\ \chi_N）\to（M;\ \chi_M）$时，$（M;\ \chi_M）\leq（N;\ \chi_N）$。用 $（S;\ \chi_S）$ 表示 θ带点模 $（S;\ \chi_S）$ 的 ≡类。偏序集$\mathrm{P}^\theta_\Lambda$是一个模格[Pr1]，其运算 ⊕ 和 ∗ 定义如下。

给定两个带点模 $(M;\ \chi_M)$、$(N;\ \chi_N)$，带点模 $(M\oplus N;\ \chi_{M\oplus N})$，其中$\chi_{M\oplus N}(l) = (\chi_M(l);\ \chi_N(l))$ 对任意 $l \in \theta$成立，定义为它们的带点直和。令 $(M;\ \chi_M) \oplus (N;\ \chi_N) = (M \oplus N;\ \chi_{M\oplus N})$。设 $M * N$是 χ_M和 χ_N的推出，即 $M * N = M \oplus N/\{(\chi_M(l);\ -\chi_N(l)) : l \in \theta\}$，而 $\epsilon_M : M \to M * N$和 $\epsilon_N : N \to M * N$是由 $\epsilon_M(m) = (m; 0)$ 和 $\epsilon_N(n) = (0;\ n)$ 对任意 $m \in M$ 和 $n \in N$所定义的同态。带点模 $(M * N;\ \chi_{M*N})$ 中的 $\chi_{M*N} = \epsilon_M\chi_M = \epsilon_N\chi_N$是 $(M;\ \chi_M)$ 和 $(N;\ \chi_N)$ 的带标记推出。令 $(M;\ \chi_M) * (N;\ \chi_N) = (M * N;\ \chi_{M*N})$。这里

$$\sup\{\overline{(M;\chi_M)}, \overline{(N;\chi_N)}\} = \overline{(M \oplus N;\chi_{M\oplus N})};$$

$$\inf\{\overline{(M;\chi_M)}, \overline{(N;\chi_N)}\} = \overline{(M * N;\chi_{M*N})}.$$

若 $\theta = \Lambda^t$，则 $\mathrm{P}^\theta_\Lambda$ 等价于所有具有 t 个自由变量的 pp-公式 [Pr1] 所构成的格。我们称由 θ-点化 Λ-模构成的格 $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{P}^\theta_\Lambda$ 是宽的，当且仅当对任意 $(M_p,\chi_{M_p}) < (M_q,\chi_{M_q}) \in \mathrm{L}$，存在 L 的不可比较元 $(M,\chi_M),(N,\chi_N)$，使得

$$\overline{(M_p,\chi_{M_p})} < \overline{(M,\chi_M)}, \overline{(N,\chi_N)} < \overline{(M_q,\chi_{M_q})},$$

$$\overline{(M_p,\chi_{M_p})} < \overline{(M * N,\chi_{M*N})} < \overline{(M \oplus N,\chi_{M\oplus N})} < \overline{(M_q,\chi_{M_q})},$$

若 $\mathrm{P}^\theta_\Lambda$ 含有宽子格 L，则称 $\mathrm{P}^\theta_\Lambda$ 的宽度无定义。给定集合 C，θ-点化 Λ-模的族 $\{(M_q,\ \chi_{M_q});\ q \in C\}$ 记为 $(M_q,\chi_{M_q})_{q\in C}$。设 Q 为有理数集，将其视为关于自然序的偏序集≤。回忆：偏序集 P 是 Q-链，当且仅当它是没有端点的稠密链。任一 Q-链作为偏序集都与集合 Q 同构。

定义 2.1。给定一个Q-链 C，θ-指点 Λ-模的稠密链是一个$(M_q;\ \chi_{M_q})_{q\in C}$ θ-指点 Λ-模族，满足：

(1) 自同态环 $End_\Lambda(M_q)$ 是局部的，并且对任意 $q \in C$ 都有 $\chi_{M_q} \neq 0$；*(2)* $q < q' \in C$确保同态 $\mu_{q;q} :(M_q;\ \chi_{M_q}) \to (M_{q'};\ \chi_{M'_q})$的存在；*(3)* $q \neq q' \in C$意味着$(M_q;\ \chi_{M_q})$与$(M_{q'};\ \chi_{M_{q'}})$不同构。

定义 2.2。θ-指点 Λ 模的稠密链的独立对，是由 θ-指点 Λ-模的稠密链构成的一对$((M_q;\ \chi_{M_q})_{q\in C_1};\ (N_t;\ \chi_{N_t})_{t\in C_2})$，满足：

(1) 对任意 $q \in C_1$、$t \in C_2$，自同态环 $End_\Lambda(M_q * N_t)$ 都是局部的；*(2)* 对任意 $q \neq q' \in C_1$ 和 $t \neq t' \in C_2$，带标记模 $(M_q;\chi_{M_q})*(N_t;\ \chi_{N_t})$ 不与 $(M_{q'};\chi_{M'_q})*(N_t;\ \chi_{N_t})$ 或 $(M_q;\chi_{M_q}) * (N_{t'};\ \chi_{N'_t})$ θ- 同构。

带标记模的稠密链的独立对按如下方式生成宽格：

定理 2.3。设对 $((M_q;\ \chi_{M_q})_{q\in C_1};\ (N_t;\ \chi_{N_t})_{t\in C_2})$ 是 θ-指向的 Λ-模的稠密链的独立对。那么，格

$$Gen(\overline{(M_q,\chi_{M_q})_{q\in C_1}} \cup \overline{(N_t,\chi_{N_t})_{t\in C_2}}),$$

即包含集合 $(M_q;\ \chi_{M_q})_{q\in C_1}$ 和 $(N_t;\ \chi_{N_t})_{t\in C_2}$)的 $\mathcal{P}^{\theta}_{\Lambda}$ 的最小子格，是一个宽格。因此，格 $\mathcal{P}^{\theta}_{\Lambda}$ 的宽度未定义。

目前尚不清楚，$\mathrm{P}^{\theta}_{\Lambda}$ 中存在宽子格（或者等价地，Λ 上所有 pp-公式构成的格中存在宽子格）是否意味着存在带标记模的稠密链独立对。以下定理的断言 (1) 是 Ziegler 在 $\mathrm{P}^{\theta}_{\Lambda}$ 中存在 Q-链独立对的情形下证明的。

定理 2.4. 设 θ 是可数含幺环 Λ 上的有限表现模。

(1) 如果 θ-点 Λ-模的格 $\mathcal{P}^{\theta}_{\Lambda}$ 的宽度为无穷大，那么存在一个超不可分解纯内射 Λ-模，并且在这种情况下，$\mathrm{KG}(\Lambda)$ 是无穷的。*(2)* 如果 $\mathcal{P}^{\theta}_{\Lambda}$ 中存在一个 $\mathcal{Q}$-链独立对 $(L;K)$，那么存在一个超不可分解纯内射 Λ-模。

2.2. 模范畴上的伽罗瓦半覆盖函子：

在此，我们研究斜群代数，并给出一个代数与斜群代数的模范畴之间的伽罗瓦半覆盖。此外，我们证明这样的函子是正合且忠实的，它将保持带标记模的推出。

斜群代数： 斜群代数最早在 [31]中从表示论的角度得到研究。对于域 K 上的有限维代数 Λ，以及通过自同构作用于 Λ 的有限群 G，斜群代数 Λ 与 Λ 共享许多表示论性质，这些性质常常体现在mod-Λ与mod-Λ之间的函子性质中。设 G 是通过自同构作用于代数 Λ 的有限群。斜群代数 Λ 是如下定义的代数：

- 其底层向量空间为 $\Lambda \otimes_K KG$；
- 乘法由$(\lambda \otimes g)(\mu \otimes h) = \lambda(\mu) \otimes gh$ 给出，其中 $\lambda, \mu \in \Lambda$ 且 $g, h \in G$，并通过线性与分配律加以延拓。

注意，代数 Λ一般不是基代数。

在博士论文 [27], 中，J. A. de la Peña观察到，在自由群作用的情形下，斜性概念与伽罗瓦覆盖是相同的。这促使我们研究群作用不必自由时的斜群代数构造，并引入伽罗瓦半覆盖函子的概念。我们首先回顾来自 [32]的伽罗瓦半覆盖 $F_\lambda : \text{mod-}\Lambda \to \text{mod-}\Lambda$。

定义2.5. 设 A、B 为线性范畴，且 G 是作用在 A上的一个群。函子$F : A \to B$ 称为 G-半覆盖，如果对任意 X、$Y \in Ob(A)$，下列条件成立：

$$B(FX, FY) \approx \begin{cases} \bigoplus_{g\in G} A(gX, Y) & \text{if } G_X \neq G; \\ \bigoplus_{g\in G} A(X, gY) & \text{if } G_Y \neq G; \\ A^{|G|}(X, Y) & \text{if } G_{XY} = G. \end{cases}$$

假设2.6。我们固定一个阶为 n 的有限阿贝尔群 G，它作用在 KQ 上，使得对每个 $i_0 \in I$，$G_{i_0} \neq G$ 蕴含 $|O_{i_0}| = n$。回顾 G的所有不可约表示的集合，记为 G，它关于表示的张量积与 $|G| = n$ 构成一个群。

Q_G的顶点，即斜群代数的底层箭图，由 $Q_{G_0} = \{(i_0,\ \rho) \mid i_0 \in I,\ \rho \in G_{i_0}\}$。与顶点 $(i_0,\ \rho)$ 对应的 $(KQ)\ G$ 幂等元为 $e_{i_0\rho} = i_0 \otimes e_\rho$，其中 $e_\rho = \frac{1}{|G_{i_0}|} \sum_{g\in G_{i_0}} \rho(g)\ g$ 是 KG_{i_0}的一个幂等元。考虑 KQ_G的幂等元，$\bar{e} = \sum_{i_0\in \tilde{I}} \overline{e_{i_0}}$其中 $e_{i_0} = \sum_{\rho\in \hat{G}_{i_0}} e_{i_0\rho}$. 我们回顾由 $F : KQ \to (KQ)\ G$ 诱导的半覆盖函子 [32, 命题 2.12]，其定义为：对每个 $i \in Q_0$，

$F(i) = e_{i_0}$，其中 $i_0 \in O_i \cap I$ 以及其推前函子，

$F_\lambda : \text{mod-}\Lambda \to \text{mod-}\Lambda$。

¯定义 2.7。 </style}设是伽罗瓦半覆盖函子。我们将推-前函子模-Λ → 模-Λ 定义如下:

¯假设 $M \in$ 模-Λ，则 $F_\lambda M = \oplus_{i_0 \in \bar{I}} F_\lambda M(\bar{e_{i_0}})$ 其中，对于每个 $\bar{e_{i_0}} \in \Lambda$，我们定义

$$F_\lambda M(\bar{e_{i_0}}) := \bigoplus_{F(x)=\bar{e_{i_0}}} M(x).$$

假设 $\bar{\alpha} \in \Lambda_1 G(\bar{e_{i_0}}, \bar{e_{j_0}})$。考虑以下几种情况:

(1) 若 $G_{i_0} \neq G$，则存在一条箭 $\alpha_h : hi_0 \to j_0$，其中某个 $h \in G$ 满足 $\bar{\alpha} = F(\alpha_h)$。则同态 $F_\lambda M(\bar{\alpha}) : F_\lambda M(e_{i_0}) \to F_\lambda M(\bar{e_{j_0}})$ 定义如下:

$$(\mu_g) \mapsto (\sum_{g \in G} M(g\alpha_h)(\mu_g)).$$

(2) 若 $G_{i_0} = G$，但 $G_{j_0} \neq G$，则存在一条箭 $\alpha_h : i_0 \to hj_0$，其中某个 $h \in G$ 满足$\bar{\alpha} = F(\alpha_h)$。同态 $F_\lambda M(\bar{\alpha}) : F_\lambda M(\bar{e_{i_0}}) \to F_\lambda M(e_{j_0})$ 定义如下:

$$\mu \mapsto (M(g_1\alpha_h)(\mu), \cdots, M(g_n\alpha_h)(\mu)).$$

(3) 若 $G_{i_0 j_0} = G$，则存在一支箭 $\alpha : i_0 \to j_0$，使得 $\bar{\alpha} = F(\alpha)$。同态 $F_\lambda M(\bar{\alpha}) : F_\lambda M(\bar{e_{i_0}}) \to F_\lambda M(\bar{e_{j_0}})$ 由同态定义:

$$\mu \mapsto M(\alpha)(\mu).$$

¯Mod-Λ中的态射：假设 $f := (f_{i_0})_{i_0 \in Q_0} : M \to N \in$ mod-Λ 是一个模同态，其中，$f_{i_0} : M(i_0) \to N(i_0)$。那么 $F_\lambda(f) := (f_{\bar{e_{i_0}}}) : F_\lambda(M) \to F_\lambda(N)$，其中，$f_{\bar{e_{i_0}}} : F_\lambda(M)(\bar{e_{i_0}}) \to F_\lambda(N)(\bar{e_{i_0}})$ 由同态 $f_i : M(i) \to N(i)$ 定义，对¯所有 $i \in$ O(i_0) 均成立。若 $M \in$ mod-Λ，则 $F_\lambda(M) \in$ mod-Λ。因此，函子 F_λ 限制为函子¯mod-Λ →mod-Λ，仍记作 F_λ。

在 Mod-Λ 上的群作用： 给定一个 $M \in$ mod-Λ，我们用 ${}^gM$ 表示模 $M \bigcirc g^{-1}$，并用 ${}^gf$ 表示由模同态 $f : M \to N$ 诱导的 Λ-模同态${}^gM \to {}^gN$，使得对任意 $x \in Q_0$，均有 ${}^gf_x := f_{g^{-1}x}$。这定义了 G 在 Mod-Λ 上的作用。此外，映射 $f \to {}^gf$ 定义了向量空间 $\Lambda(M,N)$ 与 $\approx \Lambda({}^gM, {}^gN)$ 之间的同构。

T下一个定理保证存在一个从 mod-Λ 到 mod-$\bar{\Lambda}$.

定理 2.8。 [32, 定理 3。11] 假设群 G 作用于代数 Λ，且 $F : \Lambda \to$ ¯Λ 是一个伽罗瓦半覆盖。那么对于任意 M、$N \in$ 模-Λ，函子 $F_\lambda :$ 模-Λ → 模-Λ 诱导以下向量空间同构:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F_\lambda M, F_\lambda N) \approx \begin{cases} \oplus_{g \in G} \mathrm{Hom}_\Lambda({}^gM, N) & if\ G_M \neq G; \\ \oplus_{g \in G} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, {}^gN) & if\ G_N \neq G; \\ \mathrm{Hom}_\Lambda^{|G|}(M,N) & if\ G_{MN} = G. \end{cases}$$

下面的注记表明，函子 F_λ 是正合且忠实的。

注记 2.9。 我们列出 F_λ的两个重要性质: ¯ ¯正合性 Riedtmann 函子 $\Lambda \otimes_\Lambda - :$ mod-Λ → mod-Λ 与 $F_\lambda :$ mod-Λ →¯ ¯mod-Λ [33]等价。由于 Λ是忠实平坦的 Λ-模，F_λ 是正合函子。忠实性 将定理 2.8 中的同构与 $_\Lambda(M,N)$到等式 1 右侧态射空间的包含映射复合，在不同情形下（例如，当 $G_M \neq G$时，$_\Lambda(M,N) \hookrightarrow \oplus {}_\Lambda(gM,N)$），我们得到一个形如$f \mapsto \nu_{M,N}(f)$的单态射。这表明，$F_\lambda$ 也是忠实的。

由于 Λ 是有限维代数，因此任何有限表示的 Λ-模都是有限维的。因此，在定义 2.1 和定义 2.2 中，我们可以用相应模的不可分解性取代自同态环的局部性。但下面的注记 [32, 命题 3.6、3.7]表明，与伽罗瓦覆盖不同，伽罗瓦半覆盖不一定保持不可分解模。

注 2.10。对于所有 $M \in$ Ind-Λ 和 $g \in G$，存在唯一的 $M \in$Ind-Λ，我们有

$$F_\lambda({}^gM) = \begin{cases} \bar{M} & \text{if } G_M \neq G; \\ \bigoplus_{\hat{g}\in\hat{G}} \hat{g}\bar{M} & \text{if } G_M = G. \end{cases}$$

S. Kasjan 和 G. Pastuszak 证明了，在加性全忠实右正合函子或加性全忠实正合函子 [18, 定理 3.13]下，稠密链的独立对存在。但下面的注指出， F_λ 并非满函子。

注 2.11。设 G 是 Λ 的一个有限阿贝尔群 K-线性自同构群，且 Λ 是相应的斜群代数。那么注 2.10 保证，正合忠实的 Riedtmann 函子 F_λ : mod-Λ →mod-Λ 不是满函子。

问题在于， F_λ 是否保留带标记模的稠密链独立对以及带标记模的宽偏序集（即使在某些假设下）。设 θ 是一个有限表示的 Λ-模。由于 F_λ 是正合的， $F_\lambda(\theta)$也是有限表示的 Λ-模。若 $(M; \chi_M)$ 是一个 θ-带点 Λ-模，我们定义 $\chi_{F_\lambda(M)} = F_\lambda(\chi_M)$，并且

$$F_\lambda(M;\chi_M) := (F_\lambda(M); F_\lambda(\chi_M)) = (F_\lambda(M); \chi_{F_\lambda(M)}).$$

那么，根据我们的假设， $F_\lambda(M; \chi_M)$ 是一个 $F_\lambda(\theta)$-带点 Λ。回忆一下，aθ-带点模 $(M; \chi_M)$ 与带点模 $(M; \chi_M(1))$ 等同，当且仅当 $\theta = \Lambda$。因此，令 $F_\lambda(M; m) := F_\lambda(M; \chi_M)$，其中 $\chi_M : \Lambda \to M$是由$\chi_M(1) = m$定义的同态，对于任意带点 Λ-模 $(M; m)$。这表明，对于任意 θ-带点 Λ-模 $(M; \chi_M)$， $F_\lambda(M; \chi_M)$ 是一个定义良好的 $F_\lambda(\theta)$-带点 Λ。

命题 2.12. 假设 G作用于代数 Λ ，且 Λ 是其对应的斜群代数。那么，对于任意两个 θ-带点 Λ-模$(M; \chi_M)$ 和$(N; \chi_N)$，有

(1) $F_\lambda((M; \chi_M) * (N; \chi_N)) \equiv F_\lambda(M; \chi_M) * F_\lambda(N; \chi_N)$; *(2)* $(M; \chi_M) \leq (N; \chi_N)$ 当且仅当 $F_\lambda(M; \chi_M) \leq F_\lambda(N; \chi_N)$。

证明。(1) 由于根据注 2.9， F_λ 是正合的，故该结果由 [18, 命题 3.11]得出。(2) 若$(M; \chi_M) \leq (N; \chi_N)$，则存在带点同态 $f : (M; \chi_M) \to (N; \chi_N)$，即 $f : M \to N$ 且 $f\chi_M = \chi_N$。注 2.9指出 F_λ是忠实的，因此该断言成立，因为忠实函子反射交换三角形。□

3. Superdecomposable modules over skew gentle algebras

G. Puninski在 [21]中证明了任意非国内串代数上超可分解纯内射模的存在性。在本节中，我们给出一些对于在字符串代数上构造带指点模的稠密链独立对至关重要的性质，并通过考虑温和代数与其相关联的斜温和代数的模范畴之间的伽罗瓦半覆盖函子，证明在某些条件下斜性保持超可分解模。

分类问题：我们回顾一下：若有限维代数 Λ 定义在代数闭域 K 上，并且对任意自然数 d，所有 d维不可分解 Λ-模的同构类除有限多个之外，均可由有限个正则单参数族参数化，则称该代数为温顺的。

设 $\mu_\Lambda(d)$为按上述意义参数化 d维不可分解模所需的最少单参数族数目。若存在自然数 g，使得对所有 $d \geq 1$均有 $\mu_\Lambda(d) \leq d^g$ （分别地， $\mu_\Lambda(d) \leq g$），则称（温顺）代数 Λ具有多项式增长（分别地，具有驯性）[29]；若 m 是满足此条件的最小整数 g，则称 Λ 为 m-驯性。若对无穷多个 $d \in \mathbb{N}$ 以及某个实数 $r > 1$，都有 $\mu_\Lambda(d) > r^d$，则称 Λ 为指数增长型温和。

特殊双串代数：给定一个箭图 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 和一个 KQ 的容许理想 I，若代数 KQ/I 满足以下条件，则称其为特殊双串代数：

(1) 对于 Q 中的每个顶点 v，至多有两条箭以 v 为起点，且至多有两条箭以 v 为终点；(2) 对于 Q 中的每条箭 α，至多存在一条满足 $\alpha\beta \notin I$ 的箭 β，且至多存在一条满足 $\gamma\alpha \notin I$ 的箭 γ。

如果理想 I 由长度至少为二的路径生成，则称其为字符串代数。温和代数是字符串代数的一个子类，其理想 I 由长度恰为二的路径生成。在这种情况下，我们称 (Q, I) 为温和对。

我们将 Q 的一个字定义为由 Q 的符号拼接而成的 $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$，且对每个 $1 \leq i < n$，都有 $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$。$\alpha$ 的源定义为 $s(\alpha) = s(\alpha_1)$，而 α 的目标定义为 $t(\alpha) = t(\alpha_n)$。α 的逆定义为字 $\alpha^{-1} = \alpha_n^{-1} \cdots \alpha_1^{-1}$。串 u 是满足以下条件的字 $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$：对所有 $1 \leq i \leq n-1$，都有 $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}^{-1}$，且 u 或其逆的任何子串都不属于 I。带定义为满足以下条件的循环串 b：其每个幂 b^m 都是一个串，但 b 不是任何串的真幂。如果一个字符串代数只有有限多个带，则称其为驯性；否则称为非驯性。对于一个串 $S = \alpha_1 \cdots \alpha_n$，与 S 相关联的字符串模是一个 $(n+1)$ 维模 $M(S)$，其 K-基为 $\{z_1, \cdots z_{n+1}\}$（$M(S)$ 的典范基），其乘法定义如下：

$$az_j = \begin{cases} z_{j-1} & \text{if } j \geq 2 \text{ and } a = \alpha_{j-1}; \\ z_{j+1} & \text{if } j \leq n \text{ and } a^{-1} = \alpha_j; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于任意正箭头 a和 $j \in \{1, \cdots, n+1\}$。任意字符串模都是不可分解的，并且$M(S_1) \approx M(S_2)$ 当且仅当 $S_1 = S_2$或 $S_1 = S_2^{-1}$。更多详情请参阅 [3]。

斜温和代数：斜温和代数属于 Crawley Boevey [4], 引入的斑驳代数类；当 K 的特征不等于二时，它们是带有某种 $\mathbb{Z}_2$-作用的温和代数的斜群代数。设 (Q, I) 是一个温和对。设 Sp 是箭图 Q 的顶点的一个子集， Sp 中的元素称为特殊顶点；其余顶点为普通顶点。对于三元组 (Q, Sp, I)，考虑有序对 (Q^{Sp}, I^{Sp})，其中 $Q_0^{Sp} := Q_0, Q_1^{Sp} := Q_1 \cup \{\alpha_i \mid i \in Sp, s(\alpha_i) = t(\alpha_i) = i\}$，且 $I^{Sp} := I \cup \{\alpha_i^2 \mid i \in Sp\}$。如果对应的有序对 (Q^{Sp}, I^{Sp}) 是温和对，则称三元组 (Q, Sp, I) 为斜温和的。我们为每个顶点 $i \in Q_0$ 关联一个集合，记作 $Q_0(i)$，定义如下：若 i 是普通顶点，则 $Q_0(i) = \{i\}$；若 i 是特殊顶点，则$Q_0(i) = \{i^-, i^+\}$。我们将按如下方式定义的有序对记为 (Q^{sg}, I^{sg})：

$$Q_0^{sg} := \cup_{i \in Q_0} Q_0(i),$$

$$Q_1^{sg}[a, b] := \{(a, \alpha, b) \mid \alpha \in Q_1, a \in Q_0(s(\alpha)), b \in Q_0(t(\alpha))\},$$

$$I^{sg} := \{ \sum_{b \in Q_0(s(\alpha))} \lambda_b (b, \alpha, c)(a, \beta, b) \mid \alpha\beta \in I, a \in Q_0(s(\beta)), c \in Q_0(t(\alpha))\},$$

其中，若存在某个 $i \in Q_0$，则为 $\lambda_b = -1$ $b = i^-$；否则为 $\lambda_b = 1$。注意， I^{sg} 中的关系¯是零关系或交换关系。若一个 K-代数 Λ 是扭斜温和的，

当且仅当它 Morita等价于因子代数 KQ^{sg}/I^{sg} 时，其中三元组 (Q, Sp, I) 是扭斜温和的。相应的有序对 (Q^{sg}, I^{sg}) 也称为扭斜温和的。

根据 [12], ，我们在下文回顾对任意给定的¯扭斜温和三元组（Q, Sp, I）所对应的温和代数 Λ 的构造，使得相应的扭斜温和代数 Λ :=KQ^{sg}/I^{sg}在特征$K \neq 2$的情形下与斜群代数 $\Lambda\mathbb{Z}_2$ Morita等价。

温和对上的群作用：对给定的特殊（相应地，普通）顶点 i，用$Q_0[i]$ 表示集合{i}（相应地，{i^-, i^+}）。考虑对（Q^g, I^g），其中 $Q_0^g := \sum_{i\in Q_0} Q_0[i], Q_1^g$:={$\alpha^+, \alpha^- \mid \alpha \in Q_1$}，并且

$$s(\alpha^{\pm}) := \begin{cases} s(\alpha)^{\pm}, & \text{if } s(\alpha) \notin Sp; \\ s(\alpha), & \text{if } s(\alpha) \in Sp, \end{cases} \qquad t(\alpha^{\pm}) := \begin{cases} t(\alpha)^{\pm}, & \text{if } t(\alpha) \notin Sp; \\ t(\alpha), & \text{if } t(\alpha) \in Sp. \end{cases}$$

此外， $I^g := \{\beta^+\alpha^+, \beta^-\alpha^- \mid \beta\alpha \in I, t(\alpha) \notin Sp\} \cup \{\beta^+\alpha^-, \beta^-\alpha^+ \mid \beta\alpha \in I, t(\alpha) \in Sp\}$。

代数 $\Lambda := KQ^g/I^g$ 是温和的 [12]。称 (Q^g, I^g)（分别地， KQ^g/I^g）为 (Q, Sp, I) 或 KQ^{sg}/I^{sg} 的关联温和对（分别地，关联温和代数）。 $\mathbb{Z}_2 = g$ 在 Λ 上的群作用定义如下： $g(i^{\pm}) := i^{\mp}, g(j) := j, g(\alpha^{\pm}) := \alpha^{\mp}$，对所有 $i \in Q_0 \setminus Sp, j \in Sp^-$ 和 $\alpha \in Q_1$ 均成立。由此得到的斜群代数 $\Lambda\mathbb{Z}_2$ 与 Λ Morita等价。

字符串代数上带点模的独立稠密对：给定一个箭 $a \in Q_1$，我们将 $S(a)$ 定义为字符串代数 Λ 上以 a 开头的字符串集合。由 [3] 可知， $S(a)$ 上存在线性序 $<$，使得 $S < T$ 当且仅当以下条件之一成立：

- $S\phi^{-1}U = T$对于一个箭 ϕ 和一个字符串 U;
- $S = T\psi V$对于一个箭 ψ 和一个字符串 V;
- $S = S\prime\psi W$ 以及 $T = S\prime\phi^{-1}X$ 对于某些箭 ϕ， ψ 和字符串 $S\prime W$， X。

字符串代数 Λ 具有两个不同的带 U 和 V，它们以同一个正箭头开头，并以同一个逆箭头结尾，且 U 不是 V 的延长，V也不是 U的延长，即对于任意字符串 X和 Y， $U \neq VX$ 和 $V \neq UY$。此外，假设 $U < V$，令 $\Sigma(U;\ V)$表示字母表{$U;\ V$}上所有有限字的集合，其中包括空字 ϕ。下一个定理给出了一个带点模的稠密链。

定理 3.1。 [17, 5。3] 假设 U 和 V 是两个不同的带，满足 $U < V$，且U不是 V的延长，反之亦然。令 S、 $T \in \Sigma(U$、 $V)\}$。则集合 $L_S^T(U$、 $V)$:={$SXTU;\ \ X \in \Sigma(U$、 $V)\}$ 是一个无端点的稠密链。

若字符串代数 Λ 上的两个不同带 (U, V) 以相同的正箭头开头，并以相同的逆箭头结尾，则当 $U < V$ 和 U 不是 V 的延长（反之亦然）时，(U, V) 是 Q-生成的。对于字符串代数 Λ 上这样一对带 (U, V)，上述定理蕴含：对于任意字符串 $S, T \in \Sigma(U, V)$，集合 $L_S^T(U, V)$ 同构于有理数的偏序集 Q。给定两对 Q-生成对 (U, V) 和 (U^{-1}, V^{-1})，以及 S, $T \in \Sigma(U, V)$; $S', T' \in \Sigma(U^{-1}, V^{-1})$，我们可以构造出带指点模的稠密链独立对。设 $S = s_1 \cdots s_n$ 是字符串代数 Λ 上的一个字符串， $M(S)$ 是相应的字符串模，而 $z_1^S \in M(S)$ 是 $M(S)$ 的典范 K-基的第一个元素。我们称带点模 Λ-模 $(M(S)\ z_1^S)$ 为与 S 相关联的典范带标记字符串模。尽管 $M(S) \approx M(S^{-1})$，通常带标记模 $(M(S)\ z_1^S)$ 和 $(M(S^{-1})\ z_1^{S^{-1}})$ 并不同构。下一个引理说明字符串之间的关系如何决定相关模之间的同态。

引理 *3.2.* [22, 3.1] 假设 $a \in Q_1, S, T \in S(a)$ 且 $S < T$。那么，典范带标记字符串模 $(M(T)\ z_1^T)$ 和 $(M(S)\ z_1^S)$ 之间存在一个带标记的 Λ-同态 $f_{(S,T)} : (M(S);\ z_1^S) \to (M(T)\ z_1^T)$。

设 $T = t_1 \cdots t_k, S = s_1 \cdots s_m$ 是 Λ 上的串，且 TS 也是一个串。用 $z^{(T,S)}$ 表示 $M(TS)$ 的典范基 $(z_1^{TS} \cdots z_{k+1}^{TS} \cdots z_{k+m+1}^{TS})$ 中的元素 z_{k+1}^{TS}。我们在下一个引理中讨论这些带标记模的带标记推出。

引理 3.3. [22, 3。2] 设 T、S 是 Λ 上的串，且 $T^{-1}S$ 也是一个串。那么，带点模 $(M(T^{-1}S)\ z^{(T^{-1},S)})$ 是带点模 $(M(S)\ z_1^S)$ 和 $(M(T)\ z_1^T)$ 的带标记推出。

关于字符串模之间带点同态的组合描述，请参见 [35, 第 2] 节。

定理 3.4. [17, 5。7] 设 (U, V) 和 (U^{-1}, V^{-1}) 是字符串代数 Λ 上的 Q-生成对，并令 S、$T \in \Sigma(U, V)$ $S', T' \in \Sigma(U^{-1}, V^{-1})$。那么

$$((M(X), z_1^X)_{X \in L_S^T(U,V)}, (M(Y), z_1^Y)_{Y \in L_{S'}^{T'}(U^{-1},V^{-1})}$$

是 Λ-模中带指点模的稠密链的独立对。

下一个定理是定理 2.4 的推论。

定理 3.5. [21]设 Λ是一个非驯性温和代数。则 Λ 上所有 *pp*-公式构成的格的宽度等于无穷大，并且它有一个超可分解模。

定义 3.6. 如果对于任意 q、q_1、$q_2 \in L_1$ 以及 t、t_1、$t_2 \in L_2$，以下条件均成立，则 Λ 上带指点模的稠密链独立对 $((M_q, m_q)_{q \in L_1}, (N_t, n_t)_{t \in L_2})$ 称为非对称的：

(1) ${}^g M_{q_1} \ncong M_{q_2}$；*(2)* ${}^g N_{t_1} \ncong N_{t_2}$；*(3)* ${}^g P_{q_1 t_1} \ncong P_{q_2 t_2}$，其中 $(P_{qt}, p_{qt}) := (M_q, mq) * (N_t, n_t)$。

下一个结果保证：当给定代数具有一个非对称对时，斜群代数上存在带点模的稠密链独立对。

定理 3.7。设 特征$(K) \neq 2$ 且 F_λ：模-$\Lambda \to$ 模-Λ 是一个伽罗瓦半覆盖，且模 θ 是半单的。

(1) 若 $((M_q, \chi_{M_q})_{q \in L_1}, (N_t, \chi_{N_t})_{t \in L_2})$ 是 Λ 上带点模稠密链的非对称对，则 $((F_\lambda(M_q)\chi_{F_\lambda(M_q)})_{q \in L_1}; (F_\lambda(N_t); \chi_{F_\lambda(N_t)})_{t \in L_2})$ 是 Λ 上带点模稠密链的独立对。（2）若 $(M_p; \chi_{M_p})_{p \in L_1}$ 是 P_Λ^θ 中 θ- 带点模的宽偏序集，则 $(F_\lambda(M_p); \chi_{F_\lambda(M_p)})_{p \in L_1}$ 是 P_Λ^θ 中 $\tilde{\theta}$- 带点模的宽偏序集。

证明。我们首先证明，$(F_\lambda(M_q)\ \tilde{m_q})_{q \in L_1}$ 是由 θ 标记的 Λ-模构成的稠密链（类似的论证表明，$(F_\lambda(N_t);\ \tilde{n_t})_{t \in L_2}$也是由 θ 标记的 Λ-模构成的稠密链）。令 $q \in L_1$。显然，注 2.10 表明，模 $F_\lambda(M_q)$ 根据构造是不可分解的。由于根据注 2.9，F_λ 是忠实的，因此由定理 2.8 可得 $\chi_{F_\lambda(M_q)} \neq 0$。

令 $q < q'$ and $\mu_{q,q'} : (M_q, \chi_{M_q}) \to (M_{q'}, \chi_{M_{q'}})$ 是一个 θ-带点同态。由命题 2.12，得到一个 θ-带点同态 $F_\lambda(\mu_{q,q'}) : (F_\lambda(M_q); \chi_{F_\lambda(M_q)}) \to (F_\lambda(M_{q'}); \chi_{F_\lambda(M_{q'})})$。此外，对于任意 $q \neq q'$，θ-带点模 $(F_\lambda(M_q); \chi_{F_\lambda(M_q)})$ 和 $(F_\lambda(M_{q'}); \chi_{F_\lambda(M_{q'})})$ 不同构，因为 $M_q \ncong {}^g M_{q'}$，因此由注 2.10 可得 $F_\lambda(M_q) \ncong F_\lambda(M_{q'})$。于是，$(F_\lambda(M_q); \chi_{F_\lambda(M_q)})_{q \in L_1}$ 是 θ-带点 Λ-模的稠密链。

现在，我们证明对 $((F_\lambda(M_q)\ \tilde{m_q})_{q\in L_1};(F_\lambda(N_t);\ \tilde{n_t})_{t\in L_2})$ 构成一个独立对。命题 2.12 指出， $F_\lambda((M;\ \chi_M)*(N;\ \chi_N))\approx F_\lambda(M;\ \chi_M)*F_\lambda(N;\ \chi_N)$。此外，由于 $((M_q,m_q)_{q\in L_1},(N_t,n_t)_{t\in L_2})$ 是一个非对称对，根据注 2.10， $F_\lambda((M;\ \chi_M)\ *(N;\ \chi_N))$ 不可分解。因此， $F_\lambda(M;\ \chi_M)\ *F_\lambda(N;\ \chi_N)$ 不可分解。

假设对某些 $q\in L_1$ 和 $t\neq t'\in L_2$， $F_\lambda(M_q,\chi_{M_q})\ *F_\lambda(N_t,\chi_{N_t})$与 $F_\lambda(M_q,\chi_{M_q})\ *F_\lambda(N_{t'},\chi_{N_{t'}})$同构。则我们得到 $F_\lambda(M_q*N_t)\approx F_\lambda(M_q)*F_\lambda(N_t)\approx F_\lambda(M_q)\ *F_\lambda(N_{t'})\approx F_\lambda(M_q*N_{t'})$，从而得到 $M_q*N_t\approx {}^g(M_q*N_{t'})$。这与$((M_q,m_q)_{q\in L_1},(N_t,n_t)_{t\in L_2})$是非对称对这一事实相矛盾。因此 $F_\lambda(M_q,\chi_{M_q})*F_\lambda(N_t,\chi_{N_t})$与 $F_\lambda(M_q,\chi_{M_q})\ *F_\lambda(N_{t'},\chi_{N_{t'}})$不同构。类似地，对任意 $q'\neq q\in L_1$，它也与$F_\lambda(M_{q'},\chi_{M_{q'}})\ *F_\lambda(N_t,\chi_{N_t})$不同构。因此，结论成立。□

设 α 和 β 是字符串代数 Λ中终止于同一顶点的两个不同的箭。于是， β 由 α唯一确定。用 $B(\alpha)$表示所有首字母为α的带的集合。那么， β^{-1} 是 $B(\alpha)$中所有带的相同末字母。若 Λ 不是驯性的，根据[37, 第 41] 页，存在一个 α ，其中有两个不同的带 U、$V\in B(\alpha)$，使得 U和 V均不包含形如 $\alpha\beta^{-1}$的子串。从给定斜温和代数的温和对可以看出，若群作用交换 α和 β，那么 (U,V) 和 (U^{-1},V^{-1}) 是 Λ上的 Q生成对，因此 $((M(X)\ z_1^X)_{X\in L_S^T(U,V)},(M(Y)\ z_1^Y)_{Y\in L_S^{T'}(U^{-1},V^{-1})}$ 构成 Λ上的带指点模稠密链的非对称独立对。最后，利用伽罗瓦半覆盖函子，由定理 3.7 得到以下结果。

定理 3.8. </style}设 是斜温和代数，是其关联温和代数。若是非驯性的，则有一个超可分解模。此外，(Λ*) </style}*是无限的。

M. Prest 在 [25] 中利用 mod-Λ 上的可因子化态射系统这一概念，证明了 pp公式格与带点模块格同构。这里的可因子化态射系统是指由有理数索引的一族带点有限表示模块 $(M_q,m_q)_{q\in Q}$ ，满足 $(M_q,m_q)\ >(M_p,m_p)$ 当且仅当 $q<p$。

推论 3.9. [25, 4。4] 若在 mod-Λ 中不存在可因子化带点模块系统，则不存在超可分解纯单射 Λ-模。

若 Λ 有一个超可分解模，则上述推论保证 mod-Λ 中存在可因子化带点模块系统。由于 Λ 与$\hat{}$斜群代数 ΛG Morita等价，其中 G 是 G的对偶群，考虑 G_λ :mod-$\Lambda\to$ mod$-\Lambda$ [32,备注 3.4] ，即可在 mod-Λ 中得到可因子化带点模块系统，从而保证递归系统 [10, 第 4 节.1]存在，这又导致稳定根中存在一个态射 [10, 引理 4.1.5], ，也就是说根的幂零指标不存在。因此， Λ 是非驯性的，因为对于任意驯性字符串代数，Schr¨oer [35] 计算得出 $\mathrm{rad}^{\omega(n+2)}(\Lambda)\ =0$，其中 n 是其桥箭图中路径的最大长度。

定理 *3.10. </style}*假设 Λ 是一个斜温和代数。

(1) $\bar{\Lambda}$ 属于非国内型，当且仅当格 P_Λ^θ 是宽的；*(2)* 若域 k 可数，则 Λ 属于非国内型，当且仅当存在一个超可分解纯内射 Λ-模。

下面的备注讨论斜温和代数的 Prest猜想。

注记 3.11：斜温和代数也是温和的，我们将验证它具有超可分解模。因此，它也反驳了 Prest第一猜想，但第二猜想——即一个代数 Λ 是家养表示型，当且仅当不存在超可分解纯内射模——对于斜温和代数仍然成立。

4. Jacobian algebras associated with closed punctured oriented surfaces:

本节中，我们考察与具有非空有限穿孔集的闭定向曲面相关联的雅可比代数，仅排除带有四个（或更少）穿孔的球面这一情形，并证明这些代数是有限维温和代数。其中，与带有五个穿孔的球面相关联的代数是斜温和代数的一个商，而在其余情形中，这些代数均表示为非国内串代数的商（详见 [13], [20], [43]）。根据定理 3.5，一个非国内串代数具有超可分解模。最后，我们在斜温和代数情形下显式构造了一个超可分解模，由此得出雅可比代数具有超可分解模。

Y. Valdivieso-D´ıaz 在 [43] 中表明，上述雅可比代数是指数型的。下述命题由主要结果的证明推出；她在该证明中表明，在球面的任意三角剖分的底箭图中存在一个三循环和一个有限长度循环，且二者可交换，五个（或更少）puncture 的情形除外。

命题 4.1. 对于排除五个（或更少）*puncture* 情形的球面，存在三角剖分 $\mathbb{T}$，使得雅可比代数 $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T})\ W(\mathbb{T}))$ 是一个非驯性字符串代数的商。

Puninski 已证明，在可数域上的任意非多项式增长字符串代数上存在超可分解纯内射模。

命题 4.2. 对于带五个穿孔的球面，存在三角剖分 $\mathbb{T}$，使得雅可比代数 $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T})\ W(\mathbb{T}))$ 是一个斜温和代数的商。

证明。 考虑图 1 中的斜 gentle 三角剖分 $\mathbb{T}$ （斜 gentle 三角剖分的定义见第 6 节 [13, 7]）以及雅可比代数 $A = \mathrm{P}(Q(\mathbb{T})\ W(\mathbb{T})$。令$I$ 为由势 $W' = b_3c_3a_2b_1c_1 + a_1b_2'c_2'a_3$ 的循环导数集合 $\delta(W')$ 生成的 $KQ(\mathbb{T})$ 中的理想。考虑商代数 $\Lambda = A/I$ （图 2）。

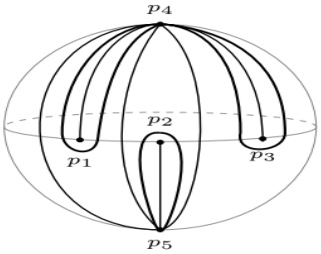

Figure 1. 具有 5 个 puncture 的球面的三角剖分 T。

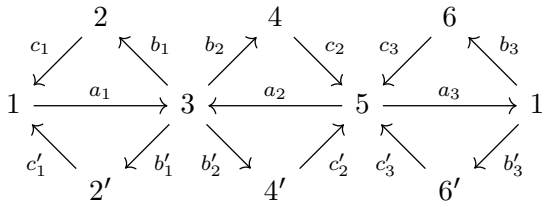

Figure 2. $Q(\mathbb{T})$

其中， $I = c_3a_2b_1c_1, a_2b_1c_1b_3, b_1c_1b_3c_3, c_1b_3c_3a_2, b_3c_3a_2b_1, b_2'c_2'a_3, c_2'a_3a_1, a_3a_1b_2', a_1b_2'c_2'$。则 $\bar{\Lambda}$ 与扭斜温和代数 KQ'/J 同构，其中 Q' 见图 3，而J是 KQ' 中由 $\epsilon_i^2 - \epsilon_i, a_ib_i, b_ic_i$ 以及当 $i = 1$ 为 2、3 时的 c_ia_i 生成的理想，并由集合 $\{b_2\epsilon_2c_2a_3, \epsilon_2c_2a_3a_1, c_2a_3a_1b_2, a_1b_2\epsilon_2c_2, \epsilon_3c_3a_2b_1\epsilon_1c_1, c_3a_2b_1\epsilon_1c_1b_3, a_2b_1\epsilon_1c_1b_3\epsilon_3, b_1\epsilon_1c_1b_3\epsilon_3c_3, \epsilon_1c_1b_3\epsilon_3c_3a_2, c_1b_3\epsilon_3c_3a_2b_1, b_3\epsilon_3c_3a_2b_1\epsilon_1\}$ 构成。

应用 Gabriel 的 quiver 构造 [31], 7 以验证该代数 Λ 是温和代数 $\Lambda = KQ/I$ 在群 $\mathbb{Z}_2$ 作用下的斜群代数，该作用定义为： $g : \bar{i} \leftrightarrow \bar{i}'$ 对 $i = 1$，3，5起作用，并固定箭图 Q 中其余的顶点，见图4。注意，这里的关系为 $I' = \bar{a}_ib_i$， $b_i\bar{c}_i'$， $\bar{c}_i\bar{a}_i$， $\bar{a}_i'b_i'$， $b_i'\bar{c}_i$， $\bar{c}_i'\bar{a}_i'$，其中 $i = 1$，2，3。□

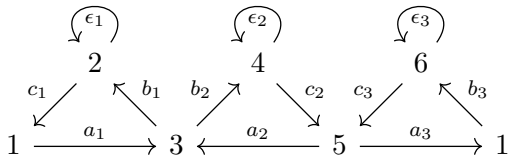

FIGURE 3. Q'

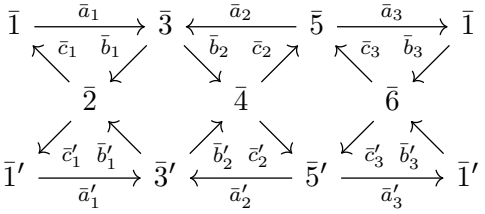

FIGURE 4. Q

命题 4.3. 设 Λ 是一个有限维代数，且 Λ' 是 Λ的一个商。若 Λ'具有一个超可分解模，则原来的代数 Λ 也具有一个。

证明。 M 上的商代数 $\Lambda' = \Lambda/I$ -模可视为一个 Λ-模（通过自然同态 $\Lambda \to \Lambda/I$，其中 I 作用为零）。如果 M 作为Λ/I-模是超可分解的，那么它作为 Λ-模也超可分解，因为 Λ/I-模中的任何直和分解$M = N \oplus K$ 也是 Λ-模中的有效直和分解。□

注意，命题 4.2 中的代数 Λ 是一个非国内串代数，因为带 $\beta_1 := \bar{a}_3\bar{a}_1\bar{a}_2^{-1}$与 $\beta_2 := \bar{a}_1\bar{b}_2\bar{c}_2\bar{c}_3^{-1}\bar{b}_3^{-1}$彼此交换。因此，由定理 3.5， Λ 具有一个超可分解纯内射模。下述定理保证了 Λ上带标记模的稠密链的一个非对称对的存在性。

定理 4.4. 假设 $(U, V) = (\bar{a}_3\bar{a}_1\bar{a}_2^{-1}, \bar{a}_3\bar{a}_1\bar{b}_2\bar{c}_2\bar{c}_3^{-1}\bar{b}_3^{-1}\bar{a}_1\bar{a}_2^{-1})$。则 (U, V) 与(U^{-1}, V^{-1}) 是 Λ上的 Q-生成带对。此外，该对

$$((M(X), z_1^X)_{X\in L_S^T(U,V)}, (M(Y), z_1^Y)_{Y\in L_{S'}^{T'}(U^{-1},V^{-1})}$$

是 Λ-*mod* 中的带指点模的稠密链独立对，使得：

(1) 对任意 $S_1, S_2 \in L_V^U(U, V)$， ${}^gM(S_1) \ncong M(S_2)$，*(2)* 对任意 $T_1, T_2 \in L_{V^{-1}}^{U^{-1}}(U^{-1}, V^{-1})$， ${}^gM(T_1) \ncong M(T_2)$，*(3)* 对任意 $S_1, S_2 \in L_V^U(U, V)$ 以及 $T_1, T_2 \in L_{V^{-1}}^{U^{-1}}(U^{-1}, V^{-1})$， ${}^gM(T_1^{-1}S_1) \ncong M(T_2^{-1}S_2)$。

证明。 (a) 我们验证 (U, V) 与 (U^{-1}, V^{-1}) 是 Λ 上的 Q-生成带对，并且由定理 3.4，这些对是带标记模的稠密链的独立对。

假设对某个 $X_1, X_2 \in \Sigma(U, V)$，有 $S_1 = VX_1VU$ 与 $S_2 = VX_2VU$。由命题 5.8，只需证明 $S_2 \neq {}^gS_1$ 与 $S_2 \neq {}^gS_1^{-1}$。显然 ${}^gS_1 = {}^g(VX_1VU) = {}^gV{}^gX_1{}^g(VU)$ 且 ${}^gS_1^{-1} = ({}^gV{}^gX_1{}^g(VU))^{-1} = {}^gU^{-1g}V^{-1g}X_1^{-1g}V^{-1}$。因此，$S_2 \neq {}^gS_1$，因为 V 作为一条带，以与 ${}^gV$ 不同的箭开始。此外，由引理 5.1(a)， $S_2 \neq {}^gS_1^{-1}$，因为 $S_2, {}^gS_1^{-1} \in \Sigma(U, V)$，且 S_2以 V开始，而 ${}^gS_1^{-1}$以 ${}^gU^{-1}$开始。

(b) 假设 $T_1 = V^{-1}Y_1U^{-2}$and $T_2 = V^{-1}Y_2U^{-2}$for some $Y_1, Y_2 \in \Sigma(U^{-1}, V^{-1})$。我们证明 $T_2 \neq {}^gT_1$and $T_2 \neq {}^gT_1^{-1}$。这里， ${}^gT_1 = {}^g(V^{-1}Y_1U^{-2}) = {}^gV^{-1g}Y_1{}^gU^{-2}and{}^gT_1^{-1} = ({}^gV^{-1g}Y_1{}^gU^{-2})^{-1} = {}^gU^{2g}Y_1^{-1g}V$。因此，由于 V 的开头箭与 V^{-1} 不同，且 V^{-1} 的开头箭与 ${}^gU$ 不同，结论得证。

(c) 假设 $S_1 = VX_1VU$， $S_2 = VX_2VU$for some X_1， $X_2 \in \Sigma(U$， $V)$ and $T_1 = V^{-1}Y_1U^{-2}$； $T_2 = V^{-1}Y_2U^{-2}$for some Y_1， $Y_2 \in \Sigma(U^{-1}$， $V^{-1})$。我们将证明 $T_2^{-1}S_2 \neq {}^g(T_1^{-1}S_1)$ and$T_2^{-1}S_2 \neq {}^g(T_1^{-1}S_1)^{-1}$。这里， $T_2^{-1}S_2 = (V^{-1}Y_2U^{-2})^{-1}VX_2VU = U^2Y_2^{-1}V^2X_2VU$；

$$ {}^g(T_1^{-1}S_1) = {}^g(U^2Y_1^{-1}V^2X_1VU) = {}^gU^{2g}Y_1^{-1g}V^{2g}X_1{}^gV{}^gU;$$

$$ {}^g(T_1^{-1}S_1)^{-1} = {}^gU^{-1g}V^{-1g}X_1^{-1g}V^{-2g}Y_1{}^gU^{-2}.$$

因此，该断言成立，因为 U 的起始箭与 ${}^gU$ 和 ${}^gU^{-1}$ 不同。□

由定理 4.4 和 3.8 以及命题 4.1、4.2 和 4.3，得出下一个结果。

定理 4.5. 设 S 是一个闭定向曲面，其上有 M 个非空有限的 *puncture* 集合，但不包括带有四个（或更少）*puncture* 的球面的情形。对于雅可比代数 $\Lambda = P(Q(T)\ W(T))$ 中的任意标记三角剖分 T，在 Λ-模中存在带点模的稠密链独立对。因此，若基域 K 是可数的，则存在超可分解纯内射 Λ-模。

推论 4.6. 设 S 是一个闭定向曲面，其上有 M 个非空有限的 *puncture* 集合，但不包括带有4 个（或更少）*puncture* 的球面的情形。对于任意标记三角剖分 T，在雅可比代数 $\Lambda = P(Q(T)\ W(T))$ 中，$\mathrm{KG}(\Lambda)$ 是无限的。

5. Superdecomposable modules over skew algebras and extension algebras

作为定理 3.7 的一个应用，我们明确证明某些著名斜代数及其扩张代数上超不可分解模的存在性。

Nazarova–Zavadskij 偏序集的关联代数上的超不可分解模：我们证明，在 Nazarova–Zavadskij 偏序集的关联代数上存在带指点模的稠密链独立对，该偏序集在 [34, 15 中记为 N Z。31],它由唯一的极大元扩充而成。更精确地说，令 $\Gamma := K(NZ)^*$ 为有界箭图代数 KQ/ρ，其中，(Q,ρ) 由图 5 给出。

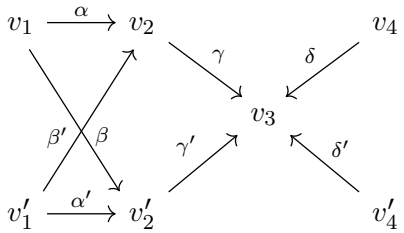

Figure 5. Γ 与 ρ ={ $\alpha\gamma + \beta\gamma'$， $\beta'\gamma + \alpha'\gamma'$}

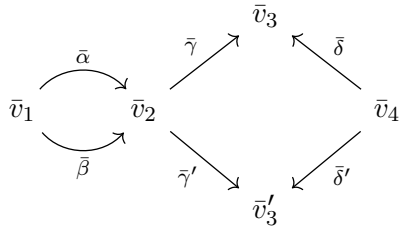

Figure 6. Γ 与 $\rho = \{\bar{\alpha}\bar{\gamma}', \beta\bar{\gamma}\}$

应用Gabriel箭 quiver构造 [31], 可以验证，代数 Γ是温和代数 $\Gamma = KQ/\bar{\rho}$ 的 ¯ ¯ ¯斜群代数，其中，$(Q,\ \bar{\rho})$ 如图6所示，¯群 $\mathbb{Z}_2 = g$ 在其上的作用定义为 $g : \bar{\alpha} \leftrightarrow \beta$ 和 $g : \bar{\tau} \leftrightarrow \bar{\tau}'$（ $\tau = \gamma,\ \delta$）。

考虑带 $U = \bar{\delta}'\bar{\gamma}'^{-1}\bar{\gamma}\bar{\delta}^{-1}$和 $V = \bar{\delta}'\bar{\gamma}'^{-1}\bar{\beta}^{-1}\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\delta}^{-1}$。注意，带 U^-与 V 可交换。因此，Γ 是一个非驯性温和代数。由于 $U < V$ 不是 V的延长，反之亦然，我们有 (U,V) 和 (U^{-1},V^{-1}) 是字符串代数 $\bar{\Gamma}$上的 Q-生成对。于是，对于任意 $S,T \in \Sigma(U,V)$ $S',T' \in \Sigma(U^{-1},V^{-1})$，集合$L_S^T(U,V)$ 和 $L_{S'}^{T'}(U^{-1},V^{-1})$ 依据定理 3.1 是没有端点的稠密链；并且 $((M(X)\ z_1^X)_{X\in L_S^T(U,V)}$; $(M(Y)\ z_1^Y)_{Y\in L_S^{T'}(U^{-1},V^{-1})})$ 依据定理 3.4 是带 Λ-模的稠密链独立对。此外，由于 $g(U) = U^{-1}$且 $g(V) = V^{-1}$，运用定理 4.4 中的类似论证，可以轻易证明这构成一个非对称对。最后，利用定理 3.7，我们在 Γ上得到一个带标记模的稠密链独立对和一个宽偏序集，由此证明 KG(Γ) 是无限的。

菱形代数上的超不可分解模：我们证明，菱形代数 Λ_3_$\Gamma = KQ/\rho$ 上存在一对带标记模稠密链的独立对，其中，(Q,ρ) 如图 7 所示。应用 Gabriel箭 quiver构造

[31], 可以验证，代数 Λ_3 是代数 $\Lambda_5 = KQ/\bar{\rho}$ 的斜群代数，其中，$(Q, \bar{\rho})$ 如图 10 所示；其作用群为 $\mathbb{Z}_2 = g$，定义如下：$g : \bar{v_i} \leftrightarrow \bar{v_i}'$ 对 $i = 1, 4$ 进行作用，并固定其余顶点。此外，代数 Λ_5 是温和代数 $A_1 = KQ/\tilde{\rho}$ 的斜群代数，其中，$(Q, \tilde{\rho})$ 如图 20 所示；其作用群为 $\mathbb{Z}_2 = g$，定义为 $g : \tilde{\alpha} \leftrightarrow \beta$ 和 $g : \tilde{\gamma} \leftrightarrow \delta$。

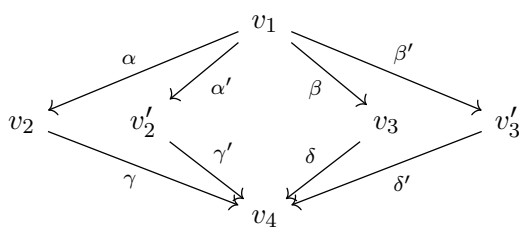

FIGURE 7. Λ_3 与 $\bar{\rho} = \{\alpha\gamma + \beta\delta + \beta'\delta',\ \alpha'\gamma' + \beta\delta + \beta'\delta'\}$

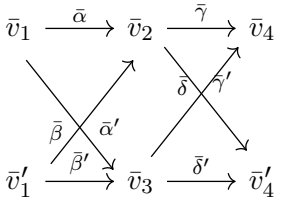

FIGURE 8. Λ_3 与 $\bar{\rho} = \{\bar{\alpha}'\bar{\gamma} + \beta'\delta,\ \bar{\alpha}'\bar{\gamma}' + \beta'\delta',\ \bar{\alpha}\bar{\gamma} + \beta\delta\}$

考虑 A_1上的带 $U = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}$和 $V = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$。注意，带 U和 V 可交换。因此，A_1 是一个非驯性温和代数。由于 $U < V$ 和 U 并非 V的延长，反之亦然，因此(U, V)和(U^{-1}, V^{-1})是字符串代数 $\bar{\Gamma}$上的 Q-生成对。于是，对于任意 $S, T \in \Sigma(U, V)$ $S', T' \in \Sigma(U^{-1}, V^{-1})$，集合$L_S^T(U, V)$和 $L_{S'}^{T'}(U^{-1}, V^{-1})$由定理 3.1 可知是没有端点的稠密链，并且$((M(X)\ z_1^X)_{X \in L_S^T(U,V)}; (M(Y)\ z_1^Y)_{Y \in L_S^{T'}(U^{-1},V^{-1})})$由定理 3.4 可知是点态 A_1-模的稠密链独立对。此外，由于 ${}^gU = U^{-1}$ 和 ${}^gV = V^{-1}$，该对是非对称的，因此由定理 3.7 可得点态 Λ_5-模的稠密链独立对。这样的独立对为$((M(\bar{X})\ \bar{z}_1^{\bar{X}})_{\bar{X} \in L_{\bar{S}}^{\bar{T}}(\bar{U}, \bar{V})}; (M(\bar{Y})\ \bar{z}_1^{\bar{Y}})_{\bar{Y} \in L^{\bar{T}'}{}_{\bar{S}'}(\bar{U}^{-1}, \bar{V}^{-1})})$，其中，$\bar{U} = \bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\delta}^{-1}\bar{\delta}'\bar{\gamma}'^{-1}\bar{\alpha}'^{-1}\bar{\beta}'\bar{\beta}^{-1}$和 $\bar{V} = \bar{\alpha}\bar{\alpha}'^{-1}\bar{\beta}'\bar{\beta}^{-1}$。这里，${}^g\bar{U} \neq \bar{U}^{-1} \neq \bar{U}$和 ${}^g\bar{V} \neq \bar{V}^{-1} \neq \bar{V}$。最后，由定理 3.7 可得点态 Λ_3-模的稠密链独立对。

花环上的超可分解模：考虑代数 $A = KQ/I$，其箭图 Q 如图 9 所示，且箭图中的所有方形均反交换；它是一个花环 [1, 例 3.5]。代数 A 由在 Λ_5 处进行单点扩张以及在 $\bar{v}_5$处进行单点余扩张得到。我们已经验证 Λ_5 有一个超可分解模。

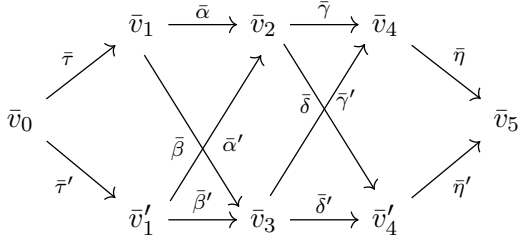

FIGURE 9. 花环

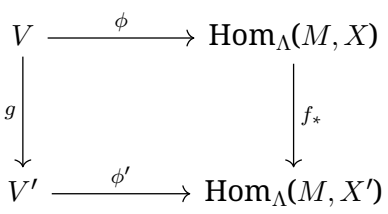

FIGURE 10. $\Lambda[M]$中的态射

如果代数 Λ 有一个超可分解模，那么它的单点扩张代数$\Lambda[M] = \left(\begin{smallmatrix} K & 0 \\ M & \Lambda \end{smallmatrix}\right)$（其中 K是一个域）也有一个超可分解模，因为范畴 mod-$\Lambda[M]$可描述如下：对象的形式为三元组 $(V, X; \phi)$，其中V是一个 K-向量空间，X是一个 Λ-模，$\phi \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_\Lambda(M, X))$；态射为

形式为 $(f,g):(V,X;\phi)\to(V'X';\phi')$，其中 $f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(X,X')$ $g\in\mathrm{Hom}_K(V,V')$，且下图交换，即 $f_*\phi=\phi' g$ 其中，$f_*:=\mathrm{Hom}_\Lambda(f)$；态射的复合是自然的。典范投影 $p:\Lambda[M]\to\Lambda$ 诱导出一个嵌入 $\iota_\Lambda:\text{mod-}\Lambda\to\text{mod-}\Lambda[M]$。因此，我们可以将 mod-Λ 视为 mod-$\Lambda[M]$ [28]的一个全子范畴。也就是说，对于 mod-Λ中的任意 X，我们将 $\iota_\Lambda(X)$ 记作 mod-$\Lambda[M]$中的 X。特别地，如果 Λ 有一个超可分解模 N，我们通常可以构造一个 $\Lambda[M]$ 上的超可分解模：将 $\iota_\Lambda(N)$用作三元组的 Λ分量（X），并可能选择 $V=0$，使其结构允许无限个不可分裂分解。

曲面代数上的超不可分解模：作者利用标记曲面的几何，研究两个不同温和代数所对应的斜温和代数具有相同导出范畴的情形。在标记曲面（S,M,P）上，若 $M\subseteq\partial S$，则剖分是由一组极大的互不相交的弧组成，这些弧的端点位于 M或 P，且不会截出 S的子曲面。对于（S,M,P,D），可以关联一个温和代数。设 $\sigma\in\mathrm{Homeo}^+(S)$ 是一个阶为 2 且只有有限个不动点的元素 X，满足 $\sigma(M)=M,\sigma(P)=P$ 且 $\sigma(D)=D$。这定义了一个作用于 Λ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 作用。

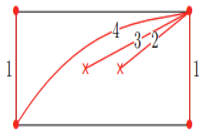

FIGURE 11. $(S,\ \sigma,\ D)$

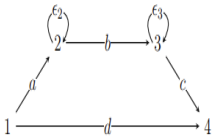

FIGURE 12. $(Q,\ I,\ Sp)$

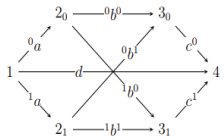

FIGURE 13. $(Q,\ I)$

考虑与（S,σ,D）对应的 X-剖分轨形；它是一个带有两个轨-点的圆柱，如图 11 所示。相应的斜温和代数 Λ 由以下斜温和三元组（Q,I,Sp）给出，其中图 12 中的 $I=\{ab,bc\}$ 和 $Sp=\{\epsilon_2,\epsilon_3\}$。相应的容许表示由（$\tilde{Q},\tilde{I}$）给出，其中，$\tilde{I}=\{({}^0a)({}^0b^0)+({}^1a)({}^0b^1),({}^0a)({}^1b^0)+({}^1a)({}^1b^1),({}^0b^0)(c^0)+({}^1b^0)(c^1),({}^0b^1)(c^0)+({}^1b^1)(c^1)\}$见图 13。注意，斜温和代数 λ 对应于两个不同的温和代数 $\Lambda_1=KQ_1/I_1$ 和 $\Lambda_2=KQ_2/I_2$，它们分别对应于具有标记曲面（S_1,σ_1）（图 15）和（S_2,σ_2）（图 17）的情形；相应的箭图 Q_1,Q_2 分别见图 14 和图 16，$I=\{a^+b^+,a^-b^-,b^+c^+,b^-c^-\}$ 和 I_2 以点线表示。

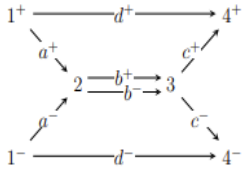

FIGURE 14. $(Q_1,I_1))$

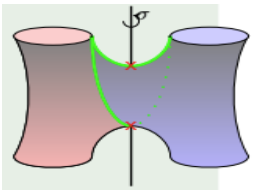

FIGURE 15. $(S_1,\ \sigma_1)$

考虑 Λ_1 上的带 $U=d^+c^{+-1}c^-d^{--1}a^-a^{+-1}$ 和 $V=d^+c^{+-1}b^{--1}a^{+-1}$。注意，带 U 和 V 可交换。因此，Λ_1 是一个非驯性温和代数。由于 $U<V$ 和 U 不是 V 的延长，反之亦然，所以 (U,V) 和 (U^{-1},V^{-1}) 是 Q-生成对。根据定理 3.4，对于任意 $S,T\in\Sigma(U,V)$ $S',T'\in\Sigma(U^{-1},V^{-1})$，集合 $((M(X)\ z_1^X)_{X\in L_S^T(U,V)};(M(Y)\ z_1^Y)_{Y\in L_S^{T'}(U^{-1},V^{-1})})$ 是由有标记的 Λ_1- 模组成的稠密链的独立对。此外，${}^gU\neq U^{-1}$ 和 ${}^gV\neq V^{-1}$，此对是非对称的，，并且根据定理 3.7，我们得到由有标记的 Λ_5-模组成的稠密链的独立对。

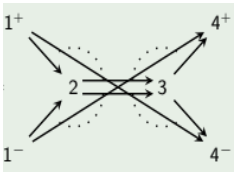

FIGURE 16. $(Q_2,\ I_2)$

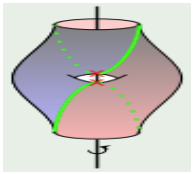

FIGURE 17. $(S_2,\ \sigma_2)$

6. SUPERDECOMPOSABLE MODULES OVER BRAUER GRAPH ALGEBRAS

布劳尔图代数起源于有限群的模表示论，最初以布劳尔树代数的形式出现 [14]。 [39, 第 4 节 4] 中的作者比较了布劳尔图代数的导出等价与冻结雅可比代数的导出等价，并将布劳尔图代数的导出等价解释为标记定向曲面的三角剖分中的对角线翻转。本节中，我们展示布劳尔图代数上超可分解模的存在性。

给定一个无向图 Γ，用 $val(v)$表示顶点 v的度，即与 v 在 Γ中关联的边的数量。我们回顾一下，Brauer 图 Γ 是一个元组 $(\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ m,\ o)$，其中 $(\Gamma_0,\ \Gamma_1)$ 是一个无向图，Γ_0 是顶点集，Γ_1 是边集，并且

- m 是一个重数函数 $m:\Gamma_0\to\mathbb{Z}^+$，为每个 $v\in\Gamma_0$赋予一个正数。
- o 是连接到每个 $v\in\Gamma_0$的边的定向。对于满足$val(v)=t$的顶点 v，我们将 $o(v)=(x_1,\cdots,x_t)$记为 $o(v)=(x_1,\cdots,x_t)$。在特殊情形下，若 $val(v)=1$，且连接到 v 的唯一一条边是 x，当 $m(v)=1$ 时，循环次序由单个元素 x给出；但当 $m(v)>1$ 时，我们令 $o(v)=(x,x)$，从而在循环次序中，x的后继（及前驱）是 x。

给定布劳尔图 Γ后，定义布劳尔箭图 $Q_\Gamma=(Q_0,Q_1)$如下：

(1) 顶点集合 Q_0 与 Γ的边一一对应；(2) 每当 x 和 y 是与顶点 $v\in\Gamma_0$ 关联的边，且y 是 x 在循环次序 $o(v)$中的紧邻后继时，就存在一条箭 $x\to y$；(3) Γ 的每个非特殊顶点 v，若 $m(v)val(v)\geq 2$，则在 Q中产生一个有向环$C_v:x_1\xrightarrow{\alpha_1}x_2\to\cdots x_t\xrightarrow{\alpha_t}x_1$；该有向环由定向 o确定，并且只在环等价意义下确定，即若 $o(v)=(x_1,\cdots,x_t)$（当 $t>1$时，在我们的例子中将其设为顺时针）。我们称 C_v 为 v处的特殊环。

定义关系理想 I_Γ in KQ_Γ，其由三类关系生成。为此，我们将 Brauer 图 Γ 的边集 Γ_1 与相应箭图 Q_Γ 的顶点集 Q_0 对应起来，并将 Brauer 图的顶点集记为 Γ。

I 型：$C_v^{m(v)}-C^{m(v')}\ v'$，其中 $i\in Q_0$ 任意，且对于位于 v 和v' 处的任意特殊 i-圈 C_v 和 $C_{v'}$，满足 v 和 v' 均未被截断（即 $val(v)m(v)\neq 1$ 以及 $val(v')m(v')\neq 1$）。
II 型：$C_v^{m(v)}\alpha_1$，其中 $i\in Q_0$、$v\in\Gamma_0$ 任意，且 i-圈 $C_v=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$为任意特殊圈。
III 型：$\alpha\beta$，其中 $\alpha,\ \beta\in Q_1$ 满足：$\alpha\beta$ 不是任何特殊圈的子路径，除非 $\alpha=\beta$ 是与度为一且重数为 $m(v)>1$的顶点 v 相关联的环。

那么，$\Lambda_\Gamma=KQ_\Gamma/I_\Gamma$ 称为与 Brauer 图 Γ 相关联的 Brauer 图代数。Brauer 图代数是特殊双串代数 [39, 定理 2.8], ，它们是温和代数的平凡扩张代数，且其关联 Brauer 图由温和代数的带状图给出（更多详情请参见 [39, 第 3 节1] ）。此外，下面的例 6.7 表明，关联温和代数不一定是唯一的。

定理 6.1. [38, 定理 1.2] 设 $\Lambda = KQ/I$ 是具有带状图 Γ_Λ 的温和代数。那么，平凡扩张代数 $T(\Lambda)$ 是具有 *Brauer* 图 Γ_A 的 *Brauer* 图代数（其重数函数恒等于一）。

斜 Brauer 图代数在 [42, 第3节1], 中作为布劳尔图代数的推广被引入，并被发现是配备某种 $\mathbb{Z}_2$-作用的布劳尔图代数的斜群代数 [42, 命题3.9]。此外，重数为1的（斜）布劳尔图代数表现为（斜）温和代数的平凡扩张代数（分别见 [42, 定理3.11]和 [39, 推论3.14]）。因此，若关联温和代数是非驯性的，则由定理 3.8，斜温和代数具有一个超可分解模，从而由定理 6.2，关联的（斜）布劳尔图代数也具有一个超可分解模。

平凡扩张与重复代数上的超可分解模：Artin 代数的平凡扩张在表示论中发挥着重要作用。每个有限维 K代数 Λ 都是某个对称 K代数的商，该代数称为其平凡扩张 $T(\Lambda)$，其中 $T(\Lambda)$是 Λ 与其最小内射余生成元 $D(\Lambda) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda, K)$的半直积，即 $T(\Lambda) = \Lambda \ltimes D(\Lambda)$，其底层向量空间为 $\Lambda \oplus D(\Lambda)$，乘法定义如下：

$$(\lambda_1, f)(\lambda_2, g) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 g + f\lambda_2),$$

对任意 λ_1， $\lambda_2 \in \Lambda$ 和 f， $g \in D\Lambda$。关于下一节所用 $T(\Lambda)$的底层箭图及关系的详细构造，我们参照文献（[8], [38]）。

通过将幂零理想 $D(\Lambda)$的作用定义为零，代数 Λ 上的模 M 确实也是其平凡扩张代数 $T(\Lambda)$上的模。具体而言，对于（λ， f）$\in T(\Lambda) m \in M$，作用定义为（λ， f）$.m = \lambda m$，这使得 M成为一个 $T(\Lambda)$-模。

我们证明，平凡扩张代数 $T(\Lambda)$ 的 Krull-Gabriel 维数大于其原代数 Λ 在 [33] 中的 Krull-Gabriel 维数。此外， Λ-模 M 的任意直和项也会出现在其作为 $T(\Lambda)$-模的分解中，这确实证明了：如果 $T(\Lambda)$ 中存在超不可分解模，那么其中也存在超不可分解模。

定理 6.2. 设 $\Lambda = KQ_\Lambda/I_\Lambda$ 是一个有限维代数，并令 $T(\Lambda) = K Q_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$ 为其平凡扩张代数。若 Λ 中存在超不可分解模，则 $T(\Lambda)$ 中也存在超不可分解模。

S. Kasjan 和 G. Pastuszak 证明，在加性全忠实右正合函子或加性全忠实正合函子下，存在稠密链的独立对[18, 定理 3.13]。由于两个线性范畴之间的伽罗瓦覆盖是全忠实正合函子，尤其是在考虑模范畴上的相应推前函子时，它会保留超不可分解模。因此，接下来给出一条注记。

ˆ注记 6.3. 有限维代数 Λ 的重复代数 Λ [36] 是其平凡扩张代数 $T(\Lambda)$的由中山自同构诱导的伽罗瓦覆盖，其中伽罗瓦群的作用为 $\mathbb{Z}$。由于伽罗瓦覆盖保持超可分解 ˆ 模，上述定理表明：若 Λ 具有一个超可分解模，则 Λ 也具有一个超可分解模。

但一般而言，其逆命题并不成立，即 $T(\Lambda)$ 中存在超可分解模并不蕴含 Λ 也存在一个。下面，我们考虑温和代数Λ 上的若干结果，其中 $T(\Lambda)$ 具有超可分解模，而 Λ 没有。

定理 6.4. [30] 假设 Λ 是有限维温和代数，且 $Q(\Lambda)$ 至少ˆ有两个圈。则 Λ 是非驯性的（因而甚至具有非多项式增长）。

ˆ 此外， Λ 是温和代数当且仅当 Λ是特殊双串代数 [36]。

因此，若考虑至少有两个圈的驯性温和代数，定理 3.5 保证与之相关的非驯性特殊双串代数具有超可分解模，而原代数则没有。我们将在下文的例 6.7 中构造这样一个代数。

布劳尔图代数上的超可分解模：首先，回忆一下， Λ_Γ 是一个特殊双串代数。下面给出 [35, 第 5]节中关于特殊双串代数与字符串代数表示论的比较。设 $\Lambda = KQ/I$ 是一个至少含有一个带的特殊双串ˆ代数，并令 I 为所有路径 p 的集合，对于这些路径，$(p - \lambda q) \in I$，其中ˆ某条路径 q 与 p 具有相同的源点和终点，并且 $\lambda \in K$。特别地， I 包含 I中的所有单项式关系。因此，代数ˆ $\Lambda := KQ/\hat{I}$ 是一个字符串代数。此外， $I \subseteq \hat{I}$。ˆ ˆ 满射 $\Lambda \to \Lambda$ 在每个 Λ-模上诱导出一个规范的 Λ-模结构。有限维不可分解的 Λ-模要么是串模、带模，要么是投射内射模。事实上，未被ˆ I 湮灭的不可分解 Λ-模只有投射内射模，而且这样的模只有有限多个。每个这样的模都可写成 $P(p-\lambda q)$ 的形式，其中 $(p-\lambda q) \in I$满足 $\lambda \in K^*$ 和 $p, q \notin I$，并且出现在一个 Auslander-Reiten 序列 $0 \to M(C) \to M(C_1) \oplus P(p - \lambda q) \oplus M(C_2) \to M(D) \to 0$中，其中 $M(C)$ $M(C_1)$ $M(C_2)$ $M(D)$ 是ˆΛ上的串模。

与驯性布劳尔图代数相关的 Brauer 图在[39, 定理 5.2]中有所描述。布劳尔图代数是对称特殊双串代数，属于自内射特殊双串代数的一个子类。Bocian 和 Skowro´nski 给出了（非）驯性布劳尔图代数的刻画。

定理 6.5. [7] 设 $\Lambda \approx KQ/I$ 是一个自内射特殊双串代数。当且仅当 (Q, I) 具有无限多个带时，Λ 不具有多项式增长。

注 6.6. 布劳尔图代数上的字符串与字符串模之间的态射关系，其定义方式与引理 3.2 中所述类似；这保证了非驯性布劳尔图代数（如定理 3.4 所示）以及与之相关的斜布劳尔图代数（如定理 3.7 所示）上超不可分解模的存在。

例6.7。考虑图18中的 Brauer 图 $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, m, o)$。这里，我们设定$m(a) = m(b) = 1$。顶点 a 处的循环次序为 $1 < 2 < 3 < 1$，顶点 b处的循环次序为 $1 < 2 < 3 < 1$，且 $val(a) = val(b) = 3$。

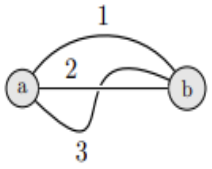

FIGURE 18. Brauer 图 Γ

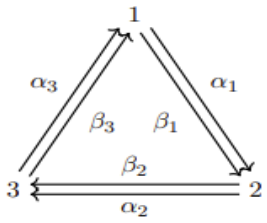

FIGURE 19. Brauer代数 Λ_Γ

对应的 Brauer 图代数为 $\Lambda_\Gamma = KQ_\Gamma/I_\Gamma$，其中 Q_Γ 见图19。这里， a 处的特殊1-圈为 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$， b 处的特殊1-圈为 $\beta_1\beta_2\beta_3$，等等。此外，关系如下：

I 型： $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_1\beta_2\beta_3$， $\alpha_2\alpha_3\alpha_1 - \beta_2\beta_3\beta_1$， $\alpha_3\alpha_1\alpha_2 - \beta_3\beta_1\beta_2$；II 型： α^4， β^4；III 型： $\alpha_i\beta_{i+1}$， $\beta_i\alpha_{i+1}$当 $i = 1$，2 和 $\alpha_3\beta_1$， $\beta_3\alpha_1$ 时。极小关系集由所有 I 型和 III 型关系组成。

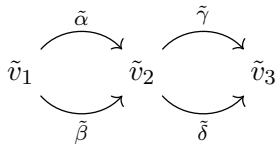

FIGURE 20. A_1 与 $\tilde{\rho} = \{\tilde{\alpha}\delta,\ \beta\tilde{\gamma}\}$

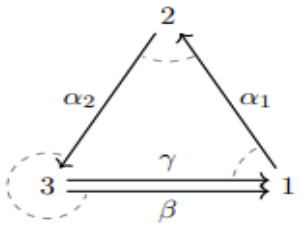

FIGURE 21. A_2 与 $\rho = \{\alpha_1\alpha_2,\ \gamma\alpha_1,\ \alpha_2\beta\}$

代数 $A_1 = KQ_1/\tilde{\alpha}\delta,\ \beta\tilde{\gamma}$ 和 $A_2 = KQ_2/\alpha_1\alpha_2,\ \gamma\alpha_1,\ \alpha_2\beta$ 具有相同的带状图 Γ，如图18中所示的温和代数。注意，图19中的相应 Brauer 图代数 Λ_Γ 是 A_1 和 A_2的平凡扩张。这里，代数 A_1是非驯性的，因为带 $\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}$和 $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$可交换。另一方面， A_2只有一个带 $\gamma\beta^{-1}$，因此它是驯性的。因此， A_1 具有超可分解模，而A_2 没有 [21]。我们证明，Brauer 图代数 $\Lambda_\Gamma = T(A_1) = T(A_2)$ 具有超可分解模，因为根据定理 6.2，它是 A_1 的平凡扩张代数。

现在，考虑 $\bar{U} = \alpha_1\beta_1^{-1}$和 $\bar{V} = \alpha_1\alpha_2\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}$。那么，对于任意 S， $T \in \Sigma(U,V)$ S'， $T' \in \Sigma(U^{-1},V^{-1})$，集合 $L_S^T(U,V)$和 $L_{S'}^{T'}(U^{-1},V^{-1})$由定理 3.1 可知是无端点的稠密链；而由定理 3.4 可知，$((M(X)\ z_1^X)_{X\in L_S^T(U,V)}; (M(Y)\ z_1^Y)_{Y\in L_S^{T'}(U^{-1},V^{-1})})$ 是尖点 Λ_Γ- 模的稠密链的独立对。注意， $\Lambda_\Gamma = T(A_2)$有一个超可分解模，而 A_2 没有。

本节最后给出下面的注记：关系扩张代数也保留超可分解模，因为它是一种特殊的平凡扩张代数。

注记 6.8. *</style}*代数 是簇倾斜代数，当且仅当存在一个倾斜代数，使得是的关系扩张。的关系扩张代数是一种特殊的平凡扩张代数，即由 *C-C*-双模 *Ext(, C)*构成的 $\mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$。详情请参见[2] 。因此，由定理 6.2 可知，若 C 上存在超可分解模，则 C上也存在这样的模。

REFERENCES

[1] C. Amiot 和 T. Br¨ustle. 利用轨形研究斜温和代数之间的导出等价。载于：Documenta Mathematica 27, 933–982, doi: 10.4171/DM/889, 2022. [2] I. Assem、T. Br¨ustle 和 R. Schffler，簇倾斜代数作为平凡扩张，Bull. Lond., 2008. [3] M. C. R. Butler 和 C. M. Ringel，具有较少中项的 Auslander–Reiten 序列及其在字符串代数中的应用，Comm. Algebra 15, 145–179, 1987. [4] W. Crawley-Boevey，函子滤过 II：族与 Gelfand问题，J. London Math, 1989. [5] Yu. A. Drozd，温和与野性的矩阵问题，载于：表示与二次型，1979. [6] H. Derksen、J. Weyman、A. Zelevinsky，带势箭图及其表示。I. 突变，Selecta Math. (N.S.) 14 (1), 59–119, http://dx.doi.org/10.1007/s00029-008-0057-9, 2008. [7] K. Erdmann、A. Skowro´nski，关于块的 Auslander-Reiten 分支与自内射双串代数，Trans. Amer. Math. Soc., 330, no. 1, 165-189, 1992. [8] E. Fernandez、S. Schroll、H. Treffinger、S. Trepode 和 Y. Valdivieso，平凡扩张的刻画，arXiv 预印本 arXiv:2206.04581, 2022. [9] S. Fomin、M. Shapiro、D. Thurston，簇代数与三角剖分曲面。I. 簇复形，Acta Math. 201 (1), 83–146, http://dx.doi.org/10.1007/s11511-008-0030-7, 2008. [10] E. Gupta、A. Kuber、S. Sardar，关于某些非驯性字符串代数的稳定根，Algebras and Representation Theory, 25(5), 1207-1230, 2022. [11] L. Gregory、M. Prest，表示嵌入、解释函子与受控野代数，arXiv:1411.3221.

[12] C. Geiß 和 J. A. de la Pe˜na，族的 Auslander-Reiten 分支。Boll. Soc. Mat., 1999. [13] C. Geiß、D. Labardini-Fragoso、J. Schr¨oer，雅可比代数的表示类型。Advances in Mathematics, 290, 364-452, 2016. [14] J. Gerald，有限群的不可分解模。Ann. of Math. (2) 89, 209–241, 1969. [15] R. Harland，管状代数与字符串代数上的纯内射模，博士论文，UoM, 2011. [16] M. Herschend、O. Iyama，自内射带势箭图与2-表示有限代数，Compos. Math. 147 (6), 1885–1920, http://dx.doi.org/10.1112/S0010437X11005367, 2011. [17] S. Kasjan、G. Pastuszak，关于两个具有超可分纯内射模的温和代数，载于 Colloq. Math，第123卷，第2期，第249-276页，2011. [18] S. Kasjan、G. Pastuszak，关于非多项式增长的强单连通代数上超可分纯内射模的存在性，Colloq. Math. 136, 179–220, 2014. [19] D. Labardini-Fragoso，与三角剖分曲面相关的带势箭图，Proc. Lond. Math. Soc. (3) 98 (3), 797–839, http://dx.doi.org/10.1112/plms/pdn051, 2009. [20] S. Ladkani，关于闭曲面上的雅可比代数。arXiv 预印本 arXiv:1207.3778, 2012. [21] G. Puninski，某些字符串代数上存在超可分纯内射模，Proc. Am. Math. Soc. 132 1891–1898（电子版），2004. [22] G. Puninski，如何构造字符串代数上的“具体”超可分纯内射模，J. Pure Appl. Algebra 212, 704–717, 2008. [23] G. Pastuszak，具有超可分纯内射模的强单连通代数，J. Pure Appl. Algebra, http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.10.016, 2014. [24] G. Pastuszak，关于 Krull-Gabriel 维数与伽罗瓦覆盖，Adv. Math.349, 959–991, 2019. [25] M. Prest，超可分纯内射模，载于：代数表示论进展，EMS 会议报告系列，263–296, 2013. [26] M. Prest，模型论与模，伦敦数学会讲义系列，第130卷，剑桥大学出版社，剑桥，1988. [27] J. A. de la Pe˜na，自同构、扭代数与覆盖，博士论文，墨西哥国立自治大学，1983. [28] J. A. de la Pe˜na、S. Trepode，倾斜代数的拟倾斜单点扩张。代数表示，373-386, 1999. [29] C. M. Ringel，温和代数，ICRA II 研讨会论文集（渥太华，1979），数学讲义，第831卷，施普林格出版社，柏林和纽约，1980，第137–287页。[30] C. M. Ringel，温和代数的重复代数。第343卷。比勒费尔德大学。SFB 343。数学中的离散结构，1997. [31] I. Reiten 和 C. Riedtmann。斜群代数在 Artin 代数表示论中的应用。J. Algebra, 92(1):224–282, 1985. [32] S. Sardar、A. Gonzalez Chaio 和 S. Trepode。关于斜群代数的不可约态射，预印本见 https://arxiv.org/abs/2507 20103, 2025 。S. Sardar，斜群代数的 [33] Krull-Gabriel 维数，https://arxiv.org/abs/2601.11512。[34] D. Simson，偏序集与向量空间范畴的线性表示，Algebra Logic Appl. 4, Gordon Breach, 1992. [35] J. Schr¨oer，关于模范畴的无限根，Proc. London Math. Soc. 81 (2000), 651–674. [36] J. Schr¨oer，关于重复代数的带关系箭图。Archiv der Mathematik, 1999. [37] J. Schr¨oer，字符串代数的吊床，博士论文，1997. [38] S. Schroll，温和代数的平凡扩张与 Brauer 图代数，J. Algebra, 183–200, 2015. [39] S. Schroll，Brauer 图代数：关于 Brauer 代数、关联温和代数及其与簇理论联系的综述。同调方法、表示论与簇代数，2018. [40] A. Skowro´nski，多项式增长代数，载于：代数专题，载于：Banach 中心出版物，第26卷，第1部分，PWN，华沙，第535–568页，1990. [41] D. Simson、A. Skowro´nski，结合代数表示论基础，第3卷：表示无限倾斜代数，伦敦数学会学生教材，第72卷，剑桥大学出版社，2007. [42] V. Soto，将倾斜变异作为带重数（斜）Brauer 图代数的广义 Kauer 变换，arXiv 预印本 arXiv:2406.10634, 2024. [43] Y. Valdivieso-D´ıaz，具有周期模范畴与指数增长的雅可比代数。代数杂志，449, 163-174, 2016. [44] M. Ziegler，模的模型论。纯粹与应用逻辑年刊 26, 149–213, 1984.