利用时分复用光子网络模拟类霍普菲尔德哈密顿量

T. Seck，[1,2] H. Lumia，[1,3] E. Ng，[1] 和 T. Chervy[1]*NTT Research, Inc.* 物理与信息学实验室，*940 Stewart Dr*，桑尼维尔，*CA 94085*[2]*IPCMS*（*UMR 7504*）和 *ISIS*（*UMR 7006*），斯特拉斯堡大学和法国国家科学研究中心，*67000* 斯特拉斯堡，法国[3]*ESPCI Paris-PSL*，*10 rue Vauquelin*，*75231 Paris Cedex 05*，法国（日期：2026年3月6日）

我们提出一种基于耦合环形谐振器的时分复用光子网络架构，能够准确模拟特定的哈密顿动力学。我们表明，在铃木–特罗特极限下，所产生的频闪演化能够重现玻色化 Hopfield 模型的特征动力学。此外，通过在主谐振器回路中加入非线性元件，我们勾勒出一条可扩展的途径，用于光学模拟与塔维斯–卡明斯模型相关的平均场和量子非线性动力学。我们的研究结果确立了时分复用谐振器网络作为一种多功能光子框架，可用于模拟相互作用的光–物质哈密顿量及集体多体现象。

arXiv:2603.04482v1 [physics.optics] 4 Mar 2026

I. 引言

光学模拟器近来已成为研究复杂多体系统的多功能平台 [1–8]。一方面，它们能够精确控制光子的微观自由度，例如位置、能量、动量和偏振，从而精确初始化光学态。另一方面，量子光学工具箱能够直接测量时空中的关联函数和光子统计，这对于识别复杂的多体相至关重要。

合成维度网络为大规模模拟此类系统提供了一条前景广阔的途径。这类网络的核心思想是在所谓的合成空间中模拟晶格，该空间的尺度更大和/或维度高于物理器件 [9, 10]。为此，需要一组物理模式，并以某种方式将它们耦合起来，从而构建晶格结构。在光学领域，人们已探索多种构建合成晶格的方法，例如在多模谐振腔中进行频率复用 [11, 12], 、在环形腔中进行角动量复用 [13], ，或在光纤和光子网络中进行时分复用 [14, 15]。

在时分复用架构中，利用单个光学横模即可在合成维度中生成任意数量的站点。这种创建合成网络的特定方式已成功用于实现量子模拟器 [16, 17]。最值得注意的是，这类网络不存在站点间差异，并能实现任意连通性 [18–20]。此外，还可以直接访问各个时间位点，例如通过动态移相器和时间分辨的外差测量，从而为多体系统模拟带来极具前景的可能性。然而，迄今为止，时分复用站点之间耦合的实验实现仅限于利用分束器实现耗散耦合 [19], ，每次耦合事件都会引入真空噪声并造成能量损耗。因此，迄今为止所模拟的物理过程仅限于平均场动力学，其中耦合器造成的损耗由主腔环路中增加的增益抵消。虽然这种方法能够很好地捕捉平均场特征，并可用于探索各种非厄米模型，但要将时间复用网络扩展到量子领域，就需要采用新的架构，使损耗和噪声引入能够与站点间耦合分离。

在本文中，我们提出了这样一种架构，实现了广泛使用的玻色化霍普菲尔德类模型 [21–26] 的时分复用网络（TMN）模拟方案。我们提出的方案基于两个耦合的环形谐振腔，其中两个腔之间的倏逝场耦合使时间编码晶格位点在每个往返时间中依次被激发。在特洛特极限下，即耦合速率小于腔往返时间的倒数时，该平台能够成功再现极化激元物理的典型特征，涵盖保守体系和驱动-耗散体系。具体而言，我们的模拟器能够准确再现强耦合体系中集体极化激元态的反交叉行为、正常模劈裂的 $\sqrt{N}$ 标度关系，以及在受控现场能量无序存在时暗态的增亮现象。我们证明，在主环形谐振腔中加入弱非线性元件会产生极化激元双稳态行为，并讨论了向量子非线性动力学模拟扩展的可能性。这种资源高效模拟器的工作区间与先进的硅光子学和电信光纤技术兼容，也可以利用微波腔和单个约瑟夫森结量子比特作为强非线性源，将其转用于超导系统。所提出的平台有望用于研究大规模极化激元系统，并能够对系统参数实施精确且动态的控制，直至单个位点级别，从而有助于研究无序材料中的极化激元输运、淬火动力学以及量子多体物理。

大纲

在 II节中，我们将详细介绍 TMN 的架构和工作原理，并阐述一个理论框架，以突出我们的合成网络与类霍普菲尔德玻色哈密顿量之间的联系。随后，我们通过对上述理论进行数值实现来展示该平台的性能，然后在 IV节中，使用成熟的光学元件探索 TMN 的实际实现。接着，我们将在 V节中讨论在 TMN 的费米化极限之前，在系统中实现非线性的可能策略。我们将在第 VI节总结全文。

II. 从谐振器网络到量子模拟器

A. 构建时分复用光子谐振器网络（TMN）

我们提出的架构如图1（a）所示。它由两个尺寸不同、通过倏逝场耦合的环形谐振器组成，每个谐振器均支持单个横向腔模式。较长（较短）的谐振器称为“主腔”（“辅助腔”）。每个谐振器中的纵模叠加可形成光脉冲，脉冲能够在每次往返时在两个腔之间来回耦合。在同步泵浦机制下，主腔的长度恰好是辅助腔的 N 倍，此时，在辅助腔中初始化的单个脉冲会在主腔中产生一列定义明确的脉冲序列（图1（a））。脉冲序列的时间间隔由辅助腔的往返时间决定。在合成维度中，主腔的每个脉冲对应一个晶格位点，并与辅助谐振器周期性交换能量。主腔和辅助腔中每个脉冲的相位均可由相位调制器（PM）控制。

在没有非线性的情况下，每个时间位点都由一个玻色算符描述，该算符作用于无限阶梯的福克态上（图1(b)）。我们将 $\{\hat{a}_i^\dagger\}_{i\in[\![1,N]\!]}$ 和$\hat{b}$†分别定义为主腔和辅助腔中时间位点的产生算符。为简单起见，全文均使用$\hbar = 1$ 。

主腔位点$\hat{a}_i$ 与ˆ辅助位点 b之间的耦合可用混合角为 θ_{disc}的分束器操作来描述，

$$\hat{B}_i = e^{\theta_{\text{disc}}(\hat{a}_i\hat{b}^\dagger - \hat{a}_i^\dagger\hat{b})}. \tag{1}$$

角度 θ_{disc} 量化了辅助腔与主腔之间在每次往返过程中交换的能量，这对应于脉冲经过倏逝耦合区域 [27]时的往返积分耦合操作。腔内移相器的相位移相器的作用描述如下：

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\text{i}} &= e^{-i\varphi_i\hat{a}_i^\dagger a_i}\\ \hat{P}_{\text{aux}} &= e^{-\text{i}\varphi_{\text{aux}}\hat{b}^\dagger b}.\end{aligned} \tag{2}$$

同样，相移 φ_i 是往返积分量，与脉冲在移相器中停留的时间有关。将这些幺正算符汇总起来，我们构建出 TMN 的往返算符：

$$\hat{\mathcal{U}}_{\text{rt}} = \Pi_{\text{i=1}}^{N}\left(\hat{P}_{\text{i}}\hat{B}_{\text{i}}\hat{P}_{\text{aux}}\right). \tag{3}$$

现在我们来描述 TMN 中的驱动和耗散。在我们的架构中，每次往返时，都会使用一根注入光纤（图1中以红色表示）向辅助腔注入光 l ，并对其相位和振幅进行控制。这种驱动方案可用以下方式建模：

$$\hat{U}_{\text{drive}}(l) = \exp\left\{-\text{i}\left(F_{\text{disc}}\text{e}^{\text{i}\ell\varphi_{\text{pump}}}\hat{b} + F_{\text{disc}}\text{e}^{-\text{i}\ell\varphi_{\text{pump}}}\hat{b}^\dagger\right)\right\}, \tag{4}$$

其中 F_{disc} 是往返积分驱动振幅， $\ell\varphi_{\text{pump}}$ 是往返积分相位，用于模拟合成空间中的连续驱动（见补充材料第 I 节 [28]）。在数值模拟中，我们考虑了一个强欠耦合的辅助腔，并在每次耦合事件发生前驱动一次。更精细的方法是在辅助腔内通过非线性耦合元件 [29–31]实现受控注入。

严格来说，我们的系统会持续受到传播损耗的影响。当这些损耗相较于其他往返耦合率较小时，我们可以将每个站点 i 的所有往返损耗合并为一个往返积分耗散算符 $L_i = \sqrt{\gamma_{\text{rt}}}\hat{a}_i$，其中 $\gamma_{\text{rt}} = \gamma T_{\text{RT}}$，而 γ 则计入腔的本征损耗，以及回路内各种光学元件可能导致的光子损耗。

在第V 节中，我们将探讨 $\chi^{(3)}$ 非线性对时分复用网络动力学的影响。如前文所述，实现这种非线性有多种方式。为了在模型中加入非线性项，我们需要对往返算符方程（3）进行补充，加入

$$\hat{U}_{\text{Kerr}}^i = e^{U_{\text{Kerr}}\hat{n}_i(\hat{n}_i-1)}. \tag{5}$$

对光学模式施加该幺正算符所产生的影响已在 [32]中进行了深入研究。它可描述为一种自相位调制效应，即行波模式的相位会受到其自身强度的调制。如式（5）的指数项所示，含有多于一个光子的状态将经历一个量级为 U_{Kerr}的能量偏移。请注意， U_{Kerr} 是往返积分非线性相互作用，与脉冲在非线性介质中所停留的时间有关 [32]。

在此阶段，式（3）实现了辅助谐振器与主腔位点之间的顺序能量交换。现在我们将说明，在苏祖基-特罗特极限下，该模型如何映射为类霍普菲尔德哈密顿量的连续演化。

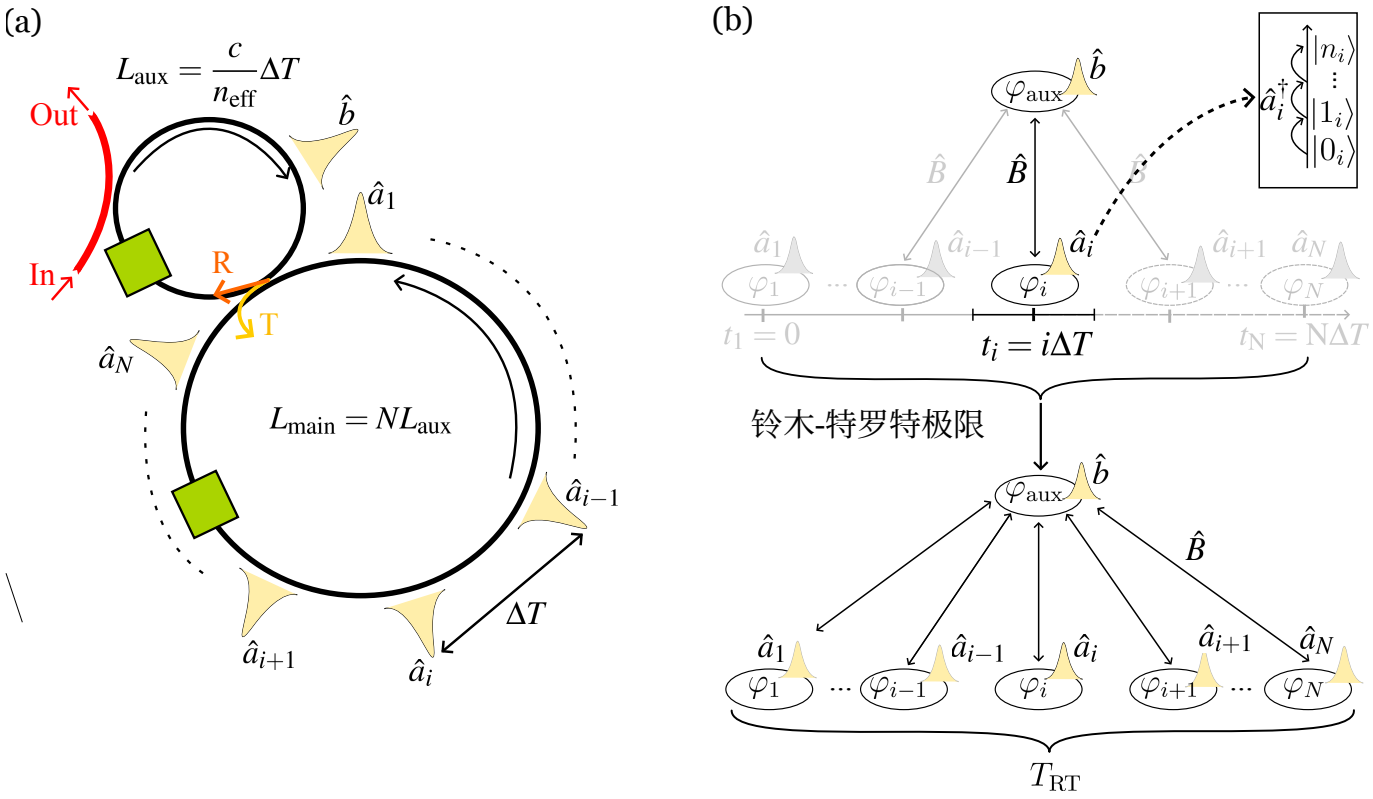


图1. 时分复用光子谐振器网络。(a) 所提出架构的示意图。注入光纤将相干态注入辅助腔。在倏逝场耦合处，比例为 T^2 的光强被传输至主腔，其余部分（R^2）继续在辅助腔内传播。主腔的长度是辅助腔的 N 倍，因此主腔内定义了 N 个时间位点，实现主腔横模的时分复用。(b) 合成维度中时间位点的示意图。每个位点 $\hat{a}_i$ 都会在给定时刻 t_i通过类分束器操作与辅助腔交换能量。每个位点都能存储许多光子，其相位可通过腔内相位调制器单独调节。在时间 $T_{\text{RT}} = N \times \Delta T$内即可完成主腔中的一整圈循环。在特洛特极限下，可认为每项操作都在粗粒化积分时间 T_{RT}内同时发生。

B. 映射到类霍普菲尔德玻色模型

为简化讨论，本节聚焦于 TMN 演化算符（式（3））中的保守项。非保守项的变换方式类似 [33]。

我们通过 TMN 模拟连续哈密顿量的核心思想，根植于往返演化算符的铃木-特罗特（ST）近似，

$$\hat{\mathcal{U}}_{\text{RT}} = \Pi_{i=1}^{N}\{\exp\{(\delta A_i)\}\} = \exp\left\{\left(\delta\sum_{i=1}^{N}A_i\right)\right\} + \mathcal{O}(\delta^2). \tag{6}$$

在ST近似下，往返演化因此由一个连续时间哈密顿量给出

$$\mathcal{H}_{ST} = \frac{\varphi_{\text{aux}}}{T_{\text{RT}}}\hat{b}^\dagger\hat{b} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_i}{T_{\text{RT}}}\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \frac{\theta_{\text{disc}}}{T_{\text{RT}}}\sum_{i=1}^{N}(\hat{a}_i^\dagger\hat{b} + b^\dagger\hat{a}_i), \tag{7}$$

同时作用于系统的所有自由度，其大小在一次往返过程中进行积分。往返时间 T_{RT} 可视为粗粒化量，或积分时间，在此期间施加的所有操作均被视为同时发生。直观地说，ST极限对应于辅助腔的高精细度极限，在该极限下，每次往返发生能量交换的概率都很小 [34]。在这种情况下，到达耦合区域的脉冲的时间排序无关紧要，并且所有脉冲经历相同的辅助腔模式布居数。我们将在第 IIIB 节和补充材料 [28]中进一步分析耦合强度、相移、驱动和耗散对ST近似有效性的影响。

将式（7）中的 ST 哈密顿量与熟悉的玻色霍普菲尔德模型进行比较

$$\mathcal{H}_B = \omega_c\tilde{b}^\dagger\tilde{b} + \sum_{i=1}^{N}\omega_i\tilde{a}_i^\dagger\tilde{a}_i + g\sum_{i=1}^{N}(\tilde{a}_i^\dagger\tilde{b} + \tilde{b}^\dagger\tilde{a}_i), \tag{8}$$

其中， ω_c 和 ω_i 分别是腔模式和（玻色化的）物质

模式的能量，且$\Omega_R = g\sqrt{N}$ 是集体死-物质耦合强度。我们建立了模拟参数与表 I 中类霍普菲尔德量之间的对应关系。I。

模拟	类霍普菲尔德
相移 $\varphi_i/T_{\mathrm{RT}}$	能量 ω_i
分束器角度 耦合强度 $\theta_{\mathrm{disc}}/T_{\mathrm{RT}}$	g
模拟时间 $n \times T_{\mathrm{RT}}$	仿真时间 t

表 I. 模拟参数与仿真模型参数之间的对应关系。

因此，在 ST 极限下，我们的 TMN模拟器能够仿真方程（7）所描述的哈密顿量的连续动力学。这是一个完全由玻色子构成的哈密顿量，表示一个能量为 $\varphi_{\mathrm{aux}}/T_{\mathrm{RT}}$ 的玻色模式与 N 个能量为 $\varphi_i/T_{\mathrm{RT}}$ 的其他玻色模式连续相互作用。这种玻色化图景广泛应用于光与物质相互作用领域，也是 J. J. Hopfield 对强耦合哈密顿量进行经典对角化的理论基础 [35] ；近来，它还被用于描述腔中的有机分子 [23–26, 36, 37] 以及半导体中的激子 [21, 22]。

III. 数值模拟结果

在下一节中，我们将详细介绍数值模拟的流程，并确定 ST 近似的有效范围。在该范围内，预计我们的系统能够正确再现 Hopfield 类模型的已知特征。数值实现使用 Julia 及其软件包 *QuantumOptics.jl* [38] 完成。

A. 数值过程

本文介绍了两种不同类型的数值模拟。第一种是 TMN 的保守极限，其结果见第 IIIB 节，基于往返演化方程（3）。该模拟用于在忽略损耗的情况下，对 ST极限进行定量分析，并可按照第 IIIB 节中的说明，对模拟保真度进行简单定义；同时，还可研究第 IIIC 节中拉比频率随时间位点数量的变化规律。第二种所关注的体系是第 IIIC 节介绍的 TMN 驱动耗散体系，其基于完整的往返演化算符，并通过方程（4）纳入驱动和传播损耗。

在驱动耗散体系中，我们从真空密度矩阵开始，定义为 $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ 其中$|\psi_0\rangle = |0_{\mathrm{aux}}\rangle \otimes_{i=1}^{N} [0_i\rangle$ 对应于所有位点均无光子的状态。然后，我们设置每个离散量，$\{\varphi_{\mathrm{aux}}, \varphi_i, \theta_{\mathrm{disc}}, F_{\mathrm{disc}}, \varphi_{\mathrm{pump}}, \gamma_{\mathrm{RT}}\}$ 这些量随后用于构建往返演化所需的所有哈密顿量和耗散算符。为简单起见，我们将时间参考单位设为 $T_{\mathrm{RT}} = 1$。至此，系统已完成定义和初始化。通过依次使用先前定义的所有哈密顿量和耗散算符演化初始密度矩阵，对 TMN 的动力学进行数值模拟，直至达到所需的往返次数。参考态由相同的初始密度矩阵计算得到：使用内置的林德布拉德主方程求解器，施加 ST 哈密顿量方程（7），并辅以连续驱动项和耗散。

在保守极限下，采用相同的过程，但将初始态选为 $|\psi_0\rangle = |\alpha_{\mathrm{aux}}\rangle \otimes_{i=1}^{N} [0_i\rangle$, 其中 $|\alpha_{\mathrm{aux}}\rangle$ 是注入辅助腔位点内的相干态，其$\sqrt{\alpha}$ 平均光子数为。参考体系和 TMN 均经过适当时间的演化，仅使用不含驱动项的哈密顿量部分。在这两种情况下，我们都会在每次往返后提取时间位点上的布居数和所需的期望值。

B. ST极限的定量分析

如上一节所述，ST极限的分析是在保守框架下进行的。这一选择出于计算和物理两方面的考虑。一方面，我们用于评估模拟精度的度量，在保守系统中最容易计算（见下文关于保真度公式（9）的讨论）。另一方面，由于我们将重点研究玻色霍普菲尔德哈密顿量的强耦合体系，因此我们仅考虑$\theta_{\mathrm{disc}} > \gamma_{\mathrm{RT}}$ （损耗的深入讨论见第IV节），故本节可以忽略损耗。然而，严格来说，ST极限也应从其他离散量，即相移和驱动的角度加以论证。本研究感兴趣的参数空间仅限于近共振相互作用和弱外部驱动（$\varphi_{\mathrm{aux}} - \varphi_i \sim \sqrt{N}\theta_{\mathrm{disc}}$, $\varphi_{\mathrm{pump}} - \varphi_i \sim \sqrt{N}\theta_{\mathrm{disc}}$ 以及 $\theta_{\mathrm{disc}} > F_{\mathrm{disc}}$）。将 $\sqrt{N}\theta_{\mathrm{disc}}/T_{\mathrm{RT}}$ 保持为系统中最大的能标后，我们只需从这一参数的角度考察ST极限。我们还在补充材料 [28]中进一步分析其他模拟参数对模拟保真度的影响，包括系统中同时存在的脉冲数量。

现在我们来讨论辅助腔的高精细度极限。我们将时间位点的数量固定为 $N = 3$，以缩短计算运行时间。我们还将每个模式的能量设为相同，因此 $\varphi_{\mathrm{aux}} = \varphi_i = \varphi$。随后，按照参考文献 [39]，模拟器的保真度定义为

$$\mathcal{F}_0 = |\langle\psi_{\mathrm{cont}}(t_0)|\psi_{\mathrm{disc}}(l_0)\rangle|^2 , \tag{9}$$

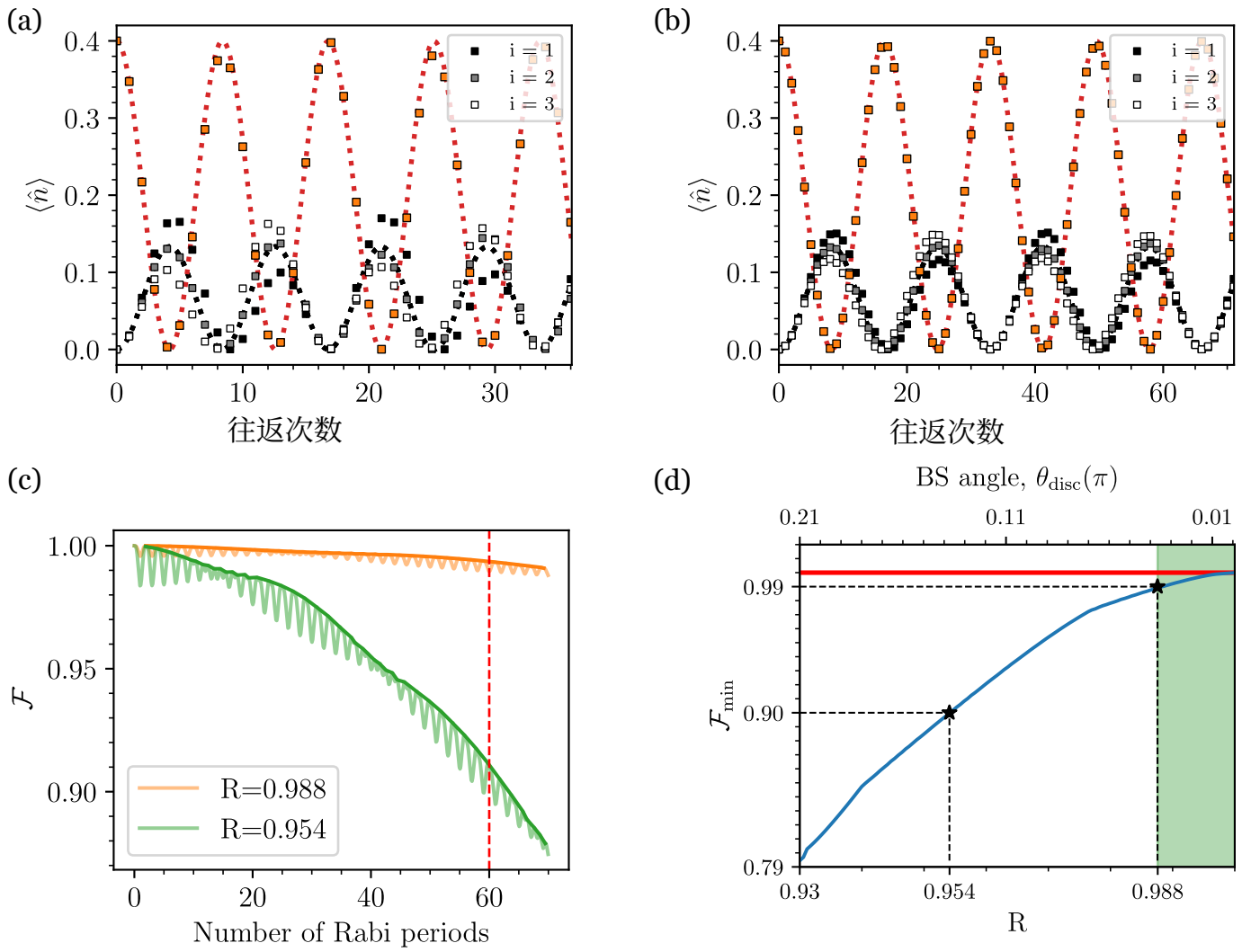


图 2. TMN模拟器的动力学与保真度。所有模拟均采用 N=3，且动力学以辅助腔中的 $|\alpha = \sqrt{0.4}\rangle$ 初始化。(a) 和 (b) TMN（方块）与连续模型（点线）的平均占据数随时间的演化。红色（橙色）表示辅助腔位点，灰色深浅表示主腔位点。(a) 和 (b) 的反射率分别为 $R = 0.954$ 和 $R = 0.988$。(c) 保真度随经历的拉比周期数变化的时间演化。两条曲线对应反射率为 (a) 和 (b) 时的长时间动力学。红色虚线表示 (d) 中使用的时间截断。(d) 经历 60 次拉比振荡后，保真度全局最小值随反射率（或分束器角度）的变化。红色水平线表示保真度的最大 $\mathcal{F} = 1$ 值。

其中 $t_0 = l_0 \times T_{\mathrm{RT}}$ 和 $|\psi_i\ (t)\ \rangle$ 是系统的一个多体态，如IIIA中所述，取自时间 t_o。

我们在图2 (a,b)中展示了主腔和辅助腔各个位置的平均光子数随谐振腔往返次数的变化，并比较了不同分束器反射系数下的演化，以及ST极限哈密顿量的连续演化。直接比较这两幅图可以看出，图2 (a)（$R = 0.954$）中的耦合强度较大，因此相较于图2 (b)（$R = 0.988$）中耦合较弱的情况，它偏离ST极限哈密顿量的程度更大。请注意，离散模拟结果每经过两个拉比周期（例如在往返次数约为图(a)中的第16–18次往返和图(b)中的第26–28次往返），都会周期性地重新定相并与连续模型重合。如补充材料[28], 所示，这种效应仅在零失谐时出现，其根源在于主腔脉冲与辅助腔之间的顺序相互作用。

保真度的演化（式（9）随模拟时间的变化（以拉比周期归一化）如图2(c) 所示，图中比较了两种不同的分束器角度，$\theta_{\mathrm{disc}} \sim 0.14\pi$（$R = 0.954$）和 $\theta_{\mathrm{disc}} \sim 0.04\pi$。保真度的振荡动力学源于两种相互竞争的周期性行为：前文所述、每隔两个拉比周期发生一次的重相位，以及主腔位点填充数在最大值与最小值之间以拉比频率发生的较弱振荡。这两种相互竞争的行为

在补充材料中作了更深入的研究。除这些振荡特征外，保真度的整体演化呈现衰减趋势，这与模拟器中误差的累积相符。如图 S1 所示，这些误差的主要来源是离散 TMN 相对于连续模型的累积滞后，而简单的纠错方案或许可以修正这一问题。

最后，我们在图2 (d)中展示了模拟器最小保真度 $\mathcal{F}_{\min}$ 随分束器耦合强度的变化。该量定义为在 60 个拉比周期的模拟时间内保真度所达到的最小值。选择这一数值，是因为在驱动耗散体系中，通常需要足够多的往返次数才能达到稳态。如图中的绿色区域所示，当分束器反射率高于99%时，我们的模拟器可达到最低保真度 $R > 0.988$。

C. 类霍普菲尔德模型的精确模拟

后续所有结果均在驱动耗散体系中获得。哈密顿量方程（7）在傅里叶基和单激发子空间中很容易对角化。其本征谱由两个极化激元态 [27], 或亮态组成，可将其解释为杂化态，其中一个能量量子由所有主腔位点和辅助腔共同分享。其余的 $N-1$ 暗态仅涉及主腔位点的集体激发。在我们的形式体系中，杂化态的能量写作（省略 $T_{\mathrm{RT}}=1$ 因子，并假设 $\varphi_i = \varphi \; \forall\, i \in [\![1,\ N]\!]$）：

$$E_{\mathrm{UP/LP}} = \frac{\varphi+\varphi_{\mathrm{aux}}}{2} \pm \sqrt{\left(\theta_{\mathrm{disc}}\sqrt{N}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_{\mathrm{aux}}-\varphi}{2}\right)^2} \tag{10}$$

我们在图3 (a)中展示了辅助腔在不同失谐和驱动频率下的稳态占据数，以及建模得到的极化激元色散公式（10）。在霍普菲尔德表述中，这一测量映射出极化激元态的光子成分，类似于腔光谱测量。我们在图3 (b)中展示了主腔位点平均稳态占据数对应的色散图，其中呈现了亮态和暗态的光谱特征。在极化激元表述中，这一测量映射出杂化态的类物质激发成分。

如上所述，主腔位点的动态相位控制可用于模拟材料体系中的能量无序。我们在图 3 (c) 中展示了主腔位点能量上均匀分布的对角无序在不同强度下辅助腔位点的平均稳态布居数。正如预期，当 $W=0$ 时，我们恢复了两个明亮极化激元态的光谱特征。随着无序强度的增加，我们观察到暗态变亮，出现在未耦合位点能量 [40–42]附近。

类霍普菲尔德模型的另一标志是拉比分裂的集体增强，这体现在分裂能$\sqrt{N}$ 随耦合发射体数量的变化规律上。我们通过对保守演化进行 10 个拉比周期的傅里叶变换，提取拉比劈裂。由于在开放系统框架中，矩阵规模会随位点数量呈指数增长，因此本次模拟采用保守模型。对不同数量的脉冲 N重复这一过程后，我们在图 3 (d)中展示了结果与预期的集体强耦合行为高度一致。以上结果表明，在高精细度（或 Suzuki-Trotter）极限下，我们的 TMN 架构能够精确模拟类霍普菲尔德模型。

IV. 器件制造展望

现在，我们转而探讨在现实器件约束下，采用我们的 TMN 方法可模拟的最大系统规模。为此，首先要再次强调，在这一架构中，辅助腔的往返时间决定了主腔中脉冲之间的时间间隔，见图 1。因此，要增大系统规模，一个简单的方法是缩短辅助腔长度，并相应提高泵浦的重复频率，从而在主腔环路中填充更多时间位置。这种方法最终受限于辅助谐振器的弯曲损耗。考虑到光子集成电路的典型器件约束，我们将辅助腔长度的下限设为约 1mm；对于薄膜铌酸锂器件，这对应于约 200 GHz 的重复频率 [43]。

在辅助腔长度给定的情况下，还可以通过增加主腔环路的长度来调整模拟系统规模。但这种方法又受到不断增加的往返传播损耗的限制 γ_{RT}。光-物质耦合的协同参数 $\mathcal{C}=\Omega_{\mathrm{R}}/\gamma$ 表示为：

$$\mathcal{C} = \frac{\theta_{\mathrm{disc}}\sqrt{N}}{\gamma_{\mathrm{RT}}} = \frac{\theta_{\mathrm{disc}}c}{\gamma\sqrt{N}L_{\mathrm{aux}}n}, \tag{11}$$

其中 c 为光速， n 为折射率，且我们使用了 $L_{\mathrm{main}} = N \times L_{\mathrm{aux}}$ 和 $T_{\mathrm{RT}} = nL_{\mathrm{main}}/c$。 $\mathcal{C}$ 随 $N^{-1/2}$ 变化所呈现的出人意料的标度关系，源于集体耦合与传播损耗增加之间的竞争；系统规模越大，可容纳的时间位点越多。

我们在图4 中展示了辅助腔长度为 1mm 时，在不同分束器混合角下，协同参数随时间位点数量和本征损耗率变化的演化。图中着色区域对应于集成硅光子学所报告的可实现本征损耗率（浅蓝色），其品质因数约为 –，损耗约为 0.2 dB/cm；以及电信光纤（灰色）的可实现本征损耗率，其传播损耗低于 0.2 dB/km 。因此，在现实的器件约束下，这两种平台都能准确模拟高协同性、大系统规模的类霍普菲尔德模型。

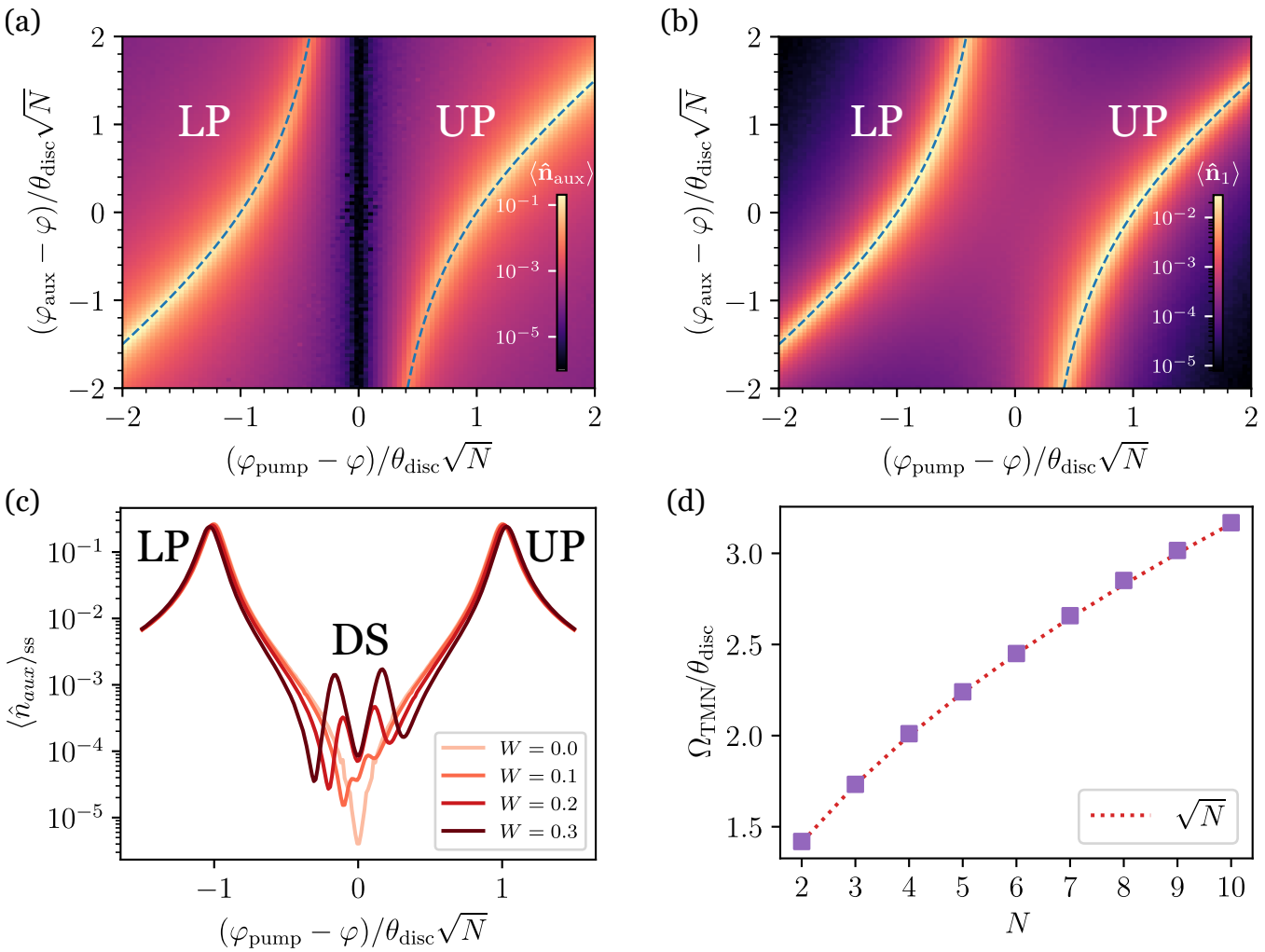


图3. 类霍普菲尔德模型模拟的数值模拟。此处我们将相位参考取为 $\varphi = 0$。对于所有模拟 $\theta_{\mathrm{disc}} \sim 0.03\pi$ （$R = 0.99$），$\theta_{\mathrm{disc}}/\gamma_{\mathrm{RT}} = 10$，$F_{\mathrm{disc}}/\gamma_{\mathrm{disc}} = 0.1$。(a) 辅助腔位点的稳态占据数随主腔/泵浦失谐以及主腔/辅助腔失谐的变化。两条明亮分支对应于下支（LP）和上支（UP）极化激元。虚线对应于式（10）。(b) 与(a)相同，但针对第一个主腔位点。(c) 若干主腔脉冲对角无序取值下的稳态辅助腔布居。主腔脉冲能量在 $[\varphi - W, \varphi + W]$ 内均匀分布。(d) TMN 的拉比劈裂（Ω_{TMN}）随可纳入主腔内的脉冲数目的演化。红色虚线表示理论曲线 $\omega_{\sim}/\theta_{\mathrm{disc}} = \sqrt{N}$ 曲线。

图中的区域对应于集成硅光子学所报告的可实现本征损耗率（浅蓝色），其品质因数约为 10^6[44–47]，损耗约为 0.2 dB/cm；以及电信光纤（灰色）的可实现本征损耗率，其传播损耗低于 0.2 dB/km [48]。因此，在现实的器件约束下，这两种平台都能准确模拟高协同性、大系统规模的类霍普菲尔德模型。

V. 迈向非线性量子模拟器

以上结果表明，我们的 TMN 平台成功模拟了稀薄（玻色化）极限下类似霍普菲尔德的哈密顿量。本节提出一条实现量子效应模拟的路径；当存在强在位非线性时，量子效应便会显现，而此时光-物质哈密顿量的玻色近似将不再成立。作为迈向这一前沿领域的中间步骤，我们还展示了在弱相互作用区能够模拟平均场非线性效应。

为了在每个时间位点上实现光子-光子相互作用，可以

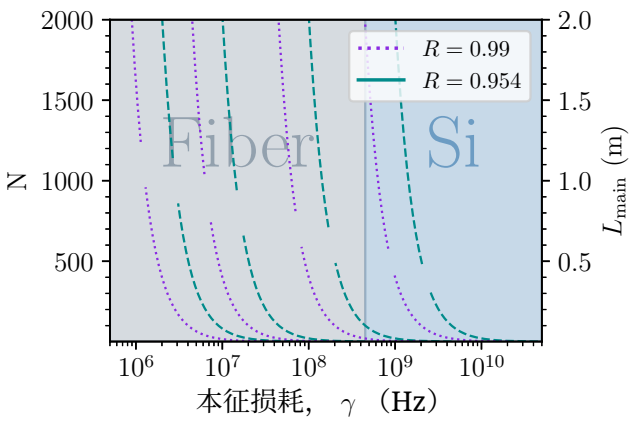


图4. 辅助腔长度固定为 $L_{\mathrm{aux}} = 1\mathrm{mm}$、不同 θ_{disc} 角度下器件的协作度图。此处 $n = 1.5$ 。协作度 $= 1$ 线左侧的所有区域均对应强耦合区域。银色区域对应光纤领域，浅蓝色区域对应硅集成光子学领域。硅集成光子学区域的左边界表示最先进的腔所能达到的极限。

在主腔环路内加入非线性元件。此处我们着重关注基于 $\chi^{(3)}$ 非线性的自相位调制相互作用，其中每个脉冲都会经历相移，其大小取决于脉冲的瞬时布居数 [32]）。如 IIA 节所述，通过在往返幺正算符中加入非线性演化算符，式（5），来进行克尔效应的数值模拟。

在弱非线性（$U_{\mathrm{Kerr}} < \gamma_{\mathrm{RT}} < \theta_{\mathrm{disc}}$）区间，预期 TMN 能够捕捉驱动耗散动力学，类似于例如 量子阱极化激元系统 [49]在平均场区间观察到的动力学。我们在图 5 (b) 中展示了辅助腔稳态占据数随时间的演化，针对泵浦与下极化激元模式之间不同的失谐 $\Delta = \varphi_{\mathrm{pump}} - E_{\mathrm{LP}}$ ，这些失谐由图 5 (a) 中颜色对应的箭头标出。此处，我们将时间位点数设为 N=1 ，以最大限度增大数值福克空间（$|n_{\mathrm{max}}\rangle = |12\rangle$），同时保持合理的模拟运行时间。正如平均场计算 [50, 51], 所预期的，对下极化激元支施加红失谐驱动（橙色曲线）会产生光学限幅效应，稳态占据数随泵浦强度的增加而次线性增长。在正失谐$\Delta > \sqrt{3}/2\gamma_{\mathrm{RT}}$时（紫色曲线），系统呈现出众所周知的双稳态行为；在耗散相变的临界点，辅助腔模式的光子数统计中还伴随着显著的聚束峰（蓝色曲线） [51]。然而，我们注意到，在平均光子数较高时，数值福克空间截断会影响这些模拟的行为。这一点在图 5(b) 的黑色点线上有所体现，该线表示在 $\Delta/\gamma_{\mathrm{RT}} = -0.5$ 且无非线性的情况下，稳态占据数随时间的演化。该曲线在 $\langle \hat{n}_{\mathrm{aux}} \rangle_{\mathrm{ss}} \sim 5$ 以上的饱和行为是数值福克空间截断导致的。

因此，在我们的模拟器中加入一种弱非线性材料，便可模拟平均场非线性极化激元物理的关键特征，从而能够精确研究驱动耗散相变，并对无序、维度、单个格点占据数和失谐等系统参数进行精细控制，正如上文所述。

随着非线性增强，量子效应预计将逐渐显现。我们在图中展示5 (c) 系统的时间演化（方形符号）：在辅助腔中初始注入一个相干态 $\langle \hat{n} \rangle = 3$ 后，该辅助腔与两个具有非线性的主腔位点耦合 $U_{\mathrm{Kerr}} = \theta_{\mathrm{disc}} = 0.1\mathrm{rad}$。尽管这一时间演化与连续模型的动力学（点线）密切吻合，但与量子比特极限下连续哈密顿量的演化显著不同；该极限对应于不可穿透玻色子的情形 [52, 53], 即主腔光子数基中的福克空间截断为$\{|0\rangle, |1\rangle\}$ （连续曲线）。尽管如此，在主腔位点填充达到最大值时（往返次数为 10）计算系统的维格纳函数，会发现其开始出现负值，如插图所示。维格纳函数出现负值清楚地表明模拟器具有非经典行为。计算腔内该状态的零延迟二阶关联函数，得到的值为 $g^{(2)}(0) = 0.85$，进一步证实了这一非线性区中量子效应的出现。

增强非线性的强度至 $U_{\mathrm{Kerr}} = 10\theta_{\mathrm{disc}}$ 会使系统进入强非谐区，如图5（d）所示。在这一极端区间内，主腔位点中单个光子的存在会阻止第二个光子的注入，从而实现$g^{(2)}(0) = 0.096$，并使 Wigner 函数呈现明显的负值（见图5（c）的插图）。不过需要注意的是，在如此强的非线性区间内，精确的场动力学远比我们的模型所描述的复杂。尤其是，这种强 $\chi^{(3)}$ 材料的响应会导致时间模式形状发生偏离 [54], ，从而偏离我们的计算模式基。人们已经提出了不同的补救方法来规避这一问题，例如时间模式俘获 [55], ，但这会显著增加模拟器的复杂性。尽管将这一平台推向费米化极限构成了一项杰出的技术挑战，我们强调，所提出的 TMN架构通过在每次往返中为每个位点回收利用非线性资源，实现了对该资源的最优利用。迄今为止，已有许多途径被证明能够提供如此强的非线性，例如囚禁原子和离子、色心以及量子点 [56, 57]。在这一背景下，用于控制光进出谐振腔的动态耦合方案 [31, 58] 为在我们的时分复用模拟器与辅助非线性腔之间相干交换脉冲提供了一条有前景的途径。最后，我们注意到，当前架构还可以在

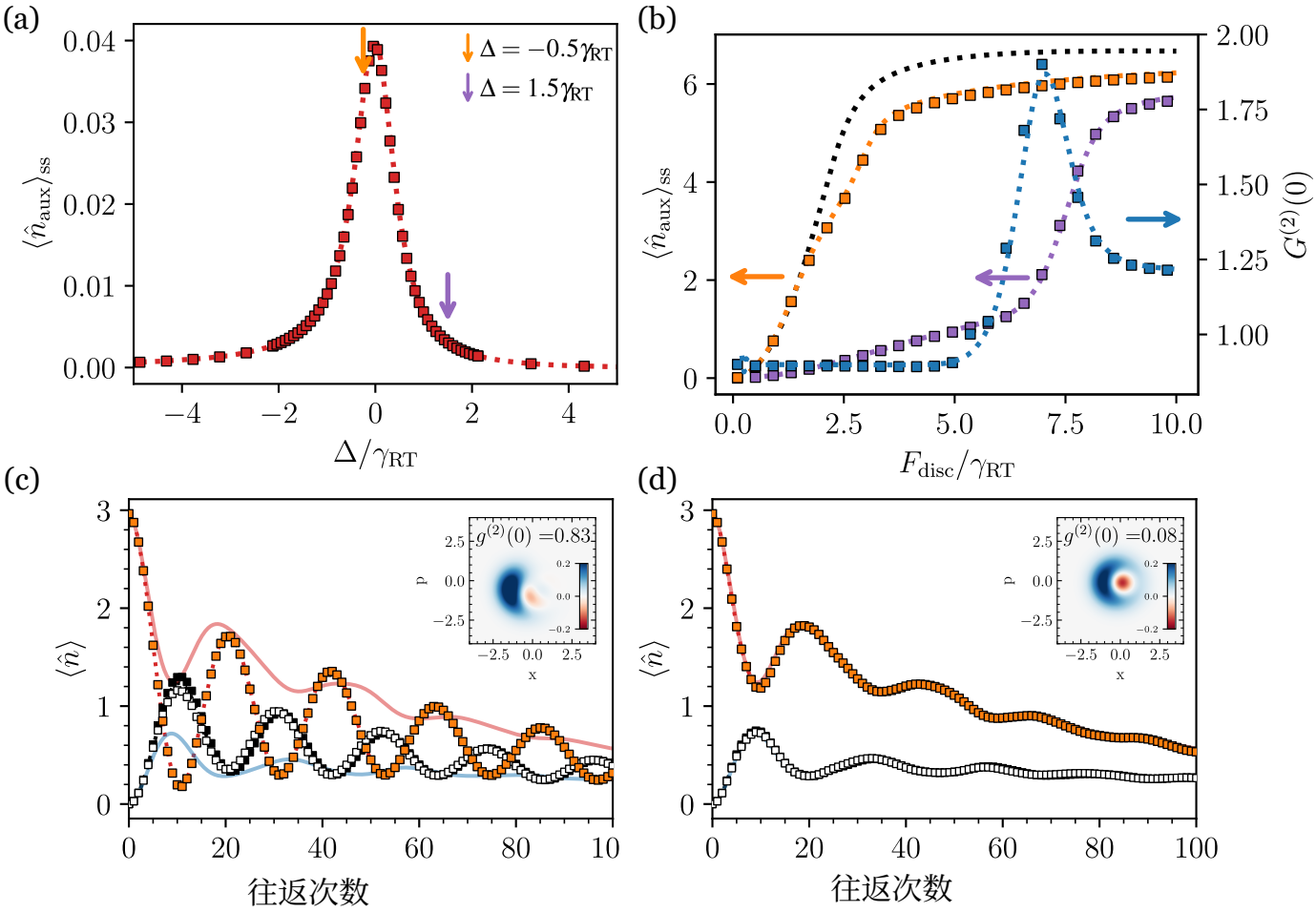


图 5. TMN模拟器的非线性与量子比特极限。虚线表示式（7）中的 ST 哈密顿量，浅色实线表示量子比特极限下的 ST 哈密顿量，方形符号表示 TMN。红色（橙色）表示辅助腔布居数，灰度表示主腔布居数。模拟在 $\theta_{\text{disc}} \sim 0.0.3\pi$ $(R = 0.99)$ 和 $\theta_{\text{disc}}/\gamma_{RT} = 5$ 条件下进行。未特别说明时，$F_{\text{disc}}/\gamma_{disc} = 0.1$。（a）系统下极化激元的光谱，$N = 1$。彩色箭头对应（b）中的相应曲线。失谐以 γ_{RT} 为单位表示。（b）光学限幅器（橙色）和双稳（紫色）情况下，随着泵浦振幅增加，辅助腔的稳态布居数。黑色虚线表示与光学限幅器情况相同的失谐，但没有非线性。高泵浦振幅下的饱和行为由截断效应主导，因为福克空间截断至 $|n_{\max}\rangle = |12\rangle$。（c）量子模拟器与 ST 哈密顿量在 $U_{\text{Kerr}} = \theta_{\text{disc}}$ 条件下演化至稳态的动态过程。插图为主腔位点在占据数达到最大值时（约往返第 10 次）的维格纳函数等高线图。（d）与（c）相同，但对应于 $U_{\text{Kerr}} = 10\ \theta_{\text{disc}}$ *ie* 费米化（或量子比特）极限下的情形。（c）和（d）均在 $N = 2$ 条件下进行。

超导微波电路的背景下重新审视，因为其中强非线性的来源 readily available。

VI. 结论

在本研究中，我们提出了一种时分复用光子网络架构，能够在铃木–特罗特极限下模拟类霍普菲尔德哈密顿量在广泛参数范围内的动力学，包括系统规模、格点失谐、能量无序和非线性相互作用。该平台依靠光的时间模式之间的离散时间耦合事件，这些时间模式存在于耦合环形谐振腔中，从而产生有效的频闪演化，准确再现玻色化 Hopfield 模型的连续时间动力学。

我们已证明，所提出的架构兼容现有光子技术，例如集成光子电路和基于光纤的电信网络，因此可扩展至较大的有效系统规模。模拟器的时分复用特性可通过动态调制，对位点能量和耦合条件进行精确且独立的控制，相较于空分复用平台具有实际优势。尤其是，它为研究和控制亚拉比周期动力学开辟了诸多可能性，

非绝热淬火，以及驱动耗散系统中的单条随机轨迹。通过将频闪演化与相应的连续时间动力学进行基准比较，我们发现，利用现有的制造和调制能力，有望实现规模约为 1000 个位点的有效系统。此外，动态耦合方案 [29] 和替代性网络架构 [20] 可实现对强耦合光物质系统中输运性质的模拟 [59, 60]。

除了线性动力学之外，我们还分析了模拟器在存在克尔型自相位调制时的行为。在弱非线性区间内，该网络能够再现预期的平均场双稳态响应，与已有研究结果一致。对于更强的非线性，我们的分析表明，该平台有望扩展到模拟超越平均场描述的非线性哈密顿动力学，为光学模拟相互作用光物质模型（如塔维斯–卡明斯哈密顿量）提供一条潜在途径。更广泛地说，我们的结果表明，时分复用谐振腔可作为模拟仿真强耦合光物质系统的可行框架。

致谢

我们感谢Sara Bassil在硅集成光子学方面的见解，并感谢Maxime Dherbécourt就类霍普菲尔德模型进行的富有成效的讨论。

[1] A. Aspuru-Guzik与P. Walther，光子量子模拟器，《自然-物理学》8，285–291（2012）。[2] T. Inagaki、K. Inaba、R. Hamerly、K. Inoue、Y. Yamamoto与H. Takesue，基于简并光学参量振荡器的大规模伊辛自旋网络，《自然·光子学》10，415–419（2016）。[3] E. Altman、K. R. Brown、G. Carleo、L. D. Carr、E. Demler、C. Chin、B. DeMarco、S. E. Economou、M. A. Eriksson、K.-M. C. Fu、M. Greiner、K. R. Hazzard、R. G. Hulet、A. J. Kollár、B. L. Lev、M. D. Lukin、R. Ma、X. Mi、S. Misra、C. Monroe、K. Murch、Z. Nazario、K.-K. Ni、A. C. Potter、P. Roushan、M. Saffman、M. Schleier-Smith、I. Siddiqi、R. Simmonds、M. Singh、I. Spielman、K. Temme、D. S. Weiss、J. Vučković、V. Vuletić、J. Ye与M. Zwierlein，量子模拟器：架构与机遇，《PRX Quantum》2，017003（2021）。[4] L. S. Madsen、F. Laudenbach、M. F. Askarani、F. Rortais、T. Vincent、J. F. Bulmer、F. M. Miatto、L. Neuhaus、L. G. Helt、M. J. Collins等，利用可编程光子处理器实现的量子计算优势，《自然》606，75（2022）。[5] L. W. Clark、N. Schine、C. Baum、N. Jia与J. Simon，观测由光构成的劳克林态，《自然》582，41 45 2020–（）。[6] R. M. Kroeze、B. P. Marsh、D. A. Schuller、H. S. Hunt、A. N. Bourzutschky、M. Winer、S. Gopalakrishnan、J. Keeling与B. L. Lev，在矢量量子光学自旋玻璃中直接观测复本对称性破缺，《科学》389，1122（2025）。[7] M. Calvanese Strinati、D. Pierangeli与C. Conti，全光可扩展空间相干伊辛机，《物理评论应用》16，054022（2021）。[8] N. G. Berloff、M. Silva、K. Kalinin、A. Askitopoulos、J. D. Töpfer、P. Cilibrizzi、W. Langbein与P. G. Lagoudakis，在极化激元模拟器中实现经典XY哈密顿量，《自然·材料》16，1120（2017）。[9] L. Yuan、Q. Lin、M. Xiao与S. Fan，光子学中的合成维度，Optica 5，1396–1405（2018）。[10] T. Ozawa与H. M. Price，合成维度中的拓扑量子物质，《自然综述：物理》1，349 357 2019–（）。[11] J. Roslund、R. M. De Araujo、S. Jiang、C. Fabre与N. Treps，波长复用量子网络"

借助超快频率梳，《自然-光子学》8, 109 (2014)。[12] H.-H. Lu, M. Liscidini, A. L. Gaeta, A. M. Weiner, 和 J. M. Lukens，频率-bin 光子量子信息，Optica 10, 1655 (2023)。[13] T. Ozawa, H. M. Price, N. Goldman, O. Zilberberg, 和 I. Carusotto，集成光子学中的合成维度：从光隔离到四维量子霍尔物理，《物理评论A》93, 043827 (2016)。[14] A. Marandi, Z. Wang, K. Takata, R. L. Byer, 和 Y. Yamamoto，时分复用光学参量振荡器网络作为相干伊辛机，《自然-光子学》8, 937 (2014)。[15] H. Chalabi, S. Barik, S. Mittal, T. E. Murphy, M. Hafezi, 和 E. Waks，用于二维时分复用量子随机游走的合成规范场，《物理评论快报》123, 150503 (2019)。[16] L. Yuan, M. Xiao, Q. Lin, 和 S. Fan，动态调制的少数环中的任意维合成空间，Physical Review B 97, 104105 (2018)。[17] S. Takeda 和 A. Furusawa，在基于环路的架构中利用测量诱导的连续变量门序列实现通用量子计算，《物理评论快报》119, 120504 (2017)。[18] A. Marandi, Z. Wang, K. Takata, R. L. Byer, 和 Y. Yamamoto，时分复用光学参量振荡器网络作为相干伊辛机，《自然-光子学》8, 937–942 (2014)。[19] C. Leefmans, A. Dutt, J. Williams, L. Yuan, M. Parto, F. Nori, S. Fan, 和 A. Marandi，时分复用光子谐振器网络中的拓扑耗散，《自然-物理学》18, 442–449 (2022)。[20] B. Bartlett, O. Y. Long, A. Dutt, 和 S. Fan，用于任意拓扑结构中量子模拟的可编程光子系统，《APL量子》1 (2024)。[21] C. Ciuti, G. Bastard, 和 I. Carusotto，子带间腔极化激元场的量子真空性质，Physical Review B 72, 115303 (2005)。[22] Y. Todorov 和 C. Sirtori，电偶极规范下的子带间极化激元，Physical Review B 85, 045304 (2012)。[23] J. A. Ćwik, P. Kirton, S. De Liberato, 和 J. Keeling，强耦合有机极化激元中的激子光谱特征

，《物理评论A》93, 033840 (2016)。[24] J. George, T. Chervy, A. Shalabney, E. Devaux, H. Hiura, C. Genet, 和 T. W. Ebbesen，超强振动耦合下的多重拉比劈裂，《物理评论快报》117, 153601 (2016)。[25] F. Herrera 和 F. C. Spano，分子系综中的腔控制化学，《物理评论快报》116, 238301 2016( )。[26] M. A. Zeb, P. G. Kirton, 和 J. Keeling, 振动缀饰极化激元的精确态与光谱，ACS Photonics 5, 249–257 (2018)。[27] S. Haroche 和 J. M. Raimond，《探索量子：原子、腔与光子》（牛津大学出版社，牛津，2006）。[28] 参见补充材料 [URL]，了解往返积分驱动幺正算符的推导、以各站点间失谐为参数对铃木-特罗特极限的研究，以及有关再相位效应的见解。[29] M. Heuck, K. Jacobs, 和 D. R. Englund，利用动态耦合腔和光学非线性实现受控相位门，《物理评论快报》124, 160501 (2020)。[30] P. J. Bustard, K. Bonsma-Fisher, C. Hnatovsky, D. Grobnic, S. J. Mihailov, D. England, 和 B. J. Sussman，迈向由腔内频率转换控制的光纤腔量子存储器，《物理评论快报》128, 120501 (2022)。[31] O. Karni, C. Vaswani, 和 T. Chervy，非线性铌酸锂微腔中的超快光学门控 (2025)。[32] M. Kitagawa 和 Y. Yamamoto，克尔非线性干涉仪中数不确定度降低的数-相最小不确定度态，《物理评论A》34, 3974–3988 (1986)。[33] F. Campaioli, J. H. Cole, 和 H. Hapuarachchi，量子主方程：量子光学、量子计算及其他领域的技巧与诀窍，《PRX Quantum》5, 020202 2024( )。[34] E. Ng, T. Onodera, S. Kako, P. L. McMahon, H. Mabuchi, 和 Y. Yamamoto，利用相干伊辛机高效采样基态及低能伊辛自旋构型，Phys. Rev. Res. 4, 013009 (2022)。[35] J. J. Hopfield，激子对晶体复介电常数贡献的理论，《物理评论》112, 1555–1567 (1958)。[36] J. del Pino, J. Feist, 和 F. J. Garcia-Vidal, 拉曼散射中振动强耦合的特征，《物理化学杂志C》119, 29132–29137 (2015)。[37] A. Strashko 和 J. Keeling，强耦合振动子-极化激元的拉曼散射，《物理评论A》94, 023843 (2016)。[38] S. Krämer, D. Plankensteiner, L. Ostermann, 和 H. Ritsch，QuantumOptics.jl：用于模拟开放量子系统的 Julia 框架，Computer Physics Communications 227, 109 (2018)。[39] J. Casanova, A. Mezzacapo, L. Lamata, 和 E. Solano，囚禁离子中相互作用费米子晶格模型的量子模拟，《物理评论快报》108, 190502 (2012)。[40] T. Gera 和 K. L. Sebastian，利用无序塔维斯-卡明斯模型研究腔中无序对极化激元态和暗态的影响，《化学物理杂志》156, 194304 (2022)。[41] T. Gera 和 K. L. Sebastian，关于……的精确结果

具有对角无序的塔维斯–卡明斯模型与休克尔哈密顿量，《物理化学杂志A》126，5449–5457（2022）。[42] K. Sun、C. Dou、M. F. Gelin 和 Y. Zhao，具有无序的塔维斯–卡明斯模型与霍尔斯坦–塔维斯–卡明斯模型的动力学，《化学物理杂志》156，024102（2022）。[43] Y. He、Q.-F. Yang、J. Ling、R. Luo、H. Liang、M. Li、B. Shen、H. Wang、K. Vahala 和 Q. Lin，自启动双频铌酸锂孤子微梳，Optica 6，1138（2019）。[44]R. Shankar、I. Bulu 和 M. Lončar，适用于中红外的高品质因数蓝宝石上硅集成环形谐振器，《应用物理快报》102，051108（2013）。[45] K. Luke、Y. Okawachi、M. R. E. Lamont、A. L. Gaeta 和 M. Lipson，si3 40 微谐振腔中的宽带中红外频率梳生成，4，4823–4826（2015），《光学快报》。[46] S. A. Miller、M. Yu、X. Ji、A. G. Griffith、J. Cardenas、A. L. Gaeta 和 M. Lipson，用于宽带中红外光子学的低损耗硅平台，Optica，第4卷，第7期，第707–712页，10.1364/OPTICA.4.000707（2017）。[47] R. Armand、M. Perestjuk、A. Della Torre、M. Sinobad、A. Mitchell、A. Boes、J.-M. Hartmann、J.-M. Fedeli、V. Reboud、P. Brianceau、A. De Rossi、S. Combrié、C. Monat 和 C. Grillet，高品质因数中红外集成硅锗环形谐振器，APL Photonics 8，071301（2023）。[48] H. Sakr、Y. Chen、G. T. Jasion、T. D. Bradley、J. R. Hayes、H. C. H. Mulvad、I. A. Davidson、E. Numkam Fokoua 和 F. Poletti，在600至1100 nm波段衰减与石英光纤相当的空芯光纤，《自然-通讯》11，6030（2020）。[49] I. Carusotto 和 C. Ciuti，光的量子流体，《现代物理评论》85，299–366（2013）。[50] S. Rodriguez、W. Casteels、F. Storme、N. Carlon Zambon、I. Sagnes、L. Le Gratiet、E. Galopin、A. Lemaître、A. Amo、C. Ciuti 等，通过动态光学迟滞探测耗散相变，《物理评论快报》118，247402（2017）。[51] T. Fink、A. Schade、S. Höfling、C. Schneider 和 A. Imamoglu，光子关联测量中的耗散相变特征，《自然-物理学》14，365（2018）。[52] I. Carusotto、D. Gerace、H. E. Tureci、S. De Liberato、C. Ciuti 和 A. Imamoğlu，驱动耗散非线性腔阵列中的费米化光子，《物理评论快报》103，033601（2009）。[53] H. Mabuchi，腔非线性光学的量子比特极限，《物理评论A》85，015806（2012）。[54] J. H. Shapiro，单光子克尔非线性无助于量子计算，《物理评论A》73，062305（2006）。[55] R. Yanagimoto、E. Ng、M. Jankowski、H. Mabuchi 和 R. Hamerly，时间囚禁：实现强耦合与确定性光学量子计算的途径，Optica 9，1289–1296（2022）。[56] D. E. Chang、V. Vuletić 和 M. D. Lukin，量子非线性光学——逐个光子，《自然-光子学》8，685–694（2014）。[57] A. Kala、D. Sharp、M. Choi、A. Manna、P. Deshmukh、V. Kizhake Veetil、V. Menon、M. Pelton、E. Waks 和 A. Majumdar

量子非线性光学，ACS Nano **19**，14557–14578（2025）。[58] M. Heuck、K. Jacobs 和 D. R. Englund，《动态耦合腔中的光子-光子相互作用》，Physical Review A **101**，042322（2020）。[59] D. Hagenmüller、S. Schütz、J. Schachenmayer、C. Genes 和 G. Pupillo，《腔辅助介观输运》

费米子：相干与耗散动力学，《物理评论B》**97**，205303（2018）。[60] J. Dubail、T. Botzung、J. Schachenmayer、G. Pupillo 和 D. Hagenmüller，大型随机箭头矩阵：无序量子自旋与腔耦合系统中的多重分形性、半局域化与受保护输运，《物理评论A》**105**，023714（2022）。