实现反常 Floquet 非阿贝尔能带拓扑在光子散射网络中

Yuze Hu[1,2,†], Mingyu Tong[1,3,4,5,†], Tian Jiang[2], Shuxing Yang[1,3,4,5], Ning Han[6], Fujia Chen[1,3,4,5],Li Zhang[1,3,4,5], Rui Zhao[1,3,4,5], Qiaolu Chen[1,3], Hongsheng Chen[1,3,4,5,*], F. Nur Ünal[7,*], Robert-Jan Slager[8,*], Yihao Yang[1,3,4,5,*]

[1] 量子信息交叉研究中心、极端光子学与仪器国家重点实验室、浙江大学杭州全球科技创新中心，浙江大学，杭州 310027，中国。[2] 国防科技大学理学院，中国长沙 410073[3] 国际联合创新中心、浙江大学电磁学研究院，浙江大学，海宁 314400，中国。[4] 浙江省先进微纳电子器件与智能系统重点实验室，浙江大学金华研究院，浙江大学，金华 321099，中国。[5] 浙江大学绍兴研究院，浙江大学，绍兴 312000，中国。[6] 中国计量大学光学与电子科技学院，杭州 310018，中国。[7] 伯明翰大学物理与天文学院，埃德巴斯顿，伯明翰 B15 2TT，英国。[8] 曼彻斯特大学物理与天文学系，牛津路，曼彻斯特 M13 9PL，英国

[†]这些作者对本研究的贡献相同。[*]通讯作者。
电子邮箱：yangyihao@zju.edu.cn（Y. Y.）；
robert-jan.slager@manchester.ac.uk（R.-J. S.）；f.unal@bham.ac.uk（F. N. Ü.）；
hansomchen@zju.edu.cn（H. C.）

摘要

近期研究表明，多能隙拓扑能够催生超越传统单能隙分类的未知相。这些相与具有非阿贝尔四元数荷的能带节点以及动量空间编织过程相关，后者由新的不变量（如典型的欧拉类）刻画；这些现象本质上至少需要两个空间维度。理论预测，将这类相拓展至非平衡态将揭示超越静态情形的更丰富多能隙拓扑，但由于对维度、对称性和动力学控制的要求极为严格，其实验实现仍未取得突破。在此，我们从理论上展示并首次通过实验实现了光子散射网络中的二维（2D）Floquet 非阿贝尔能带拓扑。在这一平台上，我们发现了一系列远离平衡态的二维多能隙系统所特有的拓扑现象，包括由能带节点相互连接的反常多能隙相、Floquet 欧拉转移、具有反常狄拉克弦构型的有隙相，以及Floquet 诱导的能带节点非阿贝尔编织。此外，我们还观测到跨越多个能隙的弗洛凯周期性反常边缘态，为这些备受关注的二维多能隙弗洛凯拓扑相提供了实验特征。我们的研究确立了光子散射网络作为实现非阿贝尔弗洛凯系统的一种实用且灵活的途径，为具备编织能力的动力学拓扑物理和稳健的光子功能开辟了新方向。

引言

能带结构的拓扑通常是逐个带隙理解的。例如，单个孤立带隙周围的能带可以具有陈数[1]，、受时间反演对称性保护的 Kane-Mele 不变量[2]，或贝里相位[3]，，这些量能够准确预测手性边缘态或极化型边缘态的存在[4–6]。然而，当同时考虑多个能带（带隙）时，可能会出现新的拓扑结构[7–16]。具体而言，近期的发现表明，存在无法用成熟的单能隙分类来表达的多能隙拓扑不变量[9,10,15,17,18]。此外，这些不变量与动量空间中的非阿贝尔过程有着错综复杂的联系：能带节点表现为携带（广义）四元数荷的对象，它们在动量空间中的运动可导致多个能隙之间发生编织、重组和拓扑简并[7–9, 16, 19]。这些编织效应至少需要两个空间维度，在一维系统或传统的单能隙拓扑中都没有对应现象。

除了静态情形，非平衡平台（如周期驱动系统，或其逐步传播可自然实现 Floquet 演化算符的幺正散射网络）还能够展现平衡态中通常无法实现的拓扑行为[20,21,21–24]。这类系统的一个关键特征是，准能量以 2π 为模定义，因此谱会“环绕”自身[25–33]。这种周期性从根本上改变了能带节点之间的相互作用方式：从准能量区顶部离开的节点会从底部重新进入，使此前彼此断开的能隙得以连通。因此，拓扑荷可以在准能量景观中迁移，从而产生没有任何静态对应物的反常相[20,21,33]。

这些可能性最近被预测会在多带隙背景下催生新型相，包括 Floquet 欧拉相、异常狄拉克弦构型和非阿贝尔节点编织，它们在本质上有别于静态或阿贝尔范式[14, 29, 34–36]。尽管这些预测引人注目，但迄今为止，2+1 维中的 Floquet 诱导编织和非阿贝尔相尚未在实验中实现，主要是因为构建具有可控简并和对称性约束的完全可调多能带 Floquet 平台，在技术上仍难以实现。在此，我们强调维度这一关键因素，因为一维

Floquet 多能带系统阐明了重要的局限：虽然 Zak相仍有意义，但在一维中不会发生真正的非阿贝尔编织，而完整且忠实的体-边对应仍是当前研究的热点[29, 34–36]。

在此，我们通过理论证明并实验实现二维（2D）光子散射网络中的 Floquet 非阿贝尔拓扑，直接观测到横跨多个准能隙的反常边缘态，从而克服了这些根本性挑战。该平台由磁偏置三端口环行器构成的 Kagome 晶格组成，环行器之间通过低损耗波导互连。尽管结构简单，该网络经过精心设计，分别破坏时间反演对称性（$\mathcal{T}$）和二重旋转对称性（C_{2z}），同时保留二者的乘积 $C_{2z}\mathcal{T}$——这一对称性条件迫使所有弗洛凯本征模保持实数，并使非阿贝尔标架荷得以明确定义[7–16, 37]。在此框架下，我们揭示了一系列 Floquet 相，展现了多能隙图景的丰富内涵，如图1所示。在一个临界点，系统进入反常多能隙相，此时狄拉克节点相互连接所有准能带，使 Floquet 驱动能够在不同能带子空间之间转移欧拉类不变量。越过这一转变后，网络进入以反常狄拉克弦为特征的相，并在两个三能带分支之间打开能隙。在此能隙中，狄拉克弦的非平庸构型得以稳定，从而界定了该相的拓扑性质。这两个相均源于能带节点的非阿贝尔编织；这种编织由周期驱动激活，并负责重组谱中的拓扑荷。至关重要的是，我们在实验中直接观测到了预测的弗洛凯边缘态——包括反常边缘态和反手性边缘态，为其底层多能隙拓扑提供了明确证据，并确立了我们的平台是探索远离平衡态非阿贝尔能带拓扑的有力途径。

正文

光子散射网络中的二维 Floquet 非阿贝尔拓扑

我们提出了一种具有幺正波散射特性的非互易光子网络平台，如图1a所示。该架构由周期性 Kagome 晶格构成，以相同的三端口非互易散射节点建模，并采用无损

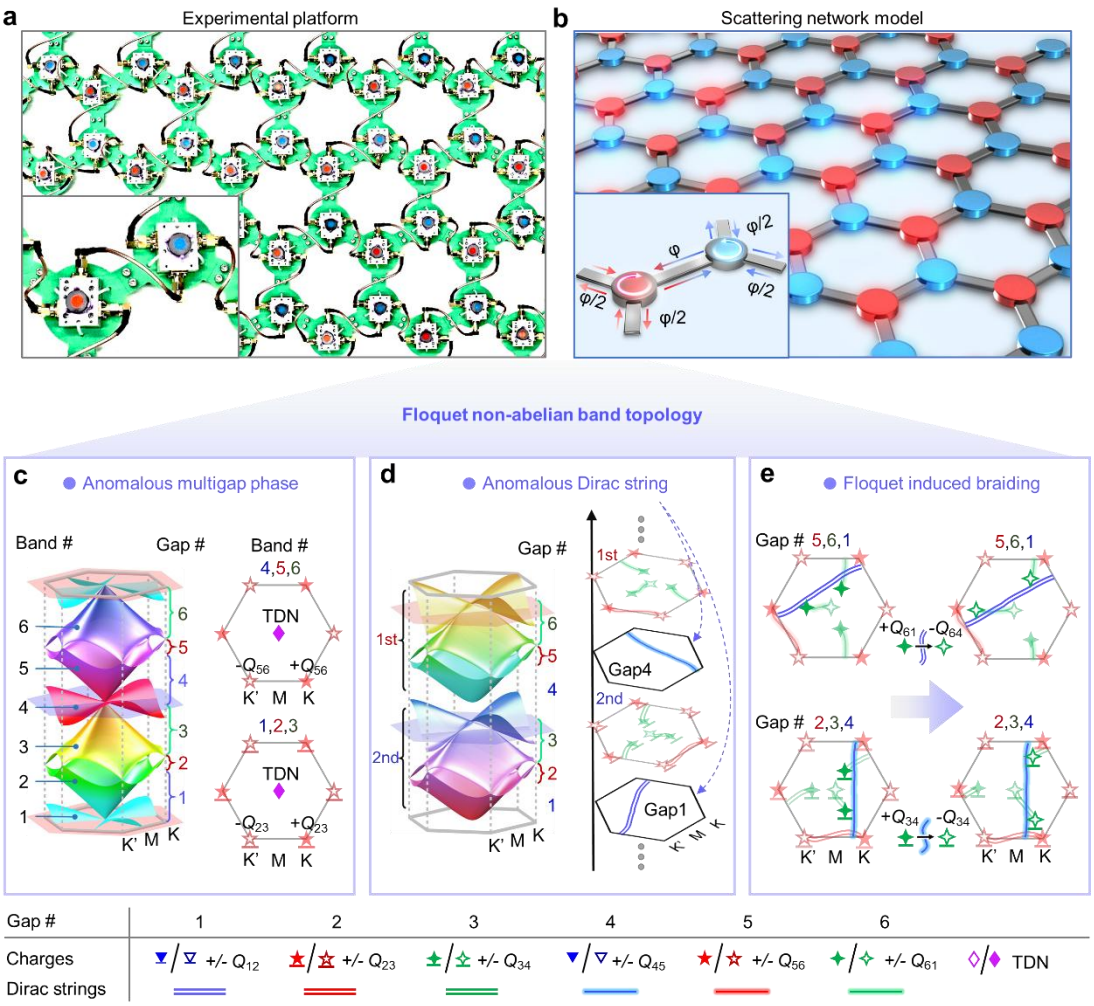
双向波导通道（图1b）。晶胞设计的一个特点是结合了 $C_{2z}\mathcal{T}$对称性，而各个散射元件则引入三重旋转对称性（C_3）（图1b）。这种对称性源自晶胞内部的特定耦合：两个具有 C_3对称性的散射体成对耦合，二者受到方向相反的磁通偏置，并具有元件间相移 φ。每个节点处的基本散射过程由一个幺正 3×3 矩阵S_0刻画。由于非互易性，该矩阵本质上是不对称的。值得注意的是，该矩阵完全由两个独立的角参数ξ 和 η决定，如图 2e 所示的一般参数化形式所示。为了将周期结构中的波传输建模为布洛赫本征问题，该方程同时考虑了波矢 $\boldsymbol{k}$相关的6×6幺正散射矩阵 $S(\boldsymbol{k})$所描述的晶格节点处的相干散射事件，以及 φ 波沿双向链路传播过程中累积的相位延迟[25,38]。由此得到的网络波传输特性可描述为：

$$S(\boldsymbol{k})|c(\boldsymbol{k})\rangle = e^{-i\varphi}|c(\boldsymbol{k})\rangle. \tag{1}$$

形式上，这一非互易散射网络中的波动力学由一个幺正 6×6 矩阵 $S(\boldsymbol{k})$ 控制（见补充信息）。这一描述可直接映射为弗洛凯本征值问题，类似于周期驱动晶格中的相应问题。在该描述中，角变量 $\varphi\in(-\pi,\pi]$ 扮演准能量的角色。不同于反常弗洛凯陈绝缘体[24]，，我们的设计在晶胞的两个环行器中采用了反平行磁通构型。这种特定的二维 kagome 网络架构打破了 $\mathcal{T}$对称性和 C_{2z}，同时保留了组合 $C_{2z}\mathcal{T}$对称性。这种保留带来了深远的后果：式 1 的弗洛凯本征态获得实数值。因此，表征能带的非阿贝尔标架荷得以良好定义[9]，，从而使新型非阿贝尔拓扑相的出现成为可能；这些拓扑相独特地结合了工程化非互易性与 Floquet 驱动的优势。

对于确立非阿贝尔能带拓扑尤为重要的是，光子散射网络平台为研究反常非阿贝尔弗洛凯拓扑相提供了高度灵活且功能丰富的环境。该

系统独特地支持实现多种不同的非平衡态，而这些状态在静态区域中从根本上无法实现。反常多能隙无隙相中，所有弗洛凯能带都通过能带节点相连，从而促进不同能带子空间之间的欧拉类不变量转移，如图1c所示；反常狄拉克弦相则是两个三能带子空间之间的有隙态，其特征是在能隙中存在非平庸的狄拉克弦构型，如图1d所示；此外，还有能带节点的弗洛凯诱导的非阿贝尔编织过程，它支配着不同拓扑相之间的欧拉转移，如图1e所示。我们的平台能够容纳如此多样的现象，这凸显了它在探测反常弗洛凯多能隙拓扑方面的价值，并为观测相关的边界特征提供了直接途径，从而为探索驱动系统中的奇异非阿贝尔物理提供了一个多用途试验平台。



图。 1 | 2D 光子散射网络中的 Floquet 非阿贝尔能带拓扑。 **a**、**b**，非阿贝尔光子散射网络的实验平台（a）和理论模型（b）。

非互易散射由三端口环形器中的交错磁通实现，连接线路之间的最近邻跃迁则由非对称酉散射矩阵控制。插图展示了一个晶胞，其中散射元件通过同轴传输线相连，从而产生相位延迟（φ）。晶胞散射算符产生具有准能量φ的弗洛凯能带。 **c**，经历 Floquet 欧拉转移时，能量色散和能带节点呈现反常多带隙相。六条能带由三重简并节点连接在一起。 **d**，反常狄拉克弦形成于三条能带中两个相似分支之间的带隙内。 **e**，由于 Floquet 周期性，穿越反常狄拉克弦可促使狄拉克节点发生编织。

反常多带隙相与 Floquet 欧拉转移

在 $C_{2z}\mathcal{T}$对称系统中，欧拉类 ϵ 可量化孤立双能带子空间的拓扑性质，并对能带节点的编织和移动进行分类[8,13,14]。具体而言，考虑由布洛赫态$|u_n(\boldsymbol{k})$ 和 $|u_{n+1}(\boldsymbol{k})$ 张成的能带子空间（$n, n+1$），其中 n 为能隙编号；对于这些能带，可利用实性条件定义欧拉形式[8,10,11,14]：

$$\mathrm{Eu} = \left\langle \partial_{k_x} u_n(\boldsymbol{k}) \middle| \partial_{k_y} u_{n+1}(\boldsymbol{k}) \right\rangle - \left\langle \partial_{k_y} u_n(\boldsymbol{k}) \middle| \partial_{k_x} u_{n+1}(\boldsymbol{k}) \right\rangle \tag{2}$$

以及欧拉联络， $A = u_n(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{\nabla} u_{n+1}(\boldsymbol{k})\cdot d\boldsymbol{k}$ 。补丁欧拉类通过在布里渊区内一个不包含相邻能隙中节点的补丁 D 上积分来计算

$$\epsilon_n[D] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_D \mathrm{Eu} dk_x \wedge dk_y - \int_{\partial D} A\right] \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

并同时计入在 ∂D 上的边界项。非零值表明，编织过程产生了无法湮灭的能带节点荷[8–10]。此外，通过产生能带节点并将其编织，欧拉类 $|\epsilon|$ 还可以从一对能带转移到下一对能带。然而，在我们的 Floquet系统中，由于包含无限多个副本，每个谱周期内的六条能带本质上分为两个相似的分支。如图 2b–2d 所示，补丁欧拉类可以从上支转移到下支，这一过程称为 Floquet 欧拉转移（图 2f），为探索平衡态之外的新型不变量和物理现象提供了契机。

我们现在刻画散射网络中非阿贝尔标架荷的拓扑结构。我们在图 2e 中绘制了散射矩阵 S_0 每一种可能实现的完整拓扑相图，由角度参数ξ 和η表示。其中心对应于一个奇异相，即完美的

环行器情形，具有 $|T| = 1$ 和无限隔离。黄色虚线表示保持$\mathcal{T}$对称性的相，其呈现出通常的笼目色散，并在Γ 点处具有二次节点。能隙3、6是已打开的能隙，不含任何狄拉克节点，因此 三能带分支彼此分离且定义良好。对于静态三能带系统，荷在四元数群中取值。然而一般而言，对于 N 能带系统，这些荷由相邻能隙之间反对易的广义四元数荷所支配。这些荷由旗流形的同伦群决定，该群与Salingaros vee群—相关，并可方便地用克利福德代数基元[9,14,15,37]表示。在动力学设定下，这一荷结构被自然推广，并由狄拉克弦[14,39]所刻画。在我们的六能带Floquet系统中，我们采用$Cl_{0,6} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ [39]，并将节点荷记为 $\pm Q_{ij} = e_i e_j$ ，其中 i 和 j 对应于能带1-6，并且我们将 e_0 与 e_6等同，即 $Q_{12} = e_1 e_2$和 $Q_{61} = e_6 e_1$。其他共轭类/荷为 $\pm Q_{ijkl}$ 和 $\pm Q_{ijklmn}$ 。物理上，$\pm Q_{ij}$ 表示能带 i 和 j的本征矢所张成平面内的$\pm\pi$ 旋转。标架荷 $+1$ 表示一个平凡旋转，而 -1 指任意旋转平面内的一个2π 旋转。

对于图 2a 中的点-i，能隙 4(1) 中的二次节点具有非阿贝尔标架荷 -1 ，而能隙 5(2) 中的狄拉克节点分别具有标架荷 $\pm Q_{56}(Q_{23})$。当实施 $\mathcal{T}$破缺时（例如图 2e 中的点-ii），二次节点分裂为四个狄拉克节点：Γ 点处有一个标架荷 $+Q_{45}(Q_{12})$，附近有三个标架荷 $-Q_{45}(Q_{12})$。这些狄拉克节点之所以能够产生，是因为它们对于能隙 4 的总标架荷为 $\mathrm{Q} = -1 = (-Q_{45})^3(+Q_{45})$，对于能隙 1 的总标架荷为 $\mathrm{Q} = -1 = (-Q_{12})^3(+Q_{12})$（图 2b）。值得注意的是，这三个带有 $-Q_{45}(Q_{12})$ 荷的狄拉克点不仅沿动量空间中的高对称线移动，还构成了一条沿 Floquet 准能量维度移动的迁移狄拉克能量等高线（MDEC）。每条 MDEC 都会随着图 2e 中相图奇点周围的环路向下移动一个 Floquet 准能量周期（即 2π）。这种非平凡的迁移对于创建、编织、合并、分裂和重构非阿贝尔节点至关重要，因此我们的平台能够产生更丰富的 Floquet拓扑相（更多细节见图 3）。参数空间（k_x、 k_y、 LP）中能带节点的非阿贝尔标架荷演化见图 3b、3c

给出了非阿贝尔拓扑半金属的相图。它优雅地展示了由两条 MDEC 的迁移引起的拓扑相变。

在回路路径（*LP)* 点 LP=3.0 处，我们证明 Floquet系统沿准能量轴将来自相邻分支的三条能带合并，从而产生一个所有能带彼此连接的相。这定义了一种无法存在于平衡态中的反常多带隙相。这种合并产生了多带隙三重简并节点，在此定义为准能量为 0 处的拓扑荷 -1 以及 π，它们没有静态对应物。越过该 LP 点后，上支的最低能带下降至下支的最高能带。在图 2c 所示的相中，六条能带全部由两个三重简并能带接触点连接。三个移动的狄拉克节点从$-Q_{45}$（Q_{12}）到 $+Q_{34}$（Q_{61}）的非常规突然交换导致了 Floquet 欧拉转移。随后，非平凡欧拉类分别从能隙 4（1）转移到能隙 3（6）。在图 2e 的循环演化中，非平凡欧拉类表现为带隙的逐步减小，并随着三重简并节点依次出现而发生，如图 2f、3c 所示。

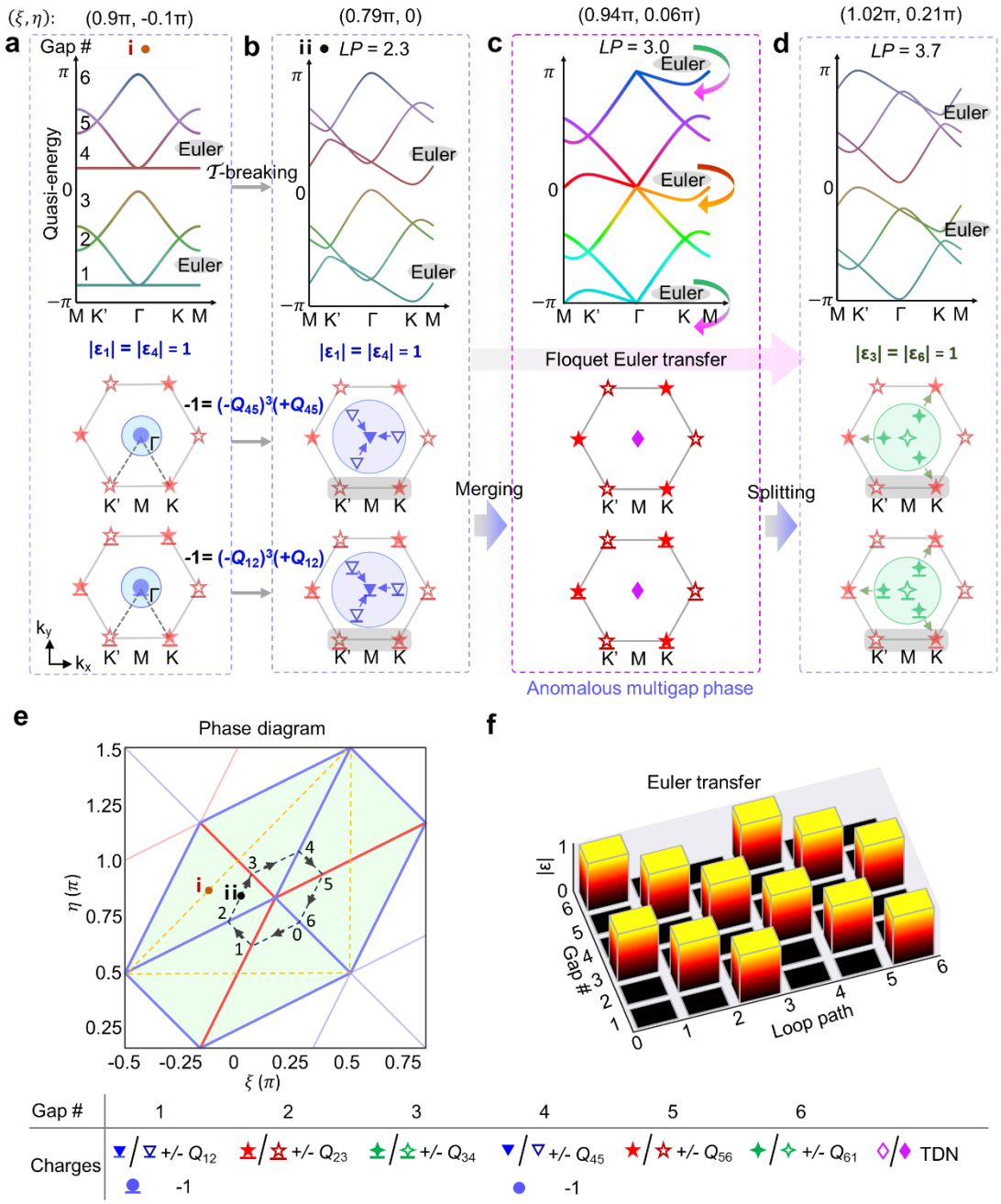


图 2 | 反常非阿贝尔多带隙相与 Floquet 欧拉转移。a-b，$\mathcal{T}$破缺诱导的 Floquet 非阿贝尔能带拓扑与补丁欧拉类。上：准能带结构。下：非阿贝尔节点荷。标签 1–6 表示带隙。在 $\mathcal{T}$对称性破缺（右图）下，二次节点分裂为一个固定狄拉克节点和三个移动狄拉克节点，遵循商规则 $-1 = (-Q_{45})^3(+Q_{45}) = (-Q_{12})^3(+Q_{12})$。**c**，反常非阿贝尔多带隙相诱导 Floquet 欧拉转移的机制：准能周期的周期性使狄拉克节点在临界点处存在于所有能带隙中。因此，欧拉类可以跨越相邻分支之间的带隙转移。**d**，完成 Floquet 欧拉转移后的多带隙非阿贝尔能带拓扑。能隙 1 和 4 中的四个节点（蓝色圆圈）由补丁欧拉类 $|\epsilon_{1,\ 4}| = 1$ 稳定表征，随后转移至能隙 6 和 3（绿色

圆）与 $|\epsilon_{6,\ 3}| = 1$ 穿越 Floquet 谱边界。**e**，(ξ，η) 空间中的拓扑相图。绿色阴影区域：参数空间中的最小周期区。绿色虚线/蓝色/红色线条：$\mathcal{T}$对称相/常规欧拉类转移/Floquet 欧拉转移。深色虚线回路：环绕能带奇点的路径。**f**，各带隙内欧拉类随回路路径参数的演化。

采用上述策略，我们现在分析相图中绕奇点一周所引发的欧拉类转移、狄拉克节点和等能轮廓演化。一个 Floquet 周期内狄拉克节点的等能轮廓，为直观呈现从二次点分裂出的 MDEC 所起的非平凡作用提供了尤为简洁的指标（图 2b ）。在我们的光子散射网络中，打破 $\mathcal{T}$对称性会产生四种不同的狄拉克等能轮廓。其中，狄拉克节点位于布里渊区的 Γ、K 和 K' 点。此外，还存在一个由三个位移后的狄拉克节点共享的简并等能轮廓，其两条分支分别标记为 MDEC1 和 MDEC2。如图 3a 所示，动量空间中固定的狄拉克节点（位于 Γ、K 和 K'）的等能轮廓，在准能量维度上未显示出明显的拓扑迁移特征。绕参数空间中的奇点完成一周后，等能轮廓会回到初始位置。然而，对于 MDEC1 和 MDEC2，两者的等能轮廓都会在 Floquet 准能谱中发生一个完整周期的位移，这类似于迁移狄拉克锥的拓扑非平凡“泵浦”过程（图 3a 和补充信息图 S2）。

鉴于相邻能隙在多能隙拓扑中发挥着关键作用，探究 相邻能隙间拓扑相变的影响十分重要。我们考察图 2f 所概述的欧拉相，其中补丁欧拉类通过涉及谱中的所有能隙，在不同子空间（能带节点）之间转移。我们发现，非平庸欧拉类与移动的狄拉克锥密切相关。由于能隙在准能量维度上呈周期性，欧拉类逐个穿过能带隙向下传递，并沿完整的回路路径完成一个周期。我们进一步展示了沿回路路径的详细能带色散，清晰呈现多个能带、能隙、狄拉克节点与 MDEC 之间的关系（图 3c 和扩展数据图 4–5）。可以看出，其主要特征是所有狄拉克节点的拓扑相变都与两个 MDEC 高度相关。

以图 2c 中的 $LP = 3.0$ 为例，连接所有 Floquet 能带的三重简并节点出现在 Γ 点。越过这一相后，每个分支的最低能带（$LP < 3.0$）转移至相邻分支（$LP > 3.0$），此时新分支之间由一个带隙隔开。

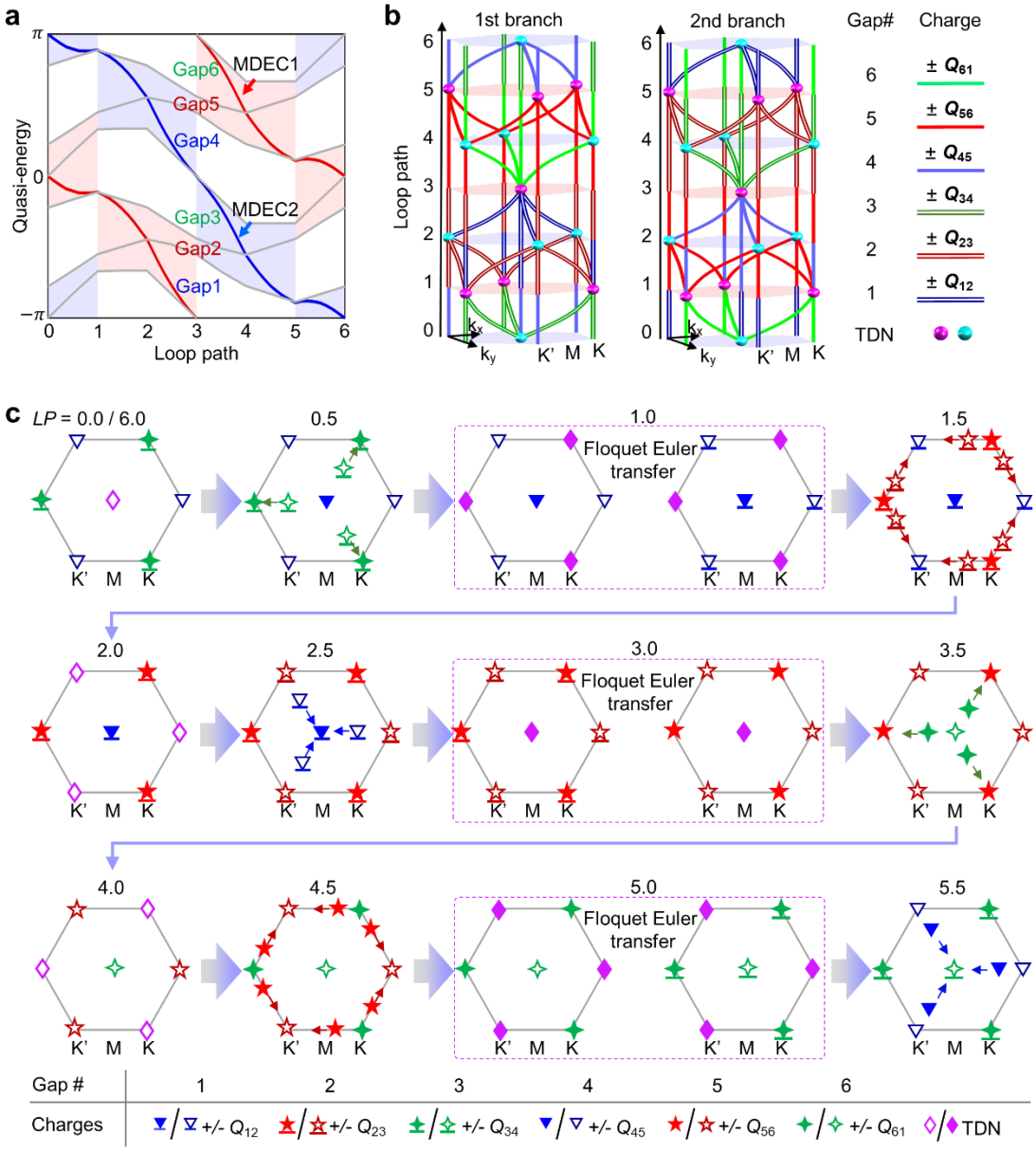


图 3 | 四元数荷的演化。a，所有狄拉克节点的准能量轮廓演化。红色和蓝色曲线分别对应第一迁移狄拉克能量轮廓（第一分支中的 MDEC1）和第二迁移狄拉克能量轮廓（第二分支中的 MDEC2）。MDEC 表示包含三个移动的狄拉克节点的准能量轮廓；由于 Floquet 周期性，它在一个回路路径循环内展现全谱泵浦。**b**，两条分支的非阿贝尔荷随回路路径的演化，展示了跨越多个拓扑相的转变。**c**，沿图 2e 中的回路路径循环一周时，第一分支的非阿贝尔荷演化。

反常狄拉克弦与 Floquet诱导编织

我们进一步展示，在扩展数据中，多能隙拓扑原理与弗洛凯布里渊区周期性的相互作用可能产生新的反常拓扑相。扩展数据图1展示了新的反常狄拉克弦相的实例，这些相实际上在我们的光子散射网络中普遍存在。我们的笼目散射网络的 Floquet 谱呈现出由两个分支组成的独特结构。每个分支由三条通过狄拉克点相互连接的能带组成，两个分支之间由能带隙彼此隔开[见图1d]。有趣的是，当狄拉克弦穿过这些能带隙时，它们会被自然分割，从而形成两条反常狄拉克弦，如扩展数据图1a所示。因此，这一架构为研究奇异拓扑实体提供了一个原生平台。

具体而言，狄拉克弦构型与各能带的 Zak 相位相关。贯穿一个带隙的狄拉克弦会施加一种普适特征：相邻能带的贝里相位发生 π 相位偏移。不同于其静态对应物，Floquet 能带结构呈现出能带 Zak 相位与带隙中狄拉克弦之间的周期性相互作用[14]。跨越能隙 3 和能隙 6 的全局狄拉克弦便是一个例子，它们对于锁定上、下两组能带的 Zak 相位分布，使其彼此对齐起着关键作用，如扩展数据图 1e–1h 所示。我们注意到，各分支相应带隙内的局域狄拉克弦构型存在差异，这凸显了两个分支之间不同的拓扑特征，也表明这是一个真实的六能带系统。在参数空间的路径环路上，反常狄拉克弦会在不同带隙间转移。这一过程主要源于弗洛凯欧拉转移机制：在此过程中，两个谱支发生拓扑重构，导致不同准能量窗口处的带隙打开。通过分析反常多带隙相及其对应的狄拉克弦构型，可以阐明其详细演化，如扩展数据图 1b–1c 和 1f–1g 所示。具体而言，最初位于能隙 6 和能隙 3 中的反常狄拉克弦，分别迁移至第一分支和第二分支的上能带。与此同时，原先位于能隙 4 和能隙 1 中的反常狄拉克弦则迁移到能带隙中，从而表现为稳健的反常狄拉克弦，如

如扩展数据图 1d、1h 所示。

能带节点的编织是二维非阿贝尔系统的一项关键拓扑特征，并且与欧拉转移密切相关。接下来，我们考察欧拉类转移、能带节点编织之间的相互作用，以及它们与 Floquet 设置中特有的反常狄拉克弦之间的联系。以第一分支为例（扩展数据图 2a），在$LP = 2.5$ 处，能隙 1 具有非平庸欧拉类，其特征是标架荷分解为两对不同的荷：（$-Q_{12}$）（$+Q_{12}$）和（$-Q_{12}$）（$-Q_{12}$）。这两对荷的演化路径各不相同：（$-Q_{12}$）（$+Q_{12}$）对在 Γ 点直接湮灭，而（$-Q_{12}$）（$-Q_{12}$）对则在该处与相邻分支中的一个能带结合，共同形成稳定的三重简并（扩展数据图 2b）。随后，这一三重简并在能隙 6 中不对称地分裂，产生一对拓扑平庸的（$-Q_{61}$）（$+Q_{61}$）和一对新生成的（$+Q_{61}$）（$+Q_{61}$）；后者携带非平庸的欧拉不变量（扩展数据图 2d）。其中一个关键的中间步骤是，能隙 6 中可移动的 $+Q_{61}$ 荷狄拉克点从 Γ 向 K 点传播。至关重要的是，其中两个狄拉克点穿过位于能隙 1 中的反常 Floquet 狄拉克弦—这是周期性 Floquet 驱动所引发编织的直接结果—并由此导致其拓扑荷发生确定性的反转（扩展数据图 2e）。这一预备状态使得随后能够在 K 点发生重组事件：这些可移动的狄拉克点与能隙 5 中原有的 $+Q_{56}$ 荷狄拉克节点合并。这次重组触发了新一轮的分裂和对产生（扩展数据图 2f、2g）。最后，能隙 5 中由此产生的可移动 $-Q_{56}$ 狄拉克点穿过能隙 4 中的一条狄拉克弦，标架荷最终发生符号反转，使得能隙 5 中的欧拉类整体变为非平庸。因此，通过对狄拉克点进行精确编排的重组、湮灭、产生和编织—这一过程由其与反常 Floquet 狄拉克弦的交叉所介导—非平庸欧拉类便有效地从能隙 1 经由能隙 6 转移，最终驻留于能隙 5。类似地，第二分支也呈现出相似的演化，如图 2f 所示；其详情见扩展数据图 3。

弗洛凯边缘态与多能隙狄拉克弦之间的对应关系

狄拉克弦通过明确标示，成为预测反常边缘态的可靠指标

能带反转在节点相变过程中产生的规范不连续性。[14], 如图 4 所示。其构型直接决定π 沿垂直于边缘的路径积累的 Zak 相。这种量子化位移标志着存在拓扑非平庸能隙，并确保该能隙内存在局域边缘态（有关狄拉克弦与边缘态之间对应关系的详细说明，见扩展数据图 6）。因此，追踪狄拉克弦为预测谱中不同能隙内的边界态提供了一种通用且系统的方法。

正如 [14], 所指出的，我们可以利用布里渊区中可收缩路径上的 Zak 相位，有效地检验边缘态。额外的狄拉克弦会引发相位跳跃；当这种跳跃为 π （模 2π）时，边缘态便会出现（见补充图 S3–S5）。重要的是，通过在上述规则中有效追踪体边对应（整个演化过程见图 3 和扩展数据图 4–5），我们的分析进一步揭示了非常规 Floquet 多能带反手性边缘态在单条能带中的一个决定性特征。需要强调的是，我们所说的反手性是指色散相对于动量方向相反；它并非指穿越带隙、产生有限量子化输运的手性边缘态，而这类手性边缘态不会出现在多能隙拓扑反手性模中[40,41]。图 4 展示了整个回路路径演化过程中全面的边缘投影能带及相应的边缘态图样。正如我们先前的工作[7],所揭示的，对于静态 Kagome 晶格，可以通过调节不同的 $\mathcal{T}$-对称性破缺强度，灵活调控多能隙反手性边缘态。在这个网络中，六条能带中有四条由狄拉克节点连接，另有两条打开的能带；狄拉克弦构型由此确定，并成功表征了各带隙中相应边缘态的出现与消失。在发生欧拉转移的临界点（图 4b、4c），能隙 1、3、4 和 6 中的狄拉克弦图样都可视为反常，因为 Floquet 谱中的所有带隙都在拓扑上有所关联。能隙 1 和能隙 3 中的反常狄拉克弦可沿 x 方向投影到边缘，因此导致第 1 至第 3 条相邻能带中多能隙边缘态共存。然而，能隙 4 和能隙 5 中的狄拉克弦垂直于沿 x 方向的边缘，因此不呈现边缘对应关系。若没有反常 Floquet 相这一独特特征，

边缘态分布将无法再预测，若我们只关注一条孤立的能带分支。扩展数据图 6 给出了理论对整个回路所预测的边界模的直接映射。

在我们的散射网络中，Floquet 谱的周期性和两个 MDEC 的演化会产生一些非常规边缘态。如扩展数据图 7 所示，一个显著特征是，三个能带的两个分支中的边缘态分别出现在互补带隙中，且群速度方向相反。这是因为：y 方向边界具有固定的终止相位；与此同时，两个分支具有 aπ 准能量差，因此在由狄拉克点终止的系统中，带隙内的反手性边缘态会出现在相对的两侧。另一个标志性特征是，MDEC 始终充当起点或终点，分别产生或终止一个反手性边缘态。这种行为可追溯至 MDEC 中三个狄拉克节点在 k_x 轴上的投影：其中两个节点在动量空间中简并，留下一个位于不同 k_x 值处的孤立狄拉克节点。这个孤立节点会导致 Zak 相在 0 和 π 之间切换。当每个分支中的 MDEC 位于下带隙时，减小其值会缩短反手性边缘态的长度，例如回路路径范围 0~1、 2~3、 4~5。越过满足 $LP = 1$、3、5 的点后，MDEC 转移至上带隙；减小其值会增加反手性边缘态的长度，如回路路径范围1~2、 3~4、 5~6所示。我们注意到，沿一条回路路径循环时，边缘态也会沿 Floquet 谱向下“泵浦”一个周期，如扩展数据图 7 所示，这凸显了我们系统中丰富的拓扑相互作用。

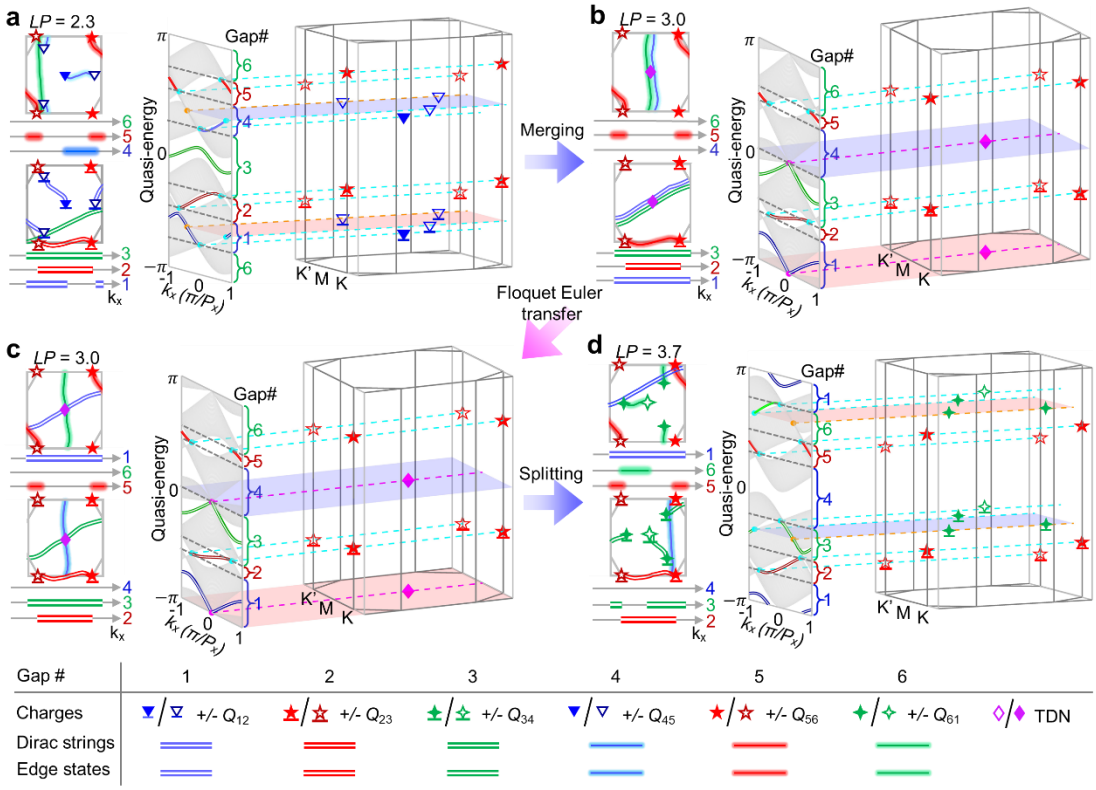


图 4 | 多带隙体 四元数荷、狄拉克弦与拓扑边缘态的对应关系。a-d，$LP = 2.3$ (a)、$LP = 3.0$ (b, c) 和 $LP = 3.7$ (d) 的体非阿贝尔节点、狄拉克弦、投影准能带及布里渊区。左侧面板展示所有带隙中的拓扑节点排列和狄拉克弦。沿 k_x 轴排列的线段标示了各带隙中存在边缘态的区域。右侧面板展示投影边缘态和体非阿贝尔荷。

二维弗洛凯非阿贝尔能带拓扑的实验实现

为通过实验验证我们的理论框架，我们构建了一个带状几何的光子散射网络（图 5c），其中必须考虑散射体和延迟线的频率色散。图 5b 展示了单个环行器（图 5a）测得的顺时针与逆时针透射率及反射谱；这些结果与 LP =3.0 时的理论预测吻合良好。谱在 4.9 - 7.2GHz 的宽频段内呈现低色散，从而确保了进行超过一个周期的 Floquet 谱测量的可行性。图 5e 所示的$LP = 3.0$ 相位下也呈现出这类谱。图 5d 展示了一个晶胞内的详细构型：两个磁通量方向相反的环行器通过同轴电缆连接，构成一个笼目图。散射体为铁氧体环行器，并通过同轴电缆连接，如图所示

图 5f. 每条同轴传输线的长度决定了链路的相位延迟，该延迟沿频率维度线性变化，如图 5g 所示。y方向边缘处的传输线被切断，由于其与空气之间存在较大的阻抗失配，因此会产生原位类镜面反射。

当源位于x方向中部、靠近y方向的两个边缘时，激发的边缘态沿 $\pm x$方向传播。通过对每个激励频率下探测到的波函数进行傅里叶变换，我们获得电磁布洛赫波的色散关系。图 5i 显示，测得的电磁能带结构与理论预测高度吻合；图 5h 给出了 $LP = 3.0$ 时两个周期的 Floquet 谱。在广泛的实验参数范围内，我们观察到测得的谱与理论能带结构吻合良好。实验结果清晰地显示了反常边缘态和 Floquet 反手性边缘态的色散。特别地，我们来考察反手性边缘态出现时四个离散频率下场分布图所呈现的输运性质。如图 5j 所示，在同一频率下，上边界和下边界激发的边缘模式呈现出典型的反手性特征，并沿同一方向传播。尽管相邻频率点的输运方向相反，边缘输运性质在前两个和后两个频率点之间仍表现出显著的周期性，体现出鲜明的双周期弗洛凯特征。图 5 所示的所有实验观测结果均充分证实了理论发现。值得指出的是，这也是首次展示静态情形之外与弗洛凯非阿贝尔拓扑相相关的周期性边缘态。

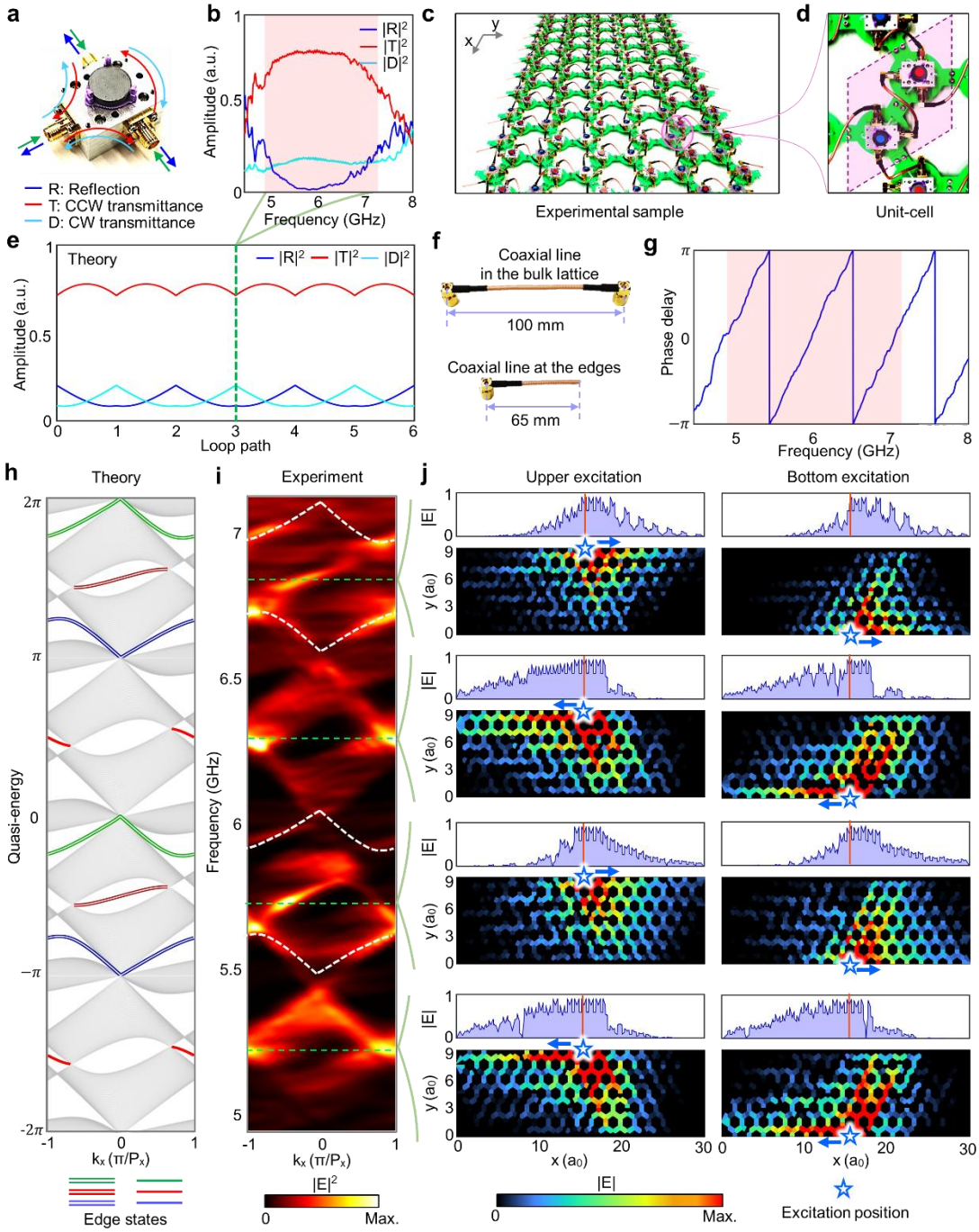


图 5 | 二维弗洛凯非阿贝尔能带拓扑的实验实现。 **a**，实现非互易散射的铁氧体环行器照片。**b**，单个环行器的实测散射谱，显示出宽带均匀性（4.9-7.2GHz）。参数对应于（ξ， η）相图中的点LP = 3.0（图2a）。**c**，实验用非阿贝尔光子散射网络示意图。**d**，由两个磁通方向相反的环行器构成的晶胞结构，在保持 $C_{2z}\mathcal{T}$ 对称性的同时破缺$\mathcal{T}$对称性。**e**，图2a中沿回路路径的一个散射体的逆时针透射率（T）、顺时针透射率（D）和反射（R）谱的理论预测。**f**，上图：体晶格中的同轴传输线

作为链路，在相邻环行器之间施加频率相关相位延迟。底部面板：切断 y方向边缘处的同轴传输线，以引入具有镜面反射的边界条件。 **g**，测得的两个相邻节点之间的相位延迟谱。红色阴影区域表示约 4π 相位覆盖，对应两个 Floquet 准能量周期。**h**，在$LP = 3.0$ 处的理论投影能带结构。绿色和黑色线分别表示 Floquet 反手性边缘态和反常边缘态。图中展示了两个周期性 Floquet 区，用于实验验证。**i**，在上边缘和下边缘（沿 y 方向）激发时实验测得的能带结构。白色虚线标出了位于两个分支之间的 Floquet 反常边缘态。在 4.9–7.2 GHz 范围内观测到传播方向交错的周期性 Floquet 反手性边缘态，与 (e) 中的理论预测相符。绿色虚线标出了呈现反手性边缘态的四个频率，突显了 Floquet 周期性。**j**，在反手性边缘态频率下实验测得的电场分布（x-y 平面）和边缘场分布（沿 x 方向）。左侧面板：在 y 方向上边缘激发。右侧面板：在 y 方向下边缘激发。

结论与展望

总而言之，我们的工作表明，光子散射网络为实现反常二维 Floquet 非阿贝尔拓扑提供了一个实用且可通过实验调控的平台。利用这一架构，我们直接观测到跨越多个准能隙的反常边缘态，这是驱动系统中多能隙拓扑的明确实验特征。其底层六能带几何支持一种反常多能隙相，其中狄拉克节点连接所有弗洛凯能带，并介导欧拉不变量的转移；此外还支持有隙狄拉克弦相。在这两种情况下，周期驱动都会促使能带节点以非阿贝尔方式相互交织，从而使拓扑荷在整个谱中重新分布。此外，这种由驱动促成的欧拉转移会引发 Floquet 周期泵浦效应，凸显出独特的体态特征。这些结果建立了 Floquet 动力学、非阿贝尔能带拓扑与可通过实验测量的边界模之间的连贯联系，揭示了周期驱动如何激活静态系统中无法实现的拓扑效应。更广泛而言，我们的工作展示了驱动多能隙平台在构造非平衡相以及为光子、声学、电子和量子系统中的波控制开辟新途径方面的潜力。

方法

非阿贝尔荷与狄拉克弦计算

我们计算了回路路径调控合成空间（k_x, k_y, LP）中的本征态轨迹— 该空间通过将回路路径维度—增添至二维布里渊区而形成，以揭示节点四元数值框架荷（图 2c）。每次节点环绕都沿着以固定基点 $\boldsymbol{A}_0$ 为起点的逆时针回路进行。路径构造始于节点附近，通过磁通增量确定轨迹起点，随后进行绝热环绕。随后，对由节点连接的三个能带的本征态轨迹进行投影，即可揭示拓扑保护相位绕数，进而确定非阿贝尔荷。

为确定反常狄拉克弦相内狄拉克弦的空间分布，我们计算了沿布里渊区中垂直于三个之字形边缘方向的路径上每条能带的 Zak 相。Zak 相通过沿与倒格矢对齐的闭合不可缩路径对贝里联络进行积分来求得[3]。Zak 相的分布图案揭示了狄拉克弦的位置，因为沿给定路径的 Zak 相发生 π 相位偏移，表明积分路径穿过了一条狄拉克弦。通过分析六条能带的 Zak 相分布，我们可以识别各能带对之间的狄拉克弦，其中两条反常狄拉克弦分别跨越两个分支之间的能隙，具体总结见补充信息图 S3–S5。

实验设计与表征

整个网络采用微波同轴线作为相位延迟链路，并通过精确设计其长度来实现目标拓扑相，同时保持 $50\,\Omega$ 特性阻抗，以实现最佳功率传输。通过传播延迟测量，在工作频率 f 下，物理长度为 L 的每段同轴线引入的相位延迟为 φ —同时考虑频率色散。为应对环行器色散带来的实际限制，我们在 $LP = 3.0$ 处构建了理论模型的实验映射（见补充信息图 S6），其参数化为 $L = 100$ mm，并在 4.9 GHz 至 7.2 GHz 范围内扫描 f，从而能够稳定地获取两个周期准能谱中的弗洛凯边缘态。

所有制备网络的散射参数和场分布均

使用矢量网络分析仪（VNA）和精密同轴连接进行表征。进行多端口散射测量时，在直通-反射-传输线（TRL）校准下，将两个网络端口连接至 VNA，其余端口则连接匹配的 50-Ω 负载以抑制反射。通过沿 y 方向在边界处施加激励，量化边缘输运性质。进行场映射时，将信号输入端口固定连接至 VNA 通道 1，并使用连接至通道 2 的校准后的同轴探头，手动扫描关键节点处的场振幅和相位。随后，通过对离散频率点处空间分辨复场测量结果进行二维傅里叶分析，重建投影的体能带和边缘能带色散。这种集成方法可在单一实验框架内同步采集能带结构、边缘输运效率和拓扑特征。

致谢

本研究获得科学技术部国家重点研发计划资助，项目编号为 2022YFA1405200（Y.Y.）、2022YFA1404900（Y.Y.）、2022YFA1404704（H.C.）和 2022YFA1404902（H.C.）；国家自然科学基金委员会（NNSFC）项目资助，项目编号为 62175215（Y.Y.）、61975176（H.C.）、62305384（Y.H.）和 62305298（M.T.）；中国博士后创新人才支持计划资助，项目编号为 BX20230310（M.T.）；国防科技大学青年创新人才培育基金资助，项目编号为 2023-lxy- fhij-007（Y.H.）；浙江省重点研发计划资助，项目编号为 2022C01036（H.C.）；以及青年科研高峰创建 D 类资助，项目编号为 K20250230（Y.Y.）。R.-J.S. 感谢英国工程与自然科学研究委员会 ERC 配套资助 EP/X025829/1 和英国皇家学会交流资助 IES/R1/221060。F.N.\"U. 感谢英国皇家学会资助 Grant~URF/R1/241667 以及剑桥大学三一学院的支持。R.-J.S. 和 F.N.\"U. 的部分研究工作在阿斯彭物理中心完成，该中心由美国国家科学基金会资助，项目编号为 PHY- 2210452。

作者贡献

Y.H.、Y.Y.、R.-J.S.、F.N.Ü. 和 M.T. 共同构思了设计；Y.H.、Y.Y. 和 M.T. 设计了实验并制备了样品；在 M.T.、S.Y.、N.H.、F.C.、L.Z.、R.Z. 和 Q.C. 的协助下，Y.H. 测量了数据；R.-J.S.、F.N.Ü. 和 Y.H. 提供了理论解释；Y.Y.、R.-J.S.、F.N.Ü.、T. J. 和 H.C. 负责监督该项目；Y.H. 和 M.T. 撰写了手稿，Y.Y.、R.-J.S.、F.N.Ü. 和 H.C. 提供了意见。

竞争利益

作者声明不存在竞争利益。

数据和材料可用性

支持本研究结论的所有数据均已包含在本文和补充信息中。任何其他信息可向通讯作者索取。

参考文献

1. Haldane, F. D. M. 无朗道能级的量子霍尔效应模型：凝聚态中"宇称反常"的实现。《物理评论快报》**61**, 2015– 2018 (1988). 2. Kane, C. L. & Mele, E. J. Z_2拓扑序与量子自旋霍尔效应。《物理评论快报》**95**, 146802 (2005). 3. Zak, J. 固体中能带的贝里相位。Phys Rev Lett **62**, 2747–2750 (1989). 4. Bradlyn, B. et al. 拓扑量子化学。《自然》**547**, 298–305 (2017). 5. Qi, X.-L. & Zhang, S.-C. 拓扑绝缘体与超导体。Rev. Mod. Phys. **83**, 1057–1110 (2011). 6. Kruthoff, J., de Boer, J., van Wezel, J., Kane, C. L. & Slager, R.-J. 通过能带结构组合学对晶体绝缘体进行拓扑分类。《物理评论X》**7**, 041069 (2017). 7. Hu, Y. et al. 二维时间反演破缺非阿贝尔拓扑态的观测。《自然·通讯》**15**, 10036 (2024). 8. Jiang, B. et al. 非阿贝尔拓扑声学半金属及其相变的实验观测。《自然·物理》**17**, 1239–1246 (2021). 9. Bouhon, A. et al. 外尔点的非阿贝尔互易编织及其在 ZrTe 中的体现。《自然·物理》**16**, 1137–1143 (2020).

10. Ahn, J., Park, S. & Yang, B.-J. Nielsen-Ninomiya 定理失效与时空反演对称二维系统中的脆弱拓扑：在魔角扭转双层石墨烯中的应用。《物理评论X》**9**, 021013(2019).

11. Ünal, F. N., Bouhon, A. & Slager, R.-J. 光学晶格中作为动力学可观测量的拓扑欧拉类。《物理评论快报》**125**, 053601 (2020)。

12. Zhao, Y. X. & Lu, Y. PT对称实狄拉克费米子与半金属。《物理评论快报》 .

《物理评论快报》**118**, 056401 (2017)。

13. Peng, B., Bouhon, A., Monserrat, B. & Slager, R.-J. 声子作为非阿贝尔编织的平台及其在层状硅酸盐中的表现。《自然·通讯》**13**, 423 (2022)。

14. Slager, R.-J., Bouhon, A. & Ünal, F. N. 周期驱动系统中的非阿贝尔Floquet编织与反常狄拉克弦相。《自然·通讯》**15**, 1144 (2024)。

15. Wu, Q. 非相互作用金属中的非阿贝尔能带拓扑。《科学》**365**，1273–1277（2019）。

16. Guo, Q. 非阿贝尔拓扑荷与边缘态的实验观测。《自然》**594**，195–200（2021）。

17. Jiang, T. 等。具有六个能带的光子非阿贝尔拓扑绝缘体。Nat .

Commun. https://doi.org/10.1038/s41467-026-69887-y（2026）doi:10.1038/s41467-026-69887-y。

18. Liu, W., Wang, H., Yang, B. & Zhang, S. 欧拉半金属中欧拉荷与节线拓扑之间的对应关系。《科学进展》**11**，eads5081。

19. Yang, Y. 等。光与声中的非阿贝尔物理。《科学》**383**，eadf9621。20. Roy, R. & Harper, F. Floquet拓扑绝缘体的周期表。《物理评论B》**96**，155118（2017）。21. Rudner, M. S. & Lindner, N. H. Floquet拓扑绝缘体中的能带结构工程与非平衡动力学。《自然综述：物理》**2**，229–244（2020）。22. Upreti, L. K. 等。量子行走中布洛赫振荡的拓扑摆动。《物理评论快报》**125**，186804（2020）。

23. Kitagawa, T., Berg, E., Rudner, M. & Demler, E. 周期驱动量子系统的拓扑表征。《物理评论B》**82**, 235114 (2010).

24. Rudner, M. S., Lindner, N. H., Berg, E. & Levin, M. 周期驱动二维系统的反常边缘态与体边对应。《物理

评论X **3**, 031005 (2013).

25. Zhang, Z., Delplace, P. & Fleury, R. 反常非互易拓扑边缘态的卓越稳健性。《自然》**598**, 293–297 (2021).

26. Bandres, M. A. 等. 拓扑绝缘体激光器：实验。《科学》**359**, eaar4005 (2018).

27. Pyrialakos, G. G. 等. 双形态Floquet拓扑绝缘体。《自然·材料》**21**, 634– 639 (2022).

28. Cheng, Z. 等。在声学Floquet系统中观察到 π/2 模式。Phys. Rev

Lett. **129**，254301（2022）。

29. Qiu, H., Tong, S., Zhang, Q., Zhang, K. & Qiu, C. 观察到异常Floquet非阿贝尔拓扑绝缘体。arXiv预印本，arXiv250806818 (2025)。

30. Rechtsman, M. C. 等。光子 Floquet 拓扑绝缘体。《自然》 **496**, 196–200 (2013).

31. Jin, J. 等. 迈向光的 Floquet 陈绝缘体。《自然·纳米技术》。https://doi.org/10.1038/s41565-025-02003-1（2025）doi:10.1038/s41565-025- 02003-1。

32. Noh, J. 等. 光学外尔点和费米弧状表面态的实验观测。《自然·物理》**13**，611–617（2017）。

33. Wintersperger, K. 等. 利用超冷原子实现反常 Floquet 拓扑系统。《自然·物理》**16**，1058–1063（2020）。

34. Li, T. & Hu, H. Floquet 非阿贝尔拓扑绝缘体与多重体边对应。《自然·通讯》**14**，6418（2023）。

35. Slager, R.-J.、Bouhon, A. & Ünal, F. N. 关于“Floquet 非阿贝尔拓扑绝缘体与多重体边对应”的评论。arXiv 预印本 arXiv231012782（2023）。

36. Lin, Q., Li, T., Hu, H., Yi, W. 与 Xue, P. 利用光子量子行走模拟 Floquet 非阿贝尔拓扑绝缘体。arXiv 预印本 arXiv250806466（2025）。

37. Bouhon, A., Bzdušek, T. 与 Slager, R.-J. 超越对称性指标的脆弱拓扑几何方法。《物理评论B》**102**, 115135（2020）。

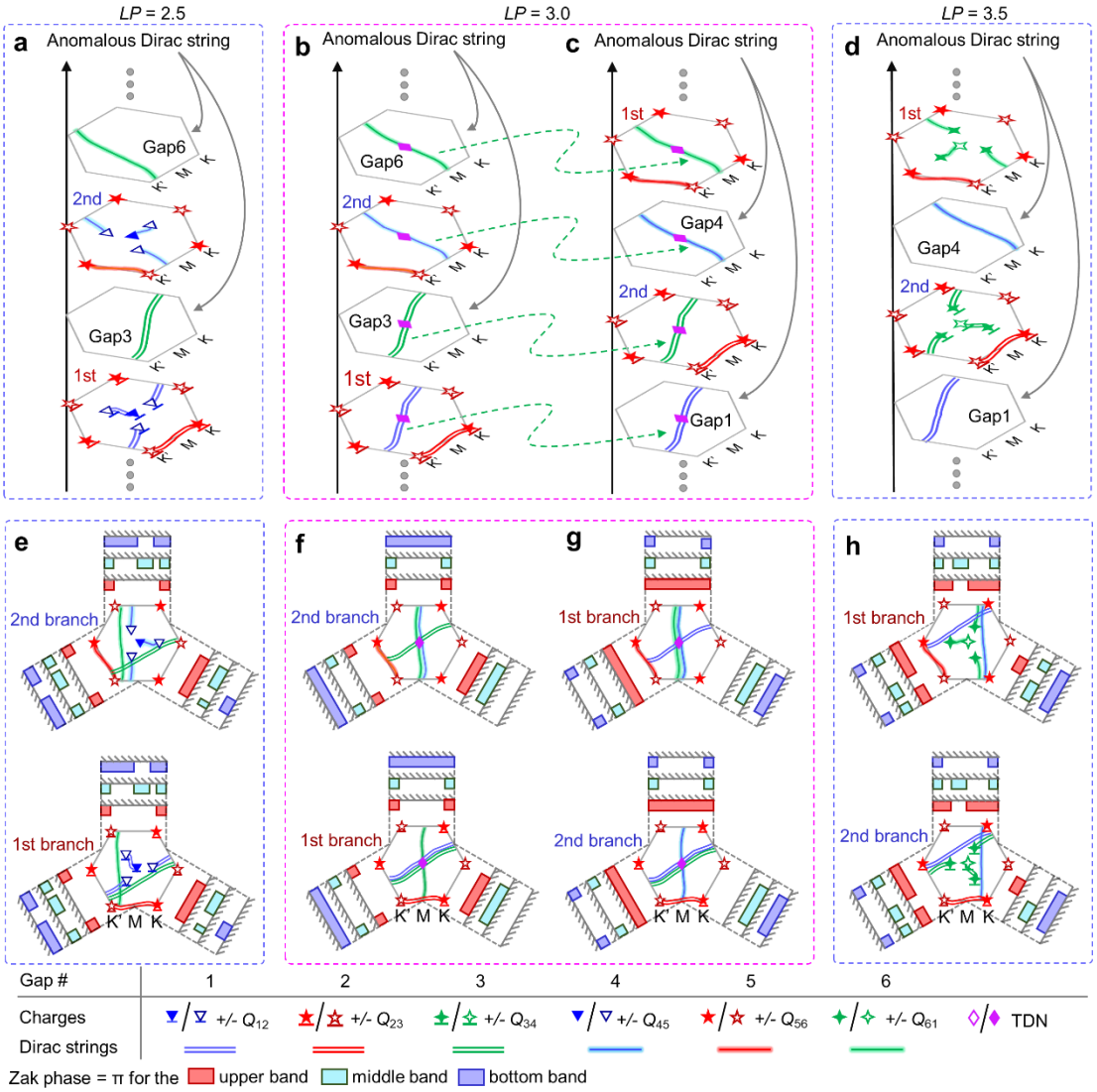
38. Hafezi, M., Demler, E. A., Lukin, M. D. 与 Taylor, J. M. 具有拓扑保护的稳健光学延迟线。《自然·物理》**7**, 907–912（2011）。

39. Slager, R.-J. & Ünal, F. N. 准备中。40. Zhou, P. 等人。观察到光子反手性边缘态。《物理评论快报》**125**，

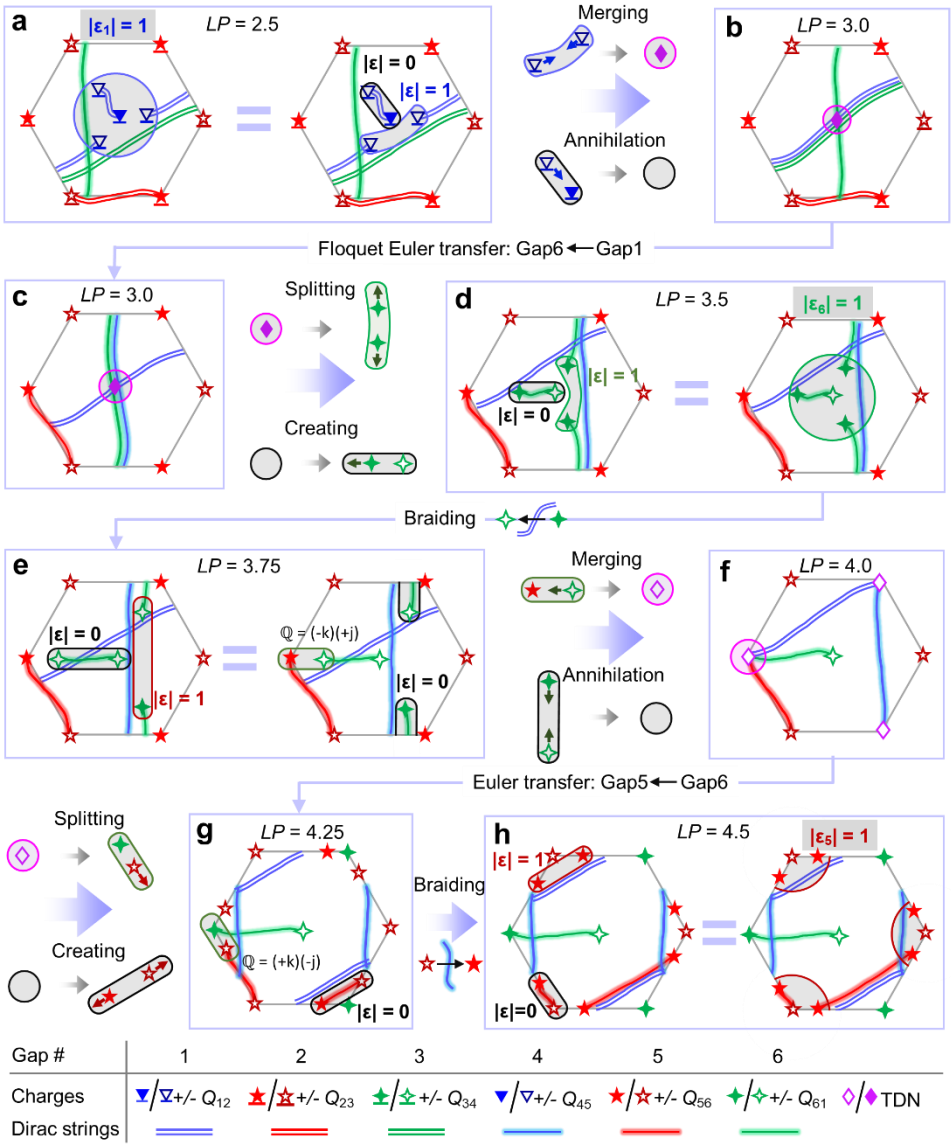
263603 (2020)。

41. Colomés, E. & Franz, M. 改性哈 Haldane 纳米带中的反手性边缘态。《物理评论快报》120, 086603 (2018).

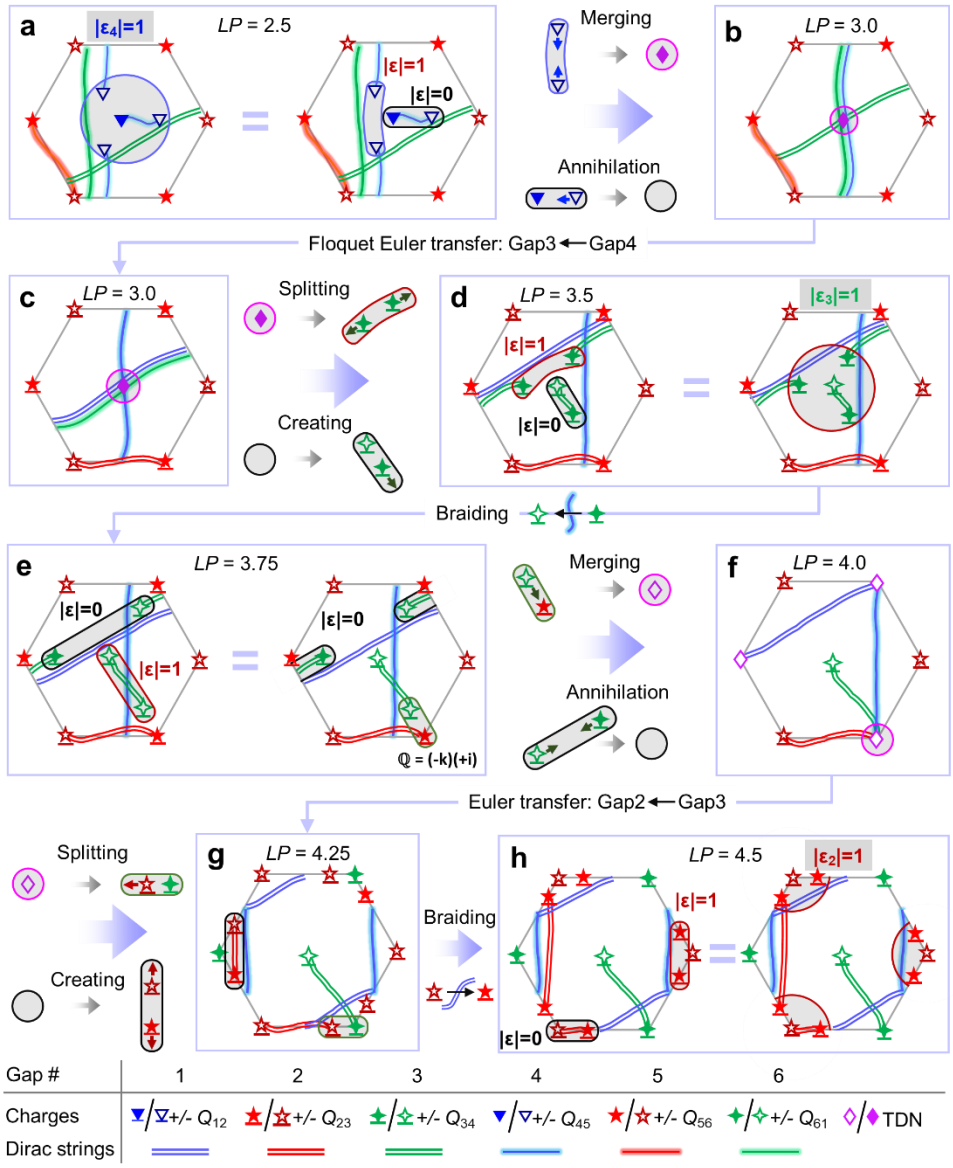
扩展数据图



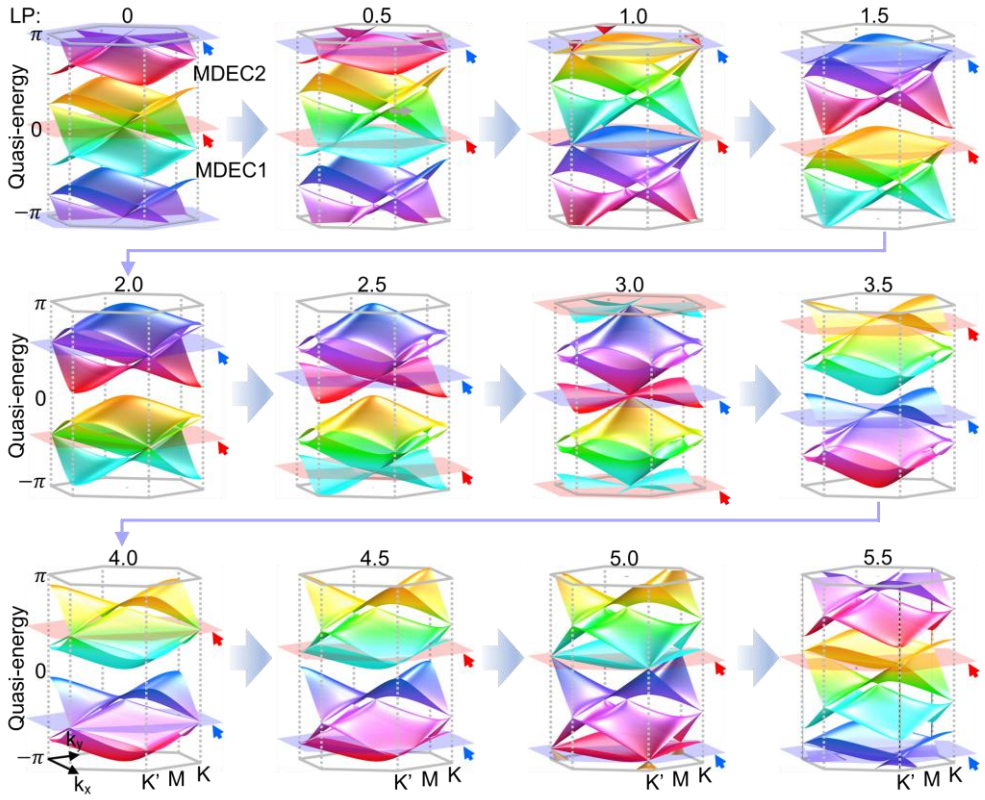
扩展数据图 1 | 反常狄拉克弦与 Zak 相分布。a-d，回路路径从 2.5 到 3.5 变化过程中，体非阿贝尔荷和狄拉克弦的演化。这里，1st 表示存在 MDEC1 的第一分支，2nd 对应存在 MDEC2 的第二分支。 **e-h**，回路路径从 2.5 到 3.5 上狄拉克弦与投影 Zak 相位之间的详细联系。三个锯齿边缘的拓扑由 Zak 相的非平庸值量化；Zak 相沿着穿越布里渊区、方向垂直于边缘的高对称路径积分得到。



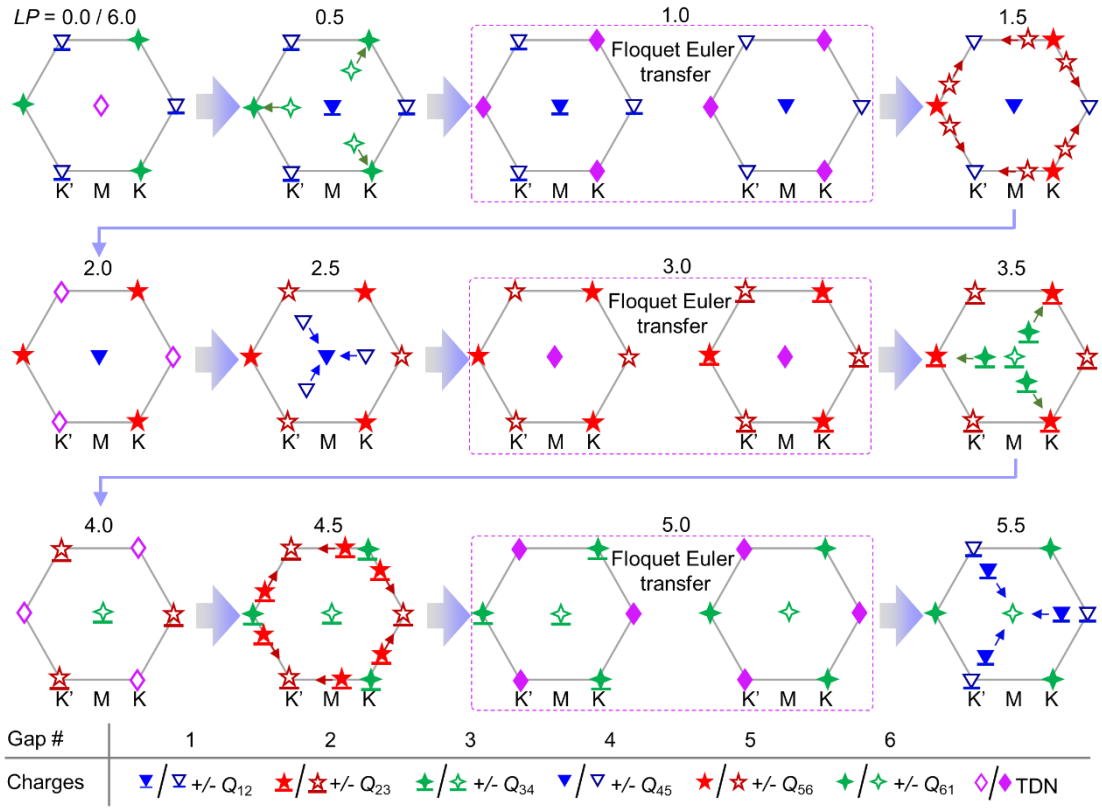
扩展数据图 2 | 相邻能隙中能带节点的编织及第一分支的欧拉转移。最终的编织构型通过非阿贝尔标架荷及其相关狄拉克弦的图示呈现。指定补丁内节点在重组（编织）过程中的稳定性由补丁欧拉类表征。图中勾勒出的大圆和椭圆表示用于计算补丁欧拉类的补丁。



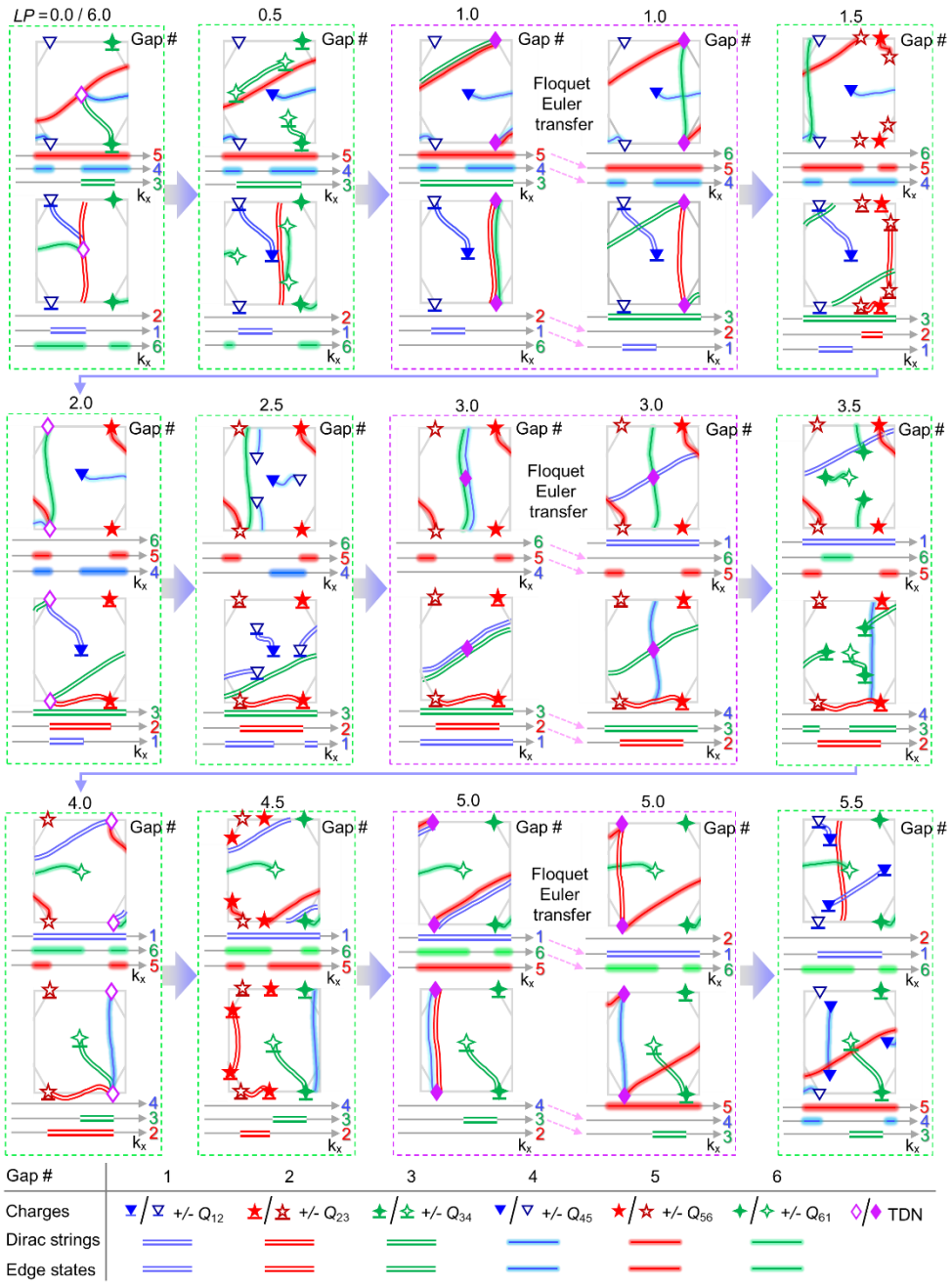
扩展数据图3 | 带隙中相邻节点的编织及第二分支的欧拉转移。通过对非阿贝尔标架荷及其相关狄拉克弦进行图示，可将由此产生的编织构型可视化。补丁内节点在重组（编织）过程中的稳定性由补丁欧拉类表征。图中勾勒出的大圆和椭圆表示用于计算补丁欧拉类的补丁。



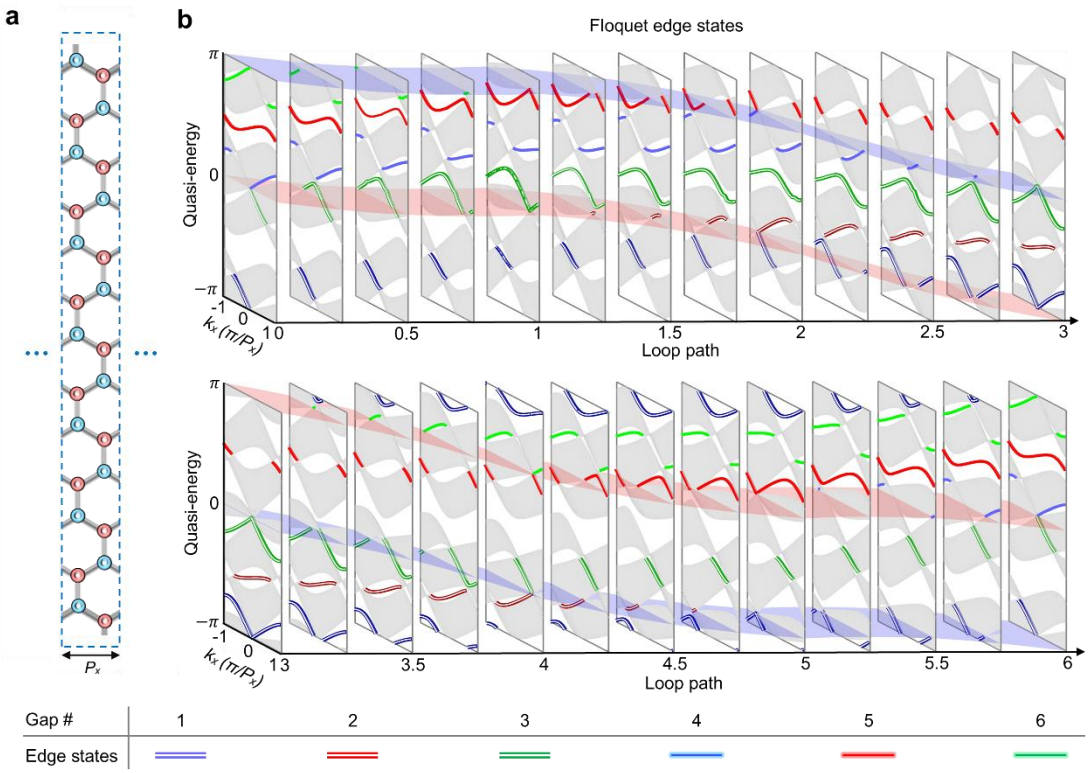
扩展数据图 4 | 沿图 2e 中回路路径一个周期内体能带色散的演化。



扩展数据图 5 | 图 2e 中沿回路路径经过一个周期时，第二分支的非阿贝尔荷演化。



扩展数据图 6 | 图 2e 中沿回路路径的边缘态与狄拉克弦之间的对应关系。 沿 k_x 轴排列的线段标示出带隙中存在边缘态的区域；狄拉克弦的存在通过垂直于边缘方向的投影产生边缘态。



扩展数据图 7 | Floquet 边缘态的演化。a，在所考虑的实空间条带几何中，晶胞沿*x*方向周期排列，并在 y 方向终止，因此沿*x*方向的平行边界处形成了局域的一维边缘态。**b**，(a) 中所示超胞的能带结构演化。

补充信息

实现反常弗洛凯非阿贝尔能带拓扑：光子散射网络

I. C_3 对称环行器的非互易散射理论建模

核心散射元件由具有三重旋转对称性（C_3）的无损谐振腔构成，并施加外部时间反演对称性破缺偏置（例如磁场），通过类塞曼分裂解除简并。这会将基模分裂为右旋（ω^+）和左旋（ω^-）本征频率，从而为非互易性奠定基础。

时域耦合模理论给出了一个支配波动力学的幺正散射矩阵 $S_0 \in 3 \times 3$:

$$\boldsymbol{S_0} = \begin{bmatrix} R & T & D \\ D & R & T \\ T & D & R \end{bmatrix} \tag{S1}$$

其中，$R = -1 + \frac{2}{3}(cos\xi\, e^{i\xi} + cos\eta\, e^{i\eta})$、$T = \frac{2}{3}(e^{-\frac{i2\pi}{3}} cos\xi\, e^{i\xi} + e^{\frac{i2\pi}{3}} cos\eta\, e^{i\eta})$、$D = \frac{2}{3}(e^{\frac{i2\pi}{3}} cos\xi\, e^{i\xi} + e^{-\frac{i2\pi}{3}} cos\eta\, e^{i\eta})$ 由两个关键参数决定：$\xi = arctan\left[\frac{\omega - \omega_+}{\gamma}\right]$、$\eta = arctan\left[\frac{\omega - \omega_-}{\gamma}\right]$。$\gamma$ 是端口的衰减时间倒数（由于 C_3 对称性，所有端口均相同），ω 是激励频率。

对称性与非互易性可总结如下：互易极限（$\xi = \eta$）出现在 $\omega^+ = \omega^-$（环行器上无磁场偏置）时，此时 S_0退化为对称矩阵。最大非互易性（$\xi = -\eta$）在 $\omega = \frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)$ 处实现，此时隔离度（例如 $|T| \neq |D|$）达到最大。幺正性约束：$S_0^\dagger S_0 = I_3$ 强制能量守恒，并通过 $|R|^2 + |T|^2 + |D|^2 = 1$ 将反射（$|R|$）与透射（$|T|$、$|D|$）的幅度联系起来。角参数 ξ、η将频谱失谐映射到紧致参数空间，从而实现如图1c所示的拓扑相变。

II. 非互易散射网络的布洛赫本征问题推导

类笼目图晶格由两个相同的 C_3 对称非互易元件（此处记为“A”和“B”）组成，二者具有取向相反的磁场偏置（图1b，正文）。在晶胞 n中，我们定义三个态矢量为：$|a_n$来自所有散射体端口的出射波，$|b_n$进入所有散射体端口的入射波，以及 $|c_n$沿元件间链路传播的波。值得注意的是，此处每个矢量包含6个复振幅，因此在一个弗洛凯谱周期内产生6条能带。

如图S1所示，元件‘A’和‘B’处的散射过程由酉算符控制

$$\boldsymbol{S}_{\text{elements}}|c_n\rangle = \boldsymbol{P_0}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S_A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S_B} \end{bmatrix}|c_n\rangle = |a_n\rangle \tag{S2}$$

其中 $\boldsymbol{P_0} = U_{12}\,U_{13}\,U_{45}\,U_{56}\,\boldsymbol{I_6}$ 是一个 6×6 酉置换矩阵，用于强制实现连通关系；每个 U_{ij} 都是一个初等置换矩阵，用于交换行 i 和 j、$\boldsymbol{S_A} = \boldsymbol{S_0}(\xi,\eta)$以及 $\boldsymbol{S_B} = \boldsymbol{S_0}(\eta,\xi)$。$\boldsymbol{S}_{\text{elements}}$ 的周期性确保了平移不变性。元件间链路引入布洛赫相位延迟 φ 和与动量相关的相位，这些相位由酉矩阵给出：

$$\boldsymbol{\Lambda(k)} = diag\left(e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha_2}}, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha_1}}, 1, 1, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha_2}}, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha_1}}\right) \tag{S3}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha_1}$、$\boldsymbol{\alpha_2}$ 是布拉菲晶格矢量。这将出射波与链路间波联系起来，如$|\boldsymbol{a(k)} = e^{-i\varphi\cdot\boldsymbol{\Lambda(k)}}|\boldsymbol{c(k)}$。

结合方程（S2）和（S3），可得酉弗洛凯算符的核心本征值方程及其本征问题：

$$\boldsymbol{S(k)}|\boldsymbol{c(k)}\rangle = e^{-i\varphi}|\boldsymbol{c(k)}\rangle \tag{S4}$$

其中 $|\boldsymbol{c(k)} \in \mathrm{C}^6$ 包含所有链路间的波振幅，且

$$\boldsymbol{S(k)} \equiv \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{S}_{\text{elements}} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{P_0}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S_A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S_B} \end{bmatrix} \tag{S5}$$

同时涵盖晶格几何和非互易散射。实值准能量 $\boldsymbol{\varphi(k)}$ 源于 $\boldsymbol{S(k)}$ 的幺正性。

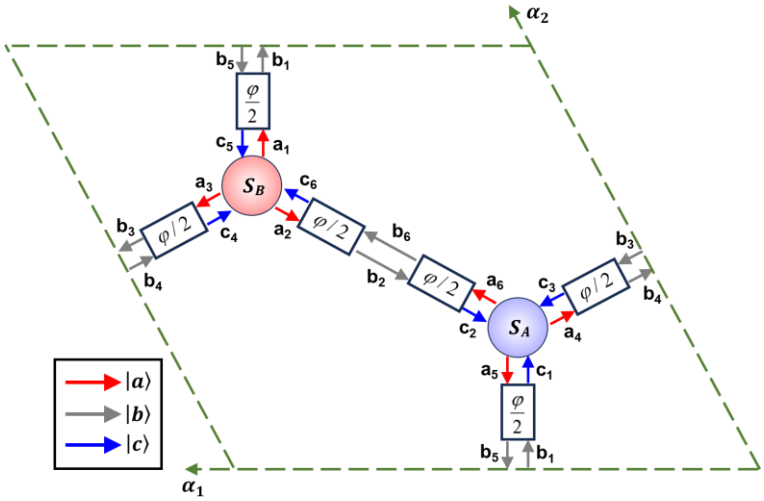


图 S1 | 非互易网络的晶胞结构与振幅约定。态矢量 $|a_n$（出射波）、 $|b_n$（中间传播）和 $|c_n$（入射波）定义了散射振幅。φ 表示元件间的总相位延迟。 $\boldsymbol{\alpha_1}$、$\boldsymbol{\alpha_2}$ 是一个晶胞的布拉菲晶格矢量。

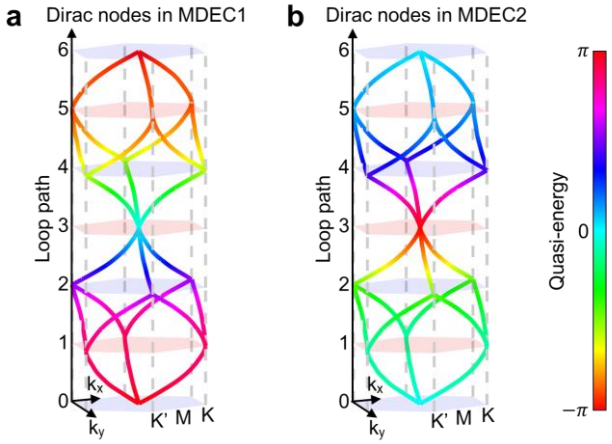


图 S2 | MDEC1 (a) 和 MDEC2 (b) 中沿图 2e 所示回路路径演化的狄拉克节点详图。节点线的分布表示动量位置，颜色表示准能量。值得注意的是，沿回路路径绕行一个周期后，颜色也恰好完成一个周期。

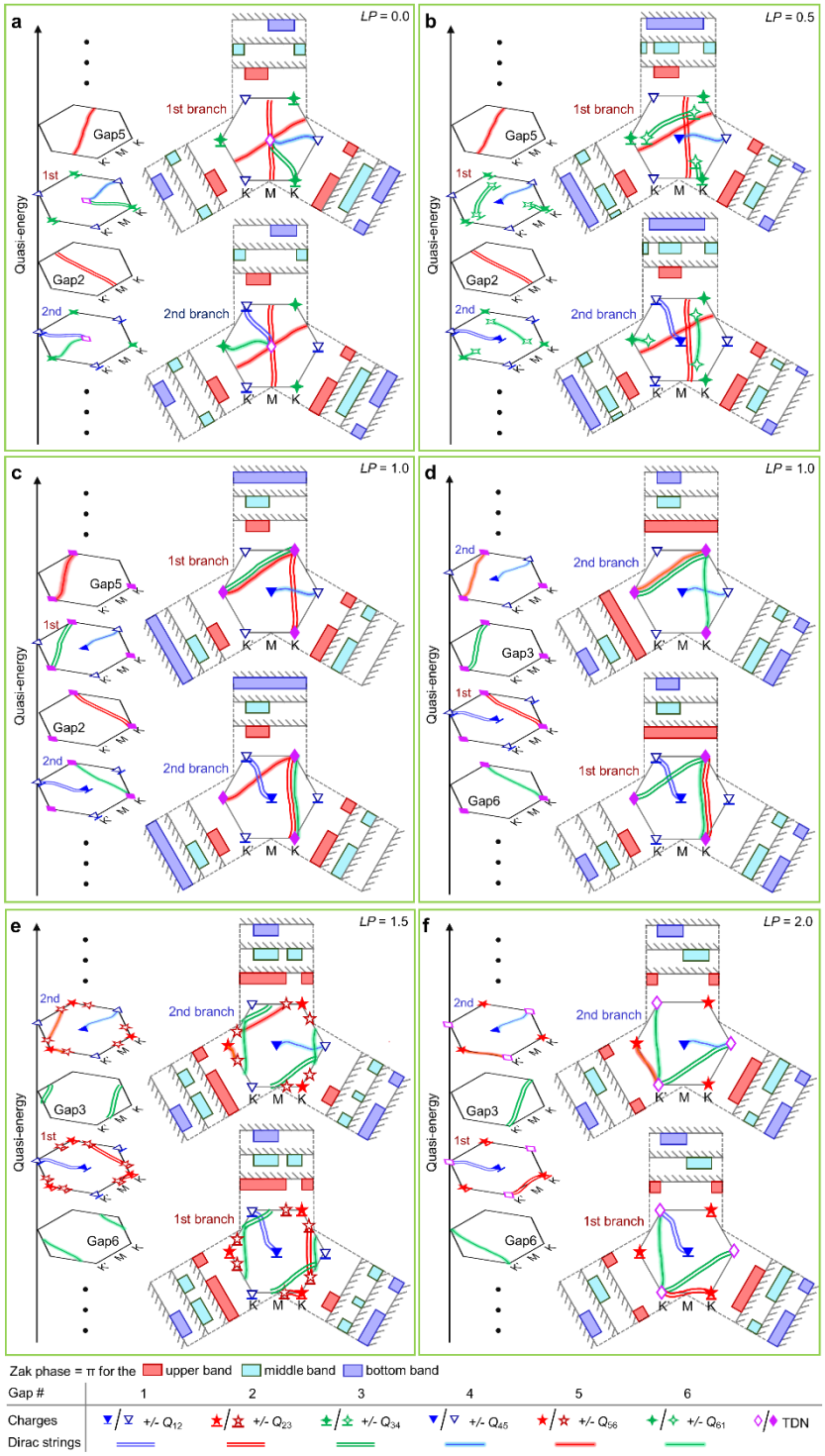


图 S3 | 沿着从 0 到 2 的回路路径演化的狄拉克弦和投影 Zak 相位。a-f，三个锯齿边缘的拓扑由 Zak 相的非平凡取值量化，该相位沿着垂直于边缘并穿过布里渊区的高对称路径积分得到。

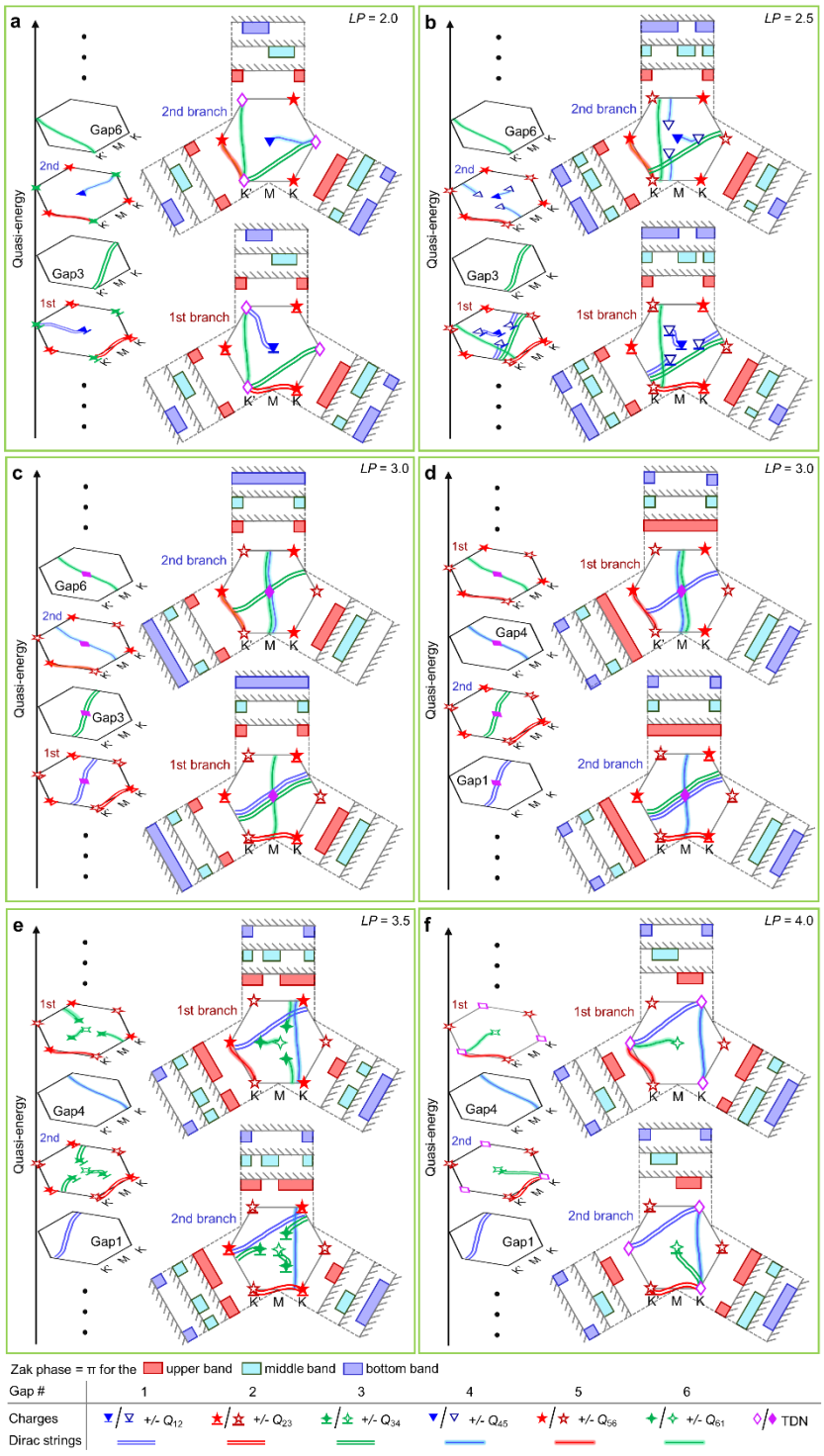


图 S4 | 沿从 2 到 4 的回路路径，狄拉克弦和投影 Zak 相位的演化。a-f，三条锯齿边缘的拓扑由 Zak 相位的非平凡值进行量化；该相位沿穿过布里渊区且垂直于边缘方向的高对称路径积分得到。

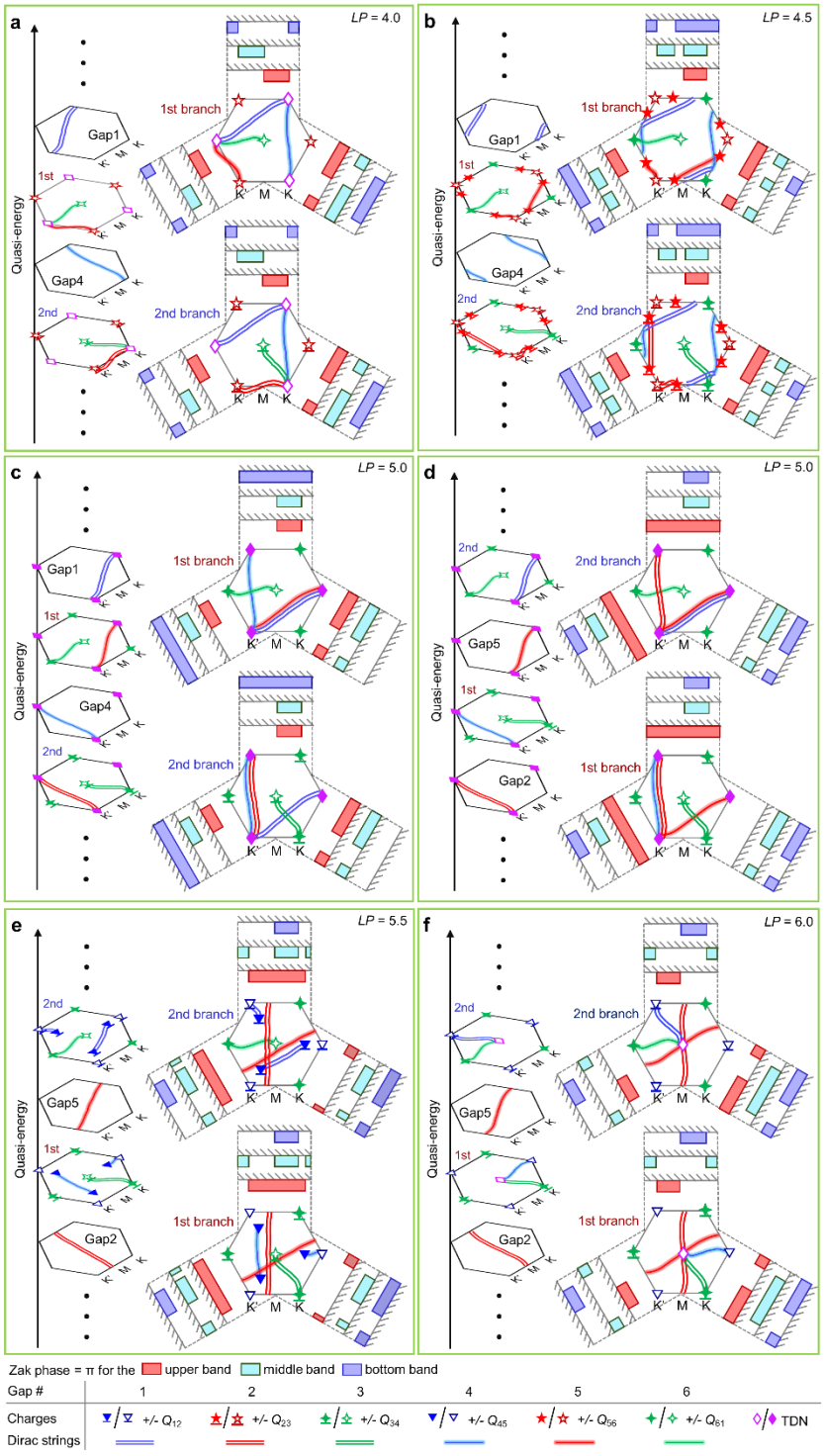


图 S5 | 沿从 4 到 6 的回路路径，狄拉克弦和投影 Zak 相位的演化。a-f，三个锯齿边缘的拓扑由 Zak 相位的非平凡值进行量化；该相位沿穿过布里渊区且垂直于边缘方向的高对称路径积分得到。

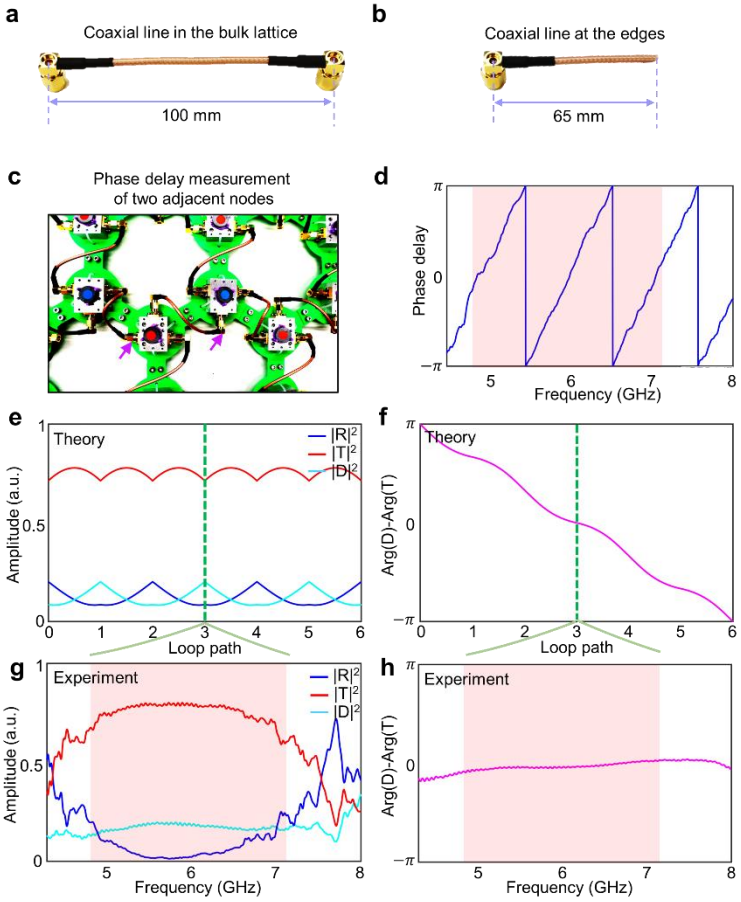


图 S6 | 实验网络设计与测得的散射参数。a，体晶格中的同轴传输线充当链路，在相邻环行器之间产生频率相关相位延迟。**b**，y方向边缘处的同轴传输线被截断，以引入具有镜面反射的边界条件。**c**，实验测量晶格中两个相邻节点相位延迟的示意图，测量节点以两个箭头标出。**d**，(c)中两个节点测得的相位延迟谱。红色阴影区域表示约为 4π 相位覆盖的带宽，对应于两个周期的Floquet准能量。**e**，图2a中沿回路路径传播的一个散射体的CCW透射率（T）、CW透射率（D）和反射（R）谱的理论预测。**f**，两种透射谱（CCW和CW）之间相位关系的理论预测。**g-h**，与(e-f)中理论结果对应的散射参数实验数据。包含约为4π 相位覆盖带宽的红色阴影区域与LP= 3.0中的理论谱非常吻合，这表明我们提出的散射网络在实验上可行，能够验证理论模型预测。