含幺三维可构代数：分类、性质与AK构造 *

Kobiljon Abdurasulov[†]、**Maqpal Eraliyeva**[‡] **和 Ivan Kaygorodov**[§]

摘要： 本文致力于复含幺三维结构代数的分类及其性质研究。我们给出了非同构类的完整列表，其中类型(2,1) 有五个代数，类型(1,2). 有两个代数。对于每个得到的代数，我们描述了其导子代数、自同构群、子代数与理想的格，以及二次函数恒等式。此外，我们研究了已分类代数的*Allison-Kantor*构造，并确定了所得 $\mathbb{Z}$-分次李代数的结构，给出了其维数和*Levi*分解。

关键词： 结构代数、代数分类、导子、自同构、*Allison-Kantor*构造。

MSC2020：17A30（主要）；17A36、14L30（次要）。

arXiv:2603.04391v1 [math.RA] 4 Mar 2026

目录

1 分类与性质 **4**

1.1 预备知识.4 1.2 三维结构代数的分类.5 1.2.1 类型 (2,1).5 1.2.2 类型 (1,2).6 1.3 含幺三维可构代数的性质.7 1.3.1 导子.7 1.3.2 自同构.8 1.3.3 含幺三维可构代数的子代数.8 1.3.4 含幺三维可构代数的恒等式.15 1.3.5 Allison-Hein构造.18

2 Allison—Kantor构造 19

2.1 Allison—Kantor结构代数.19 2.2 A_1 的AK构造.20 2.3 A_2 的AK构造.22 2.4 A_3 的AK构造.25 2.5 A_4 的AK构造.27 2.6 A_5 的AK构造.30 2.7 S_1 的AK构造.32 2.8 S_2 的AK构造.35

*本研究得到 FCT 2023.08031.CEECIND、2023.08952.CEECIND 和 UID/00212/2025 的资助。

†CMA-UBI，贝拉内陆大学，葡萄牙科维良；乌兹别克斯坦科学院 Romanovsky数学研究所，乌兹别克斯坦塔什干；abdurasulov0505@mail.ru

‡乌兹别克斯坦科学院 Romanovsky数学研究所，乌兹别克斯坦塔什干；eraliyeva maqpal@gmail.com §CMA-UBI，贝拉内陆大学，葡萄牙科维良；kaygorodov.ivan@gmail.com

引言

Jordan 代数是非结合代数中最重要的类别之一。[¶] 最早的Jordan 代数出现在Jordan、冯·诺伊曼和维格纳于 1934 [23], 发表的一篇经典论文中，此后一直是活跃的研究对象。Jordan 代数最著名的推广包括：非交换约旦代数、终端代数、交换 $\mathfrak{CD}$-代数、保守代数和结构代数等。本文致力于研究低维结构代数。

Allison 在1978 [2]中引入了一类含有对合的含幺代数，这类代数满足一个由固定单位元和对合决定的特定拟恒等式。如果该对合是恒等映射，那么结构代数的定义就归结为约当代数的定义。结构代数这一类包含带对合的交错代数 (，例如八元数；目前对此类代数的研究十分活跃 [13,33,34])。在其论文 [2], 中，Allison 给出了结构代数的重要例子 (，它们是非结合且非约当的) 。可以说，非平凡结构代数中最重要的例子，是通过两个合成代数的张量积构造而成的。这种构造已得到广泛研究：Morandi、Pérez-Izquierdo 和 Pumplün 在 2001 [36]中描述了八元数张量积的导子和自同构；Mondoc 研究了定义在合成代数张量积上的 Kantor 三重系统 [37, 38]；Elduque 和 Okubo 于 2005 年在2007 [18, 39]中研究了正规对称三元代数，其定义条件反映了两个对称合成代数张量积的性质；Blachar、Rowen 和 Vishne 在 2023 [10],中研究了两个八元数张量积的恒等式，此外还有其他相关工作。自引入以来，这一类代数便受到深入研究。结构代数类与 Kantor 在 1972 [26] 中引入的保守代数类以及各种三元代数类密切相关。对结构代数的系统研究始于 Allison 的上述论文。Allison 和 Hein 在 1981 [6], 中研究了结构代数的同位代数，随后 Allison 和 Faulkner 在 1995 [5]中也进行了研究。Allison 和 Faulkner 在 1984 [4]中考察了结构代数的 Cayley-Dickson 过程。Schafer 获得了结构代数结构理论中的一些基本结果：他在 1985 [43] 中证明了结构代数的韦德伯恩主定理；随后，他运用 Eilenberg 对双模的一般定义) ，引入了可结构双模 (，并证明了约当代数第一怀特海德引理在结构代数情形下的推广(；关于约当代数第一怀特海德引理的另一种推广，则是在 δ-导子的背景下给出的 [50])，此外还包括约当代数的 Malcev-Harish-Chandra 定理 [44]。他关于结构代数的第三个主要结果指出，零特征域上的有限维结构代数的根是幂零的 [45]。Smirnov 在 (中给出了特征不等于 2、3 的情形下有限维单结构代数和半单结构代数的完整分类5)，见 1990 [46, 47]。特征为 5 的情形由 Stavrova 在 2022 [49]中研究。后来，Pozhidaev、Shestakov 和 Faulkner 在一系列论文（2010年）中，对零特征代数闭域上的所有有限维单可结构超代数进行了分类 [19, 20, 40]。Smirnov 研究了由斜对称元素生成的代数上的可结构双模，见

¶由于结合代数与李代数之间有诸多联系，我们认为二者都不属于“非结合世界”。

1996 [48]。Allison 在 1990 [3] 中开创了对斜秩为 1 的结构代数的系统研究（另见 [15]）。后来，Pumplün 在 2010 年的两篇论文中构造了一些有趣的斜秩为 1 的结构代数例子 2011 [41,42]。Cuypers 和 Meulewaeter 在 2021 [14]中证明了如下对应关系的存在：斜维数为 1 的单结构代数（按同位代数计）与由非辛极端元生成的有限维李代数之间存在一一对应（按同构计）。Elduque、Kochetov、Aranda-Orna 和 Córdova-Martínez 于 2014 年及 2020 [8,9]积极研究了单结构代数上的分次。Kaygorodov 和 Okhapkina 在 2014 [31]中描述了 Smirnov 分类中的半单有限维结构代数的所有 δ-导子。Elduque、Kamiya 和 Okubo 在 2014 [17]中确立了左幺 Kantor 三重系统与结构代数之间的基本关系。结构代数在 Moufang 集理论中发挥着重要作用 [11, 12, 16]。尤其是，Boelaert 和 De Medts 发现了四边形代数与结构代数之间的深层联系 [11]。Garibaldi 和 Alsaody 在 2001 年的论文中讨论了结构代数与 E_6 型群及 E_7 型群之间的联系2024 [7, 24]。还需指出，Kamiya、Mondoc 和 Okubo 在一系列论文中，也研究了某些推广结构代数的代数理论 (，例如前结构代数、 δ-结构代数、(α,β,γ)-结构代数等) [27–29]。

本文延续了对结构代数的研究，并将研究重点转向小维数代数。首先，我们得到了主要结果：三维结构代数的分类 (定理 7 和 8)。对满足某些性质的非结合代数进行分类，是非结合代数理论中最核心的问题之一 (见 [1, 21, 22, 30, 32, 35] 及其中的参考文献)。其次，我们研究了所得代数的性质：描述了导子（第 1.3.1 节）、自同构（第 1.3.2 节）和子代数（第 1.3.3 节）。研究导子和自同构是非结合代数理论中的经典问题；此外，描述子代数也为今后研究所得代数上的 Rota-Baxter 算子及其他 Rota型算子提供了主要工具。第 1.3.4 节专门描述含幺三维可构代数的对合恒等式。最后一节研究了分类所得代数的 Allison-Kantor构造。我们确定了所得 $\mathbb{Z}$-分次李代数的结构，并给出了它们的维数和 Levi分解。

记号。一般而言，我们在复数域上工作，但某些结果对其他域也成立。对于一些众所周知的定义，我们不再赘述，并请读者参阅已发表的相关论文。对于向量集合 S，我们用 $\langle S\rangle$ 表示由 S 张成的向量空间。左乘算子 L_x 定义为 $L_x(y) = x \cdot y$。我们还始终假设所考虑的代数是非平凡的 (，即其乘法非零) ，并带有一个对合 (，即一个线性映射 $^-$，使得 $\bar{x} = x$ 且 $\overline{x \cdot y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$)。对于某些元素的集合 $\mathfrak{Set}$，我们用 $\mathfrak{Set}$ 表示在对合 $^-$ (作用下不变的元素子集；例如，$\mathfrak{Der}$ 是在对合下不变的导子集合，Aut 是在对合下不变的自同构集合，等等)。所有具有基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 的 n 维代数均为含幺代数，单位元为 e_1，，即 $e_1 \cdot e_i = e_i \cdot e_1 = e_i$，$1 \le i \le n$。此类乘法 (以及零乘法) 均省略不写。对于交换代数和反交换代数，由于（反）交换性，可以还原完整的乘法表。

1 分类与性质

1.1 预备知识

定义 1. 设 $\mathscr{A}$ 是一个代数。映射 $^{-}$： $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 称为对合，若对所有 x， $y \in \mathscr{A}$，以下条件成立：

$$\overline{\overline{x}} = x, \quad \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}.$$

对于每个复数n维含单位元代数 $\mathscr{A}$（带对合 $^{-}$），有

$$\mathscr{A} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{S}, \text{ where } \mathscr{H} = \{a \in \mathscr{A} \mid \overline{a} = a\} \text{ and } \mathscr{S} = \{a \in \mathscr{A} \mid \overline{a} = -a\}.$$

若 $\dim(\mathscr{H}) = \mathrm{k}$，则称 $\mathscr{A}$为$(k,n-k)$型代数。

对于x、$y \in \mathscr{A}$，定义$V_{x,y} \in \mathrm{End}(\mathscr{A})$和$T_x = V_{x,e_1}$为

$$\begin{aligned} V_{x,y}(z) &= (x\overline{y})z + (z\overline{y})x - (z\overline{x})y, \\ T_x(z) &= xz + zx - z\overline{x}. \end{aligned}$$

特别地，若$a \in \mathscr{H}$，则$T_a = L_a$。

定义 2（见 [2]）。带单位元的代数 $\mathscr{A}$ 具有对合 $^{-}$，若满足以下特殊恒等式，则称其为结构代数

$$T_z V_{x,y} - V_{x,y} T_z = V_{T_z(x),y} - V_{x,T_{\overline{z}}(y)}. \tag{1}$$

现在，将恒等式（1）应用于任意元素 x、y、z 和t，可得到如下结果：

$$T_z V_{x,y}(t) - V_{x,y} T_z(t) = V_{T_z(x),y}(t) - V_{x,T_{\overline{z}}(y)}(t),$$

其中

$$\begin{aligned} T_z V_{x,y}(t) &= z\big((x\overline{y})t\big) + z\big((t\overline{y})x\big) - z\big((t\overline{x})y\big) + \big((x\overline{y})t\big)z + \\ &\quad + \big((t\overline{y})x\big)z - \big((t\overline{x})y\big)z - \big((x\overline{y})t\big)\overline{z} - \big((t\overline{y})x\big)\overline{z} + \big((t\overline{x})y\big)\overline{z}, \\ V_{x,y} T_z(t) &= (x\overline{y})(zt) + (x\overline{y})(tz) - (x\overline{y})(t\overline{z}) + \big((zt)\overline{y}\big)x + \\ &\quad + \big((tz)\overline{y}\big)x - \big((t\overline{z})\overline{y}\big)x - \big((zt)\overline{x}\big)y - \big((tz)\overline{x}\big)y + \big((t\overline{z})\overline{x}\big)y, \\ V_{T_z(x),y}(t) &= \big((zx)\overline{y}\big)t + \big((xz)\overline{y}\big)t - \big((x\overline{z})\overline{y}\big)t + (t\overline{y})(zx) + \\ &\quad + (t\overline{y})(xz) - (t\overline{y})(x\overline{z}) - \big(t(\overline{x}\,\overline{z})\big)y - \big(t(\overline{z}\,\overline{x})\big)y + \big(t(z\overline{x})\big)y, \\ V_{x,T_{\overline{z}}(y)}(t) &= \big(x(\overline{y}z)\big)t + \big(x(z\overline{y})\big)t - \big(x(\overline{z}\,\overline{y})\big)t + \big(t(\overline{y}z)\big)x + \\ &\quad + \big(t(z\overline{y})\big)x - \big(t(\overline{z}\,\overline{y})\big)x - (t\overline{x})(\overline{z}y) - (t\overline{x})(y\overline{z}) + (t\overline{x})(yz). \end{aligned}$$

因此，恒等式（1）可写成如下形式：

ID(x, y, z,t) :=

$$\big(z((x\overline{y})t) + z((t\overline{y})x) - z((t\overline{x})y) + ((x\overline{y})t)z + ((t\overline{y})x)z - ((t\overline{x})y)z -$$

$$\big((x\overline{y})t\big)\overline{z} - \big((t\overline{y})x\big)\overline{z} + \big((t\overline{x})y\big)\overline{z} - (x\overline{y})(zt) - (x\overline{y})(tz) + (x\overline{y})(t\overline{z}) - \tag{2}$$

$$\big((zt)\overline{y}\big)x - \big((tz)\overline{y}\big)x + \big((t\overline{z})\overline{y}\big)x + \big((zt)\overline{x}\big)y + \big((tz)\overline{x}\big)y - \big((t\overline{z})\overline{x}\big)y\ \big) -$$

$$\Big(\big((zx)\overline{y}\big)t + \big((xz)\overline{y}\big)t - \big((x\overline{z})\overline{y}\big)t + (t\overline{y})(zx) + (t\overline{y})(xz) - (t\overline{y})(x\overline{z}) -$$

$$\big(t(\overline{x}\,\overline{z})\big)y - \big(t(\overline{z}\,\overline{x})\big)y + \big(t(z\overline{x})\big)y - \big(x(\overline{y}z)\big)t - \big(x(z\overline{y})\big)t + \big(x(\overline{z}\,\overline{y})\big)t -$$

$$\Big(t(\overline{y}z)\Big)x-\Big(t(z\overline{y})\Big)x+\Big(t(\overline{z}\ \overline{y})\Big)x+(t\overline{x})(\overline{z}y)+(t\overline{x})(y\overline{z})-(t\overline{x})(yz)\Big)\ =\ 0.$$

定义 3. 设 $(\mathscr{A},\cdot,^{-})$与 $(\mathscr{B},\star,\widehat{\ })$为结构代数。 φ： $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$称为可构代数同构，如果它满足

$$\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\star\varphi(y)\ \ and\ \ \varphi(\overline{x})=\widehat{\varphi(x)}.$$

在这种情况下，$(\mathscr{A},\cdot,^{-})$和$(\mathscr{B},\star,\widehat{\ })$称为同构，记作 $\mathscr{A}\cong\mathscr{B}$。

1.2 三维结构代数的分类 s

定义 4. 设一个 n 维代数具有乘法表 $e_1e_i=e_ie_1=e_i$，其中$1\le i\le n$，其对合 $^{-}$定义为 $e_{i_1}=e_{i_1}$，其中 $1\le i_1\le k$，且 $e_{i_2}=-e_{i_2}$，其中 $k+1\le i_2\le n$，则称其为型为$(k,n-k)$的泛单位代数。

显然，每个型为 $(k,n-k)$ 的泛单位代数都是结构代数。

注 5. 设 $\mathscr{A}$ 是一个复三维含幺结构代数，型为(3,0)。那么，它是一个带恒等对合的约当代数；根据 [25]，，它与型为(3,0)的泛单位代数J_1 同构，或者与下列某个代数同构：

$$\begin{array}{llllllllll}
\mathrm{J}_2 & : & e_2e_2 & = & e_2 & e_3e_3 & = & e_3 & & \\
\mathrm{J}_3 & : & e_2e_2 & = & e_2 & e_2e_3 & = & e_3 & e_3e_2 & = & e_3\\
\mathrm{J}_4 & : & e_2e_2 & = & e_3 & & & & & \\
\mathrm{J}_5 & : & e_2e_2 & = & e_2 & & & & & \\
\mathrm{J}_6 & : & e_2e_2 & = & e_1 & e_3e_3 & = & e_1 & &
\end{array}$$

下面，我们讨论带有 $\mathscr{S}\neq 0$ 的结构代数的两种非平凡情形，即对合不是恒等映射。以下引理显然且众所周知，但对我们的讨论非常有用。

引理 6. 设 $\mathscr{A}$ 是一个含幺代数，且 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathscr{A})$, 则 $\varphi(e_1)=e_1$.

1.2.1 (2,1)型

这里我们讨论 (2,1) 型的三维含幺结构代数。设 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是一组基，使得 $e_1,e_2\in\mathscr{H}$ 且 $e_3\in\mathscr{S}$。

定理 7. 设 $\mathscr{A}$ 是一个 *(2,1)* 型的复含幺结构代数 $\mathscr{A}$，则它同构于 *(2,1)* 型的泛单位代数 A_1，或者同构于一个带有对合 $^{-}$ 的代数，其对合由 $e_1=e_1, e_2=e_2, e_3=-e_3$，给出，且其乘法表为以下某一种：

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{A}_2: & e_3e_3=e_2\\
\mathrm{A}_3: & e_2e_2=e_2\\
\mathrm{A}_4: & e_2e_2=e_2\\
e_3e_3=-e_1+e_2 & \\
\mathrm{A}_5: & e_2e_3=e_2e_3e_2=-e_2e_3\\
e_3=e_1 &
\end{array}$$

证明。 不难看出

$$\overline{e_2e_2} = \overline{e_2}\,\overline{e_2} = e_2e_2,\ \overline{e_3e_3} = \overline{e_3}\,\overline{e_3} = (-e_3)(-e_3) = e_3e_3,\ \overline{e_2e_3} = \overline{e_3}\,\overline{e_2} = -e_3e_2. \tag{3}$$

Usin根据关系式 (3)，我们得到该代数的以下乘法表 :

$$\begin{array}{rclrcl} e_2e_2 &=& \alpha_1e_1+\beta_1e_2, & e_2e_3 &=& \alpha_2e_1+\beta_2e_2+\gamma e_3, \\ e_3e_3 &=& \alpha_3e_1+\beta_3e_2, & e_3e_2 &=& -\alpha_2e_1-\beta_2e_2+\gamma e_3. \end{array}$$

通过选取新的基元素 $e_1' := e_1, e_2' := e_2 - \gamma e_1, e_3' := e_3,$，我们可以假设$\gamma = 0$。

将恒等式 (2) 应用于一些有用的元素，我们得到

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ID}(e_3,e_1,e_2,e_2) &=& -2\alpha_1e_3, \text{ i.e. } \alpha_1 = 0; \\ \mathrm{ID}(e_1,e_2,e_3,e_3) &=& 6\alpha_2\beta_2e_1 + 8\alpha_2e_3 + 6\big(\beta_2^2 - \alpha_3 - \beta_1\beta_3\big)e_2, \text{ i.e. } \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = \beta_2^2 - \beta_1\beta_3; \\ \mathrm{ID}(e_1,e_2,e_3,e_2) &=& -4\beta_1\beta_2e_2, \text{ i.e. } \beta_1\beta_2 = 0; \\ \mathrm{ID}(e_3,e_3,e_3,e_1) &=& 8\beta_2\beta_3e_2, \text{ i.e. } \beta_2\beta_3 = 0. \end{array}$$

现在我们得到以下代数参数族:

$$\begin{array}{rclrcl} e_2e_2 &=& \beta_1e_2, & e_2e_3 &=& \beta_2e_2, \\ e_3e_3 &=& \big(\beta_2^2 - \beta_1\beta_3\big)e_1 + \beta_3e_2, & e_3e_2 &=& -\beta_2e_2. \end{array}$$

通过选取新的基元素 $e_1 := e_1, e_2 := Ae_2, e_3 := Ce_3,$，我们可以假设 e

$$e_2e_2 = A\beta_1e_2,\ e_2e_3 = C\beta_2e_2 = -e_3e_2,\ e_3e_3 = C^2\big(\beta_2^2 - \beta_1\beta_3\big)e_1 + C^2A^{-1}\beta_3e_2.$$

条件 $\beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_3 = 0$ 导出了以下情形。

(1) 若 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$，则有代数 A_1。

(2) 若 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 且 $\beta_3 \neq 0$，则通过选取 $A = \beta_3$ 和 $C = 1$，得到 A_2。

(3) 若 $\beta_1 \neq 0$ 且 $\beta_2 = \beta_3 = 0$，则通过选取 $A = \beta_1^{-1}$，得到 A_3。

(4) 若 $\beta_1 \neq 0$、 $\beta_2 = 0$和 $\beta_3 \neq 0$，则通过选取 $A = \beta_1^{-1}$和 $C = \frac{1}{\sqrt{\beta_1\beta_3}}$，~~得到 A_4~~ .

(5) 若 $\beta_1 = \beta_3 = 0$ 且 $\beta_2 \neq 0$，则通过选取 $C = \beta_2^{-1}$，得到 A_5。

□

1.2.2 类型 (1,2)

在此，我们考察 (1,2) 型的三维含幺结构代数。设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为一个基，满足 $e_1 \in \mathscr{H}$ 且 $e_2, e_3 \in \mathscr{S}$。

定理 8. 设 $\mathscr{A}$ 是一个类型为 (1,2), 的复含幺结构代数 $\mathscr{A}$，那么它同构于类型为 (1,2), 的泛单位代数 S_1，或者同构于一个带有对合 $^-$, 的代数，其对合由 $e_1 = e_1, e_2 = -e_2, e_3 = -e_3$, 给出，乘法表则由以下之一给出:

$$\mathrm{S}_2 \quad : \quad e_2e_3 = e_2 \quad e_3e_2 = -e_2 \quad e_3e_3 = e_1$$

Pro的。 容易看出，$e_2e_3 = e_3e_2 = e_3e_2, e_2e_2 = e_2e_2$ 以及 $e_3e_3 = e_3e_3$, 因此 e

$$\begin{array}{llllll} e_2e_2 & = & \alpha_1 e_1 & e_2e_3 & = & \alpha_2 e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \\ e_3e_3 & = & \alpha_3 e_1 & e_3e_2 & = & \alpha_2 e_1 - \beta e_2 - \gamma e_3 \end{array}$$

将恒等式 (2) 应用于某些有用的元素，我们得到

$$\begin{array}{lll} \mathrm{ID}(e_1,e_2,e_3,e_2) & = & 6(\alpha_2+\beta\gamma)e_2 - 6(\alpha_1-\gamma^2)e_3, \text{ i.e. } \alpha_1=\gamma^2 \text{ and } \alpha_2=-\beta\gamma; \\ \mathrm{ID}(e_1,e_2,e_3,e_3) & = & -6(\alpha_3-\beta^2)e_2, \text{ i.e. } \alpha_3=\beta^2. \end{array}$$

现在我们有如下代数参数族:

$$\begin{array}{llllll} e_2e_2 & = & \gamma^2 e_1 & e_2e_3 & = & -\beta\gamma e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \\ e_3e_3 & = & \beta^2 e_1 & e_3e_2 & = & -\beta\gamma e_1 - \beta e_2 - \gamma e_3 \end{array}$$

在这种情况下，条件 $(\beta,\gamma) = (0,0)$ 与 $(\beta,\gamma) \neq (0,0)$ 是不变量。若 $(\beta,\gamma) = (0,0)$，则我们得到代数 S_1。

若 $(\beta,\gamma) \neq (0,0)$，则不失一般性，我们可以假设 $\beta \neq 0$。通过取新的基元素 $e_1' = e_1, e_2' = e_2 + \gamma\beta^{-1}e_3$, 与 $e_3' = \beta^{-1}e_3$,，我们得到代数 S_2。 □

1.3 有单位元的3维结构代数的性质

1.3.1 导子

定义 9. 设 $\mathscr{A}$ 是一个结构代数。若线性映射 $D : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 满足 $D(xy) = D(x)y + xD(y)$. 则称 D 为导子。若 $\mathscr{A}$ 上的导子满足 $D(x) = D(x)$, 则称其为与对合交换的导子 (或导子)。$\mathscr{A}$ 的全体导子和全体 d 导子的集合分别记作 $\mathfrak{Der}(\mathscr{A})$ 和 $\mathfrak{Der}(\mathscr{A})$。

命题10。 复数域上含单位元的3维结构代数的导子和导子如下所示:

$\underline{\mathfrak{Der}}(\mathrm{A}_1)$	=	$\langle d_1,d_2,d_3,d_4 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_3) = e_3; d_3(e_2) = e_3; d_4(e_3) = e_2\rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathrm{A}_1)$	=	$\langle d_1,d_2 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_3) = e_3\rangle$
$\underline{\mathfrak{Der}}(\mathrm{A}_2)$	=	$\langle d_1,d_2 \mid d_1(e_2) = 2e_2, d_1(e_3) = e_3; d_2(e_3) = e_2\rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathrm{A}_2)$	=	$\langle d_1 \mid d_1(e_2) = 2e_2, d_1(e_3) = e_3\rangle$
$\underline{\mathfrak{Der}}(\mathrm{A}_3)$	=	$\langle d_1 \mid d_1(e_3) = e_3\rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathrm{A}_3)$	=	$\langle d_1 \mid d_1(e_3) = e_3\rangle$
$\underline{\mathfrak{Der}}(\mathrm{A}_4)$	=	$\langle 0\rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathrm{A}_4)$	=	$\langle 0\rangle$
$\underline{\mathfrak{Der}}(\mathrm{A}_5)$	=	$\langle d_1,d_2 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_3) = e_2\rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathrm{A}_5)$	=	$\langle d_1 \mid d_1(e_2) = e_2\rangle$
$\underline{\mathfrak{Der}}(\mathrm{S}_1)$	=	$\langle d_1,d_2,d_3,d_4 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_2) = e_3; d_3(e_3) = e_2; d_4(e_3) = e_3\rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathrm{S}_1)$	=	$\langle d_1,d_2,d_3,d_4 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_2) = e_3; d_3(e_3) = e_2; d_4(e_3) = e_3\rangle$
$\underline{\mathfrak{Der}}(\mathrm{S}_2)$	=	$\langle d_1,d_2 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_3) = e_2\rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathrm{S}_2)$	=	$\langle d_1,d_2 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_3) = e_2\rangle$

1.3.2 自同构

定义11。 设 $\mathscr{A}$ 是一个结构代数。若线性映射 φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 满足 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, 则称其为自同构。若 $\mathscr{A}$ 的一个自同构满足 $\varphi(x) = \varphi(x)$, 则称其为与对合交换的自同构, 或称 (自同构)。 $\mathscr{A}$ 的所有自同构的集合以及所有自同构的集合分别记为 $\mathrm{Aut}(\mathscr{A})$ 和 $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{A})$。

命题12. 复数域上含单位元的3维结构代数的自同构如下所示 (需要指出, 以下给出的所有矩阵都是非退化的):

$\mathrm{Aut}(\mathrm{A}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \delta & \beta \end{pmatrix}$	$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{A}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$
$\mathrm{Aut}(\mathrm{A}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{A}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$
$\mathrm{Aut}(\mathrm{A}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{A}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$
$\mathrm{Aut}(\mathrm{A}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{A}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$
$\mathrm{Aut}(\mathrm{A}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{A}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathrm{Aut}(\mathrm{S}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \delta & \beta \end{pmatrix}$	$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{S}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \delta & \beta \end{pmatrix}$
$\mathrm{Aut}(\mathrm{S}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{S}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.3 含单位元的3维结构代数的子代数

A_1的子代数。

定理13。 设 $\mathfrak{s}$ 是 A_1, 的一个一维子代数, 则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一: $\langle e_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$, 或 $\langle \alpha e_2 + e_3 \rangle_{\alpha \in \mathbb{C}}$。 在同构意义下, A_1 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1 \rangle$ 或 $\langle e_2 \rangle$。

证明。 设 $\mathfrak{s} = \langle \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \rangle$。考虑乘积:

$$(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3)(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = k(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3),$$

由此得到

$$\alpha^2 e_1 + 2\alpha\beta e_2 + 2\alpha\gamma e_3 = k(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3),$$

即, $\alpha^2 = k\alpha$、 $2\alpha\beta = k\beta$和 $2\alpha\gamma = k\gamma$。下面考虑以下情形 s:

(1) 若k $=0$，于是 $\alpha=0$，并得到两类子代数：$\langle e_2\rangle$ 和 $\langle \alpha e_2+e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}$.

(2) 若$k\neq 0$ 和 $\alpha=0$，则 $\beta=0$ 和 $\gamma=0$，这与矛盾相悖。

(3) I 若$k\neq 0$ 和 $\alpha\neq 0$，则 $\alpha=k$ 和 $\beta=0,\gamma=0$，由此得到子代数 $\langle e_1\rangle$.

根据命题12中的 A_1 的自同构，我们得到陈述的第二部分。

□

推论 14. 设 $\mathfrak{s}$ 是A_1，的一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一：$\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle$, 或 $\langle e_3\rangle$. 在同构意义下，A_1 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle$ 或 $\langle e_3\rangle$.

推论 15. $_1$的 $\langle e_2\rangle$和 $\langle \alpha e_2+e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}$是一维理想；$_1$ 的 $\langle e_2\rangle$ 和 $\langle e_3\rangle$是一维理想。

定理 16. 设 $\mathfrak{s}$ 是 A_1, 的二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一：$\langle e_2, e_3\rangle$、$\langle e_1, e_2\rangle$，或 $\langle$ e1、$\alpha e_2+e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}$。在同构意义下，$A_1$ 的所有二维子代数都等价于〈e_1,e_2〉或〈e_2,e_3〉。

证明. </style}显然，e_2,$e_3\rangle$ 是一个零乘法子代数。设

$$\mathfrak{s}=\langle e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3,\ \beta_2e_2+\beta_3e_3\rangle.$$

考虑如下乘积:

$$(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)=e_1+2(\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)=$$
$$k_1(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)+k_2(\beta_2e_2+\beta_3e_3),$$

即，$k_1=1$, $\alpha_2=k_2\beta_2$，以及 $\alpha_3=k_2\beta_3$。我们有 $\mathfrak{s}=\langle e1,\ \beta_2e_2+\beta_3e_3\rangle$。这给出了我们陈述的第一部分。对命题12中的$A_1$ 取自同构，我们便得到陈述的第二部分。

□

推论17。 设 $\mathfrak{s}$ 是A_1, 的一个二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是下列子代数之一：$\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_1,e_3\rangle$, 或 $\langle e_2,$ $e_3\rangle$。 在同构意义下，A_1 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_1,e_3\rangle$ 或 $\langle e_2,e_3\rangle$。

推论18. A只有一个二维理想$_1$, 它是一个理想，且等于$\langle e_2,e_3\rangle$。

A的子代数$_2$。

定理19. 设 $\mathfrak{s}$ 是A的一个一维子代数$_2$, 那么 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一：$\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$。 在同构意义下，A的所有一维子代数$_2$ 都等价于 $\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$。

证明。 设 $\mathfrak{s}=\langle \alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3\rangle$。考虑乘积:

$$(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3)(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3)\ =\ k(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3),$$

由此可得

$$\alpha^2e_1+\gamma^2e_2+2\alpha\beta e_2+2\alpha\gamma e_3\ =\ k(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3),$$

即，$\alpha^2=k\alpha$、$\gamma^2+2\alpha\beta=k\beta$和 $2\alpha\gamma=k\gamma$。我们考虑以下几种情形:

（1）若 $k=0$，则 $\alpha=0$、 $\gamma=0$，从而得到子代数 $\langle e_2\rangle$。

(2) 如果$k\neq 0$和 $\alpha=0$，那么 $\beta=0$和 $\gamma=0$，这就产生了矛盾。

(3) I 如果$k\neq 0$和 $\alpha\neq 0$，那么 $\alpha=k$和 $\beta=0,\gamma=0$，由此得到子代数 $\langle e_1\rangle$.

利用命题12中的 A_2 的自同构，我们得到陈述的第二部分。

□

推论20. 设 $\mathfrak{s}$ 是A_2，的一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一： $\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$. 在同构意义下，A_2 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$.

推论21。 A_2, 只有一个一维理想，它是一个理想，并且等于$\langle e_2\rangle$。

定理22。 设 $\mathfrak{s}$ 是 A_2, 的一个二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是下列子代数之一： $\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_2,e_3\rangle$。 在同构意义下，A_2 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_2,e_3\rangle$。

证明。 显然， $\langle e_2,e_3\rangle$ 是 A_2的一个子代数。令

$$\mathfrak{s}=\langle e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3,\ \beta_2e_2+\beta_3e_3\rangle.$$

考虑乘积:

$$\begin{gathered}(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)=e_1+(2\alpha_2+\alpha_3^2)e_2+2\alpha_3e_3=\\ k_1(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)+k_2(\beta_2e_2+\beta_3e_3),\end{gathered}$$

即， $k_1=1$、 $\alpha_2+\alpha_3^2=k_2\beta_2$以及 $\alpha_3=k_2\beta_3$; 且 $\mathfrak{s}=\langle e_1-\alpha_3^2e2$、 $\beta_2e_2+\beta_3e_3\rangle$。若 $\beta_3\neq 0$, 则$(\beta_2e_2+\beta_3e_3)(\beta_2e_2+\beta_3e_3)=\beta_3^2e_2\in\mathfrak{s}$， 即$e_2\in\mathfrak{s}$和$e_3\in\mathfrak{s}$， 这就导致矛盾。因此， $\beta_3=0$ 以及 $\langle e_1,e_2\rangle$ 给出了 A_2的另一个二维子代数，也就证明了我们陈述的第一部分。

取自命题12中 A_2 的自同构，即得我们陈述的第二部分。

□

推论23. 设 $\mathfrak{s}$ 是 A_2，的二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下之一： $\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_2,e_3\rangle$. 在同构意义下，A_2 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_2,e_3\rangle$.

推论24. A_1，只有一个二维理想；它是一个理想，且等于$\langle e_2,\ e_3\rangle$.

A_3 的子代数.

定理25. 设 $\mathfrak{s}$ 是 A_3，的一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一： $\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle,\langle e_3\rangle$, 或 $\langle e_1-e_2\rangle$. 在同构意义下，A_3 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle,\langle e_3\rangle$ 或 $\langle e_1-e_2\rangle$.

证明。 设 $\mathfrak{s}=\langle\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3\rangle$。考虑乘积:

$$(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3)(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3)\ =\ k(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3),$$

由此可得

$$\alpha^2e_1+\beta^2e_2+2\alpha\beta e_2+2\alpha\gamma e_3\ =\ k(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3),$$

即， $\alpha^2=k\alpha$， $\beta^2+2\alpha\beta=k\beta$， 以及 $2\alpha\gamma=k\gamma$。让我们考虑以下情形 :

(1) 若$k=0$，则 $\alpha=0$ 且$\beta=0$。我们得到子代数 $\langle e_3\rangle$。

(2) 若 $k\neq 0$ 且 $\alpha=0$，则 $\gamma=0$，从而得到子代数 $\langle e_2\rangle$。

(3）若 $k\neq 0$ 且 $\alpha\neq 0$，则 $\alpha=k$，$\gamma=0$。若 $\beta=0$，则得到子代数 $\langle e_1$ $\rangle$。

(4) 若 $k\neq 0$ 且 $\alpha\neq 0$，则 $\alpha=k$，$\gamma=0$。若 $\beta\neq 0$，则得到子代数 $\langle e_1-e_2\rangle$。

对命题12中的 A_3 取自同构，我们得到陈述的第二部分。

□

推论26。设 $\mathfrak{s}$ 是 A_3，的一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是下列子代数之一：$\langle e_1\rangle$，$\langle e_2\rangle$，$\langle e_3\rangle$，或 $\langle e_1-e_2\rangle$。在同构意义下，A_3 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$，$\langle e_2\rangle$，$\langle e_3\rangle$ 或 $\langle e_1-e_2\rangle$。

推论27. A_3 的每个一维理想都是理想，且为下列之一：$\langle e_2\rangle$ 或 $\langle e_3\rangle$。

定理28. 设 $\mathfrak{s}$ 是A_3, 的二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 为下列子代数之一：$\langle e_1,e_3\rangle$，$\langle e_1-e_2,e_3\rangle$，$\langle e_1,e_2\rangle$，或 $\langle e_2,e_3\rangle$。在同构意义下，A_3 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_3\rangle$，$\langle e_1-e_2,e_3\rangle$，$\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_2,e_3\rangle$。

证明。显然，$\langle e_2,e_3\rangle$ 是 A_3 的一个子代数。设 $\mathfrak{s}=\langle e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e3,\beta_2e_2+\beta_3e_3\rangle$。考虑乘积:

$$\begin{gathered}(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)=e_1+(2\alpha_2+\alpha_2^2)e_2+2\alpha_3e_3=\\ k_1(e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3)+k_2(\beta_2e_2+\beta_3e_3),\end{gathered}$$

即 $k_1=1$、$\alpha_2+\alpha_2^2=k_2\beta_2$ 以及 $\alpha_3=k_2\beta_3$；以及 $\mathfrak{s}=\langle e_1-\alpha_2^2e2、\ \beta_2e_2+\beta_3e_3\rangle$。若 $\beta_2\neq 0$，则 $(\beta_2e_2+\beta_3e_3)(\beta_2e_2+\beta_3e_3)=\beta_2^2e_2\in\mathfrak{s}$，即 $e_2\in\mathfrak{s}$ 与 $\beta_3=0$，由此得到一个子代数$\langle e_1,e_2\rangle$。若 $\beta_2=0$，则 $\beta_3\neq 0$ 与 $e_3\in\mathfrak{s}$。根据 A_3（的一维子代数的分类（见定理 25)），我们有两种情形 $\alpha_2=0$ 或 $\alpha_2=-1$。最后这一观察完成了该陈述第一部分的证明。

取自命题12的 A_3 的自同构，即得我们陈述的第二部分。

□

推论29。设 $\mathfrak{s}$ 是A_3，的一个二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下之一：$\langle e_1\rangle$、$\langle e_2\rangle$、$\langle e_3\rangle$，或 $\langle e_1-e_2\rangle$。在同构意义下，A_3 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$、$\langle e_2\rangle$、$\langle e_3\rangle$ 或 $\langle e_1-e_2\rangle$。

推论30。A_3，只有一个二维理想；它是一个理想，且等于 $\langle e_2,\ e_3\rangle$。

A_4 的子代数。

定理31。设 $\mathfrak{s}$ 是A_4，的一个一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一：

$$\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_1-e_2\rangle,\ \langle e_1+e_2\pm ie_3\rangle\ or\ \langle e_1-e_2\pm ie_3\rangle.$$

在同构意义下，A_4 的所有一维子代数均等价于

$$\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_1-e_2\rangle\ or\ \langle e_1\pm e_2+ie_3\rangle.$$

证明。 令 $\mathfrak{s}=\langle \alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3\rangle$。考虑乘积:

$$(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3)(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3) \;=\; k(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3),$$

这导致

$$\alpha^2 e_1+\beta^2 e_2+\gamma^2(-e_1+e_2)+2\alpha\beta e_2+2\alpha\gamma e_3 \;=\; k(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3),$$

即, $\alpha^2-\gamma^2 \;=k\alpha$、 $\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta \;=k\beta$和 $2\alpha\gamma \;=k\gamma$。我们考虑以下情形:

(1) 若$k \;=0$, 则 $\alpha=\gamma=\beta=0$, 这与假设矛盾。

(2) 若$k \;\neq 0$、 $\gamma=0$和 $\alpha=0$, 则得到子代数 $\langle e_2\rangle$。

(3) 若$k \;\neq 0$、 $\gamma=0$和 $\alpha\neq 0$, 则 $\alpha=k$和 $\beta^2=-\alpha\beta$, 我们得到这些子代数: $\langle e_1\rangle$和 $\langle e_1-e_2\rangle$。

(4) 若$k \;\neq 0$和 $\gamma\neq 0$, 则 $\alpha=_k 2$, 由此得到 $\beta^2=_{k_4}^{\;2}$和 $\gamma^2=-_{k_4}^{\;2}$。我们构造以下子代数: $\langle e_1+e_2\pm \mathrm{i}e_3\rangle$和 $\langle e_1-e_2\pm \mathrm{i}e_3\rangle$。

根据命题12取 A_4 的自同构, 即得我们陈述的第二部分。

□

推论32. 设 $\mathfrak{s}$ 是A_4, 的一个一维子代数, 则 $\mathfrak{s}$ 是下列子代数之一: $\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle$, 或 $\langle e_1-e_2\rangle$. 在同构意义下, A_4 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle$ 或 $\langle e_1-e_2\rangle$.

推论33. A_4, 只有一个一维理想, 它是一个理想, 且等于$\langle e_2\rangle$.

定理34. 设 $\mathfrak{s}$ 是A_4, 的一个二维子代数, 则 $\mathfrak{s}$ 是下列子代数之一: $\langle e_1,e_2\rangle, \langle e_1\pm \mathrm{i}e_3,e_2\rangle, \langle e_1-e_2,e_3\rangle$或 $\langle e_1,\pm \mathrm{i}e_2+e_3\rangle$. 在同构意义下, A_4 的所有二维子代数都等价于

$$\langle e_1,e_2\rangle, \langle e_1+\mathrm{i}e_3,e_2\rangle, \langle e_1-e_2,e_3\rangle \; or \; \langle e_1,\mathrm{i}e_2+e_3\rangle.$$

证明。 显然, $\langle e_2,e_3\rangle$ 不是 A_4 的子代数。因此,

$$\mathfrak{s}=\langle e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3,\; \beta_2 e_2+\beta_3 e_3\rangle.$$

考虑乘积:

$$(\beta_2 e_2+\beta_3 e_3)(\beta_2 e_2+\beta_3 e_3)=-\beta_3^2 e_1+(\beta_2^2+\beta_3^2)e_2\in\mathfrak{s}, \tag{4}$$

由此得到以下两种情形。

(1) 若 $\beta_3=0$, 则 $e_2\in\mathfrak{s}$且 $\mathfrak{s}=\langle e_1+\alpha_3 e_3,e_2\rangle$。由此可得

$$(1-\alpha_3^2)e_1+\alpha_3^2 e_2+2\alpha_3 e_3=\big(e_1+\alpha_3 e_3\big)\big(e_1+\alpha_3 e_3\big)=k_1(e_1+\alpha_3 e_3)+k_2 e_2, \text{ i.e.,}$$

$k_1=1-\alpha_3^2,\; \alpha_3^2=k2,\; 2\alpha_3=k_1\alpha_3.$

(a) 如果 $\alpha_3=0$, 我们有子代数 $\langle e_1,e_2\rangle$。

(b) 如果 $\alpha_3 \neq 0$，我们有 $k_1 = 2$ 和 $\alpha_3^2 = -1$，即我们有两个子代数$\langle e_1 \pm \mathrm{i}e_3, e_2\rangle$。

(2) 如果 $\beta_3 \neq 0$，那么可以假设 $\alpha_3 = 0$和 $\beta_3 = 1$，即 $\mathfrak{s} = \langle e_1 + \alpha_2 e2,\ \beta_2 e_2 + e_3\rangle$。因此，

$$e_1 + (2\alpha_2 + \alpha_2^2)e_2 = \big(e_1 + \alpha_2 e_2\big)\big(e_1 + \alpha_2 e_2\big) = k_1(e_1 + \alpha_2 e_2) + k_2(\beta_2 e_2 + e_3), \text{ i.e.,}$$

$k_1 = 1,\ 2\alpha_2 + \alpha_2^2 = k_1\alpha_2 + k_2\beta_2,\ 0 = k_2$。最后一条意味着 $\alpha_2 + \alpha_2^2 = 0$，于是得到以下两个子情形。

(a) 如果 $\alpha_2 = 0$，那么由 (4) 可得 $\beta_2 = \pm\mathrm{i}$。(

b) 如果 $\alpha_2 = -1$，那么由 (4) 可得 $\beta_2 = 0$。

总结而言，情形 (2) 给出三个子代数：$\langle e_1 - e_2, e_3\rangle$和 $\langle e1, \pm\mathrm{i}e_2 + e_3$ Su $\rangle$。

根据命题12中的 A_4 的自同构，我们得到所述结论的第二部分。

□

推论35。设 $\mathfrak{s}$ 是 A_4，的二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下之一：$\langle e_1, e_2\rangle$ 或 $\langle e_1 - e_2, e_3\rangle$。在同构意义下，$\mathrm{A}_4$ 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1, e_2\rangle$ 或 $\langle e_1 - e_2, e_3\rangle$。

推论36。A_4 的二维理想如下：$\langle e_1 \pm \mathrm{i}e_3, e_2\rangle$ 或 $\langle e_1 - e_2, e_3\rangle$。只有一个二维理想，它等于 $\langle e_1 - e_2, e_3\rangle$。

A_5的子代数。

定理37。设 $\mathfrak{s}$ 是 A_5，的一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是下列子代数之一：$\langle e_1\rangle$，$\langle e_2\rangle$，或 $\langle e_1 + \alpha e_2 \pm e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}$。在同构意义下，$\mathrm{A}_5$ 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$，$\langle e_2\rangle$ 或 $\langle e_1 \pm e_3\rangle$。

证明。设 $\mathfrak{s} = \langle \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\rangle$。考虑乘积：

$$\big(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\big)\big(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\big) \ = \ k\big(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\big),$$

由此得到

$$(\alpha^2 + \gamma^2)e_1 + 2\alpha\beta e_2 + 2\alpha\gamma e_3 \ = \ k\big(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\big),$$

即，$\alpha^2 + \gamma^2 = k\alpha$、$2\alpha\beta = k\beta$ 和 $2\alpha\gamma = k\gamma$。考虑以下情形：

(1) 如果 $k = 0$，那么 $\alpha = \gamma = 0$，从而得到子代数 $\langle e_2\rangle$。

(2) 如果 $k \neq 0$ 且 $\gamma = 0$，那么 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = k$。第一种情况得到 $\beta = 0$，即产生矛盾。第二种情况得到 $\beta = 0$，即我们得到子代数$\langle e_1\rangle$。

(3) 如果 $k \neq 0$ 且 $\gamma \neq 0$，那么 $\alpha = \frac{k}{-}2$ 和 $\gamma = \pm\frac{k}{-}2$；从而得到 $\langle e_1 + 2\beta e_2 \pm e_3\rangle_{\beta\in\mathbb{C}}$。

这给出了我们陈述的第一部分。对A_5 应用命题12中的自同构，即得我们陈述的第二部分。

□

推论38. 设 $\mathfrak{s}$ 是A_5, 的一个一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一：$\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$。在同构意义下，A_5 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$。

推论 39. $_5$, 在A中只有一个一维理想；它是一个理想，且等于$\langle e_2\rangle$。

定理40. 设 $\mathfrak{s}$ 是A的一个二维子代数$_5$, ，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一：$\langle e_1, e_2\rangle$，$\langle e_1 \pm e_3, e_2\rangle$，或 $\langle e_1$，$\alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}^\circ}$ 在同构意义下，A的所有二维子代数$_5$ 都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$，$\langle e_1 \pm e_3, e_2\rangle$ 或 $\langle e_1, e_3\rangle$。

证明。容易看出，$\langle e_2,e_3\rangle$ 不是子代数。设

$$\mathfrak{s} = \langle e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3\rangle.$$

考虑乘积:

$$(\beta_2 e_2 + \beta_3 e_3)(\beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) = \beta_3^2 e_1 \in \mathfrak{s},$$

这给出了两种情形:

1. 若 $\beta_3 \neq 0$，则得到以下子代数族 $\langle e1, \alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}^\circ}$

2. 若 $\beta_3 = 0$，则 $\mathfrak{s} = \langle e_1 + \alpha_3 e_3, e_2\rangle$ 且 $(e_1 + \alpha_3 e_3)(e_1 + \alpha_3 e_3) = (1 + \alpha_3^2)e_1 + 2\alpha_3 e_3 \in \mathfrak{s}$。这为 α_3 提供了三种可能：0 或 ± 1。

这给出了陈述的第一部分。根据命题12中 A_5 的自同构，我们得到陈述的第二部分。

□

推论41. 设 $\mathfrak{s}$ 是A_5, 的一个二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下情形之一：$\langle e_1, e_2\rangle$ 或 $\langle e_1, e_3\rangle$。在同构意义下，A_5 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_1,e_3\rangle$。

推论42. A_5 的二维理想如下：$\langle e_1 \pm e_3, e_2\rangle$，$A_5$没有二维理想。

S_1的子代数。

定理43. 设 $\mathfrak{s}$ 是S_1, 的一个一维子代数，则 $\mathfrak{s}$是以下子代数之一：$\langle e_1\rangle$，$\langle e_2\rangle$，或 $\langle \alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}^\circ}$ 在同构意义下，S_1 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$。

证明。S_1 的乘法表与A_1, 的乘法表相同，因此证明由定理13得出。

□

推论44. 设 $\mathfrak{s}$ 是S_1, 的一个一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一：$\langle e_1\rangle$，$\langle e_2\rangle$，或 $\langle \alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}^\circ}$ 在同构意义下，S_1 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$。

推论45。S_1 的每个一维理想都是一个理想，且属于以下情形之一：

$$\langle e_2\rangle \; or \; \langle \alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}.$$

定理 46. 设 $\mathfrak{s}$ 是S_1, 的一个二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一：$\langle e_1, e_2\rangle$，$\langle e_2, e_3\rangle$，或 $\langle e_1$，$\alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}^\circ}$ 在同构意义下，S_1 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_2,e_3\rangle$。

证明。 S_1 的乘法表与 A_1, 的乘法表一致，因此我们的证明可由定理 16 得出。

□

推论47. 设 $\mathfrak{s}$ 是S_1, 的一个二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一： $\langle e_1, e_2\rangle$， $\langle e_2, e_3\rangle$，或 $\langle e_1,\ \alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}$。 在同构意义下，$S_1$ 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_2,e_3\rangle$。

推论48. S_1, 只有一个二维理想，它是一个理想，且等于$\langle e_2, e_3\rangle$。

S_2的子代数。

定理49. 设 $\mathfrak{s}$ 是S_2, 的一个一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是以下子代数之一： $\langle e_1\rangle$， $\langle e_2\rangle$，或 $\langle e_1 + \alpha e_2 \pm e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}$。 在同构意义下，$S_2$ 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$， $\langle e_2\rangle$，或 $\langle e_1 \pm e_3\rangle$。

证明。 S_2 的乘法表与A_5, 的乘法表一致，因此我们的证明由定理37得出。

□

推论50。 设 $\mathfrak{s}$ 为S_2, 的一维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是下列子代数之一： $\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$。 在同构意义下，S_2 的所有一维子代数都等价于 $\langle e_1\rangle$ 或 $\langle e_2\rangle$。

推论 51。 S_2, 仅有一个一维理想，它是一个理想且等于 $\langle e_2$ $\rangle$。

定理52。 设 $\mathfrak{s}$ 为S_2, 的二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是下列子代数之一： $\langle e_1, e_2\rangle$， $\langle e_1 \pm e_3, e_2\rangle$，或 $\langle e_1,\ \alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}$。 在同构意义下，$S_2$ 的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$， $\langle e_1 \pm e_3, e_2\rangle$ 或 $\langle e_1, e_3\rangle$。

证明。 S_2 的乘法表与A_5, 的乘法表相同，因此由定理40可得证。

□

推论53。 设 $\mathfrak{s}$ 是S_2, 的一个二维子代数，则 $\mathfrak{s}$ 是下列之一：$\langle e_1, e_2\rangle$，或 $\langle e_1,\ \alpha e_2 + e_3\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}$。 在同构意义下，$S_2$的所有二维子代数都等价于 $\langle e_1,e_2\rangle$ 或 $\langle e_1,e_3\rangle$。

推论54。 S_2 的二维理想如下： $\langle e_1 \pm e_3,e_2\rangle$，$S_2$没有二维理想。

1.3.4 含幺3维结构代数的恒等式

我们知道，每个具有恒等对合的结构代数都是约当代数，即它们都是交换的，并且满足相同的二次恒等式。另一方面，我们的代数A_5 和S_2 并非交换。本小节旨在探讨是否存在一个共同的二次函数恒等式，也就是说，一个包含对合且适用于所有具有非平凡对合的含幺三维可构代数的恒等式。下面来考虑二次函数恒等式的一般形式：

$$f(x,y) = \alpha_1 xy + \alpha_2 yx + \beta_1 \overline{x}y + \beta_2 x\overline{y} + \beta_3 \overline{y}x + \beta_4 y\overline{x} + \gamma_1 \overline{xy} + \gamma_2 \overline{yx}.$$

在交换情形下，我们的恒等式$f(x,y)$可化为

$$f_c(x,y) = \alpha xy + \beta\overline{x}y + \gamma x\overline{y} + \delta\overline{xy}.$$

除 A_5 和 S_2 外，我们的所有代数都是交换的，因此，对于所有交换代数，我们将考虑由交换律化简后的函数恒等式$f_c(x,y)$。

命题55。 设 $\mathfrak{f}(x,y)$ 是 2次 的 A_1, 函数恒等式，则 $\mathfrak{f}(x,y)$ 由交换恒等式和 $\mathfrak{F}(x,y) = x\,y\, - x\,y\, - xy\, + x\,y$构造而成。

证明。 我们考虑以下关系：

$$\begin{array}{rcrcll} 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_1) & = & \alpha e_1 + \beta e_1 + \gamma e_1 + \delta e_1, & \text{then} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_3) & = & \alpha e_3 + \beta e_3 - \gamma e_3 - \delta e_3, & \text{then} \quad \alpha+\beta-\gamma-\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_1) & = & \alpha e_3 - \beta e_3 + \gamma e_3 - \delta e_3, & \text{then} \quad \alpha-\beta+\gamma-\delta = 0; \end{array}$$

tha这给出 $\alpha = -\beta = -\gamma = \delta$，并且 A_1满足恒等式 $\mathfrak{F}(x,y)\colon = xy - xy - x\overline{y} + x\overline{y}$。 □

命题56。 设 $\mathfrak{f}(x,y)$ 是 2次 的 A_2, 函数恒等式，则 $\mathfrak{f}(x,y)$ 由交换恒等式构造而成。

证明。 我们考虑以下关系：

$$\begin{array}{rcrcll} 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_1) & = & \alpha e_1 + \beta e_1 + \gamma e_1 + \delta e_1, & \text{then} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_3) & = & \alpha e_3 + \beta e_3 - \gamma e_3 - \delta e_3, & \text{then} \quad \alpha+\beta-\gamma-\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_1) & = & \alpha e_3 - \beta e_3 + \gamma e_3 - \delta e_3, & \text{then} \quad \alpha-\beta+\gamma-\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_3) & = & \alpha e_2 - \beta e_2 - \gamma e_2 + \delta e_2, & \text{then} \quad \alpha-\beta-\gamma+\delta = 0; \end{array}$$

这表明 $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$，并且 A_2 不满足二次非交换函数恒等式。

□

命题57. 设 $\mathfrak{f}(x,y)$ 是 A 的二次函数恒等式$_3$, , 则 $\mathfrak{f}(x,y)$ 由交换恒等式和 $\mathfrak{F}(x,y)$ 构造而成：x y x y xy x y。

证明. 我们考虑以下关系：

$$\begin{array}{rcrcll} 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_1) & = & \alpha e_1 + \beta e_1 + \gamma e_1 + \delta e_1, & \text{then} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_3) & = & \alpha e_3 + \beta e_3 - \gamma e_3 - \delta e_3, & \text{then} \quad \alpha+\beta-\gamma-\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_1) & = & \alpha e_3 - \beta e_3 + \gamma e_3 - \delta e_3, & \text{then} \quad \alpha-\beta+\gamma-\delta = 0; \end{array}$$

由此得到 $\alpha = -\beta = -\gamma = \delta$，且 A_3 满足恒等式 $\mathfrak{F}(x,y)\colon = xy - xy - xy + \overline{x}y$。 □

命题58. 设 $\mathfrak{f}(x,y)$ 是 A 的二次函数恒等式$_4$, , 则 $\mathfrak{f}(x,y)$ 由交换恒等式构造而成。

证明. 我们考虑以下关系：

$$\begin{array}{rcrcll} 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_1) & = & \alpha e_1 + \beta e_1 + \gamma e_1 + \delta e_1, & \text{then} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_3) & = & \alpha e_3 + \beta e_3 - \gamma e_3 - \delta e_3, & \text{then} \quad \alpha+\beta-\gamma-\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_1) & = & \alpha e_3 - \beta e_3 + \gamma e_3 - \delta e_3, & \text{then} \quad \alpha-\beta+\gamma-\delta = 0; \\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_3) & = & (\alpha-\beta-\gamma+\delta)(e_2-e_1), & \text{then} \quad \alpha-\beta-\gamma+\delta = 0; \end{array}$$

由此得到 $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$，且 A_4 满足恒等式 $\mathfrak{f}_1(x,y)\colon = 0$。 □

命题59. 设 $\mathfrak{f}(x,y)$ 是A_5, 的次数为2 的函数恒等式，则 $\mathfrak{f}(x,y)$ 由 $\mathfrak{f}_1(x,y) = xy\, - yx\, - x\,y\, + yx$ 与 $\mathfrak{f}_2(x,y) = x\,y\, + x\,y\, - yx\, - y\overline{x}$ 构造而成。

证明。 首先，我们考虑下列关系：

$$\begin{array}{rcrcl} 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_1) & = & (\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\gamma_1+\gamma_2)e_1;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_3) & = & (\alpha_1+\alpha_2+\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4-\gamma_1-\gamma_2)e_3;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_2,e_3) & = & (\alpha_1-\alpha_2+\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4+\gamma_1-\gamma_2)e_2;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_1) & = & (\alpha_1+\alpha_2-\beta_1+\beta_2+\beta_3-\beta_4-\gamma_1-\gamma_2)e_3;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_2) & = & (-\alpha_1+\alpha_2+\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4-\gamma_1+\gamma_2)e_2;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_3) & = & (\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-\beta_3-\beta_4+\gamma_1+\gamma_2)e_1. \end{array}$$

上述关系构成一个线性方程组，其解如下：

$$\alpha_1=\xi,\ \alpha_2=-\xi,\ \beta_1=\nu,\ \beta_2=\nu,\ \beta_3=-\nu,\ \beta_4=-\nu,\ \gamma_1=-\xi,\ \gamma_2=\xi,$$

即， $\mathfrak{f}(x,\ y)=\xi\mathfrak{f}_1(x,\ y)+\nu\mathfrak{f}_2(x,\ y)$，其中 $\mathfrak{f}_1(x,\ y)$ 和 $\mathfrak{f}_2(x,\ y)$ 是 A_5,的函数恒等式，由下式给出

$$\mathfrak{f}_1(x,y):=xy-yx-\overline{xy}+\overline{yx}\ \text{and}\ \mathfrak{f}_2(x,y):=\overline{x}y+x\overline{y}-\overline{y}x-y\overline{x}.$$

□

命题60。 设 $\mathfrak{f}(x,\ y)$ 是 S_1, 的一个二次函数恒等式，则 $\mathfrak{f}(x,\ y)$ 由交换恒等式和 $\mathfrak{F}(x,\ y)=xy-xy-xy+xy$构造得到。

证明。 我们考虑以下关系：

$$\begin{array}{rcrcll} 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_1) & = & \alpha e_1+\beta e_1+\gamma e_1+\delta e_1, & \text{then}\quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=0;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_3) & = & \alpha e_3+\beta e_3-\gamma e_3-\delta e_3, & \text{then}\quad \alpha+\beta-\gamma-\delta=0;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_1) & = & \alpha e_3-\beta e_3+\gamma e_3-\delta e_3, & \text{then}\quad \alpha-\beta+\gamma-\delta=0; \end{array}$$

这给出 $\alpha=-\beta=-\gamma=\delta$，并且 S_1满足恒等式 $\mathfrak{F}(x,\ y):=xy-xy-xy+xy$。 □

命题61。 设 $\mathfrak{f}(x,\ y)$ 是 S_2, 的一个二次函数恒等式，则 $\mathfrak{f}(x,\ y)$ 由一般恒等式和构造得到

$$\mathfrak{g}_1(x,y)=xy-yx+\overline{x}y-y\overline{x};\ \mathfrak{g}_2(x,y)=xy-yx+x\overline{y}-\overline{y}x;\ and\ \mathfrak{g}_3(x,y)=xy-yx+\overline{xy}-\overline{yx}.$$

证明。 首先，我们考虑以下关系：

$$\begin{array}{rcrcl} 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_1) & = & (\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\gamma_1+\gamma_2)e_1;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_1,e_2) & = & (\alpha_1+\alpha_2+\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4-\gamma_1-\gamma_2)e_2;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_2,e_1) & = & (\alpha_1+\alpha_2-\beta_1+\beta_2+\beta_3-\beta_4-\gamma_1-\gamma_2)e_2;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_2,e_3) & = & (\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4-\gamma_1+\gamma_2)e_2;\\ 0 & = & \mathfrak{f}(e_3,e_3) & = & (\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-\beta_3-\beta_4+\gamma_1+\gamma_2)e_1. \end{array}$$

由上述方程可得以下解：

$$\alpha_1=\nu+\mu+\xi,\ \alpha_2=-(\nu+\mu+\xi),\ \beta_1=\nu,\ \beta_2=\mu,\ \beta_3=-\mu,\ \beta_4=-\nu,\ \gamma_1=\xi,\ \gamma_2=-\xi,$$

即， $\mathfrak{f}(x,y)=\nu\mathfrak{g}_1(x,y)+\mu\mathfrak{g}_2(x,y)+\xi\mathfrak{g}_3(x,y)$，其中 $\mathfrak{g}_1(x,y)$、 $\mathfrak{g}_2(x,y)$ 和 $\mathfrak{g}_3(x,y)$ 是 S_2, 的泛函恒等式，定义如下

$\mathfrak{g}_1(x,y):=xy-yx+x\overline{y}-y\overline{x}$; $\mathfrak{g}_2(x,y):=xy-yx+xy-yx$; 以及 $\mathfrak{g}_3(x,y):=xy-yx+xy-yx$。

□

推论62. 每个含幺3维结构代数，包括类型(3,0), 的情形，都满足以下两个函数恒等式：

$$\mathfrak{f}_1(x,y)=xy-yx-\overline{xy}+\overline{yx}\ and\ \mathfrak{f}_2(x,y)=\overline{x}y-y\overline{x}+x\overline{y}-\overline{y}x.$$

1.3.5 Allison-Hein构造

命题 63 (Allison-Hein构造 [6])**.** 设 $\mathscr{A}$ 是一个含幺结构代数，则由 $x \star y := T_x(y)$, 定义的乘法 $\star$ 赋予其一个以 e_1为单位元、阶为2 的保守代数结构。

将 Allison 和 Hein 引入的构造直接应用于类型 (2, 1) 和 (1,2) 的含单位元三维结构代数, 可得以下结论。

命题 64。 通过 *Allison— Hein* 构造，由带有非恒等对合的幺幺 3 维结构代数构造的保守代数的乘法表如下所示

$\mathscr{C}(\mathrm{A}_1)$	$e_1\star e_1$	$=$	e_1	$e_1\star e_2$	$=$	e_2	$e_1\star e_3$	$=$	e_3
	$e_2\star e_1$	$=$	e_2	$e_2\star e_2$	$=$	0	$e_2\star e_3$	$=$	0
	$e_3\star e_1$	$=$	$3e_3$	$e_3\star e_2$	$=$	0	$e_3\star e_3$	$=$	0
$\mathscr{C}(\mathrm{A}_2)$	$e_1\star e_1$	$=$	e_1	$e_1\star e_2$	$=$	e_2	$e_1\star e_3$	$=$	e_3
	$e_2\star e_1$	$=$	e_2	$e_2\star e_2$	$=$	0	$e_2\star e_3$	$=$	0
	$e_3\star e_1$	$=$	$3e_3$	$e_3\star e_2$	$=$	0	$e_3\star e_3$	$=$	$3e_2$
$\mathscr{C}(\mathrm{A}_3)$	$e_1\star e_1$	$=$	e_1	$e_1\star e_2$	$=$	e_2	$e_1\star e_3$	$=$	e_3
	$e_2\star e_1$	$=$	e_2	$e_2\star e_2$	$=$	e_2	$e_2\star e_3$	$=$	0
	$e_3\star e_1$	$=$	$3e_3$	$e_3\star e_2$	$=$	0	$e_3\star e_3$	$=$	0
$\mathscr{C}(\mathrm{A}_4)$	$e_1\star e_1$	$=$	e_1	$e_1\star e_2$	$=$	e_2	$e_1\star e_3$	$=$	e_3
	$e_2\star e_1$	$=$	e_2	$e_2\star e_2$	$=$	e_2	$e_2\star e_3$	$=$	0
	$e_3\star e_1$	$=$	$3e_3$	$e_3\star e_2$	$=$	0	$e_3\star e_3$	$=$	$-3e_1+3e_2$
$\mathscr{C}(\mathrm{A}_5)$	$e_1\star e_1$	$=$	e_1	$e_1\star e_2$	$=$	e_2	$e_1\star e_3$	$=$	e_3
	$e_2\star e_1$	$=$	e_2	$e_2\star e_2$	$=$	0	$e_2\star e_3$	$=$	e_2
	$e_3\star e_1$	$=$	$3e_3$	$e_3\star e_2$	$=$	e_2	$e_3\star e_3$	$=$	$3e_1$
$\mathscr{C}(\mathrm{S}_1)$	$e_1\star e_1$	$=$	e_1	$e_1\star e_2$	$=$	e_2	$e_1\star e_3$	$=$	e_3
	$e_2\star e_1$	$=$	$3e_2$	$e_2\star e_2$	$=$	0	$e_2\star e_3$	$=$	0
	$e_3\star e_1$	$=$	$3e_3$	$e_3\star e_2$	$=$	0	$e_3\star e_3$	$=$	0
$\mathscr{C}(\mathrm{S}_2)$	$e_1\star e_1$	$=$	e_1	$e_1\star e_2$	$=$	e_2	$e_1\star e_3$	$=$	e_3
	$e_2\star e_1$	$=$	$3e_2$	$e_2\star e_2$	$=$	0	$e_2\star e_3$	$=$	$-e_2$
	$e_3\star e_1$	$=$	$3e_3$	$e_3\star e_2$	$=$	e_2	$e_3\star e_3$	$=$	$3e_1$

命题65. 由含幺结构代数通过 *Allison-Hein*构造得到的复3维保守代数的导子如下:

$\mathfrak{Der}(\mathscr{C}(\mathrm{A}_1))$	$=$	$\langle d_1, d_2 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_3) = e_3 \rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathscr{C}(\mathrm{A}_2))$	$=$	$\langle d_1 \mid d_1(e_2) = 2e_2; d_1(e_3) = e_3 \rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathscr{C}(\mathrm{A}_3))$	$=$	$\langle d_1 \mid d_1(e_2) = e_2 \rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathscr{C}(\mathrm{A}_4))$	$=$	$\langle 0 \rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathscr{C}(\mathrm{A}_5))$	$=$	$\langle d_1 \mid d_1(e_2) = e_2 \rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathscr{C}(\mathrm{S}_1))$	$=$	$\langle d_1, d_2, d_3, d_4 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_2) = e_3; d_3(e_3) = e_2; d_4(e_3) = e_3 \rangle$
$\mathfrak{Der}(\mathscr{C}(\mathrm{S}_2))$	$=$	$\langle d_1, d_2 \mid d_1(e_2) = e_2; d_2(e_3) = e_2 \rangle$

2 Allison—Kantor 构造

2.1 Allison—Kantor 结构代数

令 $\overline{\mathfrak{Der}}(\mathscr{A})$ 为与 $\bar{}$ 对易的 $\mathscr{A}$ 的导子集合。容易注意到，如果$x \in \mathscr{A}$且 $Tx(1) = 0$，那么$x = 0$。因此，$T_{\mathscr{A}} \cap \mathfrak{Der}(\mathscr{A}) = 0$，我们可以定义

$$\begin{aligned} \mathrm{Sk}(\mathscr{A}) &= T_{\mathscr{S}} \oplus \overline{\mathfrak{Der}}(\mathscr{A}), \\ \mathrm{Str}(\mathscr{A}) &= T_{\mathscr{A}} \oplus \overline{\mathfrak{Der}}(\mathscr{A}). \end{aligned}$$

记 L_x 和 R_x 分别为在 x 上的左乘和右乘算子，即 $L_x(y) = xy$，$R_x(y) = yx$。若 $E \in \mathrm{End}(\mathscr{A})$，则定义

$$E^{\delta} = E + R_{\overline{E(e_1)}}, \quad E^{\varepsilon} = E - T_{E(e_1)+\overline{E(e_1)}}, \quad \overline{E}(x) = \overline{E(\bar{x})}.$$

若 $D \in \overline{\mathfrak{Der}}(\mathscr{A})$，则 $D^{\delta} = D^{\varepsilon} = \overline{D^{-}} = D$ 并且

$$T_x^{\delta}(y) = xy + y\bar{x}; \quad T_x^{\varepsilon} = -T_{\bar{x}}; \quad \overline{T_x}(y) = \bar{x}y - xy + y\bar{x}.$$

因此，若 $E \in \mathrm{Str}(\mathscr{A})$，则 $E^{\delta} = E^{\delta}$，所以 E^{δ} 稳定 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{H}$。

令 $N = \{(x,s) : x \in \mathscr{A}, s \in \mathscr{S}\}$。由于映射 $E \mapsto E^{\delta}|_s$ 是李代数同态，N在作用 $E(x,s) = \big(E(x), E^{\delta}(s)\big)$ 下是一个 $\mathrm{Str}(\mathscr{A})$-模。令

$$\mathscr{F}(\mathscr{A}) = \widehat{N} \oplus \mathrm{Str}(\mathscr{A}) \oplus N,$$

其中 $\widehat{N}$与N同构。定义反交换运算 $[\cdot,\cdot]$于 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 上，使得对于x、$y \in \mathscr{A}$、s、$r \in \mathscr{S}$、$E \in \mathrm{Str}(\mathscr{A})$:

$$\begin{aligned} [E,(x,s)] &= (E(x), E^{\delta}(s)), \\ [E,\widehat{(x,s)}] &= \widehat{(E^{\varepsilon}(x), E^{\varepsilon\delta}(s))}, \\ [(x,s),(y,r)] &= (0, x\bar{y} - y\bar{x}), \\ [\widehat{(x,s)},\widehat{(y,r)}] &= \widehat{(0, x\bar{y} - y\bar{x})}, \\ [(x,s),\widehat{(y,r)}] &= (sy, 0) - \widehat{(rx, 0)} + V_{x,y} + L_s L_r. \end{aligned}$$

已知 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次李代数:

$$\begin{gathered} \mathscr{F}(\mathscr{A}) = \mathscr{F}_{-2} \oplus \mathscr{F}_{-1} \oplus \mathscr{F}_0 \oplus \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2, \\ \mathscr{F}_{-2} = \widehat{(0,\mathscr{S})}, \quad \mathscr{F}_{-1} = \widehat{(\mathscr{A},0)}, \quad \mathscr{F}_0 = \mathrm{Instr}(\mathscr{A}), \quad \mathscr{F}_1 = (\mathscr{A},0), \quad \mathscr{F}_2 = (0,\mathscr{S}). \end{gathered}$$

对于每个(2,1)型的三维可构代数 $\mathscr{A}$，其 AK-代数 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 的维数为 11。现在固定以下(2,1)型三维可构代数 $\mathscr{A}$ 的记号:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_2 &= (0,\mathscr{S}) &&= \langle \varepsilon_4 := (0,e_3) \rangle; \\ \mathscr{F}_1 &= (\mathscr{A},0) &&= \langle \varepsilon_1 := (e_1,0),\ \varepsilon_2 := (e_2,0),\ \varepsilon_3 := (e_3,0) \rangle; \\ \mathscr{F}_0 &= \mathrm{Instr}(\mathscr{A}) &&= \langle \varepsilon_5 := T_{e_1},\ \varepsilon_6 := T_{e_2},\ \varepsilon_7 := T_{e_3} \rangle; \\ \mathscr{F}_{-1} &= \widehat{(\mathscr{A},0)} &&= \langle \varepsilon_8 := \widehat{(e_1,0)},\ \varepsilon_9 := \widehat{(e_2,0)},\ \varepsilon_{10} := \widehat{(e_3,0)} \rangle; \\ \mathscr{F}_{-2} &= \widehat{(0,\mathscr{S})} &&= \langle \varepsilon_{11} := \widehat{(0,e_3)} \rangle. \end{aligned}$$

下面的命题可以通过一些直接计算得到，并且在我们的构造中将会有用。

命题66. 有单位元的3维结构代数A 的元素 T_{A} 如下给出。

$$T_{\mathrm{A}_1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 3\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad T_{\mathrm{A}_2} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 3\gamma \\ 3\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad T_{\mathrm{A}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & 0 \\ 3\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$T_{\mathrm{A}_4} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -3\gamma \\ \beta & \alpha+\beta & 3\gamma \\ 3\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad T_{\mathrm{A}_5} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 3\gamma \\ \beta & \alpha+\gamma & \beta \\ 3\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$T_{\mathrm{S}_1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 3\beta & \alpha & 0 \\ 3\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad T_{\mathrm{S}_2} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 3\gamma \\ 3\beta & \alpha+\gamma & -\beta \\ 3\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

2.2 AK 构造A_1

定理67. $\mathscr{F}(\mathrm{A}_1)$ 是一个11维李代数，其乘积定义为

$$\begin{array}{llllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] = -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_1,\varepsilon_5] = -\varepsilon_1, & [\varepsilon_1,\varepsilon_6] = -\varepsilon_2, \\
[\varepsilon_1,\varepsilon_7] = -3\varepsilon_3, & [\varepsilon_1,\varepsilon_8] = \varepsilon_5, & [\varepsilon_1,\varepsilon_9] = \varepsilon_6, \\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] = -\varepsilon_7, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] = -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_2,\varepsilon_5] = -\varepsilon_2, \\
[\varepsilon_2,\varepsilon_8] = \varepsilon_6, & [\varepsilon_3,\varepsilon_5] = -\varepsilon_3, & [\varepsilon_3,\varepsilon_8] = \varepsilon_7, \\
[\varepsilon_4,\varepsilon_5] = -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_4,\varepsilon_8] = \varepsilon_3, & [\varepsilon_5,\varepsilon_8] = -\varepsilon_8, \\
[\varepsilon_5,\varepsilon_9] = -\varepsilon_9, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] = -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] = -2\varepsilon_{11}, \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_8] = -\varepsilon_9, & [\varepsilon_7,\varepsilon_8] = 3\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] = -2\varepsilon_{11}.
\end{array}$$

证明. 基于第2.1小节中给出的AK算法，我们定义

$$\mathscr{F}_0 = \left\langle T_{e_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{e_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{e_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

容易看出， $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_0]=0$。
下面我们将描述$T^{\varepsilon}_{e_i}$、$T^{\delta}_{e_i}$、$T^{\varepsilon\delta}_{e_i}$和$V_{e_i}$、$_{e_j}$:

$T_{e_1}(e_1)$	$=$	e_1	$T^{\varepsilon}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1} - T_{T_{e_1}(e_1)+T_{e_1}(e_1)}$ $=$ $-T_{e_1}$
$\overline{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	e_1	$T^{\delta}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1} + R_{T_{e_1}(e_1)}$ $=$ $2T_{e_1}$
R_{e_1}	$=$	T_{e_1}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_1}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_1} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1)}}$ $=$ $-2T_{e_1}$
$T_{e_2}(e_1)$	$=$	e_2	$T^{\varepsilon}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2} - T_{T_{e_2}(e_1)+T_{e_2}(e_1)}$ $=$ $-T_{e_2}$
$\overline{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	e_2	$T^{\delta}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2} + R_{T_{e_2}(e_1)}$ $=$ $2T_{e_2}$
R_{e_2}	$=$	T_{e_2}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_2}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_2} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1)}}$ $=$ $-2T_{e_2}$
$T_{e_3}(e_1)$	$=$	$3e_3$	$T^{\varepsilon}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3} - T_{T_{e_3}(e_1)+T_{e_3}(e_1)}$ $=$ T_{e_3}
$\overline{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	$-3e_3$	$T^{\delta}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3} + R_{T_{e_3}(e_1)}$ $=$ 0
R_{e_3}	$=$	$\frac{1}{3}T_{e_3}$	$T^{\varepsilon\delta}_{e_3}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_3} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1)}}$ $=$ 0

$$
\begin{array}{llllll}
V_{e_1,e_1} = T_{e_1}, & V_{e_1,e_2} = T_{e_2}, & V_{e_1,e_3} = -T_{e_3}, \\
V_{e_2,e_1} = T_{e_2}, & V_{e_2,e_2} = 0, & V_{e_2,e_3} = 0, \\
V_{e_3,e_1} = T_{e_3}, & V_{e_3,e_2} = 0, & V_{e_3,e_3} = 0.
\end{array}
$$

现在我们可以确定 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_1)$ 的乘法表。

(I) 第一步，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[E、(x,\ s)]=(E(x),\ E^{\delta}(s))$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_1] = [T_{e_1},(e_1,0)] = \left(T_{e_1}(e_1),T^{\delta}_{e_1}(0)\right) = (e_1,0) = \varepsilon_1; \\
[\varepsilon_5,\varepsilon_2] = [T_{e_1},(e_2,0)] = (T_{e_1}(e_2),T^{\delta}_{e_1}(0) = (e_2,\ 0) = \varepsilon_2; \\
[\varepsilon_5,\varepsilon_3] = [T_{e_1},(e_3,0)] = (T_{e_1}(e_3),T^{\delta}_{e_1}(0)) = (e_3,\ 0) = \varepsilon_3; \\
[\varepsilon_5,\varepsilon_4] = [T_{e_1},(0,e_3)] = (T_{e_1}(0),T^{\delta}_{e_1}(e_3)) = (0,\ 2e_3) = 2\varepsilon_4; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_1] = [T_{e_2},(e_1,0)] = (T_{e_2}(e_1),T^{\delta}_{e_2}(0)) = (e_2,\ 0) = \varepsilon_2; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_2] = [T_{e_2},(e_2,0)] = (T_{e_2}(e_2),T^{\delta}_{e_2}(0)) = (0,\ 0) = 0; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_3] = [T_{e_2},(e_3,0)] = (T_{e_2}(e_3),T^{\delta}_{e_2}(0)) = (0,\ 0) = 0; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_4] = [T_{e_2},(0,e_3)] = (T_{e_2}(0),T^{\delta}_{e_2}(e_3)) = (0,\ 0) = 0; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_1] = [T_{e_3},(e_1,0)] = (T_{e_3}(e_1),T^{\delta}_{e_3}(0)) = (3e_3,\ 0) = 3\varepsilon_3; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_2] = [T_{e_3},(e_2,0)] = (T_{e_3}(e_2),T^{\delta}_{e_3}(0)) = (0,\ 0) = 0; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_3] = [T_{e_3},(e_3,0)] = (T_{e_3}(e_3),T^{\delta}_{e_3}(0)) = (0,\ 0) = 0; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_4] = [T_{e_3},(0,e_3)] = (T_{e_3}(0),T^{\delta}_{e_3}(e_3)) = (0,\ 0) = 0.
\end{array}
$$

(II) 第二步，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[E、\overset{\frown}{\ }(x,\ s)]=\overbrace{\varepsilon\qquad\varepsilon\delta}(E(x),\ E(s))$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_8] = [T_{e_1},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1),\ 0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_1),\ 0)} = \widehat{(-e_1,\ 0)} = -\varepsilon_8; \\
[\varepsilon_5,\varepsilon_9] = [T_{e_1},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_2),\ 0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_2),\ 0)} = \widehat{(-e_2,\ 0)} = -\varepsilon_9; \\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] = [T_{e_1},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_3),\ 0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_3),\ 0)} = \widehat{(-e_3,\ 0)} = -\varepsilon_{10}; \\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] = [T_{e_1},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,\ T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_3))} = \widehat{(0,\ -2e_3)} = -2\varepsilon_{11}; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_8] = [T_{e_2},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1),\ 0)} = \widehat{(-e_2,\ 0)} = -\varepsilon_9; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_9] = [T_{e_2},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_2),\ 0)} = \widehat{(0,\ 0)} = 0; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] = [T_{e_2},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_3),\ 0)} = \widehat{(0,\ 0)} = 0; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] = [T_{e_2},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,\ T^{\varepsilon\delta}_{e_2}(e_3))} = \widehat{(0,\ 0)} = 0; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_8] = [T_{e_3},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1),\ 0)} = \widehat{(3e_3,\ 0)} = 3\varepsilon_{10}; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_9] = [T_{e_3},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_2),\ 0)} = \widehat{(0,\ 0)} = 0; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] = [T_{e_3},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_3),\ 0)} = \widehat{(0,\ 0)} = 0; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{11}] = [T_{e_3},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,\ T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_3))} = \widehat{(0,\ 0)} = 0.
\end{array}
$$

(III) 第三步，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[(x,\ s),\ (y,\ r)]=(0,\ xy^{\frown}-yx^{\frown})$.

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_2] = [(e_1,0),(e_2,0)] = (0,\ 0) = 0; \\
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] = [(e_1,0),(e_3,0)] = (0,\ -2e_3) = -2\varepsilon_4; \\
[\varepsilon_2,\varepsilon_3] = [(e_2,0),(e_3,0)] = (0,\ 0) = 0;
\end{array}
$$

$\overset{\frown}{\ }\ \overset{\frown}{\ }\ \overbrace{\qquad\qquad}$(IV) 我们定义 $[\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1},\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s)、(y,r)]=(0,\sout{xy-yx})$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_8,\varepsilon_9] & = & [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] & = & [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(0,\,-2e_3)} = -2\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{10}] & = & [\widehat{(e_2,0)},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(0,\,0)} = 0.
\end{array}
$$

(V) 我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s)、(y,r)] = -(rx,0)+Vx,\ y+L_sL_r+(sy,0)$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_8] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_1,e_1} = T_{e_1} = \varepsilon_5;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_9] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_1,e_2} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_1,e_3} = -T_{e_3} = -\varepsilon_7;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] & = & [(e_1,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3,0)} = -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_8] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_2,e_1} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_9] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_2,e_2} = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_2,e_3} = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{11}] & = & [(e_2,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3e_2,0)} = -\widehat{(0,0)} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_8] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_3,e_1} = T_{e_3} = \varepsilon_7;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_9] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_3,e_2} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_3,e_3} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] & = & [(e_3,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3e_3,0)} = -\widehat{(0,0)} = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_8] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_1,0)}] & = & (e_3,0) = \varepsilon_3;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_9] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_2,0)}] & = & (e_3e_2,0) = (0,0) = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_3,0)}] & = & (e_3e_3,0) = (0,0) = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] & = & [(0,e_3),\widehat{(0,e_3)}] & = & L_{e_3}L_{e_3} = 0.
\end{array}
$$

□

注68. $\mathscr{F}(\mathrm{A}_1)$是完美的，且 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_1) = S \ltimes R$，其中：

- $S = \langle \varepsilon_1,\ \varepsilon_5,\ \varepsilon_8 \rangle \cong \mathfrak{sl}_2$;
- $R = \langle \varepsilon_2,\quad \varepsilon_3,\quad \varepsilon_4,\quad \varepsilon_6,\quad \varepsilon_7,\quad \varepsilon_9,\quad \varepsilon_{10},\quad \varepsilon_{11} \rangle$ 是阿贝尔根。

2.3 AK 构造A_2

定理 m 69. $\mathscr{F}(\mathrm{A}_2)$ 是一个具有如下乘法的 *11* 维李代数

$$
\begin{array}{llllllllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] & = & -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_1,\varepsilon_5] & = & -\varepsilon_1, & [\varepsilon_1,\varepsilon_6] & = & -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_7] & = & -3\varepsilon_3, & [\varepsilon_1,\varepsilon_8] & = & \varepsilon_5, & [\varepsilon_1,\varepsilon_9] & = & \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] & = & -\varepsilon_7, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] & = & -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_2,\varepsilon_5] & = & -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_8] & = & \varepsilon_6, & [\varepsilon_3,\varepsilon_5] & = & -\varepsilon_3, & [\varepsilon_3,\varepsilon_7] & = & -3\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_8] & = & \varepsilon_7, & [\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] & = & -\varepsilon_6, & [\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] & = & -\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_5] & = & -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_4,\varepsilon_8] & = & \varepsilon_3, & [\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] & = & \varepsilon_2,\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] & = & \varepsilon_6, & [\varepsilon_5,\varepsilon_8] & = & -\varepsilon_8, & [\varepsilon_5,\varepsilon_9] & = & -\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] & = & -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] & = & -2\varepsilon_{11}, & [\varepsilon_6,\varepsilon_8] & = & -\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_8] & = & 3\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] & = & 3\varepsilon_9, & [\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] & = & -2\varepsilon_{11}.
\end{array}
$$

证明。 按照第2.1小节给出的AK算法，我们定义

$$
\mathscr{F}_0 = \left\langle T_{e_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ T_{e_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_{e_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.
$$

容易看出 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_0]=0$。请注意，$L_{e_3}L_{e_3}=T_{e_2}$，并在下方列出元素 $T^{\varepsilon}_{e_i}$、$T^{\delta}_{e_i}$、$T^{\varepsilon\delta}_{e_i}$ 和 V_{e_i,e_j}：

$\overline{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	e_1	$T^{\varepsilon}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1}-T_{T_{e_1}(e_1)+T_{e_1}(e_1)}$	$=$	$-T_{e_1}$
$T_{e_1}(e_1)$	$=$	e_1	$T^{\delta}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1}+R_{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	$2T_{e_1}$
R_{e_1}	$=$	T_{e_1}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_1}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_1}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1)}}$	$=$	$-2T_{e_1}$
$\overline{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	e_2	$T^{\varepsilon}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2}-T_{T_{e_2}(e_1)+T_{e_2}(e_1)}$	$=$	$-T_{e_2}$
$T_{e_2}(e_1)$	$=$	e_2	$T^{\delta}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2}+R_{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	$2T_{e_2}$
R_{e_2}	$=$	T_{e_2}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_2}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_2}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1)}}$	$=$	$-2T_{e_2}$
$\overline{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	$3e_3$	$T^{\varepsilon}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3}-T_{T_{e_3}(e_1)+T_{e_3}(e_1)}$	$=$	T_{e_3}
$T_{e_3}(e_1)$	$=$	$-3e_3$	$T^{\delta}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3}+R_{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	0
R_{e_3}	$=$	$\frac{1}{3}T_{e_3}$	$T^{\varepsilon\delta}_{e_3}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_3}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1)}}$	$=$	0

$$
\begin{array}{lllllllll}
V_{e_1,e_1} & = & T_{e_1}, & V_{e_1,e_2} & = & T_{e_2}, & V_{e_1,e_3} & = & -T_{e_3},\\
V_{e_2,e_1} & = & T_{e_2}, & V_{e_2,e_2} & = & 0, & V_{e_2,e_3} & = & 0,\\
V_{e_3,e_1} & = & T_{e_3}, & V_{e_3,e_2} & = & 0, & V_{e_3,e_3} & = & -T_{e_2}.
\end{array}
$$

现在我们可以确定 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_2)$的乘法表。

（I）首先，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[E、(x,s)]=(E(x),E^{\delta}(s))$。

$$
\begin{array}{lllllllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_1] & = & [T_{e_1},(e_1,0)] & = & \left(T_{e_1}(e_1),T^{\delta}_{e_1}(0)\right) & = & (e_1,0)=\varepsilon_1;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_2] & = & [T_{e_1},(e_2,0)] & = & (T_{e_1}(e_2),T^{\delta}_{e_1}(0)) & = & (e_2,0)=\varepsilon_2;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_3] & = & [T_{e_1},(e_3,0)] & = & (T_{e_1}(e_3),T^{\delta}_{e_1}(0)) & = & (e_3,0)=\varepsilon_3;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_4] & = & [T_{e_1},(0,e_3)] & = & (T_{e_1}(0),T^{\delta}_{e_1}(e_3)) & = & (0,2e_3)=2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_1] & = & [T_{e_2},(e_1,0)] & = & (T_{e_2}(e_1),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (e_2,0)=\varepsilon_2;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_2] & = & [T_{e_2},(e_2,0)] & = & (T_{e_2}(e_2),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (0,0)=0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_3] & = & [T_{e_2},(e_3,0)] & = & (T_{e_2}(e_3),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (0,0)=0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_4] & = & [T_{e_2},(0,e_3)] & = & (T_{e_2}(0),T^{\delta}_{e_2}(e_3)) & = & (0,0)=0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_1] & = & [T_{e_3},(e_1,0)] & = & (T_{e_3}(e_1),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (3e_3,0)=3\varepsilon_3;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_2] & = & [T_{e_3},(e_2,0)] & = & (T_{e_3}(e_2),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (0,0)=0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_3] & = & [T_{e_3},(e_3,0)] & = & (T_{e_3}(e_3),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (3e_2,0)=3\varepsilon_2;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_4] & = & [T_{e_3},(0,e_3)] & = & (T_{e_3}(0),T^{\delta}_{e_3}(e_3)) & = & (0,0)=0.
\end{array}
$$

(II) 第二，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[E,\ \frown(x,\ s)]=\overbrace{\varepsilon\quad\varepsilon\delta}(E(x),\ E(s))$。

$$
\begin{array}{lllllllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_8] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_1),\ 0)}=\widehat{(-e_1,\ 0)}=-\varepsilon_8;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_9] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_2),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_2),\ 0)}=\widehat{(-e_2,\ 0)}=-\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_3),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_3),\ 0)}=\widehat{(-e_3,\ 0)}=-\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_1},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_3))} & = & \widehat{(0,\ -2e_3)}=-2\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_8] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1),\ 0)} & = & \widehat{(-e_2,\ 0)}=-\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_9] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_2),\ 0)} & = & \widehat{(0,\ 0)}=0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_3),\ 0)} & = & \widehat{(0,\ 0)}=0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_2},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_2}(e_3))} & = & \widehat{(0,\ 0)}=0;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
[\varepsilon_7,\varepsilon_8] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1),\,0)} & = & \widehat{(3e_3,\,0)} = 3\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_9] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_2),\,0)} & = & \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_3),\,0)} & = & \widehat{(3e_2,\,0)} = 3\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_3},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_3))} & = & \widehat{(0,\,0)} = 0.
\end{array}
$$

(III) 第三，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[(x,\ s),\ (y,\ r)]=(0,\ xy-\bar{y}x)$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_2] & = & [(e_1,0),(e_2,0)] & = & (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] & = & [(e_1,0),(e_3,0)] & = & (0,\,-2e_3) = -2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_3] & = & [(e_2,0),(e_3,0)] & = & (0,\,0) = 0.
\end{array}
$$

(IV) 第四，我们定义 $[\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1},\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s),\ (y,r)]=(0,xy-\bar{y}x)$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_8,\varepsilon_9] & = & [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] & = & [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(0,\,-2e_3)} = -2\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{10}] & = & [\widehat{(e_2,0)},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(0,\,0)} = 0.
\end{array}
$$

(V) Endowed，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s),\ (y,r)]=-(rx,0)+V_{x,y}+L_sL_r+(sy,0$).

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_8] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_1,e_1} = T_{e_1} = \varepsilon_5;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_9] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_1,e_2} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_1,e_3} = -T_{e_3} = -\varepsilon_7;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] & = & [(e_1,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3,\,0)} = -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_8] & = & [(e_2,\,0),\widehat{(e_1,\,0)}] & = & V_{e_2,e_1} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_9] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_2,e_2} = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_2,e_3} = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{11}] & = & [(e_2,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3e_2,\,0)} = -\widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_8] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_3,e_1} = T_{e_3} = \varepsilon_7;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_9] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_3,e_2} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_3,e_3} = -T_{e_2} = -\varepsilon_6;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] & = & [(e_3,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3e_3,\,0)} = -\widehat{(e_2,\,0)} = -\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_8] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_1,0)}] & = & (e_3,\,0) = \varepsilon_3;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_9] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_2,0)}] & = & (e_3e_2,\,0) = (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_3,0)}] & = & (e_3e_3,\,0) = (e_2,\,0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] & = & [(0,e_3),\widehat{(0,e_3)}] & = & L_{e_3}L_{e_3} = T_{e_2} = \varepsilon_6.
\end{array}
$$

□

注释70. $\mathscr{F}(\mathrm{A}_2)$是非完美的，且 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_2)=S\ltimes R$，其中

- $S=\left\langle \varepsilon_1,\varepsilon_5,\varepsilon_8\right\rangle\cong\mathfrak{sl}_2$;
- $R=\left\langle \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \varepsilon_6,\ \varepsilon_7,\ \varepsilon_9,\ \varepsilon_{10},\ \varepsilon_{11}\right\rangle$ *is a nilpotent ideal nilindex equal to three.*

2.4 AK 构造A_3

定理71. $\mathscr{F}(A_3)$ 是一个11维李代数，具有给定乘积b y

$$\begin{array}{llllllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] &= -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_1,\varepsilon_5] &= -\varepsilon_1, & [\varepsilon_1,\varepsilon_6] &= -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_7] &= -3\varepsilon_3, & [\varepsilon_1,\varepsilon_8] &= \varepsilon_5, & [\varepsilon_1,\varepsilon_9] &= \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] &= -\varepsilon_7, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] &= -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_2,\varepsilon_5] &= -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_6] &= -\varepsilon_2, & [\varepsilon_2,\varepsilon_8] &= \varepsilon_6, & [\varepsilon_2,\varepsilon_9] &= \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_5] &= -\varepsilon_3, & [\varepsilon_3,\varepsilon_8] &= \varepsilon_7, & [\varepsilon_4,\varepsilon_5] &= -2\varepsilon_4,\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_8] &= \varepsilon_3 & [\varepsilon_5,\varepsilon_8] &= -\varepsilon_8, & [\varepsilon_5,\varepsilon_9] &= -\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] &= -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] &= -2\varepsilon_{11}, & [\varepsilon_6,\varepsilon_8] &= -\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_9] &= -\varepsilon_9, & [\varepsilon_7,\varepsilon_8] &= 3\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] &= -2\varepsilon_{11}.
\end{array}$$

证明。 根据第2.1小节中给出的AK算法，我们定义

$$\mathscr{F}_0 = \left\langle T_{e_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ T_{e_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_{e_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

容易看出 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_0]=0$。
下面给出元素 $T^{\varepsilon}_{e_i}$、$T^{\delta}_{e_i}$、$T^{\varepsilon\delta}_{e_i}$ 和 $V_{e_i,\ e_j}$的列表:

$T_{e_1}(e_1)$	$=$	e_1	$T^{\varepsilon}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1}-T_{T_{e_1}(e_1)+T_{e_1}(e_1)}$ $=$ $-T_{e_1}$
$\overline{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	e_1	$T^{\delta}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1}+R_{T_{e_1}(e_1)}$ $=$ $2T_{e_1}$
R_{e_1}	$=$	T_{e_1}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_1}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_1}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1)}}$ $=$ $-2T_{e_1}$
$T_{e_2}(e_1)$	$=$	e_2	$T^{\varepsilon}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2}-T_{T_{e_2}(e_1)+T_{e_2}(e_1)}$ $=$ $-T_{e_2}$
$\overline{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	e_2	$T^{\delta}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2}+R_{T_{e_2}(e_1)}$ $=$ $2T_{e_2}$
R_{e_2}	$=$	T_{e_2}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_2}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_2}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1)}}$ $=$ $-2T_{e_2}$
$T_{e_3}(e_1)$	$=$	$3e_3$	$T^{\varepsilon}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3}-T_{T_{e_3}(e_1)+T_{e_3}(e_1)}$ $=$ T_{e_3}
$\overline{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	$-3e_3$	$T^{\delta}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3}+R_{T_{e_3}(e_1)}$ $=$ 0
R_{e_3}	$=$	$\frac{1}{3}T_{e_3}$	$T^{\varepsilon\delta}_{e_3}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_3}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1)}}$ $=$ 0

$$\begin{array}{llllllll}
V_{e_1,e_1} &= T_{e_1}, & V_{e_1,e_2} &= T_{e_2}, & V_{e_1,e_3} &= -T_{e_3},\\
V_{e_2,e_1} &= T_{e_2}, & V_{e_2,e_2} &= T_{e_2}, & V_{e_2,e_3} &= 0,\\
V_{e_3,e_1} &= T_{e_3}, & V_{e_3,e_2} &= 0, & V_{e_3,e_3} &= 0.
\end{array}$$

现在我们可以确定 $\mathscr{F}(A_3)$ 的乘法表。

（I）首先，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[E,\ (x,s)]=(E(x),E^{\delta}(s))$ 。

$$\begin{array}{llllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_1] &= [T_{e_1},(e_1,0)] &= \left(T_{e_1}(e_1),T^{\delta}_{e_1}(0)\right) &= (e_1,\ 0) = \varepsilon_1;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_2] &= [T_{e_1},(e_2,0)] &= (T_{e_1}(e_2),T^{\delta}_{e_1}(0)) &= (e_2,\ 0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_3] &= [T_{e_1},(e_3,0)] &= (T_{e_1}(e_3),T^{\delta}_{e_1}(0)) &= (e_3,\ 0) = \varepsilon_3;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_4] &= [T_{e_1},(0,e_3)] &= (T_{e_1}(0),T^{\delta}_{e_1}(e_3)) &= (0,\ 2e_3) = 2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_1] &= [T_{e_2},(e_1,0)] &= (T_{e_2}(e_1),T^{\delta}_{e_2}(0)) &= (e_2,\ 0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_2] &= [T_{e_2},(e_2,0)] &= (T_{e_2}(e_2),T^{\delta}_{e_2}(0)) &= (e_2,\ 0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_3] &= [T_{e_2},(e_3,0)] &= (T_{e_2}(e_3),T^{\delta}_{e_2}(0)) &= (0,\ 0) = 0;
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lllllll}
[\varepsilon_6,\varepsilon_4] & = & [T_{e_2},(0,e_3)] & = & (T_{e_2}(0),T^{\delta}_{e_2}(e_3)) & = & (0,\,0)=0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_1] & = & [T_{e_3},(e_1,0)] & = & (T_{e_3}(e_1),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (3e_3,\,0)=3\varepsilon_3;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_2] & = & [T_{e_3},(e_2,0)] & = & (T_{e_3}(e_2),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (0,\,0)=0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_3] & = & [T_{e_3},(e_3,0)] & = & (T_{e_3}(e_3),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (0,\,0)=0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_4] & = & [T_{e_3},(0,e_3)] & = & (T_{e_3}(0),T^{\delta}_{e_3}(e_3)) & = & (0,\,0)=0.
\end{array}
$$

（II）其次，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[E,\ \widetilde{\ }(x,s)]=\widetilde{\ \varepsilon\quad\varepsilon\delta\ }(E(x),E(s))$。

$$
\begin{array}{lllllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_8] & = & [T_{e_1},\widetilde{(e_1,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1),\,0)} & = & \widetilde{(-T_{e_1}(e_1),\,0)}=\widetilde{(-e_1,\,0)}=-\varepsilon_8;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_9] & = & [T_{e_1},\widetilde{(e_2,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_2),\,0)} & = & \widetilde{(-T_{e_1}(e_2),\,0)}=\widetilde{(-e_2,\,0)}=-\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_1},\widetilde{(e_3,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_3),\,0)} & = & \widetilde{(-T_{e_1}(e_3),\,0)}=\widetilde{(-e_3,\,0)}=-\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_1},\widetilde{(0,e_3)}] & = & \widetilde{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_3))} & = & \widetilde{(0,\,-2e_3)}=-2\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_8] & = & [T_{e_2},\widetilde{(e_1,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1),\,0)} & = & \widetilde{(-e_2,\,0)}=-\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_9] & = & [T_{e_2},\widetilde{(e_2,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_2),\,0)} & = & \widetilde{(-e_2,\,0)}=-\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_2},\widetilde{(e_3,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_3),\,0)} & = & \widetilde{(0,\,0)}=0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_2},\widetilde{(0,e_3)}] & = & \widetilde{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_2}(e_3))} & = & \widetilde{(0,\,0)}=0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_8] & = & [T_{e_3},\widetilde{(e_1,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1),\,0)} & = & \widetilde{(3e_3,\,0)}=3\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_9] & = & [T_{e_3},\widetilde{(e_2,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_2),\,0)} & = & \widetilde{(0,\,0)}=0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_3},\widetilde{(e_3,0)}] & = & \widetilde{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_3),\,0)} & = & \widetilde{(0,\,0)}=0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_3},\widetilde{(0,e_3)}] & = & \widetilde{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_3))} & = & \widetilde{(0,\,0)}=0.
\end{array}
$$

(III) 第三，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[(x,s),\ (y,r)]=(0,xy-\overline{y}x)$。

$$
\begin{array}{lllllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_2] & = & [(e_1,0),(e_2,0)] & = & (0,\,0)=0;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] & = & [(e_1,0),(e_3,0)] & = & (0,\,-2e_3)=-2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_3] & = & [(e_2,0),(e_3,0)] & = & (0,\,0)=0.
\end{array}
$$

(IV) 第四，我们定义 $[\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1},\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s),\ (y,r)]=(0,xy-yx)$。

$$
\begin{array}{lllllll}
[\varepsilon_8,\varepsilon_9] & = & [\widetilde{(e_1,0)},\widetilde{(e_2,0)}] & = & \widetilde{(0,\,0)}=0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] & = & [\widetilde{(e_1,0)},\widetilde{(e_3,0)}] & = & \widetilde{(0,\,-2e_3)}=-2\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{10}] & = & [\widetilde{(e_2,0)},\widetilde{(e_3,0)}] & = & \widetilde{(0,\,0)}=0.
\end{array}
$$

(V) 最后，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s),\ (y,r)]=-(rx,0)+V_{x,y}+L_sL_r+(sy,0)$.

$$
\begin{array}{lllllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_8] & = & [(e_1,0),\widetilde{(e_1,0)}] & = & V_{e_1,e_1}=T_{e_1}=\varepsilon_5;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_9] & = & [(e_1,0),\widetilde{(e_2,0)}] & = & V_{e_1,e_2}=T_{e_2}=\varepsilon_6;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] & = & [(e_1,0),\widetilde{(e_3,0)}] & = & V_{e_1,e_3}=-T_{e_3}=-\varepsilon_7;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] & = & [(e_1,0),\widetilde{(0,e_3)}] & = & -\widetilde{(e_3,\,0)}=-\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_8] & = & [(e_2,0),\widetilde{(e_1,0)}] & = & V_{e_2,e_1}=T_{e_2}=\varepsilon_6;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_9] & = & [(e_2,0),\widetilde{(e_2,0)}] & = & V_{e_2,e_2}=T_{e_2}=\varepsilon_6;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] & = & [(e_2,0),\widetilde{(e_3,0)}] & = & V_{e_2,e_3}=0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{11}] & = & [(e_2,0),\widetilde{(0,e_3)}] & = & -\widetilde{(e_3e_2,\,0)}=-\widetilde{(0,\,0)}=0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_8] & = & [(e_3,0),\widetilde{(e_1,0)}] & = & V_{e_3,e_1}=T_{e_3}=\varepsilon_7;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_9] & = & [(e_3,0),\widetilde{(e_2,0)}] & = & V_{e_3,e_2}=0;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_3,e_3} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] & = & [(e_3,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3e_3,\,0)} = -\widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_8] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_1,0)}] & = & (e_3,\,0) = \varepsilon_3;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_9] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_2,0)}] & = & (e_3e_2,0) = (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_3,0)}] & = & (e_3e_3,\,0) = (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] & = & [(0,e_3),\widehat{(0,e_3)}] & = & L_{e_3}L_{e_3} = 0.
\end{array}
$$

□

注记72. $\mathscr{F}(\mathrm{A}_3)$是完美的，且 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_3) = S \ltimes R$, 其中

- $S = \left\langle \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_5,\, \varepsilon_6,\, \varepsilon_8,\, \varepsilon_9 \right\rangle \cong \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$;
- $R = \left\langle \varepsilon_3,\, \varepsilon_4,\, \varepsilon_7,\, \varepsilon_{10},\, \varepsilon_{11} \right\rangle$ *is a abelian radical.*

2.5 AK 构造：A_4

定理73. $\mathscr{F}(\mathrm{A}_4)$ 是一个11维李代数，其乘法定义如下：

$$
\begin{array}{llllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] = -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_1,\varepsilon_5] = -\varepsilon_1, & [\varepsilon_1,\varepsilon_6] = -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_7] = -3\varepsilon_3, & [\varepsilon_1,\varepsilon_8] = \varepsilon_5, & [\varepsilon_1,\varepsilon_9] = \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] = -\varepsilon_7, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] = -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_2,\varepsilon_5] = -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_6] = -\varepsilon_2, & [\varepsilon_2,\varepsilon_8] = \varepsilon_6, & [\varepsilon_2,\varepsilon_9] = \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_5] = -\varepsilon_3, & [\varepsilon_3,\varepsilon_7] = 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2, & [\varepsilon_3,\varepsilon_8] = \varepsilon_7,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] = \varepsilon_5 - \varepsilon_6, & [\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] = \varepsilon_8 - \varepsilon_9, & [\varepsilon_4,\varepsilon_5] = -2\varepsilon_4,\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_8] = \varepsilon_3, & [\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2, & [\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] = -\varepsilon_5 + \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_8] = -\varepsilon_8, & [\varepsilon_5,\varepsilon_9] = -\varepsilon_9, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] = -\varepsilon_{10},\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] = -2\varepsilon_{11}, & [\varepsilon_6,\varepsilon_8] = -\varepsilon_9, & [\varepsilon_6,\varepsilon_9] = -\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_8] = 3\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] = -3\varepsilon_8 + 3\varepsilon_9, & [\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] = -2\varepsilon_{11}.
\end{array}
$$

证明. 利用第2.1小节中介绍的AK算法，我们定义

$$
\mathscr{F}_0 = \left\langle T_{e_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\, T_{e_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\, T_{e_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.
$$

容易看出，$[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_0] = 0$。

需要注意的是$L_{e_3}L_{e_3} = T_{e_2} - T_{e_1}$；下面列出元素$T^{\varepsilon}_{e_i}$、$T^{\delta}_{e_i}$、$T^{\varepsilon\delta}_{e_i}$和$V_{e_i,\ e_j}$：

$T_{e_1}\ (e_1)$	$=$	e_1	$T^{\varepsilon}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1} - \cancel{T_{T_{e_1}(e_1)} + T_{e_1}(e_1)}$ $=$ $-T_{e_1}$
$\overline{T_{e_1}\ (e_1)}$	$=$	e_1	$T^{\delta}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1} + \cancel{R_{T_{e_1}(e_1)}}$ $=$ $2T_{e_1}$
R_{e_1}	$=$	T_{e_1}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_1}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_1} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_1}\ (e_1)}}$ $=$ $-2T_{e_1}$
$T_{e_2}\ (e_1)$	$=$	e_2	$T^{\varepsilon}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2} - \cancel{T_{T_{e_2}(e_1)} + T_{e_2}(e_1)}$ $=$ $-T_{e_2}$
$\overline{T_{e_2}\ (e_1)}$	$=$	e_2	$T^{\delta}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2} + \cancel{R_{T_{e_2}(e_1)}}$ $=$ $2T_{e_2}$
R_{e_2}	$=$	T_{e_2}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_2}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_2} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_2}\ (e_1)}}$ $=$ $-2T_{e_2}$

$T_{e_3}(e_1)$	$=$	$3e_3$	$T^{\varepsilon}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3}-T_{T_{e_3}(e_1)+\overline{T_{e_3}(e_1)}}$	$=$	T_{e_3}
$\overline{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	$-3e_3$	$T^{\delta}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3}+R_{\overline{T_{e_3}(e_1)}}$	$=$	0
R_{e_3}	$=$	$\frac{1}{3}T_{e_3}$	$T^{\varepsilon\delta}_{e_3}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_3}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1)}}$	$=$	0

$$\begin{array}{lllllllll} V_{e_1,e_1} & = & T_{e_1}, & V_{e_1,e_2} & = & T_{e_2}, & V_{e_1,e_3} & = & -T_{e_3}, \\ V_{e_2,e_1} & = & T_{e_2}, & V_{e_2,e_2} & = & T_{e_2}, & V_{e_2,e_3} & = & 0, \\ V_{e_3,e_1} & = & T_{e_3}, & V_{e_3,e_2} & = & 0, & V_{e_3,e_3} & = & T_{e_1}-T_{e_2}. \end{array}$$

我们现在可以确定 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_4)$的乘法表。

(I) 首先，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[E,\ (x,\ s)]=(E(x),\ E^{\delta}(s))$。

$$\begin{array}{lllllll} [\varepsilon_5,\varepsilon_1] & = & [T_{e_1},(e_1,0)] & = & \left(T_{e_1}(e_1),T^{\delta}_{e_1}(0)\right) & = & (e_1,\ 0)=\varepsilon_1; \\ [\varepsilon_5,\varepsilon_2] & = & [T_{e_1},(e_2,0)] & = & (T_{e_1}(e_2),T^{\delta}_{e_1}(0)) & = & (e_2,\ 0)=\varepsilon_2; \\ [\varepsilon_5,\varepsilon_3] & = & [T_{e_1},(e_3,0)] & = & (T_{e_1}(e_3),T^{\delta}_{e_1}(0)) & = & (e_3,\ 0)=\varepsilon_3; \\ [\varepsilon_5,\varepsilon_4] & = & [T_{e_1},(0,e_3)] & = & (T_{e_1}(0),T^{\delta}_{e_1}(e_3)) & = & (0,\ 2e_3)=2\varepsilon_4; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_1] & = & [T_{e_2},(e_1,0)] & = & (T_{e_2}(e_1),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (e_2,\ 0)=\varepsilon_2; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_2] & = & [T_{e_2},(e_2,0)] & = & (T_{e_2}(e_2),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (e_2,\ 0)=\varepsilon_2; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_3] & = & [T_{e_2},(e_3,0)] & = & (T_{e_2}(e_3),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (0,\ 0)=0; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_4] & = & [T_{e_2},(0,e_3)] & = & (T_{e_2}(0),T^{\delta}_{e_2}(e_3)) & = & (0,\ 0)=0; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_1] & = & [T_{e_3},(e_1,0)] & = & (T_{e_3}(e_1),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (3e_3,\ 0)=3\varepsilon_3; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_2] & = & [T_{e_3},(e_2,0)] & = & (T_{e_3}(e_2),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (0,\ 0)=0; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_3] & = & [T_{e_3},(e_3,0)] & = & (T_{e_3}(e_3),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (-3e_1+3e_2,\ 0)=-3\varepsilon_1+3\varepsilon_2; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_4] & = & [T_{e_3},(0,e_3)] & = & (T_{e_3}(0),T^{\delta}_{e_3}(e_3)) & = & (0,\ 0)=0. \end{array}$$

(II) 其次，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[E,\ \frown(x,\ s)]=\overbrace{\varepsilon\qquad\varepsilon\delta}(E(x),\ E(s))$。

$$\begin{array}{lllllll} [\varepsilon_5,\varepsilon_8] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_1),\ 0)}=\widehat{(-e_1,\ 0)}=-\varepsilon_8; \\ [\varepsilon_5,\varepsilon_9] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_2),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_2),\ 0)}=\widehat{(-e_2,\ 0)}=-\varepsilon_9; \\ [\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_3),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_3),\ 0)}=\widehat{(-e_3,\ 0)}=-\varepsilon_{10}; \\ [\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_1},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_3))} & = & \widehat{(0,-2e_3)}=-2\varepsilon_{11}; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_8] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1),\ 0)} & = & \widehat{(-e_2,\ 0)}=-\varepsilon_9; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_9] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_2),\ 0)} & = & \widehat{(-e_2,\ 0)}=-\varepsilon_9; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_3),\ 0)} & = & \widehat{(0,\ 0)}=0; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_2},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_2}(e_3))} & = & \widehat{(0,\ 0)}=0; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_8] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1),\ 0)} & = & \widehat{(3e_3,\ 0)}=3\varepsilon_{10}; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_9] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_2),\ 0)} & = & \widehat{(0,\ 0)}=0; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_3),\ 0)} & = & \widehat{(-3e_1+3e_2,\ 0)}=-3\varepsilon_8+3\varepsilon_9; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_3},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_3))} & = & \widehat{(0,\ 0)}=0. \end{array}$$

（III）第三，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[(x,\ s),\ (y,\ r)]=(0,\ xy-\overline{y}x)$。

$$\begin{array}{lllll} [\varepsilon_1,\varepsilon_2] & = & [(e_1,0),(e_2,0)] & = & (0,\ 0)=0; \\ [\varepsilon_1,\varepsilon_3] & = & [(e_1,0),(e_3,0)] & = & (0,\ -2e_3)=-2\varepsilon_4; \end{array}$$

$$[\varepsilon_2,\varepsilon_3] \;=\; [(e_2,0),(e_3,0)] \;=\; (0,\,0) \;=\; 0.$$

（IV）第四，我们定义 $[\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1},\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[\,(x,\,s)\,,\;\;(y,\,r)\,]=(0,\,-xy-yx)$。

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_8,\varepsilon_9] &= [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] &= [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(0,\,-2e_3)} = -2\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{10}] &= [\widehat{(e_2,0)},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(0,\,0)} = 0.
\end{aligned}$$

(V) 末尾，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s),(y,r)]=-(rx,0)+V_{x,\;y}+L_sL_r+(sy,0)$。

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_1,\varepsilon_8] &= [(e_1,0),\widehat{(e_1,0)}] = V_{e_1,e_1} = T_{e_1} = \varepsilon_5;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_9] &= [(e_1,0),\widehat{(e_2,0)}] = V_{e_1,e_2} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] &= [(e_1,0),\widehat{(e_3,0)}] = V_{e_1,e_3} = -T_{e_3} = -\varepsilon_7;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] &= [(e_1,0),\widehat{(0,e_3)}] = -\widehat{(e_3,\,0)} = -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_8] &= [(e_2,0),\widehat{(e_1,0)}] = V_{e_2,e_1} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_9] &= [(e_2,0),\widehat{(e_2,0)}] = V_{e_2,e_2} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] &= [(e_2,0),\widehat{(e_3,0)}] = V_{e_2,e_3} = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{11}] &= [(e_2,0),\widehat{(0,e_3)}] = -\widehat{(e_3e_2,0)} = -\widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_8] &= [(e_3,0),\widehat{(e_1,0)}] = V_{e_3,e_1} = T_{e_3} = \varepsilon_7;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_9] &= [(e_3,0),\widehat{(e_2,0)}] = V_{e_3,e_2} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] &= [(e_3,0),\widehat{(e_3,0)}] = V_{e_3,e_3} = T_{e_1}-T_{e_2} = \varepsilon_5-\varepsilon_6;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] &= [(e_3,0),\widehat{(0,e_3)}] = -\widehat{(e_3e_3,0)} = -\widehat{(-e_1+e_2,\,0)} = \varepsilon_8-\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_8] &= [(0,e_3),\widehat{(e_1,0)}] = (e_3,\,0) = \varepsilon_3;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_9] &= [(0,e_3),\widehat{(e_2,0)}] = (e_3e_2,\,0) = (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] &= [(0,e_3),\widehat{(e_3,0)}] = (e_3e_3,\,0) = (-e_1+e_2,\,0) = -\varepsilon_1+\varepsilon_2;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] &= [(0,e_3),\widehat{(0,e_3)}] = L_{e_3}L_{e_3} = -T_{e_1}+T_{e_2} = -\varepsilon_5+\varepsilon_6.
\end{aligned}$$

□

注释74. 考虑 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_4)$ 中的如下基变换：

$$\begin{array}{cccccccccc}
\xi_1 &=& \varepsilon_1-\varepsilon_2, & \xi_2 &=& \varepsilon_2, & \xi_3 &=& \varepsilon_3, & \xi_4 &=& \varepsilon_4,\\
\xi_5 &=& \varepsilon_5-\varepsilon_6, & \xi_6 &=& \varepsilon_6, & \xi_7 &=& \varepsilon_7, & \xi_8 &=& \varepsilon_8-\varepsilon_9,\\
\xi_9 &=& \varepsilon_9, & \xi_{10} &=& \varepsilon_{10}, & \xi_{11} &=& \varepsilon_{11}. & & &
\end{array}$$

在这个新基中，非零乘法变为：

$$\begin{array}{cccccccccc}
[\xi_1,\xi_3] &=& -2\xi_4, & [\xi_1,\xi_5] &=& -\xi_1, & [\xi_1,\xi_7] &=& -3\xi_3,\\
[\xi_1,\xi_8] &=& \xi_5, & [\xi_1,\xi_{10}] &=& -\xi_7, & [\xi_1,\xi_{11}] &=& -\xi_{10},\\
[\xi_2,\xi_6] &=& -\xi_2, & [\xi_2,\xi_9] &=& \xi_6, & [\xi_3,\xi_5] &=& -\xi_3,\\
[\xi_3,\xi_7] &=& 3\xi_1, & [\xi_3,\xi_8] &=& \xi_7, & [\xi_3,\xi_{10}] &=& \xi_5,\\
[\xi_3,\xi_{11}] &=& \xi_8, & [\xi_4,\xi_5] &=& -2\xi_4, & [\xi_4,\xi_8] &=& \xi_3,\\
[\xi_4,\xi_{10}] &=& -\xi_1, & [\xi_4,\xi_{11}] &=& -\xi_5, & [\xi_5,\xi_8] &=& -\xi_8,\\
[\xi_5,\xi_{10}] &=& -\xi_{10}, & [\xi_5,\xi_{11}] &=& -2\xi_{11}, & [\xi_6,\xi_9] &=& -\xi_9,\\
[\xi_7,\xi_8] &=& 3\xi_{10}, & [\xi_7,\xi_{10}] &=& -3\xi_8, & [\xi_8,\xi_{10}] &=& -2\xi_{11}.
\end{array}$$

由此得到 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_4)\cong\mathfrak{sl}_2\oplus\mathfrak{sl}_3$，其中

- $\mathfrak{sl}_2=\langle\xi_2,\,\xi_6,\,\xi_9\rangle$；
- $\mathfrak{sl}_3=\langle\xi_1,\,\xi_3,\,\xi_4,\,\xi_5,\,\xi_7,\,\xi_8,\,\xi_{10},\,\xi_{11}\rangle$.

2.6 AK 构造 A_5

定理 75。 $\mathscr{F}(A_5)$ 是一个 *11* 维李代数，其乘积为 b y

$$\begin{array}{llllllllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] &=& -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_1,\varepsilon_5] &=& -\varepsilon_1, & [\varepsilon_1,\varepsilon_6] &=& -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_7] &=& -3\varepsilon_3, & [\varepsilon_1,\varepsilon_8] &=& \varepsilon_5, & [\varepsilon_1,\varepsilon_9] &=& \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] &=& -\varepsilon_7, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] &=& -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_2,\varepsilon_5] &=& -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_7] &=& -\varepsilon_2, & [\varepsilon_2,\varepsilon_8] &=& \varepsilon_6, & [\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] &=& -\varepsilon_6,\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{11}] &=& \varepsilon_9, & [\varepsilon_3,\varepsilon_5] &=& -\varepsilon_3, & [\varepsilon_3,\varepsilon_6] &=& -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_7] &=& -3\varepsilon_1, & [\varepsilon_3,\varepsilon_8] &=& \varepsilon_7, & [\varepsilon_3,\varepsilon_9] &=& -\varepsilon_6,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] &=& -\varepsilon_5, & [\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] &=& -\varepsilon_8, & [\varepsilon_4,\varepsilon_5] &=& -2\varepsilon_4,\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_8] &=& \varepsilon_3, & [\varepsilon_4,\varepsilon_9] &=& -\varepsilon_2, & [\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] &=& \varepsilon_1,\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] &=& \varepsilon_5, & [\varepsilon_5,\varepsilon_8] &=& -\varepsilon_8, & [\varepsilon_5,\varepsilon_9] &=& -\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] &=& -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] &=& -2\varepsilon_{11}, & [\varepsilon_6,\varepsilon_7] &=& 2\varepsilon_6,\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_8] &=& -\varepsilon_9, & [\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] &=& -\varepsilon_9, & [\varepsilon_7,\varepsilon_8] &=& 3\varepsilon_{10},\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_9] &=& \varepsilon_9, & [\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] &=& 3\varepsilon_8, & [\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] &=& -2\varepsilon_{11}.
\end{array}$$

证明。 根据第2.1小节给出的AK算法，我们定义

$$\mathscr{F}_0=\left\langle T_{e_1}:=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ T_{e_2}:=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ T_{e_3}:=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&1&0\\3&0&0\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Le注意，$L_{e_3}L_{e_3}=T_{e_1}$，并在下方列出元素$T^{\varepsilon}_{e_i}$、$T^{\delta}_{e_i}$、$T^{\varepsilon\delta}_{e_i}$和$V_{e_i,\ e_j}$:

$\overline{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	e_1	$T^{\varepsilon}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1}-\overline{T_{e_1}(e_1)+T_{e_1}(e_1)}$ $=$ $-T_{e_1}$
$\overline{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	e_1	$T^{\delta}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1}+\overline{R_{T_{e_1}(e_1)}}$ $=$ $2T_{e_1}$
R_{e_1}	$=$	T_{e_1}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_1}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_1}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1)}}$ $=$ $-2T_{e_1}$
$\overline{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	e_2	$T^{\varepsilon}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2}-\overline{T_{e_2}(e_1)+T_{e_2}(e_1)}$ $=$ $-T_{e_2}$
$\overline{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	e_2	$T^{\delta}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2}+\overline{R_{T_{e_2}(e_1)}}$ $=$ $T_{e_2}+Re_2$
			$T^{\varepsilon\delta}_{e_2}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_2}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1)}}$ $=$ $-T_{e_2}-R_{e_2}$
$\overline{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	$3e_3$	$T^{\varepsilon}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3}-\overline{T_{e_3}(e_1)+T_{e_3}(e_1)}$ $=$ T_{e_3}
$\overline{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	$-3e_3$	$T^{\delta}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3}+\overline{R_{T_{e_3}(e_1)}}$ $=$ $T_{e_3}-3Re_3$
			$T^{\varepsilon\delta}_{e_3}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_3}+R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1)}}$ $=$ $T_{e_3}-3R_{e_3}$

$$\begin{array}{llllllllll}
V_{e_1,e_1} &=& T_{e_1}, & V_{e_1,e_2} &=& T_{e_2}, & V_{e_1,e_3} &=& -T_{e_3},\\
V_{e_2,e_1} &=& T_{e_2}, & V_{e_2,e_2} &=& 0, & V_{e_2,e_3} &=& -T_{e_2},\\
V_{e_3,e_1} &=& T_{e_3}, & V_{e_3,e_2} &=& -T_{e_2}, & V_{e_3,e_3} &=& -T_{e_1}.
\end{array}$$

现在我们可以确定 $\mathscr{F}(A_5)$ 的乘法表了。

（I）首先，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[E、(x,\ s)]=(E(x),\ E^{\delta}(s))$。

$$\begin{array}{llllllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_1] &=& [T_{e_1},(e_1,0)] &=& \left(T_{e_1}(e_1),T^{\delta}_{e_1}(0)\right) &=& (e_1,\ 0)=\varepsilon_1;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_2] &=& [T_{e_1},(e_2,0)] &=& (T_{e_1}(e_2),T^{\delta}_{e_1}(0)) &=& (e_2,\ 0)=\varepsilon_2;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_3] &=& [T_{e_1},(e_3,0)] &=& (T_{e_1}(e_3),T^{\delta}_{e_1}(0)) &=& (e_3,\ 0)=\varepsilon_3;
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lllllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_4] & = & [T_{e_1},(0,e_3)] & = & (T_{e_1}(0),T^{\delta}_{e_1}(e_3)) & = & (0,\ 2e_3) = 2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_1] & = & [T_{e_2},(e_1,0)] & = & (T_{e_2}(e_1),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (e_2,\ 0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_2] & = & [T_{e_2},(e_2,0)] & = & (T_{e_2}(e_2),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (0,\ 0) = 0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_3] & = & [T_{e_2},(e_3,0)] & = & (T_{e_2}(e_3),T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (e_2,\ 0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_4] & = & [T_{e_2},(0,e_3)] & = & (T_{e_2}(0),T^{\delta}_{e_2}(e_3)) & = & (0,\ 0) = 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_1] & = & [T_{e_3},(e_1,0)] & = & (T_{e_3}(e_1),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (3e_3,\ 0) = 3\varepsilon_3;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_2] & = & [T_{e_3},(e_2,0)] & = & (T_{e_3}(e_2),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (e_2,\ 0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_3] & = & [T_{e_3},(e_3,0)] & = & (T_{e_3}(e_3),T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (3e_1,\ 0) = 3\varepsilon_1;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_4] & = & [T_{e_3},(0,e_3)] & = & (T_{e_3}(0),T^{\delta}_{e_3}(e_3)) & = & (0,\ 0) = 0.
\end{array}
$$

（II）其次，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[E、\frown(x,\ s)] = \overbrace{\varepsilon\quad\varepsilon\delta}(E(x),\ E(s))$。

$$
\begin{array}{lllllll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_8] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_1),\ 0)} = \widehat{(-e_1,\ 0)} = -\varepsilon_8;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_9] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_2),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_2),\ 0)} = \widehat{(-e_2,\ 0)} = -\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_1},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_3),\ 0)} & = & \widehat{(-T_{e_1}(e_3),\ 0)} = \widehat{(-e_3,\ 0)} = -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_1},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_3))} & = & \widehat{(0,\ -2e_3)} = -2\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_8] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1),\ 0)} & = & \widehat{(-e_2,\ 0)} = -\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_9] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_2),\ 0)} & = & \widehat{(0,\ 0)} = 0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_2},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_3),\ 0)} & = & \widehat{(-e_2,\ 0)} = -\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_2},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_2}(e_3))} & = & \widehat{(0,\ 0)} = 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_8] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_1,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1),\ 0)} & = & \widehat{(3e_3,\ 0)} = 3\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_9] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_2),\ 0)} & = & \widehat{(e_2,\ 0)} = \varepsilon_9;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] & = & [T_{e_3},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_3),\ 0)} & = & \widehat{(3e_1,\ 0)} = 3\varepsilon_8;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{11}] & = & [T_{e_3},\widehat{(0,e_3)}] & = & \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_3))} & = & \widehat{(0,\ 0)} = 0.
\end{array}
$$

(III) 第三，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[(x,s),(y,r)] = (0,\ x\bar{y}-yx\bar{)}$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_2] & = & [(e_1,0),(e_2,0)] & = & (0,\ 0) = 0;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] & = & [(e_1,0),(e_3,0)] & = & (0,\ -2e_3) = -2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_3] & = & [(e_2,0),(e_3,0)] & = & (0,\ 0) = 0.
\end{array}
$$

(IV) 第四，我们定义 $[\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1},\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s),(y,r)] = (0,\ xy-yx)$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_8,\varepsilon_9] & = & [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_2,0)}] & = & \widehat{(0,\ 0)} = 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] & = & [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(0,\ -2e_3)} = -2\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{10}] & = & [\widehat{(e_2,0)},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(0,\ 0)} = 0.
\end{array}
$$

(V) 第五，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,\ s)、(y,\ r)] = -(rx,\ 0)+V_{x,\ y}+L_sL_r+(sy,\ 0)$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_8] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_1,e_1} = T_{e_1} = \varepsilon_5;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_9] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_1,e_2} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_1,e_3} = -T_{e_3} = -\varepsilon_7;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] & = & [(e_1,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3,\ 0)} = -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_8] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_2,e_1} = T_{e_2} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_9] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_2,e_2} = 0;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
[\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_3,0)}] & = V_{e_2,e_3} = -T_{e_2} = -\varepsilon_6;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{11}] & = & [(e_2,0),\widehat{(0,e_3)}] & = -\widehat{(e_3e_2,\,0)} = \widehat{(e_2,\,0)} = \varepsilon_9;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_8] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_1,0)}] & = V_{e_3,e_1} = T_{e_3} = \varepsilon_7;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_9] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_2,0)}] & = V_{e_3,e_2} = -T_{e_2} = -\varepsilon_6;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_3,0)}] & = V_{e_3,e_3} = -T_{e_1} = -\varepsilon_5;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] & = & [(e_3,0),\widehat{(0,e_3)}] & = -\widehat{(e_3e_3,\,0)} = -\widehat{(e_1,0)} = -\varepsilon_8;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_8] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_1,0)}] & = (e_3,\,0) = \varepsilon_3;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_9] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_2,0)}] & = (e_3e_2,\,0) = (-e_2,\,0) = -\varepsilon_2;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_3,0)}] & = (e_3e_3,\,0) = (e_1,\,0) = \varepsilon_1;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] & = & [(0,e_3),\widehat{(0,e_3)}] & = L_{e_3}L_{e_3} = T_{e_1} = \varepsilon_5.
\end{array}
$$

（VI）末尾，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_0]$。

$$
\begin{array}{lcll}
[\varepsilon_5,\varepsilon_6] & = & [T_{e_1},T_{e_2}] & = 0.\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_7] & = & [T_{e_1},T_{e_3}] & = 0.\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_7] & = & [T_{e_2},T_{e_3}] & = 2T_{e_2} = 2\varepsilon_6.
\end{array}
$$

□

注记 76。 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_5)$ 是完美的，且 $\mathscr{F}(\mathrm{A}_5) = S \ltimes R$，其中：

- $S = \langle \varepsilon_1,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \varepsilon_5,\ \varepsilon_7,\ \varepsilon_8,\ \varepsilon_{10},\ \varepsilon_{11}\rangle \cong \mathfrak{sl}_3$;
- $R = \langle \varepsilon_2,\quad \varepsilon_6,\quad \varepsilon_9\rangle$ 是阿贝尔根。

2.7 AK 构造（针对S_1）

$\mathscr{F}(\mathrm{S}_1)$ 的维数为 13。现在我们固定以下记号：

$$
\begin{array}{lcll}
\mathscr{F}_2 & = & (0,\mathscr{S}) & = \langle \varepsilon_4 := (0,e_2),\ \varepsilon_5 := (0,e_3)\rangle;\\
\mathscr{F}_1 & = & (\mathscr{A},0) & = \langle \varepsilon_1 := (e_1,0),\ \varepsilon_2 := (e_2,0),\ \varepsilon_3 := (e_3,0)\rangle;\\
\mathscr{F}_0 & = & \mathrm{Instr}(\mathscr{A}) & = \langle \varepsilon_6 := T_{e_1},\ \varepsilon_7 := T_{e_2},\ \varepsilon_8 := T_{e_3}\rangle;\\
\mathscr{F}_{-1} & = & \widehat{(\mathscr{A},0)} & = \langle \varepsilon_9 := \widehat{(e_1,0)},\ \varepsilon_{10} := \widehat{(e_2,0)},\ \varepsilon_{11} := \widehat{(e_3,0)}\rangle;\\
\mathscr{F}_{-2} & = & \widehat{(0,\mathscr{S})} & = \langle \varepsilon_{12} := \widehat{(0,e_2)},\ \varepsilon_{13} := \widehat{(0,e_3)}\rangle.
\end{array}
$$

定理 77. $\mathscr{F}(\mathrm{S}_1)$ 是一个 *13*维李代数，其乘积定义如下：

$$
\begin{array}{llllllllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_2] & = & -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_1,\varepsilon_3] & = & -2\varepsilon_5, & [\varepsilon_1,\varepsilon_6] & = & -\varepsilon_1,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_7] & = & -3\varepsilon_2, & [\varepsilon_1,\varepsilon_8] & = & -3\varepsilon_3, & [\varepsilon_1,\varepsilon_9] & = & \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] & = & -\varepsilon_7, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] & = & -\varepsilon_8, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{12}] & = & -\varepsilon_{10},\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{13}] & = & -\varepsilon_{11}, & [\varepsilon_2,\varepsilon_6] & = & -\varepsilon_2, & [\varepsilon_2,\varepsilon_9] & = & \varepsilon_7,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_6] & = & -\varepsilon_3, & [\varepsilon_3,\varepsilon_9] & = & \varepsilon_8, & [\varepsilon_4,\varepsilon_6] & = & -2\varepsilon_4,\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_9] & = & \varepsilon_2, & [\varepsilon_5,\varepsilon_6] & = & -2\varepsilon_5, & [\varepsilon_5,\varepsilon_9] & = & \varepsilon_3,\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_9] & = & -\varepsilon_9, & [\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] & = & -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] & = & -\varepsilon_{11},\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{12}] & = & -2\varepsilon_{12}, & [\varepsilon_6,\varepsilon_{13}] & = & -2\varepsilon_{13}, & [\varepsilon_7,\varepsilon_9] & = & 3\varepsilon_{10},\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_9] & = & 3\varepsilon_{11}, & [\varepsilon_9,\varepsilon_{10}] & = & -2\varepsilon_{12}, & [\varepsilon_9,\varepsilon_{11}] & = & -2\varepsilon_{13}.
\end{array}
$$

证明. 根据第2.1小节中给出的 AK算法，我们定义

$$\mathscr{F}_0 = \left\langle T_{e_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ T_{e_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_{e_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

容易看出，$[\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_0] = 0$。
下面给出元素 $T^{\varepsilon}_{e_i}$、$T^{\delta}_{e_i}$、$T^{\varepsilon\delta}_{e_i}$ 和 V_{e_i,e_j}的列表:

$T_{e_1}(e_1)$	$=$	e_1	$T^{\varepsilon}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1} - T_{T_{e_1}(e_1)+T_{e_1}(e_1)}$	$=$	$-T_{e_1}$
$\overline{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	e_1	$T^{\delta}_{e_1}$	$=$	$T_{e_1} + R_{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	$2T_{e_1}$
R_{e_1}	$=$	T_{e_1}	$T^{\varepsilon\delta}_{e_1}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_1} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1)}}$	$=$	$-2T_{e_1}$
$T_{e_2}(e_1)$	$=$	$3e_2$	$T^{\varepsilon}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2} - T_{T_{e_2}(e_1)+T_{e_2}(e_1)}$	$=$	T_{e_2}
$\overline{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	$-3e_2$	$T^{\delta}_{e_2}$	$=$	$T_{e_2} + R_{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	0
R_{e_2}	$=$	$\frac{1}{3}T_{e_2}$	$T^{\varepsilon\delta}_{e_2}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_2} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1)}}$	$=$	0
$T_{e_3}(e_1)$	$=$	$3e_3$	$T^{\varepsilon}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3} - T_{T_{e_3}(e_1)+T_{e_3}(e_1)}$	$=$	T_{e_3}
$\overline{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	$-3e_3$	$T^{\delta}_{e_3}$	$=$	$T_{e_3} + R_{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	0
R_{e_3}	$=$	$\frac{1}{3}T_{e_3}$	$T^{\varepsilon\delta}_{e_3}$	$=$	$T^{\varepsilon}_{e_3} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1)}}$	$=$	0

$$\begin{array}{lllllllll} V_{e_1,e_1} & = & T_{e_1}, & V_{e_1,e_2} & = & -T_{e_2}, & V_{e_1,e_3} & = & -T_{e_3}, \\ V_{e_2,e_1} & = & T_{e_2}, & V_{e_2,e_2} & = & 0, & V_{e_2,e_3} & = & 0, \\ V_{e_3,e_1} & = & T_{e_3}, & V_{e_3,e_2} & = & 0, & V_{e_3,e_3} & = & 0. \end{array}$$

现在我们可以确定 $\mathscr{F}(S_1)$ 的乘法表了。

（I）首先，我们定义 $[\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2]$，即 $[E、(x,s)] = (E(x), E^{\delta}(s)$。

$$\begin{array}{lllllll} [\varepsilon_6,\varepsilon_1] & = & [T_{e_1},(e_1,0)] & = & \left(T_{e_1}(e_1), T^{\delta}_{e_1}(0)\right) & = & (e_1,\ 0) = \varepsilon_1; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_2] & = & [T_{e_1},(e_2,0)] & = & (T_{e_1}(e_2), T^{\delta}_{e_1}(0)) & = & (e_2,\ 0) = \varepsilon_2; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_3] & = & [T_{e_1},(e_3,0)] & = & (T_{e_1}(e_3), T^{\delta}_{e_1}(0)) & = & (e_3,\ 0) = \varepsilon_3; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_4] & = & [T_{e_1},(0,e_2)] & = & (T_{e_1}(0), T^{\delta}_{e_1}(e_2)) & = & (0,\ 2e_2) = 2\varepsilon_4; \\ [\varepsilon_6,\varepsilon_5] & = & [T_{e_1},(0,e_3)] & = & (T_{e_1}(0), T^{\delta}_{e_1}(e_3)) & = & (0,\ 2e_3) = 2\varepsilon_5; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_1] & = & [T_{e_2},(e_1,0)] & = & (T_{e_2}(e_1), T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (3e_2,\ 0) = 3\varepsilon_2; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_2] & = & [T_{e_2},(e_2,0)] & = & (T_{e_2}(e_2),\ T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (0,\ 0) = 0; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_3] & = & [T_{e_2},(e_3,0)] & = & (T_{e_2}(e_3), T^{\delta}_{e_2}(0)) & = & (0,\ 0) = 0; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_4] & = & [T_{e_2},(0,e_2)] & = & (T_{e_2}(0), T^{\delta}_{e_2}(e_2)) & = & (0,\ 0) = 0; \\ [\varepsilon_7,\varepsilon_5] & = & [T_{e_2},(0,e_3)] & = & (T_{e_2}(0), T^{\delta}_{e_2}(e_3)) & = & (0,\ 0) = 0; \\ [\varepsilon_8,\varepsilon_1] & = & [T_{e_3},(e_1,0)] & = & (T_{e_3}(e_1), T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (3e_3,\ 0) = 3\varepsilon_3; \\ [\varepsilon_8,\varepsilon_2] & = & [T_{e_3},(e_2,0)] & = & (T_{e_3}(e_2), T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (0,\ 0) = 0; \\ [\varepsilon_8,\varepsilon_3] & = & [T_{e_3},(e_3,0)] & = & (T_{e_3}(e_3), T^{\delta}_{e_3}(0)) & = & (0,\ 0) = 0; \\ [\varepsilon_8,\varepsilon_4] & = & [T_{e_3},(0,e_2)] & = & (T_{e_3}(0), T^{\delta}_{e_3}(e_2)) & = & (0,\ 0) = 0. \\ [\varepsilon_8,\varepsilon_5] & = & [T_{e_3},(0,e_3)] & = & (T_{e_3}(0), T^{\delta}_{e_3}(e_3)) & = & (0,\ 0) = 0. \end{array}$$

(II) 第二，我们定义 $[\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_{-2} + \mathscr{F}_{-1}]$，即 $[E,\ \frown(x,s)] = \overbrace{\varepsilon \quad \varepsilon\delta}(E(x), E(s))$。

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_6,\varepsilon_9] &= [T_{e_1},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1),\,0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_1),\,0)} = \widehat{(-e_1,\,0)} = -\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] &= [T_{e_1},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_2),\,0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_2),\,0)} = \widehat{(-e_2,\,0)} = -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] &= [T_{e_1},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_3),\,0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_3),\,0)} = \widehat{(-e_3,\,0)} = -\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{12}] &= [T_{e_1},\widehat{(0,e_2)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_2))} = \widehat{(0,\,-2e_2)} = -2\varepsilon_{12};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{13}] &= [T_{e_1},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_3))} = \widehat{(0,\,-2e_3)} = -2\varepsilon_{13};\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_9] &= [T_{e_2},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1),\,0)} = \widehat{(3e_2,\,0)} = 3\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] &= [T_{e_2},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_2),\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{11}] &= [T_{e_2},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_3),\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{12}] &= [T_{e_2},\widehat{(0,e_2)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_2),\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{13}] &= [T_{e_2},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_2}(e_3))} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_9] &= [T_{e_3},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1),\,0)} = \widehat{(3e_3,\,0)} = 3\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] &= [T_{e_3},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_2),\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{11}] &= [T_{e_3},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_3),\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{12}] &= [T_{e_3},\widehat{(0,e_2)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_2))} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{13}] &= [T_{e_3},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_3))} = \widehat{(0,\,0)} = 0.
\end{aligned}
$$

(III) 第三，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[(x,s),(y,r)]=(0,x\bar{y}-y\bar{x})$。

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_1,\varepsilon_2] &= [(e_1,0),(e_2,0)] = (0,\,-2e_2) = -2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] &= [(e_1,0),(e_3,0)] = (0,\,-2e_3) = -2\varepsilon_5;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_3] &= [(e_2,0),(e_3,0)] = (0,\,0) = 0.
\end{aligned}
$$

(IV) 第四，我们定义 $[\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1},\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,\,s),\,(y,\,r)]=(0,\,x\bar{y}-y\bar{x})$。

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_9,\varepsilon_{10}] &= [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(0,\,-2e_2)} = -2e_{12};\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{11}] &= [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(0,\,-2e_3)} = -2\varepsilon_{13};\\
[\varepsilon_{10},\varepsilon_{11}] &= [\widehat{(e_2,0)},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(0,\,0)} = 0.
\end{aligned}
$$

(V) End，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,\,s),\,(y,\,r)]=-(rx,\,0)+V_{x,\,y}+L_sL_r+(sy,\,0)$).

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_1,\varepsilon_9] &= [(e_1,0),\widehat{(e_1,0)}] = V_{e_1,e_1} = T_{e_1} = \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] &= [(e_1,0),\widehat{(e_2,0)}] = V_{e_1,e_2} = -T_{e_2} = -\varepsilon_7;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] &= [(e_1,0),\widehat{(e_3,0)}] = V_{e_1,e_3} = -T_{e_3} = -\varepsilon_8;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{12}] &= [(e_1,0),\widehat{(0,e_2)}] = -\widehat{(e_2,0)} = -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{13}] &= [(e_1,0),\widehat{(0,e_3)}] = -\widehat{(e_3,0)} = -\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_9] &= [(e_2,0),\widehat{(e_1,0)}] = V_{e_2,e_1} = T_{e_2} = \varepsilon_7;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{12}] &= [(e_2,0),\widehat{(0,e_3)}] = -\widehat{(e_3e_2,\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] &= [(e_2,0),\widehat{(e_2,0)}] = V_{e_2,e_2} = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{11}] &= [(e_2,0),\widehat{(e_3,0)}] = V_{e_2,e_3} = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{12}] &= [(e_2,0),\widehat{(0,e_2)}] = 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{13}] &= [(e_2,0),\widehat{(0,e_3)}] = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_9] &= [(e_3,0),\widehat{(e_1,0)}] = V_{e_3,e_1} = T_{e_3} = \varepsilon_8;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] &= [(e_3,0),\widehat{(e_2,0)}] = V_{e_3,e_2} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] &= [(e_3,0),\widehat{(e_3,0)}] = V_{e_3,e_3} = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
[\varepsilon_3,\varepsilon_{12}] &=& [(e_3,0),\widehat{(0,e_2)}] &= -\widehat{(e_3e_2,0)} = -\widehat{(0,\ 0)} = 0;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{13}] &=& [(e_3,0),\widehat{(0,e_3)}] &= -\widehat{(e_3e_3,\ 0)} = -\widehat{(0,\ 0)} = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_9] &=& [(0,e_3),\widehat{(e_1,0)}] &= (e_2,\ 0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] &=& [(0,e_3),\widehat{(e_2,0)}] &= (e_3e_2,\ 0) = (0,\ 0) = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] &=& [(0,e_3),\widehat{(e_3,0)}] &= (e_3e_3,\ 0) = (0,\ 0) = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{12}] &=& [(0,e_2),\widehat{(0,e_2)}] &= L_{e_2}L_{e_2} = 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{13}] &=& [(0,e_3),\widehat{(0,e_3)}] &= L_{e_2}L_{e_3} = 0;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_9] &=& [(0,e_3),\widehat{(e_1,0)}] &= (e_3,\ 0) = \varepsilon_3;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] &=& [(0,e_3),\widehat{(e_2,0)}] &= (e_3e_2,\ 0) = (0,\ 0) = 0;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] &=& [(0,e_3),\widehat{(e_3,0)}] &= (e_3e_3,\ 0) = (0,\ 0) = 0;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{12}] &=& [(0,e_3),\widehat{(0,e_2)}] &= L_{e_3}L_{e_2} = 0;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{13}] &=& [(0,e_3),\widehat{(0,e_3)}] &= L_{e_3}L_{e_3} = 0.
\end{array}
$$

□

注记 78。 $\mathscr{F}(\mathrm{S}_1)$ 是完美的，且 $\mathscr{F}(\mathrm{S}_1) = S \ltimes R$，其中

- $S = \left\langle \varepsilon_1,\ \varepsilon_6,\ \varepsilon_9 \right\rangle \cong \mathfrak{sl}_2$;
- $R = \left\langle \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \varepsilon_5,\ \varepsilon_7,\ \varepsilon_8,\ \varepsilon_{10},\ \varepsilon_{11},\ \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{13} \right\rangle$ *is the abelian radical.*

2.8 AK 构造：针对S_2

$\mathscr{F}(\mathrm{S}_2)$ 的维数为 14。现在固定以下记号：

$$
\begin{array}{lcll}
\mathscr{F}_2 &=& (0,\mathscr{S}) &= \left\langle \varepsilon_4 := (0,e_2),\ \varepsilon_5 := (0,e_3) \right\rangle;\\
\mathscr{F}_1 &=& (\mathscr{A},0) &= \left\langle \varepsilon_1 := (e_1,0),\ \varepsilon_2 := (e_2,0),\ \varepsilon_3 := (e_3,0) \right\rangle;\\
\mathscr{F}_0 &=& \mathrm{Instr}(\mathscr{A}) &= \left\langle \varepsilon_6 := T_{e_1},\ \varepsilon_7 := T_{e_2},\ \varepsilon_8 := T_{e_3},\ \varepsilon_9 := D_{e_2,e_3} \right\rangle;\\
\mathscr{F}_{-1} &=& \widehat{(\mathscr{A},0)} &= \left\langle \varepsilon_{10} := \widehat{(e_1,0)},\ \varepsilon_{11} := \widehat{(e_2,0)},\ \varepsilon_{12} := \widehat{(e_3,0)} \right\rangle;\\
\mathscr{F}_{-2} &=& \widehat{(0,\mathscr{S})} &= \left\langle \varepsilon_{13} := \widehat{(0,e_2)},\ \varepsilon_{14} := \widehat{(0,e_3)} \right\rangle.
\end{array}
$$

定理 79. $\mathscr{F}(\mathrm{S}_2)$ 是一个 14 维李代数，其乘法定义如下：

$$
\begin{array}{llllllllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_2] &=& -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_1,\varepsilon_3] &=& -2\varepsilon_5, & [\varepsilon_1,\varepsilon_6] &=& -\varepsilon_1,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_7] &=& -3\varepsilon_2, & [\varepsilon_1,\varepsilon_8] &=& -3\varepsilon_3, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] &=& \varepsilon_6,\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] &=& -\varepsilon_7, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{12}] &=& -\varepsilon_8, & [\varepsilon_1,\varepsilon_{13}] &=& -\varepsilon_{11},\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{14}] &=& -\varepsilon_{12}, & [\varepsilon_2,\varepsilon_3] &=& -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_2,\varepsilon_6] &=& -\varepsilon_2,\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_8] &=& -\varepsilon_2, & [\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] &=& \varepsilon_7, & [\varepsilon_2,\varepsilon_{12}] &=& \frac{1}{3}\varepsilon_7 - \frac{8}{3}\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{14}] &=& \varepsilon_{11}, & [\varepsilon_3,\varepsilon_6] &=& -\varepsilon_3, & [\varepsilon_3,\varepsilon_7] &=& \varepsilon_2,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_8] &=& -3\varepsilon_1, & [\varepsilon_3,\varepsilon_9] &=& -\varepsilon_2, & [\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] &=& \varepsilon_8,\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] &=& -\frac{1}{3}\varepsilon_7 + \frac{8}{3}\varepsilon_9, & [\varepsilon_3,\varepsilon_{12}] &=& -\varepsilon_6, & [\varepsilon_3,\varepsilon_{13}] &=& -\varepsilon_{11},\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{14}] &=& -\varepsilon_{10}, & [\varepsilon_4,\varepsilon_6] &=& -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_4,\varepsilon_8] &=& 2\varepsilon_4,\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] &=& \varepsilon_2, & [\varepsilon_4,\varepsilon_{12}] &=& \varepsilon_2, & [\varepsilon_4,\varepsilon_{14}] &=& \frac{1}{3}\varepsilon_7 + \frac{4}{3}\varepsilon_9,\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_6] &=& -2\varepsilon_5, & [\varepsilon_5,\varepsilon_7] &=& -2\varepsilon_4, & [\varepsilon_5,\varepsilon_9] &=& -\varepsilon_4,\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] &=& \varepsilon_3, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] &=& -\varepsilon_2, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{12}] &=& \varepsilon_1,\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{13}] &=& -\frac{1}{3}\varepsilon_7 - \frac{4}{3}\varepsilon_9, & [\varepsilon_5,\varepsilon_{14}] &=& \varepsilon_6, & [\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] &=& -\varepsilon_{10},\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] &=& -\varepsilon_{11}, & [\varepsilon_6,\varepsilon_{12}] &=& -\varepsilon_{12}, & [\varepsilon_6,\varepsilon_{13}] &=& -2\varepsilon_{13},\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{14}] &=& -2\varepsilon_{14}, & [\varepsilon_7,\varepsilon_8] &=& -2\varepsilon_7 + 8\varepsilon_9, & [\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] &=& 3\varepsilon_{11},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
[\varepsilon_7,\varepsilon_{12}] = -\varepsilon_{11}, & [\varepsilon_7,\varepsilon_{14}] = 2\varepsilon_{13}, & [\varepsilon_8,\varepsilon_9] = -\varepsilon_7, \\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] = 3\varepsilon_{12}, & [\varepsilon_8,\varepsilon_{11}] = \varepsilon_{11}, & [\varepsilon_8,\varepsilon_{12}] = 3\varepsilon_{10}, \\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{13}] = -2\varepsilon_{13}, & [\varepsilon_9,\varepsilon_{12}] = \varepsilon_{11}, & [\varepsilon_9,\varepsilon_{14}] = \varepsilon_{13}, \\
[\varepsilon_{10},\varepsilon_{11}] = -2\varepsilon_{13}, & [\varepsilon_{10},\varepsilon_{12}] = -2\varepsilon_{14}, & [\varepsilon_{11},\varepsilon_{12}] = -2\varepsilon_{13}.
\end{array}
$$

证明. 按照第2.1小节给出的 AK算法，我们定义

$$
\mathscr{F}_0 = \left\langle T_{e_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{e_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{e_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_{e_2,e_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.
$$

$$
\left\langle R_{e_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{e_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_{e_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.
$$

注意到$L_{e_3}L_{e_3} = T_{e_1}$，并在下方列出$T^{\varepsilon}_{e_i}$、$T^{\delta}_{e_i}$、$T^{\varepsilon\delta}_{e_i}$、$D^{\varepsilon}_{e_2,\ e_3}$,$D^{\delta}_{e_2,\ e_3}$,$D^{\varepsilon\delta}_{e_2,\ e_3}$,以及$V_{e_i,\ e_j}$:

$T_{e_1}(e_1)$	$= e_1$	$T^{\varepsilon}_{e_1}$	$= T_{e_1} - T_{T_{e_1}(e_1)} + T_{\overline{T_{e_1}(e_1)}}$	$=$	$-T_{e_1}$
$\overline{T_{e_1}(e_1)}$	$= e_1$	$T^{\delta}_{e_1}$	$= T_{e_1} + R_{T_{e_1}(e_1)}$	$=$	$2T_{e_1}$
R_{e_1}	$= T_{e_1}$	$T^{\varepsilon\delta}_{e_1}$	$= T^{\varepsilon}_{e_1} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1)}}$	$=$	$-2T_{e_1}$
$T_{e_2}(e_1)$	$= 3e_2$	$T^{\varepsilon}_{e_2}$	$= T_{e_2} - T_{T_{e_2}(e_1)} + T_{\overline{T_{e_2}(e_1)}}$	$=$	T_{e_2}
$\overline{T_{e_2}(e_1)}$	$= -3e_2$	$T^{\delta}_{e_2}$	$= T_{e_2} + R_{T_{e_2}(e_1)}$	$=$	$2D_{e_2,\ e_3}$
		$T^{\varepsilon\delta}_{e_2}$	$= T^{\varepsilon}_{e_2} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1)}}$	$=$	$2D_{e_2,e_3}$
$T_{e_3}(e_1)$	$= 3e_3$	$T^{\varepsilon}_{e_3}$	$= T_{e_3} - T_{T_{e_3}(e_1)} + T_{\overline{T_{e_3}(e_1)}}$	$=$	T_{e_3}
$\overline{T_{e_3}(e_1)}$	$= -3e_3$	$T^{\delta}_{e_3}$	$= T_{e_3} + R_{T_{e_3}(e_1)}$	$=$	$T_{e_3} - 3Re_3$
		$T^{\varepsilon\delta}_{e_3}$	$= T^{\varepsilon}_{e_3} + R_{\overline{T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1)}} = D_{e_2,e_3}$	$=$	$T_{e_3} - 3R_{e_3}$
$D_{e_2,\ e_3}(e_1)$	$= 0$	$D^{\varepsilon}_{e_2,e_3}$	$= D^{\varepsilon\delta}_{e_2,e_3}$	$=$	$D_{e_2,\ e_3}$

$$
\begin{array}{llllllll}
V_{e_1,e_1} = T_{e_1}, & V_{e_1,e_2} = -T_{e_2}, & & V_{e_1,e_3} = -T_{e_3}, \\
V_{e_2,e_1} = T_{e_2}, & V_{e_2,e_2} = 0, & & V_{e_2,e_3} = \frac{1}{3}T_{e_2} - \frac{8}{3}D_{e_2,e_3}, \\
V_{e_3,e_1} = T_{e_3}, & V_{e_3,e_2} = -\frac{1}{3}T_{e_2} + \frac{8}{3}D_{e_2,e_3},, & & V_{e_3,e_3} = -T_{e_1}.
\end{array}
$$

现在我们可以确定 $\mathscr{F}(S_2)$ 的乘法表。

(I) 首先，我们定义 $[\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2]$，即 $[E、(x,s)] = (E(x), E^{\delta}(s)$。

$$
\begin{array}{llllll}
[\varepsilon_6,\varepsilon_1] = [T_{e_1},(e_1,0)] = \left(T_{e_1}(e_1), T^{\delta}_{e_1}(0)\right) = (e_1,\ 0) = \varepsilon_1; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_2] = [T_{e_1},(e_2,0)] = (T_{e_1}(e_2), T^{\delta}_{e_1}(0)) = (e_2,\ 0) = \varepsilon_2; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_3] = [T_{e_1},(e_3,0)] = (T_{e_1}(e_3), T^{\delta}_{e_1}(0)) = (e_3,\ 0) = \varepsilon_3; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_4] = [T_{e_1},(0,e_2)] = (T_{e_1}(0), T^{\delta}_{e_1}(e_2)) = (0,\ 2e_2) = 2\varepsilon_4; \\
[\varepsilon_6,\varepsilon_5] = [T_{e_1},(0,e_3)] = (T_{e_1}(0), T^{\delta}_{e_1}(e_3)) = (0,\ 2e_3) = 2\varepsilon_5; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_1] = [T_{e_2},(e_1,0)] = (T_{e_2}(e_1), T^{\delta}_{e_2}(0)) = (3e_2,\ 0) = 3\varepsilon_2; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_2] = [T_{e_2},(e_2,0)] = (T_{e_2}(e_2), T^{\delta}_{e_2}(0)) = (0,\ 0) = 0; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_3] = [T_{e_2},(e_3,0)] = (T_{e_2}(e_3), T^{\delta}_{e_2}(0)) = (-e_2,\ 0) = -\varepsilon_2; \\
[\varepsilon_7,\varepsilon_4] = [T_{e_2},(0,e_2)] = (T_{e_2}(0), T^{\delta}_{e_2}(e_2)) = (0,\ 0) = 0;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_7,\varepsilon_5] = [T_{e_2},(0,e_3)] = (T_{e_2}(0),T^{\delta}_{e_2}(e_3)) = (0,\,2e_2) = 2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_1] = [T_{e_3},(e_1,0)] = (T_{e_3}(e_1),T^{\delta}_{e_3}(0)) = (3e_3,\,0) = 3\varepsilon_3;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_2] = [T_{e_3},(e_2,0)] = (T_{e_3}(e_2),T^{\delta}_{e_3}(0)) = (e_2,\,0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_3] = [T_{e_3},(e_3,0)] = (T_{e_3}(e_3),T^{\delta}_{e_3}(0)) = (3e_1,\,0) = 3\varepsilon_1;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_4] = [T_{e_3},(0,e_2)] = (T_{e_3}(0),T^{\delta}_{e_3}(e_2)) = (0,\,-2e_2) = -2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_5] = [T_{e_3},(0,e_3)] = (T_{e_3}(0),T^{\delta}_{e_3}(e_3)) = (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_1] = [D_{e_2,e_3},(e_1,0)] = (D_{e_2,e_3}(e_1),D^{\delta}_{e_2,e_3}(0)) = (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_2] = [D_{e_2,e_3},(e_2,0)] = (D_{e_2,e_3}(e_2),D^{\delta}_{e_2,e_3}(0)) = (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_3] = [D_{e_2,e_3},(e_3,0)] = (D_{e_2,e_3}(e_3),D^{\delta}_{e_2,e_3}(0)) = (e_2,\,0) = \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_4] = [D_{e_2,e_3},(0,e_2)] = (D_{e_2,e_3}(0),D^{\delta}_{e_2,e_3}(e_2)) = (0,\,0) = 0;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_5] = [D_{e_2,e_3},(0,e_3)] = (D_{e_2,e_3}(0),D^{\delta}_{e_2,e_3}(e_3)) = (0,\,e_2) = \varepsilon_4.
\end{array}
$$

(II) 其次，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[E、\overset{\frown}{\ }(x,s)] = \overbrace{\varepsilon\qquad\varepsilon\delta}(E(x),E(s)$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_6,\varepsilon_{10}] = [T_{e_1},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_1),\,0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_1),\,0)} = \widehat{(-e_1,\,0)} = -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{11}] = [T_{e_1},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_2),\,0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_2),\,0)} = \widehat{(-e_2,\,0)} = -\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{12}] = [T_{e_1},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_1}(e_3),\,0)} = \widehat{(-T_{e_1}(e_3),\,0)} = \widehat{(-e_3,\,0)} = -\varepsilon_{12};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{13}] = [T_{e_1},\widehat{(0,e_2)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_2))} = \widehat{(0,\,-2e_2)} = -2\varepsilon_{13};\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_{14}] = [T_{e_1},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_1}(e_3))} = \widehat{(0,\,-2e_3)} = -2\varepsilon_{14};\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{10}] = [T_{e_2},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_1),\,0)} = \widehat{(3e_2,\,0)} = 3\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{11}] = [T_{e_2},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_2),\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{12}] = [T_{e_2},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_2}(e_3),\,0)} = \widehat{(-e_2,\,0)} = -\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{13}] = [T_{e_2},\widehat{(0,e_2)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_2}(e_2))} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_{14}] = [T_{e_2},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_2}(e_3))} = \widehat{(0,2e_2)} = 2\varepsilon_{13};\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{10}] = [T_{e_3},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_1),\,0)} = \widehat{(3e_3,\,0)} = 3\varepsilon_{12};\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{11}] = [T_{e_3},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_2),\,0)} = \widehat{(e_2,\,0)} = \varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{12}] = [T_{e_3},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(T^{\varepsilon}_{e_3}(e_3),\,0)} = \widehat{(3e_1,\,0)} = 3\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{13}] = [T_{e_3},\widehat{(0,e_2)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_2))} = \widehat{(0,\,-2e_2)} = -2\varepsilon_{13};\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_{14}] = [T_{e_3},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,T^{\varepsilon\delta}_{e_3}(e_3))} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{10}] = [D_{e_2,e_3},\widehat{(e_1,0)}] = \widehat{(D^{\varepsilon}_{e_2,e_3}(e_1),\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{11}] = [D_{e_2,e_3},\widehat{(e_2,0)}] = \widehat{(D^{\varepsilon}_{e_2,e_3}(e_2),\,0)} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{12}] = [D_{e_2,e_3},\widehat{(e_3,0)}] = \widehat{(D^{\varepsilon}_{e_2,e_3}(e_3),\,0)} = \widehat{(e_2,\,0)} = \varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{13}] = [D_{e_2,e_3},\widehat{(0,e_2)}] = \widehat{(0,D^{\varepsilon\delta}_{e_2,e_3}(e_2))} = \widehat{(0,\,0)} = 0;\\
[\varepsilon_9,\varepsilon_{14}] = [D_{e_2,e_3},\widehat{(0,e_3)}] = \widehat{(0,D^{\varepsilon\delta}_{e_2,e_3}(e_3))} = \widehat{(0,\,e_2)} = \varepsilon_{13}.
\end{array}
$$

（III）第三，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2]$，即 $[(x,s),\ (y,r)]=(0,x\bar{y}-yx\bar{]}$。

$$
\begin{array}{lllll}
[\varepsilon_1,\varepsilon_2] = [(e_1,0),(e_2,0)] = (0,\,-2e_2) = -2\varepsilon_4;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_3] = [(e_1,0),(e_3,0)] = (0,\,-2e_3) = -2\varepsilon_5;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_3] = [(e_2,0),(e_3,0)] = (0,\,-2e_2) = -2\varepsilon_4;
\end{array}
$$

$\overbrace{\ \ \ \

$$
\begin{array}{rcccl}
[\varepsilon_{10},\varepsilon_{12}] & = & [\widehat{(e_1,0)},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(0,\,-2e_3)} \;=\; -2\varepsilon_{14};\\
[\varepsilon_{11},\varepsilon_{12}] & = & [\widehat{(e_2,0)},\widehat{(e_3,0)}] & = & \widehat{(0,\,-2e_2)} \;=\; -2\varepsilon_{13}.
\end{array}
$$

（V）Fif $\widehat{\quad}\quad\widehat{\quad}$th，我们定义 $[\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_{-2}+\mathscr{F}_{-1}]$，即 $[(x,s),(y,r)]=-(rx,0)+V_{x,y}+L_sL_r+(sy,0$).

$$
\begin{array}{rcccl}
[\varepsilon_1,\varepsilon_{10}] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_1,e_1} \;=\; T_{e_1} \;=\; \varepsilon_6;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{11}] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_1,e_2} \;=\; -T_{e_2} \;=\; -\varepsilon_7;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{12}] & = & [(e_1,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_1,e_3} \;=\; -T_{e_3} \;=\; -\varepsilon_8;\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{13}] & = & [(e_1,0),\widehat{(0,e_2)}] & = & -\widehat{(e_2,0)} \;=\; -\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_1,\varepsilon_{14}] & = & [(e_1,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3,0)} \;=\; -\varepsilon_{12};\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{10}] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_2,e_1} \;=\; T_{e_2} \;=\; \varepsilon_7;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{11}] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_2,e_2} \;=\; 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{12}] & = & [(e_2,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_2,e_3} \;=\; \frac{1}{3}T_{e_2}-\frac{8}{3}D_{e_2,e_3} \;=\; \frac{1}{3}\varepsilon_7-\frac{8}{3}\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{13}] & = & [(e_2,0),\widehat{(0,e_2)}] & = & -\widehat{(e_2e_2,0)} \;=\; -\widehat{(0,\,0)} \;=\; 0;\\
[\varepsilon_2,\varepsilon_{14}] & = & [(e_2,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3e_2,\,0)} \;=\; \widehat{(e_2,\,0)} \;=\; \varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{10}] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_1,0)}] & = & V_{e_3,e_1} \;=\; T_{e_3} \;=\; \varepsilon_8;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{11}] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_2,0)}] & = & V_{e_3,e_2} \;=\; -\frac{1}{3}T_{e_2}+\frac{8}{3}D_{e_2,e_3} \;=\; -\frac{1}{3}\varepsilon_7+\frac{8}{3}\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{12}] & = & [(e_3,0),\widehat{(e_3,0)}] & = & V_{e_3,e_3} \;=\; -T_{e_1} \;=\; -\varepsilon_6;\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{13}] & = & [(e_3,0),\widehat{(0,e_2)}] & = & -\widehat{(e_2e_3,0)} \;=\; -\widehat{(e_2,\,0)} \;=\; -\varepsilon_{11};\\
[\varepsilon_3,\varepsilon_{14}] & = & [(e_3,0),\widehat{(0,e_3)}] & = & -\widehat{(e_3e_3,\,0)} \;=\; -\widehat{(e_1,\,0)} \;=\; -\varepsilon_{10};\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{10}] & = & [(0,e_2),\widehat{(e_1,0)}] & = & (e_2,\,0) \;=\; \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{11}] & = & [(0,e_2),\widehat{(e_2,0)}] & = & (e_2e_2,\,0) \;=\; (0,\,0) \;=\; 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{12}] & = & [(0,e_2),\widehat{(e_3,0)}] & = & (e_2e_3,\,0) \;=\; (e_2,\,0) \;=\; \varepsilon_2;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{13}] & = & [(0,e_2),\widehat{(0,e_2)}] & = & L_{e_2}L_{e_2} \;=\; 0;\\
[\varepsilon_4,\varepsilon_{14}] & = & [(0,e_2),\widehat{(0,e_3)}] & = & L_{e_2}L_{e_3} \;=\; \frac{1}{3}T_{e_2}+\frac{4}{3}D_{e_2,e_3} \;=\; \frac{1}{3}\varepsilon_7+\frac{4}{3}\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{10}] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_1,0)}] & = & (e_3,\,0) \;=\; \varepsilon_3;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{11}] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_2,0)}] & = & (e_3e_2,0) \;=\; (-e_2,\,0) \;=\; -\varepsilon_2;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{12}] & = & [(0,e_3),\widehat{(e_3,0)}] & = & (e_3e_3,\,0) \;=\; (e_1,\,0) \;=\; \varepsilon_1;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{13}] & = & [(0,e_3),\widehat{(0,e_2)}] & = & L_{e_3}L_{e_2} \;=\; -\frac{1}{3}T_{e_2}-\frac{4}{3}D_{e_2,e_3} \;=\; -\frac{1}{3}\varepsilon_7-\frac{4}{3}\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_5,\varepsilon_{14}] & = & [(0,e_3),\widehat{(0,e_3)}] & = & L_{e_3}L_{e_3} \;=\; T_{e_1} \;=\; \varepsilon_6;
\end{array}
$$

（VI）末尾，我们定义 $[\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_0]$。

$$
\begin{array}{rcccl}
[\varepsilon_6,\varepsilon_7] & = & [T_{e_1},T_{e_2}] & = & 0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_8] & = & [T_{e_1},T_{e_3}] & = & 0;\\
[\varepsilon_6,\varepsilon_9] & = & [T_{e_1},D] & = & 0;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_8] & = & [T_{e_2},T_{e_3}] & = & -2T_{e_2}+8D_{e_2,e_3} \;=\; -2\varepsilon_7+8\varepsilon_9;\\
[\varepsilon_7,\varepsilon_9] & = & [T_{e_2},D_{e_2,e_3}] & = & 0;\\
[\varepsilon_8,\varepsilon_9] & = & [T_{e_3},D_{e_2,e_3}] & = & -T_{e_2} \;=\; -\varepsilon_7.
\end{array}
$$

□

注80。 $\mathscr{F}(\mathrm{S}_2)$ 是完美的，且 $\mathscr{F}(\mathrm{S}_2)=S\ltimes R$，其中

- $S=\langle\varepsilon_1,\,\varepsilon_3,\,\varepsilon_5,\,\varepsilon_6,\,\varepsilon_8,\,\varepsilon_{10},\,\varepsilon_{12},\,\varepsilon_{14}\rangle\cong\mathfrak{sl}_3$;
- $R=\langle\varepsilon_2,\,\varepsilon_4,\,\varepsilon_7,\,\varepsilon_9,\,\varepsilon_{11},\,\varepsilon_{13}\rangle$ *is the abelian radical.*

参考文献

[1] Abdurasulov K., Khudoyberdiyev A., Toshtemirova F., 幂零 Lie-Yamaguti、Bol 及相容李代数的几何分类，《数学通讯》，33（2025），3，10.[2] Allison B., 一类包含 Jordan 代数的带对合非结合代数，《数学年刊》，237（1978年），2，133–156.[3] Allison B., 斜维数为一的单结构代数，《代数通讯》，18（1990年），4，1245–1279.[4] Allison B., Faulkner J., 一类结构代数的 Cayley-Dickson 过程，《美国数学会会刊》，283（1984年），1，185–210.[5] Allison B., Faulkner J., 结构代数的酉拟同类，《代数通讯》，23（1995年），4，1283–1314.[6] Allison B., Hein W., 某些带对合非结合代数的同位代数，《代数杂志》，69（1981年），1，120–142.[7] Alsaody S., 通过 Brown 代数及相关扭子研究环上的 $\boldsymbol{E}_6$ 和 $\boldsymbol{E}_7$ 型群，《代数杂志》，656（2024），24–46.[8] Aranda-Orna D., Córdova-Martínez A., 复合代数张量积及 Smirnov 代数上的分次，《线性代数及其应用》，584（2020），1–36.[9] Aranda-Orna D., Elduque A., Kochetov M., 56 维单结构代数上的一种 $\mathbb{Z}_4^3$-分次及单李代数 $\boldsymbol{E}$型的相关细分次，《查理大学数学评论》，55（2014），3，285–313.[10] Blachar G., Rowen L., Vishne U., 代数 $\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}$的恒等式，《代数与编码理论》，35–45，Contemp. Math., 785，美国数学会，[普罗维登斯],RI，2023年.[11] Boelaert L., De Medts T., 例外 Moufang 四边形与结构代数，《伦敦数学会会刊》（3），107（2013），3，590–626.[12] Boelaert L., De Medts T., Stavrova A., Moufang 集与结构除代数，《美国数学会回忆录》，259（2019），1245，v+90 页.[13] Chapman A., Vishkautsan S., Cayley-Dickson 代数上多项式的根与右因子，以及矩阵的左特征值，《数学通讯》，33（2025），3，1.[14] Cuypers H., Meulewaeter J., 李代数、建筑与结构代数中的极端元，《代数杂志》，580（2021），1–42.[15] De Medts T., 斜维数为一的结构代数与厄米三次范数结构，《代数通讯》，47（2019），1，154–172.[16] De Medts T., Meulewaeter J., 内理想与结构代数：Moufang 集、三角形及六边形，《以色列数学杂志》，259（2024），1，33–88。

[17] Elduque A., Kamiya N., Okubo S., 左幺 Kantor 三重系统与结构代数，线性与多重线性代数，62 (2014), 10, 1293–1313[18] Elduque A., Okubo S., 带有S_4-作用的李代数与结构代数，《代数杂志》，307 (2007), 2, 864–890.[19] Faulkner J., 经典型结构超代数，《代数通讯》，38 (2010), 9, 3268–3310.[20] Faulkner J., Cartan 型结构超代数的构造，《代数通讯》，38 (2010), 12, 4476–4488.[21] Fehlberg Júnior R., Kaygorodov I., Saydaliyev A., 对称 Leibniz 代数的几何分类，数学通讯，33 (2025), 1, 10.[22] Fehlberg Júnior R., Kaygorodov I., Saydaliyev A., Jordan 超代数簇不可约分支的完整分类，数学通讯，33 (2025), 3, 15.[23] Jordan P., von Neumann J., Wigner E., 关于量子力学形式体系的一种代数推广，《数学年刊》(2), 35 (1934年), 1, 29–64.[24] Garibaldi S., 结构代数与类型$\boldsymbol{E}_6$ 和 $\boldsymbol{E}_7$, 群，《代数杂志》，236 (2001年), 2, 651–691.[25]Gorshkov I., Kaygorodov I., Popov Y., Jordan 代数的退化与“边缘”代数，Algebra Colloquium，28 (2021), 2, 281–294.[26] Kantor, I. L. Jordan 代数的某些推广 (俄语)，《向量与张量分析及其在几何、力学和物理中的应用研讨会论文集》，16 (1972年), 407–499.[27] Kamiya N., Mondoc D., 关于(α,β,γ)-结构代数与 Dynkin 图——从李代数到三重系统，Algebras, Groups, and Geometries，30 (2013), 2, 145–162.[28] Kamiya N., Mondoc D., Okubo S.，δ结构代数综述，《代数、几何与数学物理》，59–67，Banach Center Publ., 93, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011.[29] Kamiya N., Okubo S., 结构代数与前可构造代数的三元性，《代数杂志》，416 (2014), 58–83.[30] Kaygorodov I., 非结合代数结构：分类与结构，数学通讯，32 (2024), 3, 1–62.[31] Kaygorodov I., Okhapkina E., 半单有限维结构代数的 δ-导子，《代数及其应用杂志》，13 (2014), 4, 1350130.[32] Kaygorodov I., Khrypchenko M., Páez-Guillán P., 非结合代数的几何分类：综述，数学通讯，32 (2024), 2, 185–284。

[33] Lopatin A., 关于分裂八元数上的多项式方程：任意域情形，arXiv.2601.07332.[34] Lopatin A., Rybalov A., 关于分裂八元数上的多项式方程，数学通讯，33 (2025), 3, 8.[35] Lopes S., 非交换代数与表示论：对称性、结构与不变量，数学通讯，32 (2024), 2, 63–117.[36] Morandi P., Pérez-Izquierdo J. M., Pumplün S., 关于合成代数的张量积，《代数杂志》，243 (2001年), 1, 41–68.[37] Mondoc D., 由合成代数张量积定义的紧致单 Kantor 三系模型，《代数通讯》，33 (2005), 2, 549–558.[38] Mondoc D., 由斜维数为一的一类结构代数定义的紧致单 Kantor 三系模型，《代数通讯》，34 (2006), 10, 3801–3815.[39] Okubo S., 对称三性关系与结构代数，线性代数及其应用，396 (2005), 189–222.[40] Pozhidaev A., Shestakov I., Cartan 型结构超代数，《代数杂志》，323 (2010), 12, 3230–3251.[41] Pumplün S., 斜秩为1的结构代数类，《以色列数学杂志》，180 (2010), 425–460.[42] Pumplün S., 仿射平面上斜秩为1的结构代数，太平洋数学杂志，254 (2011), 2, 361–380.[43] Schafer R., 关于结构代数，《代数杂志》，92 (1985), 2, 400–412.[44] Schafer R., 可结构双模，《代数杂志》，96 (1985), 2, 479–494.[45] Schafer R., 结构代数的根的幂零性，《代数杂志》，99 (1986), 2, 355–358.[46] Smirnov O., 单结构代数的一个例子，《代数与逻辑》，29 (1990), 4, 331–336.[47] Smirnov O., 单结构代数与半单结构代数，《代数与逻辑》，29 (1990), 5, 377–394.[48] Smirnov O., 由斜对称元素生成的代数上的不可约可结构双模，《代数与逻辑》，35 (1996), 6, 403–417.[49] Stavrova A., 五分次单李代数、结构代数与 Kantor 对，《代数杂志》，611 (2022年), 561–588.[50] Zohrabi A., Zusmanovich P., Jordan 代数的一个 δ-首项怀特海德引理，数学通讯，33 (2025), 1, 2。