arXiv:2603.04389v1 [physics.optics] 4 Mar 2026

具有内禀非厄米性的光子晶体薄板中的超均匀无序

ZeyuZhang,[1] Koorosh Sadri,[1] BrianGould,[1] 和 Mikael C. Rechtsman[1]

[1] *Department of Physics, The Pennsylvania State University, University Park, PA, USA*

超均匀无序是一种关联无序，其特征是在小波矢处谱密度趋于零，使得该构型在较长的尺度上表现为有效均匀。在光子学中，超均匀无序有望用于产生各向同性光子赝带隙，并设计光子晶体波导。然而，尽管所有光子系统都不可避免地存在损耗，相关研究大多局限于理想化的无损情形。本研究从理论和数值上考察了光在引入超均匀无序的光子晶体薄板中的传播。由于存在辐射损耗，该系统具有内禀非厄米性，其表现为二次光子能带的复有效质量。我们分别针对有效质量为实数和复数的厄米二次能带与非厄米二次能带，解析推导了无序散射的理论框架。与厄米情形中观察到的幂律行为 $|\mathbf{k}|^{\alpha}$（其中 α 为超均匀性指数）不同，非厄米能带中的散射损耗由 $C_0 + C_{\beta_2} \cdot |\mathbf{k}|^{\beta_2}$给出，其中 C_0 为有限常数，且指数为 $\beta_2 \leq 2$。我们基于近期实验所得的真实光子晶体参数，通过紧束缚和时域有限差分模拟验证了理论预测。

关键词： 超均匀无序、非厄米性、辐射损耗、光子晶体薄板、散射损耗

1 引言

在光子系统中，系统内存在的无序通常具有空间相关性，不能简单地视为空间白噪声。一个有趣且得到广泛研究的例子是 [1, 2]超均匀无序 $\tilde{\rho}$，这是一类关联无序结构，其长波长密度涨落受到强烈抑制，因此在较大的长度尺度上表现得近乎均匀 $\to q^{\alpha}$。数学上，与无序相关的谱密度遵循幂律 $\alpha > 0$ （q） q ，当傅里叶分量 $q \to 0$趋近于零时 $q = |$（**其中**|为超均匀性指数， [3q5]）。这一独特的关联特性使超均匀系统处于晶体有序与无关联随机性之间的独特状态，从而导致其在无序诱导的散射过程中表现出根本不同的行为。

在光子材料中，超均匀无序日益受到关注，其支持各向同性光子赝带隙并实现新型器件功能的能力也已得到广泛研究。近期大量研究表明，经过合理设计的超均匀介电结构即使没有周期性，也能支持完整且各向同性的光子赝带隙，这凸显了超均匀性是传统布拉格散射之外实现带隙形成的另一种途径 [6–13]。除了带隙之外，研究还发现，超均匀无序能够深刻改变波输运性质，带来散射减弱、扩散以及无序诱导的局域化现象。这为探索基础波输运物理提供了广阔空间 [14–21]。然而，这些关于超均匀无序波动力学的研究都聚焦于厄米情形，完全忽略了光子器件中无处不在的损耗效应。这使我们对真实超均匀系统中的散射性质仍存在明显的认知空白。具体而言，在厄米（无损）系统中，弱超均匀无序引起的散射由单次散射事件主导，只允许散射至能量相同的模式。相比之下，在非厄米系统中，非厄米性会破坏功率守恒，因此不同能量模式之间的散射可能显著改变波动力学。

凭借其非厄米特性、大系统尺寸以及精准调控结构的能力，光子晶体薄板是研究超均匀无序与非厄米性相互作用的理想平台。由于光子晶体布洛赫模可能从薄板平面逸出，即使不存在材料吸收，该系统本质上仍是非厄米的 [22–25]。此外，光子晶体薄板可在实验中实现较大的系统尺寸，在二维方向上远超 $\sim 10^6$个晶胞，从而留出足够大的区域，使无序与损耗产生显著的动力学相互作用 [26]。此外，纳米光子学制造技术的进步，使人们能够对光子晶体薄板中每个格点的局部特征尺寸进行灵活调控，从而实现精心设计的超均匀无序构型，且具有很高的精

度 [27]。光子晶体薄板中存在的底层能带结构提供了一种强有力的实验观测量，即与光子能带相关的线宽，可用于量化系统中散射的影响。

在本研究中，我们采用与近期实验工作 [27]相似的设置，将超均匀无序作为扰动引入具有二次能带结构的晶格中。该二次能带是非厄米的，具有复有效质量，因此频率和面外辐射损耗均与 k^2 成正比（完整细节见参考文献 [27]）。我们解析推导了散射损耗的一般理论框架，分别适用于厄米二次能带（实有效质量）和非厄米二次能带（复有效质量），并通过紧束缚（TB）模拟和真实光子晶体设置下的全波时域有限差分（FDTD）模拟验证理论结果。对于超均匀性指数为 α 的超均匀无序（即无序的谱密度在小 q时呈 $\tilde{\rho}(\mathbf{q}) \to q^{\alpha}$ 的变化），厄米情形下的散射损耗在主导阶与k^{α} 成正比。然而，在非厄米情形下，散射损耗在主导阶（在 k中）始终为有限常数C_0 ，而次主导阶则呈 $C_{\beta_2} \cdot k^{\beta_2}$的形式，其中指数 β_2 不超过 $\beta_2 = 2$。这一结果或许有些出人意料：即使非厄米成分任意小，也会导致散射随动量变化的指数发生显著改变。这些结果为研究超均匀无序与非厄米性的相互作用提供了基准，有助于理解非厄米超均匀系统中的波动力学，并为器件设计提供参考。

2 结果与讨论

2.1 光子晶体薄板的非厄米特性

我们从一种周期性光子晶体薄板开始，该薄板在横向电（TE）类偏振下具有一条孤立的二次能带。图 1(a) 展示了本文所用光子晶体薄板的示意图。薄板由硅（$\varepsilon = 12.11$）制成，面内几何结构由圆形空气孔（$\varepsilon = 1$）构成，这些孔排列在一个正方 $a = 1290nm$晶格中，晶格常数为 $h = 0.05a$ 。薄板在 z 方向上的厚度有限。

光子晶体薄板的本征模由麦克斯韦方程支配，进而导出以下本征值问题：

$$\nabla \times \left[\varepsilon(\mathbf{r})^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}}\right] = E_{\mathbf{k}} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}, \tag{1}$$

其中 $\varepsilon(\mathbf{r})$ 是介电函数，$\mathbf{r} = (x, y, z)$ 表示位置，$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ 是二维晶格布洛赫动量，$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ 是本征模的磁场分布，而 $E_{\mathbf{k}} = (\omega_{\mathbf{k}}/c)^2$ 是本征模的能量，其中 $\omega_{\mathbf{k}}$ 为本征频率， c为光速。

二维光子晶体薄板既支持受限导模（它们在能带结构中出现在光线（$\omega \leq ck$）以下），也支持可与辐射连续谱耦合的泄漏共振 [23, 28] （位于光线以上）。在本文中，我们关注位于光线以上、中心处于$\mathbf{k} = \Gamma = (0, 0)$的辐射模。由于存在辐射耦合，这些模式具有有限的寿命，可通过复本征值 $E_{\mathbf{k}}$ 纳入形式体系。虚部 $\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})$ 量化了面外辐射损耗的速率，并与光谱线宽直接相关： $\Delta\lambda = -\frac{2\pi}{\mathrm{Im}(E_k)}$ $\mathrm{Re}(E_k)^{\frac{3}{2}}$。更多详情请参阅补充信息第1节。本文中，周期晶格内本征值的虚部 $\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})$ 称为本征损耗（或本征线宽），以区别于无序散射引起的额外展宽（或额外线宽）。为简化符号并便于分析，我们用麦克斯韦方程的本征值 $E = (\omega/c)^2$ 描述能带色散，而不直接使用频率 ω 。类比于量子力学中有质量粒子的色散关系，尽管该量的单位为 $[a^{-2}]$，仍将其称为“能量”。

图 1(b) 展示了二次能带附近光子晶体薄板的模拟反射光谱。模拟结果由 TIDY3D采用时域有限差分法（FDTD） [29]获得。在模拟中，光子晶体薄板受到多个角度入射的平面波照射，并采集不同频率下的反射强度。能带结构中显示了一条孤立的二次能带，其每个布洛赫动量 k_x处均呈现出清晰的共振线形。

图 1(b) 中的二次能带可描述为：

$$E_{\mathbf{k}} = E_0 - \frac{1}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2\right), \tag{2}$$

其中 $E_{\mathbf{k}}$ 表示波矢$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$处能带的能量，而 m 表示有效质量。为确定图 E_0 所示二次能带的尖端能量 m和有效质量1(b)中的

通过共振线形定量提取与光子能带相关的波长和线宽 [23, 27], ，其分别绘于图 1(c)(d)中。在模拟中，尖端能量为 $E_0 = 28.1a^{-2}$，对应的波长为 $\lambda_0 = 1529nm$；有效质量为$\frac{1}{2m} = 4.27 - 4.67i$。重要的是，有效质量本质上是复数。这一特征源于能带色散的实部（波长）和与辐射损耗相关的虚部（线宽）均表现出对面内波矢的二次依赖性，这是对称性保护的连续谱束缚态（BIC）所导致的特征 [30, 31]。因此，复有效质量的出现反映了光子晶体薄板固有的非厄米特性，并使其成为在非厄米情形下探索超均匀无序的理想平台。

2.2 厄米二次能带中的超均匀无序

接下来，我们在周期性光子晶体薄板中引入超均匀无序图2所示为在晶体中施加此类无序的示意图。图 2(a)展示了如何在光子晶体薄板中加入随机非相关无序。图中孔的颜色和大小代表半径的变化。施加的无序可视为随机势 $V_{i,\ j}$ 其随空间变化，其中 $(i,\ j)$ 表示格点索引。为定量建立孔半径变化与有效势之间的映射关系，我们分析了相应周期结构中能带端点能量 E_0 对孔半径的依赖关系。此关系提供了直接的校准依据，使我们能够为局域势 [26, 27]定量赋值。更多详情见补充信息第2节。图 2(a)中，局域势 $V_{i,\ j}$ 从范围 $[-w, w]$ 内随机均匀选取，其中 w 表示无序度，由此生成非关联无序构型。

图2(b) 展示了图 $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ 中添加的非关联无序的谱密度2(a)。谱密度通过对势配置˜进行傅里叶变换 $V(\mathbf{q})$，并由 $\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \left\langle \left| \tilde{V}(\mathbf{q}) \right|^2 \right\rangle$ 计算，其中 $\langle\cdot\rangle$ 表示对不同配置取平均，$\mathbf{q}$表示傅里叶分量。在连续极限（系统尺寸趋于无穷大）下，非关联无序的谱密度与面内傅里叶分量$\mathbf{q}$无关，如黑线所示。然而，由于有限系统尺寸效应，谱密度存在围绕目标光谱的小幅波动。

为生成超均匀性指数为 α的超均匀无序构型，我们采用˜傅里叶滤波方法 [32] ，设置 $V'(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{\alpha+2}{2}} \left(\frac{q}{q_{\max}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{V}(\mathbf{q})$ $q < q_{\max}$时，以及 $\tilde{V}'(\mathbf{q}) = 0$ $q > q_{\max}$时，其中 $q = |\mathbf{q}|$， $q_{\max} = 0.3\ [2\pi a^{-1}]$为截止波数，以使谱密度在第一布里渊区内各向同性。随后，通过对 $V'(\mathbf{q})$ 进行逆傅里叶变换，生成实空间中的超均匀构型 $V'_{i,\ j}$˜。关于傅里叶滤波方法的更多细节，请参见补充信息第2节。添加到光子晶体薄板中的相应谱密度形式如下：

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{\alpha+2}{6} w^2 \left(\frac{q}{q_{\max}} \right)^{\alpha}, & q < q_{\max} \\ 0, & q > q_{\max} \end{cases} \tag{3}$$

重要的是，对于公式（3）中的谱密度，实空间中局域势的方差 $\mathrm{Var}(V_{i,\ j}) = \frac{a^2 q^2}{12\pi}$ 最大值 w^2 与 α 无关。这使我们能够对不同超均匀性指数下的结果进行公平比较 α。

图 2（c）显示了实空间中的无序构型，其中 $\alpha = 1$。与图2（a）中的非相关无序相比，该无序图样具有很强的空间相关性。图 2（d）计算了与图 2 （c）对应的谱密度。与根据公式（3）得到的理论计算结果（黑线）相比，谱密度显示出小幅波动，这同样是有限尺寸效应造成的。

在周期晶格中，晶格布洛赫动量 $\mathbf{k}$ 是守恒量，因此能带结构定义明确。然而，无序会破坏周期性，使得晶格布洛赫动量 $\mathbf{k}$不再是良好的量子数。此时，系统最好用谱响应函数来描述$A_{\mathbf{k}}(E)$。谱函数继承了布洛赫模的性质，同时以纳入损耗的方式展宽 [33–35]。具体而言，在弱无序极限下，谱函数的峰值$A_{\mathbf{k}}(E)$ 在主导阶仍以 $\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})$ 为中心，但峰的半峰全宽（FWHM）会从本征损耗 $-2\mathrm{Im}(E_{\mathbf{k}})$ 展宽至$-2\mathrm{Im}(E_{\mathbf{k}}) - 2\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$，其中 $\Sigma_{\mathbf{k}}$ 为自能，其虚部表示无序引入的额外散射损耗（额外线宽）。自能可通过玻恩近似进行微扰计算：

$$\Sigma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q})}{\mathrm{Re}\,(E_{\mathbf{k}}) - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + i0^+} + O(\tilde{\rho}^2), \tag{4}$$

其中， N_x 和 N_y 分别是 x 和 y 方向上的系统尺寸，而 $E_{\mathbf{k}} = E_0 - \frac{k^2}{2m}$ 是二次能带。 —

在本节中，我们首先考虑厄米情形，即尖端能量 E_0 和有效质量 m 均为实数，并将有效质量虚部 Im(m) 引入的非厄米性影响留待下一节讨论。根据公式（3）中的谱密度以及公式（2）中的能带色散关系，可以解析地计算公式（4）中的自能：

$$\mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right) = -\frac{2^{\alpha}(\alpha+2)\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdot w^2 a^2 m}{12\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\cdot q_{\max}^{\alpha}} k^{\alpha} + O(w^4), \tag{5}$$

其中， Γ 是伽马函数。更多解析推导见补充信息第3节。

如公式（5）所示，主导阶的散射损耗 Im ($\Sigma_{\mathbf{k}}$) （仅考虑单次散射）与 k^{α} 成正比。这是因为在二次能带中，群速度和等频轮廓的半径均随 $O(k)$ 增大。因此，散射损耗 Im ($\Sigma_{\mathbf{k}}$) 与谱密度具有相同的指数 $O(k^{\alpha})$。这是厄米二次能带中超均匀波动力学的关键特征。通过紧束缚（TB）模拟验证了公式（5）的理论结果。图3(a)展示了紧束缚模型的设置。这里考虑一个正方晶格，其位点能为 t_0，具有最近邻跃迁 t_1 和第三近邻跃迁 t_3 。在紧束缚模拟中，跃迁参数设为 $t_0 = E_0 - \frac{5}{2m}a^{-2}$、$t_1 = \frac{4}{3}\frac{1}{2m}a^{-2}$和 $t_3 = -\frac{1}{12}\frac{1}{2m}a^{-2}$，使得能带在 $k=0$ 附近具有各向同性，并且色散关系在 $O(k^6)$ 阶之前均为二次形式，如公式（2）所述，其尖端能量为 $E_0 = 28.1a^{-2}$，有效质量为 $\frac{1}{2m} = 4.27$。

—

图 3(b) 展示了在系统中加入非关联无序（ $A_{\mathbf{k}}(E)$）后的谱函数，其中无序由强度为$\alpha = 0$的随机位点势引入$w = 1.23a^{-2}$。图中还用红色虚线标出了无无序周期晶格的能带结构。即使不存在本征损耗（Im($E_{\mathbf{k}}$) $= 0$），谱函数仍具有有限线宽。这是由无序引入的散射损耗（Im($\Sigma_{\mathbf{k}}$)）造成的。根据方程（5），当 $\Sigma_{\mathbf{k}}$ 时，Im($\alpha = 0$) 为常数，这表明散射损耗与 k 无关。我们还注意到，谱函数的峰值接近无无序晶格中的能带结构，这与我们先前在弱无序区间的分析一致。二者之间的微小偏移由自能实部引起，稍后将对此进行详细讨论。

图中展示的傅里叶滤波方法 2 用于生成具有 $\alpha > 0$的超均匀无序构型。图 3(c) 展示了 $\alpha = 1$（上图）和$\alpha = 8$ （下图）的两个典型示例。模拟结果取自谱函数的半高全宽，而理论计算则由方程（5）得出，且不含自由参数。我们观察到两者在定量上吻合；然而，模拟结果始终略大于理论预测。这种差异源于有限尺寸效应，因为方程（ $i0^+$ （4）中需要一个非零的项。为考虑这一点，我们使用拟合参数$\Sigma_{\mathbf{k}}$） $= C_0 + C_{\beta_0}\cdot k^{\beta_0}$ 、 C_0、C_{β_0}和 β_0，对模拟数据进行 Im(β_0 ）拟合。拟合曲线及相应的3值也以红色虚线标示于图 3(c) 中。

图 3(d) 绘出了拟合指数β_0 随超均匀性指数α变化的拟合结果。模拟结果与理论分析在定量上吻合。在超均匀性指数 α较大的极端情况下， β_0 模拟数据中的拟合指数略低于理论预测值。这是有限尺寸效应所致，正如前文所述。根据图3 中的模拟结果以及公式（5）的理论计算， k^{α} 散射损耗 Im ($\Sigma_{\mathbf{k}}$) $\propto k^{\alpha}$ 的指数是超均匀无序在厄米二次能带中波动力学的关键特征。

2.3 非厄米二次能带中的超均匀无序

接下来，我们将注意力转向非厄米二次能带中超均匀无序的波动力学。当有效质量为复数时，方程（4）中的形式体系对弱无序仍然有效，但理论结果会变得显著更为复杂。在非厄米情形下，散射损耗表示如下：

$$\mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right)=\frac{(\alpha+2)w^2a^2}{6\pi\alpha}\cdot\mathrm{Im}(m)+w^2\times\begin{cases}O(k^\alpha), & 0<\alpha<\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1\\ O(k^2), & \alpha=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1\\ O(k^\alpha), & \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1<\alpha<2\\ O(k^2\ln(k)), & \alpha=2\\ O(k^2), & \alpha>2\end{cases}+O(w^4)\qquad(6)$$

相较于方程（5）的类似厄米情形，非厄米性显著改变了超均匀系统中的波动力学。不再是如下幂律 k^α （见于厄米情形），散射损耗 $\mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right)$ 在非厄米二次能带中于k的主导阶上始终为一个有限常数。该有限常数，$\frac{w^2a^2}{(\alpha+2)6\pi\alpha}\cdot\mathrm{Im}(m)$，与有效质量的虚部 $\mathrm{Im}(m)$ 成正比，这清楚地表明了其非厄米起源。当 $\mathrm{Im}(m)=0$时，方程（6）退化为厄米情形，正如方程（5）所述。更详细的推导见补充信息第3节和第4节。

我们通过与真实光子学情境相对应的紧束缚和 FDTD 模拟，验证了方程（6）的理论计算。图 4(a) 显示了在与图 $\alpha=0$相同的光子晶体板结构上施加 $w=3.44a^{-2}$ 的非关联无序（1）时，FDTD 模拟得到的反射光谱。与图 1(b) 相比，无序系统中的能带特征变得“模糊”，这是因为无序引入的散射损耗 $\mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right)$ 使线宽增大。额外线宽 $\Delta\lambda$ 与散射损耗 $\mathrm{Im}\left(\Sigma_k\right)$ 的关系为 $\Delta\lambda=-\frac{2\pi}{\mathrm{Im}(\Sigma_k)\,\mathrm{Re}(E_k)^{\frac{3}{2}}}$，其数值可由无序样品中的线宽（例如图 4(a) 中的线宽）与周期样品中的本征线宽（图 1(b) 中的线宽）之差得到。

图 4（b）模拟了额外线宽 $\Delta\lambda$，对应于 $\alpha=1$ （上图）和 $\alpha=8$（下图）的情形，并作为 k_x 的函数，其中 $k_y=0$。在紧束缚模拟中，有效质量设为$\frac{1}{2m}=4.27-4.67i$，与图1中FDTD模拟的光子能带相同。请注意，有效质量是复数，因此紧束缚模型是非厄米的；复有效质量通过使用适当的复数跃迁引入紧束缚模型。FDTD模拟中的额外线宽$\Delta\lambda$ 由从反射光谱提取的线宽得到。在图 4（b）中，仅展示了$k_x\geq0.004\ [2\pi a^{-1}]$ 的FDTD模拟数据。这是因为连续谱中的束缚态将辐射线宽在$\mathbf{k}=\Gamma$处钉扎为零，使得难以识别能带共振特征，或在 $k_x=0$附近可靠地提取线宽。

当 α 较大时，FDTD 和紧束缚模拟的数据与方程 (6) 的理论预测（黑色实线）高度吻合（例如，图 4(b) 下图中的 $\alpha=8$ ）。然而，当超均匀性指数 α 较小时，如上图中的 $\alpha=1$，FDTD 模拟和紧束缚模拟的结果会偏离理论计算，且额外线宽 $\Delta\lambda$较低。这是多重散射产生的高阶效应所致。在方程 (6) 的理论计算中，仅考虑了主导阶的单次散射事件（$O(w^2)$ 项），而忽略了多重散射产生的高阶效应（ $O(w^4)$ 项）。当自能 $\Sigma_{\mathbf{k}}$ （包括实部和虚部）较小时，这种近似是准确且有效的，因此无序不会在主导阶改变能带能量或线宽。这一点可从图 3(b) 看出：谱函数 $A_{\mathbf{k}}(E)$ 的峰值与周期晶格中的能带能量近似相同。然而，当 α 较小时，根据方程 (6) 计算得到的自能虚部 $\mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right)$（以及自能实部）较大，会显著改变谱函数 $A_{\mathbf{k}}(E)$ 的峰值以及其下方光子能带的线宽。散射损耗 $\mathrm{Im}(\Sigma_k)$ 不再能在能带色散为 $E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ 的 $E=\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})$ 处求值（如方程 (4) 所示），而需要按如下方式修正：

$$\Sigma_{\mathbf{k}}=\frac{1}{N_xN_y}\sum_{\mathbf{q}}\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q})}{\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}}+\Sigma_{\mathbf{k}})-(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}+\Sigma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})+i0^+}+O(\tilde{\rho}^2),\qquad(7)$$

右端的额外项 $\mathrm{Re}(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 反映了谱函数中峰值能量的偏移，而额外的 $\Sigma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ 项则表示光子能带色散的偏移。重要的是，自能（$\Sigma_{\mathbf{k}}$ 或 $\Sigma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$）出现在方程（7）的两侧，因此必须通过自洽方式求解：这就是自洽 Born 近似（SCBA） [36]。SCBA 的数值结果

如图4（b）中的虚线所示。SCBA 数值计算在很大程度上捕捉到了理论分析与模拟结果之间的偏差，证实这种差异源于高阶多重散射。显然，SCBA 能够给出高度精确的结果，并捕捉多重散射的影响；但代价是放弃了像方程（6）中那样推导解析表达式的能力。

接下来，我们关注散射损耗 Im($\Sigma_{\mathbf{k}}$) 随超均匀性指数 α 的变化。根据公式 (6)，在最低阶近似下，散射损耗 Im($\Sigma_{\mathbf{k}}$) 始终是一个有限常数（$_{6\pi\alpha}^{w^2a^2}$·Im(m)，与 Im($\Sigma_{\mathbf{k}}$) $\propto {}_{\alpha}^{\alpha+2}$ 成正比。这意味着，随着超均匀性指数α 减小，散射损耗 Im($\Sigma_{\mathbf{k}}$) 会按${}_{\alpha}^{\alpha+2}$ 增大，并在 $\alpha \to 0$ 时发散。图4(c) 对比了 k_x =0.004 $[2\pi a^{-1}]$处的额外线宽 $\Delta\lambda$：理论分析结果（黑色实线，根据公式 (6) 计算）、紧束缚模拟结果（红点，根据谱函数 $A_{\mathbf{k}}(E)$ 的半高全宽得到），以及时域有限差分模拟结果（蓝色叉号，根据光子能带对应的线宽提取）。当 α 较大时，紧束缚模拟和时域有限差分模拟与理论预测高度一致。然而，随着 α 减小至 $\alpha < 1$，紧束缚模拟和时域有限差分模拟均明显偏离理论结果。这是多重散射产生的高阶效应所致。我们使用公式 (7) 所述的相同 SCBA 数值计算来估算额外线宽，并以黑色虚线绘出结果。我们再次观察到，模拟结果（包括紧束缚模拟和时域有限差分模拟）与理论计算在定量上吻合。

最后，我们探讨k 中由非厄米性引起的次主导阶效应。根据方程(6)，除一个有限常数外，非厄米二次能带中的散射损耗Im (Σ_k)在 k的次主导阶上也具有不同的指数，这些指数是超均匀指数 α的函数。当 $\alpha > 2$时，散射损耗Im($\Sigma_{\mathbf{k}}$) $= C_0 + C_{\beta_2} \cdot k^{\beta_2}$ 的标度指数β_2 始终满足 $\beta_2 = 2$。有趣的是，次主导阶指数在$\alpha = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right) + 1$处发生突变。这是因为方程(6)中 k^α 项的系数偶然变为零，从而使第三主导阶 $O(k^2)$成为第二主导阶。更多细节见补充信息第4节。图4(d)比较了该第二主导阶指数 β_2 的理论分析（黑色实线，由方程(6)计算得到）与紧束缚模拟（红点，通过对散射损耗进行拟合得到 Im (Σ_k)，拟合自 $C_0+C_{\beta_2}\cdot k^{\beta_2}$，含三个拟合参数 C_0、C_{β_2} 和 β_2）。此处图中未显示FDTD模拟数据，因为有限尺寸效应引起的微小涨落破坏了第二主导阶行为，如图4(b)所示。与图中虚线所示的厄米情形相比，紧束缚模拟中的第二主导阶指数被非厄米理论很好地刻画。由于多重散射引起的高阶效应（如前所述），很难观察到$\alpha = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right) + 1$处的突变。对于较大的 α，紧束缚模拟超出了理论所预测的 $\beta_2 = 2$ 上界。这是因为 β_2 是在 $k_x \in [0, 0.04]$ $[2\pi a^{-1}]$的有限范围内拟合的，因此 k 的高阶指数在 $k \neq 0$处进入拟合过程，使 β_2 略高于理论预测。

3 结论

总之，我们研究了光子晶体薄板中超均匀无序的波动力学，重点关注由薄板面外辐射损耗引起的非厄米性。我们以额外线宽作为可观测量，量化无序引入的散射损耗，并通过不同波矢$\mathbf{k}$下的散射强度来表征超均匀无序的波动力学。我们从理论上推导了厄米二次能带和具有复有效质量的非厄米二次能带中与自能虚部 Im (Σ_k) 相关的散射损耗，并通过采用实际光子晶体参数的紧束缚和时域有限差分模拟验证了这些结果。

对于超均匀性指数为 α 的超均匀无序，厄米二次能带中的散射强度可用 Im(Σ_k) $\propto k^\alpha$ 的幂律行为来表征，这一现象已在紧束缚模拟中观测并得到验证。

相比之下，由辐射损耗自然产生的非厄米性显著改变了无序的散射行为。我们从理论上表明，非厄米二次能带中的散射强度在主导阶始终是一个有限常数（与$\mathbf{k}$无关）。该有限常数正比于${}_{\alpha}^{\alpha+2}$，而${}_{\alpha}^{\alpha+2}$ 随α减小，这表明超均匀性对散射的抑制。此外，k中次主导项的指数（记为k^{β_2}）作为 α 的函数，其性质与厄米情形大不相同。例如，无论超均匀性指数 α 有多大，该指数都不会超过$\beta_2 \leq 2$，从而清楚地有别于

厄米情形。上述结果在紧束缚模拟和时域有限差分模拟中均得到了观测与验证。在这些模拟中，α 较小时的散射通常小于理论预测，这归因于多重散射所产生的高阶效应。我们采用自洽波恩近似方法来考虑多重散射事件，并观察到自洽波恩近似数值计算与模拟之间的定量一致。

本文所呈现的结果增进了我们对光子晶体薄板中超均匀无序动力学的理解，明确表明，必须纳入非厄米性，才能准确描述波动力学。因此，这些发现为超均匀无序与非厄米性之间的相互作用提供了基准。本文建立的理论框架可广泛应用于不同能带色散下的各种无序情形，为更广泛地探索非厄米系统中的无序效应奠定了基础。本研究采用的时域有限差分模拟基于现实的光子晶体参数进行设计，从而有望实现实验验证。最后，非厄米系统中超均匀无序的波动力学为实际器件设计提供了启示，因为由损耗或耗散引起的非厄米性在现实系统中普遍存在。

致谢

我们感谢陆军研究办公室（ARO）在多学科大学研究计划下提供的资助，项目编号为 W911NF-22-2-0103；同时感谢空军科学研究办公室（AFOSR）提供的资助，项目编号为 FA9550-22-1-0339。

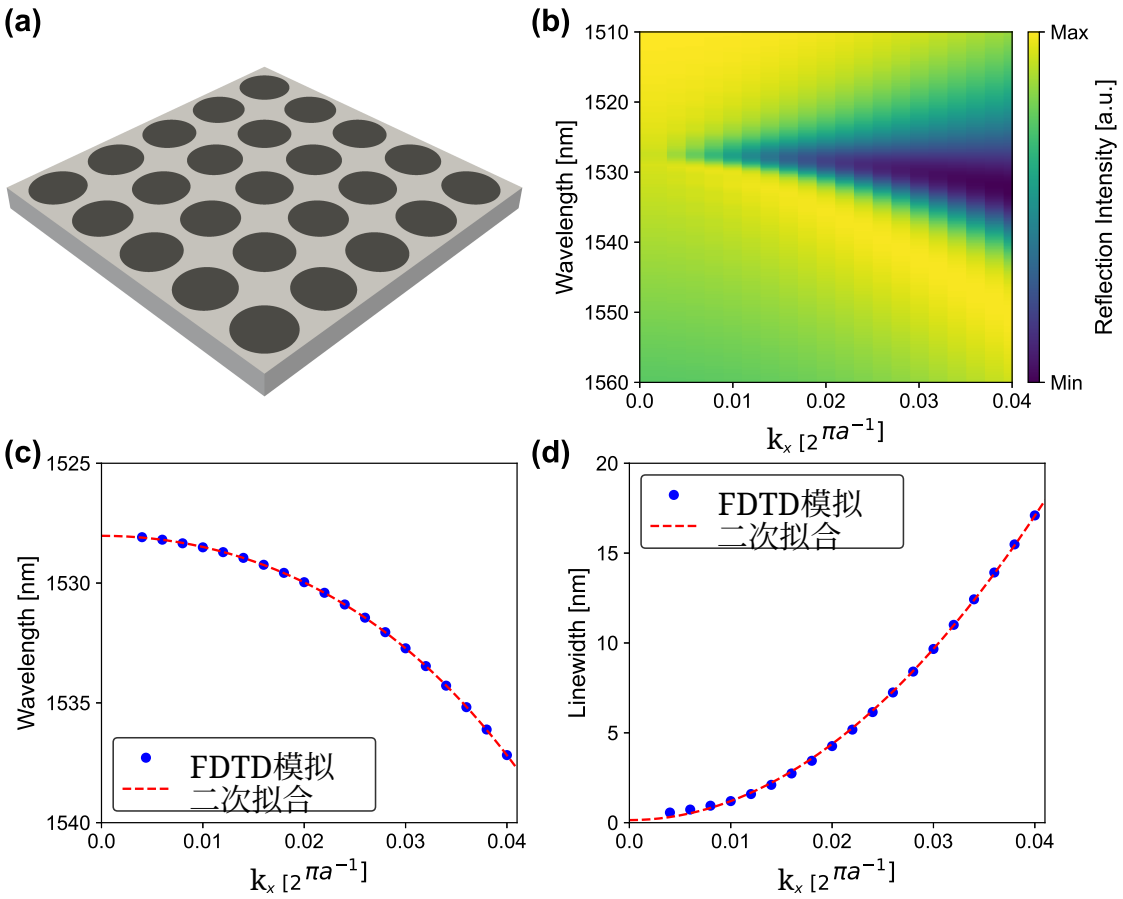


图 1. 光子晶体薄板的非厄米特性。(a) 光子晶体薄板示意图。面内几何结构由正方晶格中的圆形空气孔构成。(b) 沿 $k_y = 0$ 的结构 (a) 的模拟反射光谱。(c) 从 (b) 中提取的能带共振频率。通过二次拟合得到有效质量实部 Re $\left(\frac{1}{2m}\right)$。(d) 通过使用共振线形拟合反射光谱，从 (b) 中提取的能带线宽。线宽也会随着 $O(k^2)$ 增大，这表明有效质量是复数。

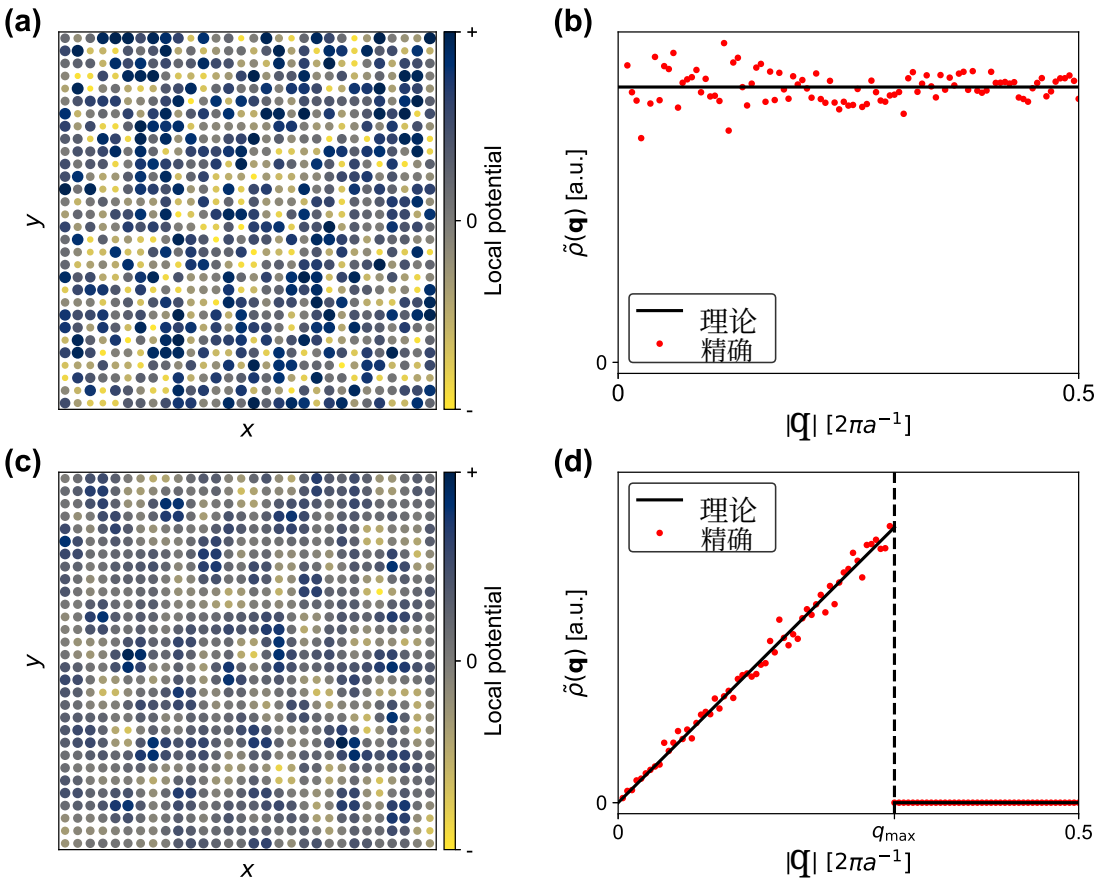


图2. 光子晶体薄板中的超均匀无序。(a) 非关联无序下的局域势配置。孔的颜色和大小表示相对于周期性（无无序）情况，各格点处的局域势变化。这里只展示了 30×30 个晶胞的区域。(b) 与(a)中的无序图样对应的谱密度 $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$。系统尺寸为 $N_x \times N_y = 500 \times 500$。(c) 超均匀局域势配置，其超均匀性指数为 $\alpha = 1$。该势具有很强的空间相关性。(d) 与(c)中的无序图样对应的谱密度 $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$。当$k \to 0$时，谱密度按 $\tilde{\rho}(\mathbf{q}) \to O(k^1)$缩放。此外，还滤除了 $k > q_{\max} = 0.3\ [2\pi a^{-1}]$ 的傅里叶分量，使谱密度 $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$在所有方向上均对称。

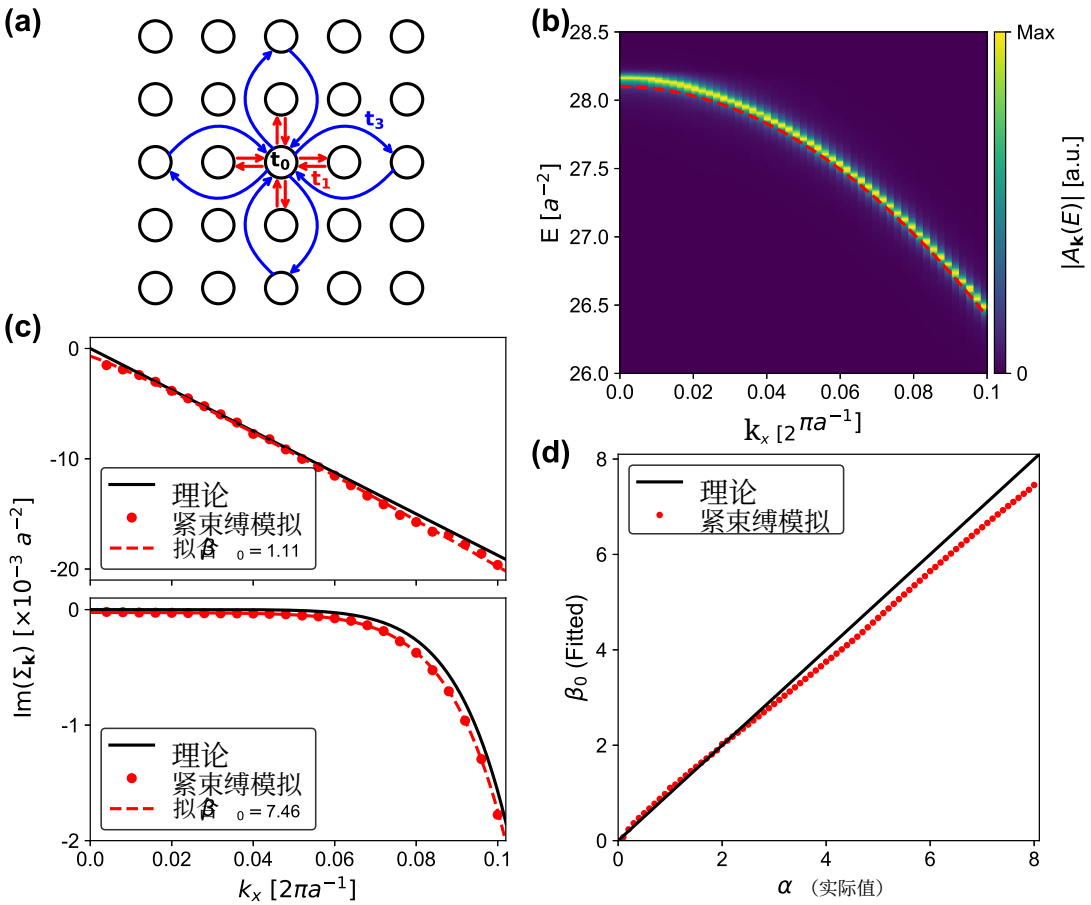


图3. 厄米二次能带中超均匀无序的影响。(a) 模拟中使用的紧束缚模型。考虑位点能 t_0、最近邻跃迁 t_1 和第三近邻跃迁 t_3。(b) 在 (a) 中的紧束缚模型上施加非关联格点无序时的谱函数 $A_{\mathbf{k}}(E)$，系统尺寸为 $N_x \times N_y = 500 \times 500$。红色虚线表示未受扰动的能带结构。(c) 在系统上施加超均匀格点无序时，沿 $k_y = 0$ 的散射损耗 Im $(\Sigma_{\mathbf{k}})$。上图（$\alpha = 1$）和下图（$\alpha = 8$）分别展示了 α 取两个不同值时的模拟结果。散射损耗 Im $(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 通过 $C_0 + C_{\beta_0} \cdot k^{\beta_0}$ 拟合，以获得其相对于 k 的幂律行为。(d) 实际超均匀性指数 α 与拟合指数 β_0 的比较。

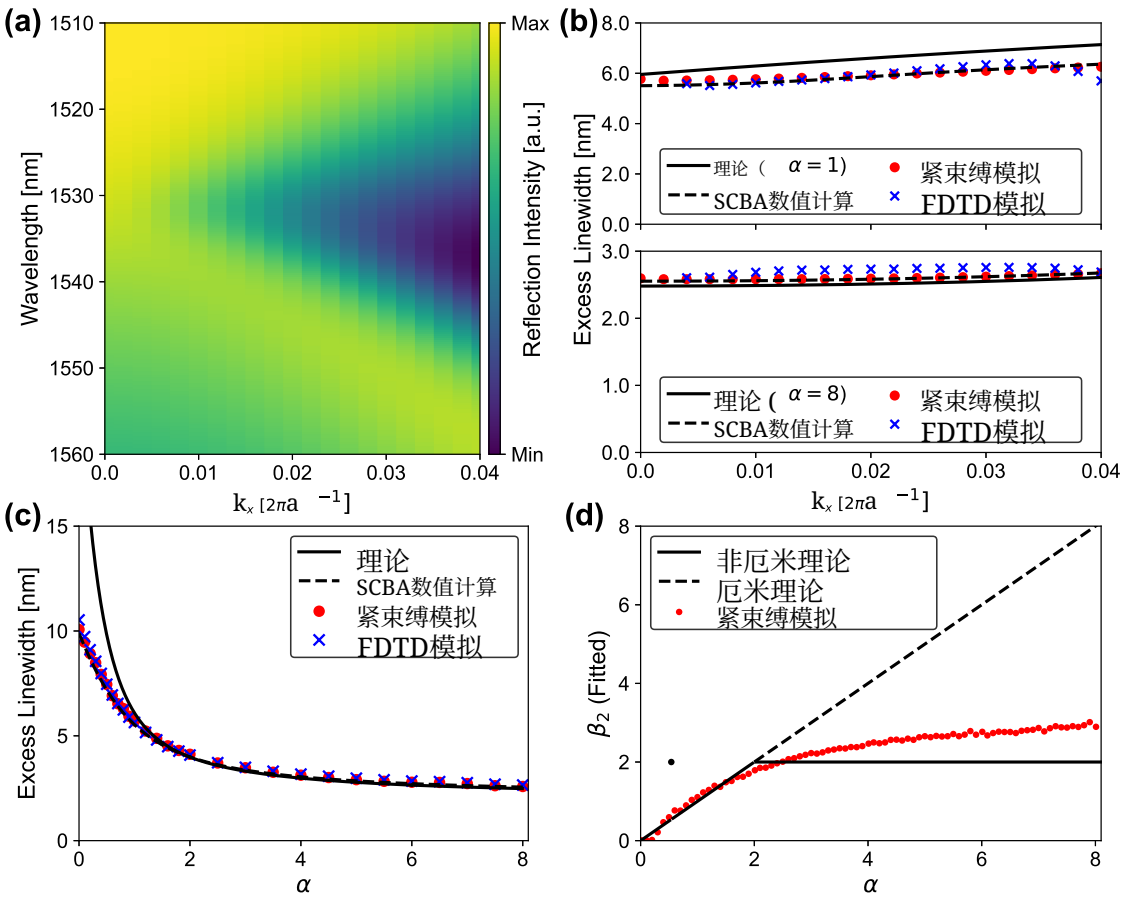


图4. 非厄米二次能带中超均匀无序的影响。(a) 与图1（b）中相同二次能带的模拟反射光谱，其中光子晶体薄板中加入了非关联无序（无序强度为 $w = 3.44a^{-2}$）。由于无序引入的散射损耗 Im（Σ_k）使线宽增大，能带变得模糊。系统尺寸为 $N_x \times N_y = 100 \times 100$。（b）当 $k_y = 0$ 时，沿 $\alpha = 1$（上图）和 $\alpha = 8$（下图）的额外线宽。FDTD模拟对10种无序构型取平均，每种构型的系统尺寸均为 $N_x \times N_y = 100 \times 100$。紧束缚模拟和SCBA数值计算采用的系统尺寸为 $N_x \times N_y = 500 \times 500$。（c）当 $k_x = 0.004\ [2\pi a^{-1}]$ 和 $k_y = 0$ 时，随 α 变化的额外线宽。（d）在紧束缚模拟中，额外线宽通过 $C_0 + C_{\beta_2} \cdot k^{\beta_2}$ 拟合，以获得第二主导阶的指数 β_2。

补充信息：具有内禀非厄米性的光子晶体薄板中的超均匀无序

目录

概述 13

第1节：形式体系与记号：从无序到光子晶体14第2节：傅里叶滤波与谱密度16第3节：厄米二次能带中的散射损耗与额外线宽18第4节：具有复有效质量的非厄米二次能带中的散射损耗与额外线宽20参考文献23

概述

本补充信息部分作为正文的补充，提供理论推导的更多细节。

在第1节中，我们简要介绍无序的一般形式体系。我们给出谱函数 $A_{\mathbf{k}}(E)$的定义，并说明在无序系统中，谱函数如何因自能的虚部而展宽；自能虚部与散射损耗有关。接下来，我们展示光子晶体系统中谱函数与模式线宽之间的关系。

在第2节中，我们详细介绍如何在光子晶体背景下使用傅里叶滤波方法生成超均匀无序构型。局域势分布形成超均匀构型。超均匀图案由超均匀性指数 α表征，使得谱密度 $\tilde{\rho}(\mathbf{q}) \to q^{\alpha}$ 在 $q \to 0$ ($q = |\mathbf{q}|$ 表示波矢的大小)时满足相应关系。

在第3节中，我们解析计算厄米二次能带中超均匀无序引入的散射损耗和额外线宽。我们发现，散射损耗总是具有$\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}}) \to k^{\alpha}$的形式，其中 α 是超均匀性指数，且 $k = |\mathbf{k}|$。

在第4节中，我们将理论扩展到具有复有效质量的非厄米二次能带。我们解析地计算了非厄米情形下的散射损耗和额外线宽。我们发现，当超均匀性指数为 $\alpha > 0$ 时，额外线宽的主导阶始终呈 $C_0 + C_\beta \cdot k^\beta$ 的形式，其中 C_0 是有限常数，且次主导阶的指数不会超过 $\beta \leq 2$。这清楚地表明，非厄米性显著改变了超均匀系统中的波动力学。

第1节：形式体系与记号：从无序到光子晶体

本节中，我们介绍无序的记号，以及在光子晶体背景下引入无序的基本形式体系。

二维光子晶体平板的本征模由麦克斯韦方程支配，从而得到如下本征值问题：

$$\mathcal{L}\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}\mathbf{H}_{\mathbf{k}}, \tag{S1}$$

其中 $\mathcal{L} = \nabla \times \left[\varepsilon(\mathbf{r})^{-1}\nabla \times \cdot\right]$ 是麦克斯韦算符，$\varepsilon(\mathbf{r})$为介电函数，$\mathbf{r} = (x, y, z)$是三个空间坐标，$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$是二维晶格布洛赫动量，$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ 是本征模的磁场分布，$E_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c}\right)^2$ 是本征模的能量，其中 $\omega_{\mathbf{k}}$ 是该模式的本征频率，c 是光速。

二维光子晶体薄板既支持限制在光线以下的导模，也支持可耦合到辐射连续谱的泄漏共振 [23, 28]。在本工作中，我们关注位于光线以上、中心在 $\mathbf{k} = \Gamma = (0,0)$ 的辐射模。由于辐射耦合，这些模式具有有限寿命，可通过复本征值$E_{\mathbf{k}}$纳入形式体系。在本文中，本征值的虚部 $\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})$ 在周期晶格中称为本征损耗（或本征线宽），以区别于无序散射引起的额外展宽（或额外线宽）。为记号简便和分析方便，我们用本征值 $E = (\omega/c)^2$ （麦克斯韦方程的）而非频率ω 本身来描述能带色散。类比于量子力学中有质量粒子的色散，该量被称为“能量”，尽管其单位为 $[a^{-2}]$。

周期晶格中的格林函数可定义为：

$$G^0_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(E) = \left\langle \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \left| \frac{1}{E - \mathcal{L} + i0^+} \right| \mathbf{H}_{\mathbf{k}'} \right\rangle. \tag{S2}$$

为简化记号，从此处起省略 $i0^+$ 项。周期晶格中的谱函数定义为 [34]：

$$A^0_{\mathbf{k}}(E) = \mathrm{Im}\left(G^0_{\mathbf{k},\mathbf{k}}(E)\right). \tag{S3}$$

由式 (S1) 可知，谱函数可以用能量的实部和虚部表示 $E_{\mathbf{k}}$：

$$A^0_{\mathbf{k}}(E) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{E - E_{\mathbf{k}}}\right) = \frac{\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})}{\left(E - \mathrm{Re}\,(E_{\mathbf{k}})\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})\right)^2}, \tag{S4}$$

这意味着 $A^0_{\mathbf{k}}(E)$ 呈现洛伦兹线型，其峰值以 $E = \mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})$ 为中心，半峰全宽 (半高全宽) 为 $-2\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})$。

随后，在系统中加入弱无序 $V(\mathbf{r})$，使平移对称性遭到破坏；换言之，$\mathbf{k}$ 不再是良好量子数。系统的谱密度可定义为：

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \left\langle \tilde{V}(\mathbf{q})\tilde{V}(-\mathbf{q}) \right\rangle_{\mathrm{dis}}, \tag{S5}$$

其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 与动量 $\mathbf{q}$ 对应的 $V(\mathbf{r})$ 的傅里叶分量，而 $\langle\cdot\rangle_{\mathrm{dis}}$ 表示对无序构型取平均 e 的结果

根据无序理论 [36], 平均格林函数总可以用自能表示：

$$\langle G_{\mathbf{k},\mathbf{k}}(E)\rangle_{\mathrm{dis}} = \frac{1}{(E - E_{\mathbf{k}}) - \Sigma_{\mathbf{k}}(E)}, \tag{S6}$$

其中 $\Sigma_{\mathbf{k}}(E)$ 是自能。

在弱无序极限下，可以通过微扰方法计算自能：

$$\Sigma_{\mathbf{k}}(E) = \frac{1}{N_x N_y}\sum_{\mathbf{q}} G^0_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}+\mathbf{q}}(E)\tilde{\rho}(\mathbf{q}) + O(\tilde{\rho}^2), \tag{S7}$$

其中， N_x 和 N_y 分别是 x 和 y 方向上的元胞数。第一项是与谱密度 $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$成正比的主导阶贡献，表示从$\mathbf{k}$到$\mathbf{k}+\mathbf{q}$的单次散射事件。下一个主导项是 $O(\tilde{\rho}^2)$，表示双重散射事件，以此类推。

由式（S6），无序系统中的谱函数变为：

$$A_{\mathbf{k}}(E)=\operatorname{Im}\left\langle G_{\mathbf{k},\mathbf{k}}(E)\right\rangle_{\mathrm{dis}}=\frac{\operatorname{Im}(E_{\mathbf{k}})+\operatorname{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))}{\left(E-\operatorname{Re}(E_{\mathbf{k}})-\operatorname{Re}(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))\right)^2+\left(\operatorname{Im}(E_{\mathbf{k}})+\operatorname{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))\right)^2}, \tag{S8}$$

加入无序后，谱函数仍具有洛伦兹线型，但中心能量移至 $E=\mathrm{Re}\,(E_{\mathbf{k}})+\mathrm{Re}(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))$，半高全宽为 $-2\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})-2\mathrm{Im}\,(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))$。与式（S4）相比，可以看出峰宽由未加无序情形下的 $-2\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})$（称为本征线宽）展宽为加入无序后的 $-2\mathrm{Im}\,(E_{\mathbf{k}})-2\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))$。我们将这一额外的线宽$-2\mathrm{Im}\,(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))$称为线宽展宽或额外线宽，它直接由无序引起的散射损耗所致。

由此可见，向系统加入无序后，平移对称性被无序破坏，因此波矢$\mathbf{k}$ 不再守恒。能带结构不再有明确定义。然而，系统的谱性质仍可由式（S8）中定义的谱函数描述。

能量 $E_{\mathbf{k}}$ 和频率 $\omega_{\mathbf{k}}$ 可分别写成其实部和虚部： $E_{\mathbf{k}}=\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})+i\cdot\mathrm{Im}(E_{\mathbf{k}})$，以及 $\omega_{\mathbf{k}}=\mathrm{Re}(\omega_{\mathbf{k}})+i\cdot\mathrm{Im}(\omega_{\mathbf{k}})$。已知 $E_{\mathbf{k}}=\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c}\right)^2$，并假设 $\mathrm{Re}(\omega_{\mathbf{k}})\gg\mathrm{Im}(\omega_{\mathbf{k}})$，可得：

$$\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})=\frac{\mathrm{Re}(\omega_{\mathbf{k}})^2}{c^2}, \tag{S9}$$

$$\mathrm{Im}(E_{\mathbf{k}})=\frac{2\cdot\mathrm{Re}(\omega_{\mathbf{k}})\cdot\mathrm{Im}(\omega_{\mathbf{k}})}{c^2}. \tag{S10}$$

为了求出模式的中心波长（λ_0）和线宽（$\Delta\lambda$），我们注意到，线宽与共振值之比在波长和频率下保持不变：

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\left|\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right|=2\left|\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}\right|, \tag{S11}$$

$$\lambda_0=\frac{2\pi c}{\omega_0}. \tag{S12}$$

将波长 $\Delta\lambda$ 的线宽用能量表示，可得：

$$\Delta\lambda=-\frac{2\pi\cdot\mathrm{Im}(E)}{\mathrm{Re}(E)^{\frac{3}{2}}}. \tag{S13}$$

在弱无序极限下，本征能量的实部远大于自能的实部；也就是说，$\mathrm{Re}\,(E_{\mathbf{k}})\gg\mathrm{Re}\,(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))\propto\|V\|^2$，其中 $\|V\|$ 表示无序度。在此极限下，可在周期晶格的能带结构处计算散射损耗 $\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}}(E))$，其中$E=\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})$：

$$\Sigma_{\mathbf{k}}=\Sigma_{\mathbf{k}}(E)|_{E=\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})}. \tag{S14}$$

根据公式（S2）和（S7）：

$$\Sigma_{\mathbf{k}}=\frac{1}{N_xN_y}\sum_{\mathbf{q}}\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q})}{\mathrm{Re}\,(E_{\mathbf{k}})-E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}+i0^+}+O(\tilde{\rho}^2). \tag{S15}$$

公式（S15）与正文中的公式（4）相同。

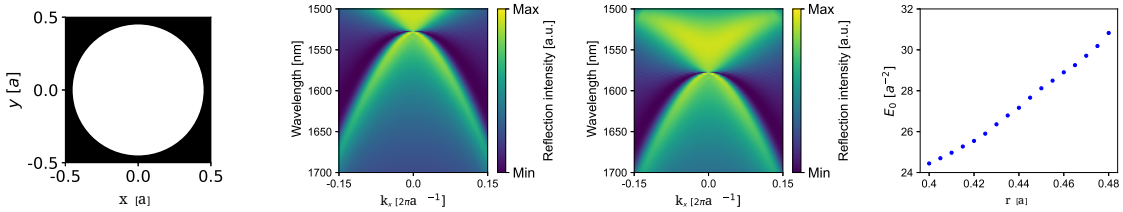
根据公式（S13），额外线宽（总线宽与本征线宽之差）为：

$$\Delta\lambda_{\mathbf{k}}=-\frac{2\pi\cdot\mathrm{Im}\,(\Sigma_{\mathbf{k}})}{\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})^{\frac{3}{2}}}. \tag{S16}$$

接下来，我们将使用式（S7）和式（S16）计算厄米二次能带和非厄米二次能带中超均匀无序构型的散射损耗 $\mathrm{Im}\,(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 以及额外线宽$\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$。

第2节：傅里叶滤波与谱密度

本节介绍如何通过傅里叶滤波方法生成超均匀无序构型，并计算谱密度 $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ 随无序的变化。



(a) (b) (c) (d)

图 S1. 在光子晶体薄板中引入无序的方法。(a) 我们的光子晶体薄板的元胞（位于 $x-y$ 平面， z 为面外方向）。该结构由正方晶格中的圆形空气孔（$\varepsilon = 1.0$）组成，$r_0 = 0.45a$ ，其中 $a = 1290nm$ 为晶格常数。薄板由硅（$\varepsilon = 12.11$）制成，厚度为 $h = 0.05a$。(b) (a) 沿 $k_y = 0$ 线的模拟能带结构。(c) (a) 的模拟能带结构，但具有 $r = 0.43a$。(d) 二次能带的尖端能量（$E = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$）随空气孔半径 r变化。

图 S1(a) 展示了本研究所用的光子晶体薄板结构。该结构由硅薄板中的圆形空气孔组成，这些孔排列成正方晶格。该结构在$\mathbf{k} = \Gamma$附近具有一条孤立的二次能带。为了在模拟中探测该能带，我们用聚焦的高斯光束照射样品，并在远场以不同角度收集反射强度。与参考文献 [37], 中的实验设置（后焦平面成像装置）类似，我们在一次模拟中获得所有波矢 $\mathbf{k}$ 的光谱信息。模拟结果由 TIDY3D获得，这是由 FLEXCOMPUTE 开发、采用时域有限差分法（FDTD） [29]的一个软件包。

在模拟中，我们发现，随着空气孔半径的变化，能带端点能量也会改变。在图S1(b) 中，孔的半径为 $r = 0.45a$，即正文图 1 所示周期结构中的半径。能带端点能量为 $E_0 = 28.1a^{-2}$ （对应波长 $\lambda_0 = 1529nm$）。而在图 S1(c) 中，孔的半径减小至 $r = 0.43a$。能带端点能量降至 $E_0 = 26.4a^{-2}$（对应波长 $\lambda_0 = 1578nm$）。更一般地，图 S1(d) 显示，能带端点能量随孔半径增大而升高。

图S1 让我们直观地认识到，可以通过改变每个格点处孔的尺寸来引入无序。通过改变每个格点处孔的半径$r_{l,\ j}$，可以在光子晶体薄板中加入势无序（$l,\ j$），使局域势（其定义为周期结构中与$r_{l,\ j}$ 对应的尖端能量）$V_{l,\ j}$ 形成无序图样。这种方法使我们能够为局域势$V_{l,\ j}$ 定量赋值，而该值与每个格点处孔的半径$r_{l,\ j}$ 直接相关。通过精心设计每个格点处孔的半径$r_{l,\ j}$，我们能够在光子晶体薄板中加入可控的势无序$V_{l,\ j}$。

为生成超均匀无序构型，我们首先从随机的非关联无序图样出发，使局域势$V_{l,\ j}$ 在该范围内随机均匀选取

$$V_{l,j} \sim U\left(E_0 - w, E_0 + w\right), \tag{S17}$$

其中，U 表示均匀分布，$E_0 = 28.1a^{-2}$ 是周期晶格中的尖端能量，w表示无序度。

然后，局 域势的傅里叶分量 $V_{l,\ j}$ 通过离散傅里叶变换计算得到 ：

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{l,j} e^{-i(lq_x a + jq_y a)} V_{l,j}, \tag{S18}$$

其中，N_x 和 N_y 分别是 x 方向和 y 方向上的格点数，而$\mathbf{q} = (q_x, q_y)$表示傅里叶分量。

注意，$V_{l,j} \in \mathbb{R}$，这意味着 $\tilde{V}(-\mathbf{q}) = \left(\tilde{V}(\mathbf{q})\right)^*$，或者等价地，$\tilde{V}(-\mathbf{q})\,\tilde{V}(\mathbf{q}) = \left|\tilde{V}(\mathbf{q})\right|^2$。

很容易证明，当系统尺寸 $N_x \times N_y$较大时，$V(\mathbf{q})$的实部和虚部均服从正态分布：

$$\mathrm{Re}\left(\tilde{V}(\mathbf{q})\right) \sim N\left(0, \frac{1}{6}w^2\right), \tag{S19}$$

$$\mathrm{Im}\left(\tilde{V}(\mathbf{q})\right) \sim N\left(0, \frac{1}{6}w^2\right), \tag{S20}$$

其中 N 表示正态分布。因此，

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \left\langle \tilde{V}(-\mathbf{q})\tilde{V}(\mathbf{q}) \right\rangle = \left\langle \left|\tilde{V}(\mathbf{q})\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{3}w^2. \tag{S21}$$

接下来，我们采用傅里叶滤波方法 [32], ，按照以下方式修改并滤除所有傅里叶分量 $V(\mathbf{q})$：

$$\tilde{V}'(\mathbf{q}) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\alpha+2}{2}} \left(\dfrac{q}{q_{\max}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{V}(\mathbf{q}), & q < q_{\max} \\ 0, & q > q_{\max} \end{cases} \tag{S22}$$

其中，$\tilde{V}'(\mathbf{q})$表示经过傅里叶滤波后的傅里叶分量，$q_{\max} = 0.3\ [2\pi a^{-1}]$ 是截止波数，用于确保第一布里渊区内的傅里叶分量具有各向同性；α 是我们将在后文展示的超均匀性指数。滤波后，谱密度 $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$变为：

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha+2}{6}w^2 \left(\dfrac{q}{q_{\max}}\right)^{\alpha}, & q < q_{\max} \\ 0, & q > q_{\max} \end{cases} \tag{S23}$$

式（S23）所示的谱密度对应超均匀性指数为 α的超均匀无序，因为 $\tilde{\rho}(\mathbf{q}) \to q^{\alpha}$ 当 $q \to 0$时。根据离散傅里叶变换的性质，$\tilde{\rho}(\mathbf{q})$在 q_x和 q_y方向上都应具有周期性：$\tilde{\rho}\left(q_x + \frac{2\pi}{a}, q_y\right) = \tilde{\rho}\left(q_x, q_y + \frac{2\pi}{a}\right) = \tilde{\rho}\left(q_x, q_y\right)$。式（S23）与正文中的式（3）相同。

最后，进行逆离散傅里叶变换，将 $V'(\mathbf{q})$变换回实空间：

$$V'_{l,j} = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{\mathbf{q}} e^{i(lq_x a + jq_y a)} \tilde{V}'(\mathbf{q}). \tag{S24}$$

由于式（S22）中的滤波并未改变 $\tilde{V}'(-\mathbf{q}) = \left(\tilde{V}'(\mathbf{q})\right)^*$这一事实，因此滤波后的局域势仍为实数$V'_{l,\,j} \in \mathbb{R}$。

根据公式（S21）、（S22）和（S24），傅里叶滤波后局域势的方差为：

$$\mathrm{Var}\left(V'_{l,j}\right) = \frac{1}{3}w^2 \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot \iint_{q<q_{\max}} d\mathbf{q} \cdot \frac{\alpha+2}{2} \left(\frac{q}{q_{\max}}\right)^{\alpha} = \frac{a^2 q_{\max}^2 w^2}{12\pi} \tag{S25}$$

我们可以看到，实空间中局域势的方差 $\mathrm{Var}\left(V'_{l,j}\right)$ 是一个与α无关的常数。这使我们能够对不同超均匀性指数 α对应的结果进行公平比较。

Se第3节：厄米二次能带中的散射损耗与额外线宽

本节将对晶格系统中存在厄米二次能带时，由无序引起的散射损耗 $\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 和额外线宽 $\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$ 进行解析计算。

对于晶格中的厄米二次能带，其能带色散为

$$E_{\mathbf{k}} = E_0 - \frac{1}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2\right) \quad \left(-\frac{\pi}{a} < k_x, k_y < \frac{\pi}{a}\right) \tag{S26}$$

其中 a 为晶格常数， $E_0 \in \mathbb{R}$ 为二次能带的尖端能量， $m \in \mathbb{R}$ 为有效质量，且能带结构在 $k_x \mapsto k_x + \frac{2\pi}{a}$ 和 $k_y \mapsto k_y + \frac{2\pi}{a}$ 下呈周期性。对于本工作中使用的光子能带，$\mathrm{Re}(m) > 0$,一因此我们在本节中假设 $m > 0$ 。

接下来，我们考虑正方晶格中由圆孔构成的二维光子晶体平板。通过改变格点$(l,\ j)$处孔的半径，局域势$V_{l,\ j}$ 也会发生变化。我们使用傅里叶滤波方法向系统引入超均匀无序，如第2节所详述，使得谱密度满足:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha+2}{6} w^2 \left(\dfrac{q}{q_{\max}}\right)^{\alpha}, & q < q_{\max} \\ 0, & q > q_{\max} \end{cases} \tag{S27}$$

其中 $\alpha \geq 0$ 为超均匀性指数， w 为无序强度， $q_{\max} = 0.3\ [2\pi a^{-1}]$ 为使谱密度在第一布里渊区内对称的截止波数。

注意:

$$\frac{1}{N_x N_y}\sum_{\mathbf{q}} = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \iint d\mathbf{q} \tag{S28}$$

由公式（S7）、（S14）、（S27）和（S28，可得:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{N_x N_y}\sum_{\mathbf{q}} \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q})}{\mathrm{Re}\left(E_{\mathbf{k}}\right) - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \\ &= \frac{1}{3} w^2 \frac{\alpha+2}{2} \left(\frac{1}{q_{\max}}\right)^{\alpha} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \iint_{q<q_{\max}} d\mathbf{q} \frac{q^{\alpha}}{-\frac{k^2}{2m} + \frac{(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2}{2m}} \\ &= \frac{1}{3} w^2 \frac{\alpha+2}{2} \left(\frac{1}{q_{\max}}\right)^{\alpha} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \frac{m}{k} \int_0^{q_{\max}} dq\ q^{\alpha} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{-\frac{q}{2k} - \cos\theta}. \end{aligned} \tag{S29}$$

注意以下事实:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{x - cos\theta} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1 \\ -\dfrac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}, & x < -1 \\ i\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \end{cases} \tag{S30}$$

公式（S29）变为:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{3} w^2 \frac{\alpha+2}{2} \left(\frac{1}{q_{\max}}\right)^{\alpha} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \frac{m}{k} \left(\int_0^{2k} 2\pi i \frac{q^{\alpha}}{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{2k}\right)^2}} dq - \int_{2k}^{q_{\max}} 2\pi \frac{q^{\alpha}}{\sqrt{\left(\frac{q}{2k}\right)^2 - 1}} dq \right) \\ &= -\frac{1}{3} w^2 \frac{\alpha+2}{2} \left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{\alpha} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 2m \cdot 2\pi \left(i \int_0^1 \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_1^{\frac{q_{\max}}{2k}} \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^2-1}} dx \right). \end{aligned} \tag{S31}$$

这里 w 我们已经假设了 $k < \frac{q_{\max}}{2}$, 因为我们只关注 $k = 0$ 附近的行为。

由于我们只关心自能的虚部，且 $m \in \mathbb{R}$，因此只需考虑第一个积分的贡献。此外还要注意：

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}. \tag{S32}$$

我们得到：

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right) &= -\frac{1}{3} w^2 \frac{\alpha+2}{2} \left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^\alpha \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 2m \cdot 2\pi \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{2^\alpha(\alpha+2) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot w^2 a^2 m}{12\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) \cdot q_{\max}^\alpha} k^\alpha. \end{aligned} \tag{S33}$$

方程（S33）与正文中的方程（5）相同。
根据方程（S16）：

$$\Delta\lambda_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^\alpha(\alpha+2) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot w^2 a^2 m}{6 \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) \cdot q_{\max}^\alpha \cdot \mathrm{Re}\left(E_{\mathbf{k}}\right)^{\frac{3}{2}}} k^\alpha. \tag{S34}$$

由方程（S34）和（S34）可知：
1. 散射损耗 $\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 和额外线宽 $\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$ 与 k^α 成正比
2. 当 $\alpha = 0$ 时，散射损耗和额外线宽都退化为非关联无序，因此它们是与 k 无关的常数：

$$\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}}) = -\frac{1}{6} w^2 a^2 m, \tag{S35}$$

$$\Delta\lambda_{\mathbf{k}} = \frac{\pi w^2 a^2 m}{3 \cdot \mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})^{\frac{3}{2}}}. \tag{S36}$$

在式（S36）中，我们注意到，散射损耗 $\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 和额外线宽 $\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$ 与截止波数 $q_{\max}$无关。这是因为在厄米情形下，能量守恒。单次散射仅允许从等频轮廓上的一点散射到 IFC 上的另一点。因此，$q_{\max}$ 在 $k < \frac{q_{\max}}{2}$时没有影响。

第4节：复有效质量的非厄米二次能带中的散射损耗和额外线宽

本节中，我们将把散射损耗 $\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 和额外线宽 $\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$ 的解析推导扩展至具有复有效质量的非厄米二次能带。

在上一节中，我们考虑了厄米二次能带：

$$E_{\mathbf{k}} = E_0 - \frac{1}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2\right) \quad \left(-\frac{\pi}{a} < k_x, k_y < \frac{\pi}{a}\right) \tag{S37}$$

其中有效质量为实数 $m \in \mathbb{R}$。本节将考虑这样的情形： m 不再是纯实数，而是具有非零虚部：

$$m = \mathrm{Re}(m) + i \cdot \mathrm{Im}(m) \tag{S38}$$

从这里开始，我们只考虑 $\mathrm{Re}(m) > 0$ 且 $\mathrm{Im}(m) < 0$ 的情形，这在我们感兴趣的光子晶体板结构中成立。

从式（S26）到（S28）的推导保持不变，但从式（S29）开始，有效质量的虚部将发挥作用。式（S29）需要修改为：

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{N_x N_y}\sum_{\mathbf{q}} \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q})}{\mathrm{Re}\left(E_{\mathbf{k}}\right) - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \\
&= \frac{1}{3}w^2\frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{1}{q_{\max}}\right)^{\alpha}\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \iint_{q<q_{\max}} d\mathbf{q}\frac{q^{\alpha}}{-\mathrm{Re}\left(\frac{k^2}{2m}\right) + \frac{(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2}{2m}} \\
&= \frac{1}{3}w^2\frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{1}{q_{\max}}\right)^{\alpha}\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \iint_{q<q_{\max}} d\mathbf{q}\frac{q^{\alpha}}{-\frac{k^2}{2m} + \mathrm{Im}\left(\frac{k^2}{2m}\right) + \frac{(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2}{2m}}.
\end{aligned} \tag{S39}$$

我们可以看到，分母中多了一项 $\mathrm{Im}\left(\frac{k^2}{2m}\right)$。由于我们只关心 $k=0$ 附近的行为，以下推导中采用近似 $\mathrm{Im}\left(\frac{k^2}{2m}\right) \approx 0$。这等价于：

$$\mathrm{Re}\left(\frac{k^2}{2m}\right) \approx \frac{k^2}{2m} \tag{S40}$$

在上述近似下，从方程（S29）到（S32）的推导在我们的非厄米情形下仍然成立：

$$\Sigma_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{3}w^2\frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{\alpha}\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot 2m \cdot 2\pi\left(\int_0^1 \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int_1^{\frac{q_{\max}}{2k}} \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^2-1}}dx\right) \tag{S41}$$

然而，由于有效质量 m 不再是纯实数，我们还需要考虑方程（S41）中第二个积分的贡献。因此，

$$\mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right) = -\frac{1}{3}w^2\frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{\alpha}\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot 2 \cdot 2\pi\left(\mathrm{Re}(m)\cdot\int_0^1 \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1-x^2}}dx - \mathrm{Im}(m)\cdot\int_1^{\frac{q_{\max}}{2k}} \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^2-1}}dx\right) \tag{S42}$$

请注意：

$$\begin{aligned}
\int_1^y \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^2-1}}dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{\alpha-2n}\cdot y^{\alpha-2n} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\alpha}y^{\alpha} + \frac{1}{2(\alpha-2)}y^{\alpha-2} + O\left(y^{\alpha-4}\right)
\end{aligned} \tag{S43}$$

利用公式（S32）和（S43）中的信息，公式（S42）变为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right)=&-\frac{(\alpha+2)w^2V_0^2a^2}{6\pi}\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{\alpha}\times\\&\left(\mathrm{Re}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}-\mathrm{Im}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}-\frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}\left(\frac{q_{\max}}{2k}\right)^{\alpha}-\frac{\mathrm{Im}(m)}{2(\alpha-2)}\left(\frac{q_{\max}}{2k}\right)^{\alpha-2}+O\left(\frac{q_{\max}}{2k}\right)^{\alpha-4}\right)\end{aligned}\tag{S44}$$

通过仔细估算各项的阶数（关于 k），我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}}\right)=&\frac{(\alpha+2)w^2a^2}{6\pi}\times\\&\begin{cases}-\mathrm{Im}(m)\cdot\ln\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)+O\left(k^0\right), & \alpha=0\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}+\left(\mathrm{Im}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}-\mathrm{Re}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}\right)\cdot\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{\alpha}+O\left(k^2\right), & 0<\alpha<\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}+\frac{\mathrm{Im}(m)}{2(\alpha-2)}\cdot\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{2}+O\left(k^4\right), & \alpha=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}+\left(\mathrm{Im}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}-\mathrm{Re}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}\right)\cdot\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{\alpha}+O\left(k^2\right), & \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1<\alpha<2\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}-\frac{\mathrm{Im}(m)}{2}\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{2}\ln\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)+O\left(k^2\right), & \alpha=2\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}+\frac{\mathrm{Im}(m)}{2(\alpha-2)}\cdot\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{2}+o\left(k^2\right), & \alpha>2\end{cases}\end{aligned}\tag{S45}$$

然后，根据公式（S16），我们得到：

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_{\mathbf{k}}=&-\frac{(\alpha+2)w^2a^2}{3\cdot\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})^{\frac{3}{2}}}\times\\&\begin{cases}-\mathrm{Im}(m)\cdot\ln\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)+O\left(k^0\right), & \alpha=0\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}+\left(\mathrm{Im}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}-\mathrm{Re}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}\right)\cdot\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{\alpha}+O\left(k^2\right), & 0<\alpha<\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}+\frac{\mathrm{Im}(m)}{2(\alpha-2)}\cdot\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{2}+O\left(k^4\right), & \alpha=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}+\left(\mathrm{Im}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}-\mathrm{Re}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}\right)\cdot\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{\alpha}+O\left(k^2\right), & \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1<\alpha<2\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}-\frac{\mathrm{Im}(m)}{2}\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{2}\ln\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)+O\left(k^2\right), & \alpha=2\\ \frac{\mathrm{Im}(m)}{\alpha}+\frac{\mathrm{Im}(m)}{2(\alpha-2)}\cdot\left(\frac{2k}{q_{\max}}\right)^{2}+o\left(k^2\right), & \alpha>2\end{cases}\end{aligned}\tag{S46}$$

这里，我们使用一些重要事实：

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\alpha}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}y^{\alpha}=-\ln y+O(1),\tag{S47}$$

$$\lim_{\alpha\to2}\frac{y^2}{2(\alpha-2)}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}y^{\alpha}=-\frac{1}{2}y^2\ln y+O\left(y^2\right),\tag{S48}$$

$$\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(1-x\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\pi x\right)}\tag{S49}$$

方程（S45）等价于我们在正文方程（6）中给出的形式。

由式（S45）和（S46），我们可以看出：

1. 当 $\alpha = 0$时，无序退化为非关联无序，此时散射损耗$\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$和额外线宽 $\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$ 在 $k = 0$ 处以 $O(\ln k)$发散。

2. 当 $\alpha > 0$时，散射损耗$\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$和额外线宽 $\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$ 的主导阶不再是k^{α} （即式（S33）和（S34）中的厄米情形），而始终是一个有限常数（与 k无关）：

$$\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})|_{k=0} = \frac{(\alpha+2)w^2a^2}{6\pi\alpha}\cdot\mathrm{Im}(m), \tag{S50}$$

$$\Delta\lambda_{\mathbf{k}}|_{k=0} = -\frac{(\alpha+2)w^2a^2}{3\alpha\cdot\mathrm{Re}(E_{\mathbf{k}})^{\frac{3}{2}}}\cdot\mathrm{Im}(m). \tag{S51}$$

3. 当 $\alpha = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1$时，次主导阶标度会出现突然跃变，即第二主导阶从 $O(k^{\alpha})$跃变至 $O(k^2)$。这是因为当 $\alpha = \overline{\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1}$时， $O(k^{\alpha})$项的系数偶然降为零：

$$\mathrm{Im}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} - \mathrm{Re}(m)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)} = 0. \tag{S52}$$

因此，第三个主导阶项 $O(k^2)$ 成为额外线宽中的第二个主导阶指数。

4. 散射损耗 $\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 和额外线宽 $\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$ 在 k 中的下一个主导阶为：

$$\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}}) - \mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})|_{k=0} \propto \Delta\lambda_{\mathbf{k}} - \Delta\lambda_{\mathbf{k}}|_{k=0} = \begin{cases} O\left(k^{\alpha}\right), & 0<\alpha<\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1 \\ O\left(k^2\right), & \alpha=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1 \\ O\left(k^{\alpha}\right), & \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(m)}{\mathrm{Im}(m)}\right)+1<\alpha<2 \\ O\left(k^2\ln k\right), & \alpha=2 \\ O\left(k^2\right), & \alpha>2 \end{cases} \tag{S53}$$

这与式（S34）中的厄米情形也有很大不同。即使 α 非常大，散射损耗 $\mathrm{Im}(\Sigma_{\mathbf{k}})$ 和额外线宽 $\Delta\lambda_{\mathbf{k}}$ 的下一个主导阶也绝不会超过 $O\left(k^2\right)$。

5. 当 $\mathrm{Im}(m) = 0$ 时，方程（S45）和（S46）分别化为方程（S33）和（S34）中的厄米情形。

[1] S. Torquato 和 F. H. Stillinger, 《物理评论 E》68，041113（2003年）。[2] S. Torquato, 《物理报告》745，1（2018年）。[3] O. Leseur、R. Pierrat 和 R. Carminati, 《Optica》3，763（2016年）。[4] J. Kim 和 S. Torquato, 《Optica》10，965（2023年）。[5] M. A. Klatt、P. J. Steinhardt 和 S. Torquato，arXiv 预印本 arXiv:2507.22377（2025年）。[6] M. Florescu、S. Torquato 和 P. J. Steinhardt, 《美国国家科学院院刊》106，20658（2009年）。[7] W. Man、M. Florescu、E. P. Williamson、Y. He、S. R. Hashemizad、B. Y. Leung、D. R. Liner、S. Torquato、P. M. Chaikin 和 P. J. Steinhardt, 《美国国家科学院院刊》110，15886（2013年）。[8] N. Muller、J. Haberko、C. Marichy 和 F. Scheffold, 《先进光学材料》2，115（2013年）。[9] L. S. Froufe-P´erez、M. Engel、P. F. Damasceno、N. Muller、J. Haberko、S. C. Glotzer 和 F. Scheffold, 《物理评论快报》117，053902（2016年）。[10] G. Gkantzounis、T. Amoah 和 M. Florescu, 《物理评论 B》95，094120（2017年）。[11] M. A. Klatt、P. J. Steinhardt 和 S. Torquato, 《美国国家科学院院刊》119，e2213633119（2022年）。[12] L. Siedentop、G. Lui、G. Maret、P. M. Chaikin、P. J. Steinhardt、S. Torquato、P. Keim 和 M. Florescu, 《PNAS Nexus》3，pgae383（2024年）。[13] M. Casiulis、A. Shih 和 S. Martiniani, 《物理评论快报》135，196101（2025年）。[14] L. S. Froufe-P´erez、M. Engel、J. J. S´aenz 和 F. Scheffold, 《美国国家科学院院刊》114，9570（2017年）。[15] G. J. Aubry、L. S. Froufe-P´erez、U. Kuhl、O. Legrand、F. Scheffold 和 F. Mortessagne, 《物理评论快报》125，127402（2020年）。[16] R. Monsarrat、R. Pierrat、A. Tourin 和 A. Goetschy，arXiv 预印本 arXiv:2110.12034（2021年）。[17] N. Granchi、R. Spalding、M. Lodde、M. Petruzzella、F. W. Otten、A. Fiore、F. Intonti、R. Sapienza、M. Florescu 和 M. Gurioli, 《先进光学材料》10，2102565（2022年）。[18] ´E. Ch´eron、S. F´elix、J.-P. Groby、V. Pagneux 和 V. Romero-Garc´ıa, 《应用物理快报》121（2022年）。[19] F. Sgrignuoli、S. Torquato 和 L. Dal Negro, 《物理评论 B》105，064204（2022年）。[20] K. Vynck、R. Pierrat、R. Carminati、L. S. Froufe-P´erez、F. Scheffold、R. Sapienza、S. Vignolini 和 J. J. S´aenz, 《现代物理学评论》95，045003（2023年）。[21] J. Kim 和 S. Torquato, 《光学材料快报》14，194（2023年）。[22] S. G. Johnson、S. Fan、P. R. Villeneuve、J. D. Joannopoulos 和 L. Kolodziejski, 《物理评论 B》60，5751（1999年）。[23] S. Fan 和 J. D. Joannopoulos, 《物理评论 B》65，235112（2002年）。[24] B. Zhen、C. W. Hsu、Y. Igarashi、L. Lu、I. Kaminer、A. Pick、S.-L. Chua、J. D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c, 《自然》525，354（2015年）。[25] P. Lalanne、W. Yan、K. Vynck、C. Sauvan 和 J.-P. Hugonin, 《激光与光子学评论》12，1700113（2018年）。[26] Z. Zhang、B. Gould、M. Barsukova 和 M. C. Rechtsman，arXiv 预印本 arXiv:2510.07522（2025年）。[27] M. Barsukova、Z. Zhang、B. Gould、K. Sadri、C. Rosiek、S. Stobbe、J. Karcher 和 M. C. Rechtsman，arXiv 预印本 arXiv:2507.05253（2025年）。[28] J. D. Joannopoulos、S. G. Johnson、J. N. Winn 和 R. D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light (Second Edition)* 2 2008 ，第版（普林斯顿大学出版社，）。[29] M. Minkov、P. Sun、B. Lee、Z. Yu 和 S. Fan, 《Opt. Photon. News》35，44（2024年）。[30] C. W. Hsu、B. Zhen、A. D. Stone、J. D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c, 《自然综述：材料》1，1（2016年）。[31] K. Koshelev、S. Lepeshov、M. Liu、A. Bogdanov 和 Y. Kivshar, 《物理评论快报》121，193903（2018年）。[32] H. A. Makse、S. Havlin、M. Schwartz 和 H. E. Stanley, 《物理评论 E》53，5445（1996年）。[33] A. Moroz, 《物理评论 B》51，2068（1995年）。[34] A. L. Fetter 和 J. D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*（Courier Corporation，2012年）。[35] D. S. Wiersma, 《自然·光子学》7，188（2013年）。[36] P. A. Lee 和 T. V. Ramakrishnan, 《现代物理学评论》57，287（1985年）。[37] M. Barsukova、F. Gris´e、Z. Zhang、S. Vaidya、J. Guglielmon、M. I. Weinstein、L. He、B. Zhen、R. McEntaffer 和 M. C. Rechtsman, 《自然·光子学》18，580（2024年）。