arXiv:2603.04520v1 [math.OA] 4 Mar 2026

I 型 C* 代数的酉共轭群胚：拓扑、Fell 连续性与典范对角嵌入

Shih-Yu Chang *

2026年3月6日

摘要

本文为任意可分含幺 C*-代数引入一个典范的波兰群胚，称为酉共轭群胚。它定义为该代数的对偶空间与其酉群的半直积，酉群通过共轭作用于对偶空间。经典的 C*-代数群胚模型通常需要 Cartan 子代数等额外结构，并依赖局部紧豪斯多夫框架。相比之下，我们的构造完全典范，但也带来范式转变：对偶空间和酉群上的自然拓扑都不是局部紧的。为此，我们在对偶空间上赋予一种由纯态上的弱星拓扑导出的波兰拓扑，并在酉群上赋予强算子拓扑。由此得到的波兰群胚具有连续的哈尔系统。我们证明，与之关联的约化群胚 C*-代数 Morita 等价于原代数与紧算子的张量积，从而确立该群胚能够编码代数的 K 理论。其一项关键特征是将原代数典范地嵌入群胚 C*-代数；对于可分 I 型 C* 代数，这一嵌入是含幺单射星同态。我们通过这一嵌入刻画交换性，并证明在适当的星同态下，该构造具有函子性。本文通过对三类基本对象的详细计算阐释这一理论：有限维矩阵代数、紧致可度量空间上的交换代数，以及单位化的紧算子代数。这些例子表明，我们的一般构造可还原为熟悉的对象。我们还通过分析无理旋转代数这一未被本构造涵盖的非 I 型代数，探讨该理论的局限，并指出未来研究方向。

目录

1 引言 **3**

1.1 语境：非交换代数的经典视角.3 1.2 酉共轭群胚：一种新不变量.3́1.3 主要障碍：étale性与局部紧性无法实现.4 1.4 范式转变：从局部紧性到波兰拓扑.4 1.5 主要贡献与论文概要.4 1.6 论文结构.5

2 预备知识 **5**

2.1 I 型 C* 代数及其本原理想空间.5 2.2 子代数空间上的 Fell 拓扑.7 2.3 波兰空间与强算子拓扑.10 2.4 波兰群胚及其 C*-代数.14

*Shih-Yu Chang任职于美国加利福尼亚州圣何塞圣何塞州立大学应用数据科学系（电子邮箱：shihyu.chang@sjsu.edu）

3 单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ ： 定义与波兰拓扑 20

3.1 $\mathcal{G}$的定义 $^{(0)}$ $_{\mathcal{A}}$ 与部分求值映射.20 3.2 初始拓扑与基本性质.25 3.3 豪斯多夫性质与投影的连续性.28 3.4 到纤维的同胚.30 3.5 可分代数的第二可数性与波兰性.32 3.6 与 Fell 拓扑的比较.36

4 具有强算子拓扑的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 41

4.1 具有强算子拓扑的酉群：一个波兰群.41 4.2 共轭作用的连续性.49 4.3 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 作为拓扑群胚的定义.53 4.4 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚（非局部紧、非 ´étale）.57 4.5 博雷尔哈尔系统的存在性.62 4.6 波兰空间中的群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$.69 4.7 动机：从其经典语境中恢复 $\mathcal{A}$.76´4.8 非 étale 情形下余乘法方法的失败.81 4.9 通过求值映射和左正则表示构造 ι .85 4.10 验证 ι 是含幺单射 *-同态.93 4.11 交换性的群胚刻画.98 4.12 * 同态下的自然性与函子性.101 4.13 总结：对角嵌入的性质.106

5 示例与计算 **107**

5.1 有限维情形： $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$.107 5.2 交换情形：紧豪斯多夫 X 上的 $\mathcal{A} = C(X)$.112 5.3 紧算子：带强算子拓扑的 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ .118 5.4 非例：为何 A_θ 不适用（非I型）.127

1 引言

1.1 语境：非交换代数的经典视角

非交换 C^*代数的研究深受其表示论的影响。^Dixmier 的奠基性论著 [5] 确立了对偶空间 A——不可约表示的酉等价类构成的集合——作为关键不变量的重要性。然而，对偶空间缺乏一种自然拓扑，无法同时体现代数的结构并支持几何构造。^Fell [6] 在 A上引入了 Fell 拓扑，为理解 C^*代数的理想结构提供了强有力的工具，但这种拓扑往往不是豪斯多夫的，也不能直接编码表示之间的动力学。

与这些发展的同时，Renault [11] 开创了在算子代数中使用群胚的方法，证明许多 C^*-代数都可以实现为局部紧豪斯多夫 ´étale 群胚的卷积代数。这种群胚方法取得了非凡的成功，带来了包括 Baum-Connes 猜想 [12] 和交叉积 [13]分类在内的深刻成果。然而，从一个 C^*-代数构造群胚并非典范，通常需要 Cartan 子代数等额外结构。

1.2 酉共轭群胚：一个新不变量

本文引入与任意含幺 C^*-代数 A相关联的典范群胚，并将其称为**酉共轭群胚** $\mathcal{G}_A$。该群胚由酉群 $U(A)$ ^通过共轭作用于对偶空间 $\widehat{A}$ 的自然作用所定义：

$$\mathcal{G}_A := \widehat{A} \rtimes U(A),$$

其单位空间为 $\mathcal{G}_A^{(0)} = \widehat{A}$。箭头是三元组 $(\pi,\ u,\ \pi')$，其中 $\pi' = u \cdot \pi := \pi \circ \mathrm{Ad}_u^*$，复合则编码了酉元的群乘法。

这一构造完全是规范的：每个含幺 C^*代数 A 都会导出 $\mathcal{G}_A$，而A 的结构则反映在群胚动力学中。酉共轭群胚通过酉群对表示论的作用，捕捉了 A 的内部对称性，提供了一个介于代数与其对偶空间之间的新不变量。

本文结构安排如下。第2节回顾了必要的背景知识，包括 I 型 C^*代数、Fell 拓扑、波兰空间、强算子拓扑和波兰群胚。第 3 节构造单位空间 $\mathcal{G}_A^{(0)}$ 及其波兰拓扑，并确立其基本性质。第4节定义酉共轭群胚，证明它是波兰群胚，并构造对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_A)$——这是本文的核心技术成果。第5节通过对三个基本类别进行详细计算来阐释该理论：有限维矩阵代数、紧可度量空间上的交换代数，以及含幺化紧算子。这些例子表明，我们的一般构造能够化归为熟悉的对象，同时也通过无理旋转代数 A_θ（一种本框架未涵盖的非 I 型代数）揭示了 I 型假设的局限性。

熟悉背景材料的读者可以略读第2节；核心构造从第 3 节开始。群胚 C^*代数领域的专家或许可以直接阅读第4节，该节将介绍新颖的波兰群胚框架。关于对角嵌入及其性质的主要结果见第 4.9–4.11节，而该构造在 $*$-同态下的函子性则将在第 4.12 节讨论，并在那里明确具体条件。

´1.3 主要障碍：étale性与局部紧性无法实现

Renault [11]发展的经典群作用理论要求具备两项基本拓扑性质：局部紧性和 ´étale性（或至少存在连续Haar系统）。遗憾的是，对于一般的 C^*-代数 A，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_A$ 在任何合理的拓扑下都无法满足这些条件：

- 酉群 $U(A)$ 在配备范数拓扑时，除非 A 是有限维的，否则不是局部紧的。这排除了在经典意义上构造哈尔系统的可能性。⌢
- 配备 Fell 拓扑的对偶空间 $\widehat{A}$ 通常是非豪斯多夫的，且不是局部紧的，因而与 [11] 的要求不相容。⌢
- 当 $U(A)$ 带有范数拓扑时，$U(A)$ 在 $\widehat{A}$ 上的作用不是连续的，这进一步使群胚结构复杂化。

这些障碍并非仅仅是技术性的；它们反映了出现在几何情境中的光滑群作用与由一般C^*-代数产生的奇异无限维群作用之间的根本差异。

1.4 范式转变：从局部紧性到波兰拓扑

为克服这些障碍，我们采用一种不同的拓扑范式。我们不再采用局部紧性，而是在波兰群胚的框架内开展研究——其对象空间和箭头空间均为波兰空间（可分且完全可度量化的拓扑空间）。这种方法受到描述集合论 [10] 以及近期 Polish 群作用理论进展的启发。

我们赋予 $\widehat{A}$ 一种不同于 Fell 拓扑的波兰拓扑 ——具体而言，当 A 可分时，采用纯态空间上弱-$*$ 拓扑所诱导的拓扑。对于 $U(A)$，我们使用强算子拓扑 （当 $A \subseteq B(H)$时），或者更一般地，使用稠密子集上的逐点范数收敛拓扑。这些选择使得：

- $\widehat{A}$ 成为一个波兰空间（当 A可分时）；
- $U(A)$成为一个波兰群；⌢
- 共轭作用 $U(A) \curvearrowright A$ 是联合连续的。

因此，$\mathcal{G}_A = A \rtimes U(A)$ 是一个 波兰群胚，适用于 Le Gall [15] 与 Tu [12]针对波兰群胚发展的非交换几何与等变 KK-理论技术。

1.5 主要贡献与论文提纲

本文作出如下贡献：

1. 我们为任意可分含幺 C^*-代数 A 构造酉共轭群胚 $\mathcal{G}_A$，并证明它容许一个自然的波兰拓扑（第 3 节）。这涉及对单位空间$\mathcal{G}_A^{(0)}$ 的细致分析，我们为其配备由对每个$a \in A$的部分求值映射 $\mathrm{ev}_a : \mathcal{G}_A^{(0)} \to \mathbb{C}_\infty$ 所给出的初始拓扑。

2. 我们确立了$\mathcal{G}_A$ 在 [12], 意义下是一个具备博雷尔哈尔系统的波兰群胚（第2.3节）。我们证明，$U(A)$上的强算子拓扑对于这一结果至关重要，因为它赋予该空间波兰群结构，并使共轭作用连续。（连续哈尔系统一般并不存在； [12]的博雷尔框架提供了适当的设置。）

3. 我们构造了一个规范的对角嵌入 ι ： 将原代数 $A \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_A)$嵌入其酉共轭群胚的最大群胚 C^*-代数中（第4.7–4.10小节）。我们证明，对于可分的I型 C^*-代数， ι 是一个含幺的、单射的 $*$-同态。

4. 我们通过这一嵌入给出交换性的刻画： $\iota(A) \subseteq C_0(\mathcal{G}^{(0)}_A)$ 当且仅当A 是交换的（第 4.11 节）。这表明， A 的非交换性编码在 $C^*(\mathcal{G}_A)$中对角子代数之外的部分。

5. 我们确立了该构造在适当的 $*$-同态下的函子性，表明$A \mapsto (\mathcal{G}_A, \iota_A)$ 关于同构具有自然性；对于满足拉回性质的某些单射或满射映射亦如此（第 4.12 节）。这种函子性必然受到限制；我们精确地指出了哪些态射是可接受的。

6. 我们通过对 I 型 C^*-代数的三个基本类别进行详细计算来阐释该理论（第5节）： 有限维情形 $A = M_n(\mathbb{C})$、紧致可度量 X上的交换情形 $A = C(X)$， 以及紧算子 $A = \mathcal{K}(H)$~的无限维情形。这些例子表明，我们的一般构造可归约为熟悉的对象，并为理解 $\mathcal{G}_A$的结构提供了具体见解。

7. 我们通过分析无理旋转代数 A_θ（一种不属于 I 型、因而不在我们的构造范围内的代数；见第 5.4 节），讨论本框架的局限性。这凸显了 I 型假设的关键作用，也指明了未来研究的方向。

1.6 论文结构

本文组织如下。第 2 节回顾必要的背景知识，包括 I 型 C^*代数、Fell 拓扑、波兰空间、强算子拓扑以及波兰群胚（据 Tu）。第 3 节构造单位空间 $\mathcal{G}_A^{(0)}$ 及其波兰拓扑，并确立其基本性质，包括到子代数空间的投影的连续性，以及到各纤维的同胚。第 4 节定义酉共轭群胚，证明它是波兰群胚，并详细构造对角嵌入 ι，验证其代数性质并刻画交换性。第 5 节详细介绍 M_n（$\mathbb{C}$）、 C（X）和 $\mathcal{K}$（H）~等示例，并说明为何 A_θ 不在我们的框架范围内。

注释 1。 本文提出的数学见解和理论方向完全由作者负责。包括 *OpenAI* 的 *ChatGPT* 和 *DeepSeek* 模型在内的 *AI* 工具，仅用于协助核验想法、整理参考文献并确保论述内部一致 *[1,2]*。

2 预备知识

2.1 I 型 C* 代数及其本原理想空间

I 型 C*-代数（又称 GCR（一般连续表示）代数）在算子代数的结构理论中占据中心地位。这些代数的特征是，其所有不可约表示所生成的代数都包含紧算子。该条件对本原理想空间的拓扑结构有深远影响；正如我们将看到的，它也会影响酉共轭群胚的性质。

定义 1 （I 型 C* 代数）。 *C** 代数 $\mathcal{A}$称为 I 型 （或 *GCR*），如果对于每个不可约表示 π： $\mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_\pi)$，像 $\pi(\mathcal{A})$ 都包含希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\pi$上的紧算子代数 $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)$ 。

存在几种等价的刻画。C* 代数当且仅当 $\mathcal{A}$ 的每个因子表示在冯·诺伊曼代数的意义下都是 I 型时，它才是 I 型。等价地，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是后极限的时，它才是 I 型；这意味着每个不可约表示的像都包含紧算子，并且从谱到本原理想空间的典范映射是到某个稠密子集上的同胚。

定义 2。 若拓扑空间 X 的每个非空闭子集都包含一个非空相对开子集，且该子集在子空间拓扑下为豪斯多夫空间，则称 X 为几乎豪斯多夫 空间。

Glimm 和 Dixmier 提出的以下基本定理，揭示了 I 型性质与本原理想空间拓扑之间的深刻联系。

定理 1 (Glimm–Dixmier定理)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个可分 C^*-代数。当且仅当其本原理想空间 $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ 几乎豪斯多夫时， $\mathcal{A}$ 才是 I 型；也就是说，$\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$的每个非空闭子集都包含一个非空的相对开豪斯多夫子集。

对于一大类自然的 I 型代数——包括所有具有连续迹的后极限代数，以及所有谱为豪斯多夫空间的极限代数——其本原理想空间不仅是 T_0，而且实际上是局部紧豪斯多夫空间。不过，本文所构建的波兰群胚框架并不要求这种额外的正则性；只需 $\mathbf{Prim}(\mathcal{A})$ 是一个标准博雷尔空间，而对于可分 C*-代数，这一点自动成立。

定义 3 (本原理想空间)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。 $\mathcal{A}$的本原理想空间 记作$\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$，它是由 $\mathcal{A}$ 的所有本原理想构成的集合，并赋予雅各布森拓扑 （也称为包核拓扑）。

该拓扑　　通过其闭包运算来定义：对于任意子集 $S \subseteq \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$，其闭包由以下方式给出 y

$$\overline{S} = \left\{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \;\middle|\; \bigcap_{\mathfrak{q} \in S} \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \right\}.$$

等价地，闭集恰好是形如以下形式的集合

$$h(J) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \mid J \subseteq \mathfrak{p}\},$$

其中 J 遍历 $\mathcal{A}$的所有闭（双边）理想。因此，集合

$$U_J = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \mid J \nsubseteq \mathfrak{p}\}$$

构成雅各布森拓扑的一个开集基。

关于收敛，网 $\{\mathfrak{p}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 在 $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ 中收敛到元素 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ ，当且仅当满足以下条件：

For every $a \in \mathcal{A}$, if there exists $\lambda_0 \in \Lambda$ such that $a \in \mathfrak{p}_\lambda$ for all $\lambda \geq \lambda_0$, then $a \in \mathfrak{p}$.

换言之，

$$\liminf_\lambda \mathfrak{p}_\lambda \supseteq \mathfrak{p},$$

其中，$\liminf_\lambda \mathfrak{p}_\lambda$ 表示最终属于 $\mathfrak{p}_\lambda$ 的所有 $a \in \mathcal{A}$ 构成的集合。

注 2. 对于可分 C^*-代数 $\mathcal{A}$，本原理想空间 $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ 是第二可数的 T_0空间。特别地，其博雷尔结构是标准的，因此 $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ 是标准博雷尔空间。

它不一定是豪斯多夫或局部紧的；事实上，许多 I型 C^*-代数的本原理想空间都不是豪斯多夫的。在波兰群胚框架中，我们不要求$\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$具有局部紧性；我们只依赖其标准博雷尔结构，而这一结构由 $\mathcal{A}$的可分性保证。

对于连续迹 C*-代数，可用的结构丰富得多：这类代数在稳定意义下同构于一个局部平凡丛上的在无穷远处消失的连续截面代数，该丛以 Prim($\mathcal{A}$) 为底空间，纤维为初等 C*-代数 $\mathcal{K}(\mathcal{H}_x)$。这就是连续迹 C*-代数理论 [Dixmier, 1977年，第10章；Raeburn–Williams, 1998]。虽然本文并不严格依赖这一结构，但它提供了重要的背景，也对许多应用至关重要。

假设 1（关于可分性的基本假设）。 本文始终假设 $\mathcal{A}$是一个可分含幺 *C**-代数。此假设保证对偶空间 $\mathcal{A}^*$ 的单位球在弱-*拓扑下是可度量化且紧的，并且酉群$\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）在赋予强算子拓扑后是一个波兰群。因此，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ ： $= \mathcal{A}^* \rtimes \mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）是一个具有连续哈尔系统的波兰群胚，足以支持后续所有构造。

注 3 （I 型例子）。 虽然我们的一般构造适用于任意可分含幺 *C**-代数，但本文分析的所有具体例子——包括 B（H）、 $\mathcal{K}$（H）~以及 *Toeplitz*代数——都是 *I* 型的。对于这类代数，纯态空间表现得尤为良好，而且它们与经典指标定理之间的联系也格外清晰。

对于非 *I* 型代数，情况有本质上的不同，需要采用额外的技巧：

- 对于 *Cuntz*代数 $\mathcal{O}_n$ 以及非 *amenable* 自由群的约化群 *C** 代数 C_r^*（$\mathbb{F}_n$），纯态空间具有高度病态且非豪斯多夫的性质。
- 对于无理旋转代数 A_θ，尽管其本原理想空间为平凡空间（单点），但其纯态空间是一个具有复杂叶状结构的非交换环面。

将我们的方法推广到此类代数，是未来研究的一个有趣方向。

例 1 （有限维代数）。 每个有限维 *C**-代数都是 *I*型。事实上， $\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}$（$\mathbb{C}$），其本原理想空间是有限离散集，因而是局部紧豪斯多夫的。最简单的非平凡情形是 $\mathcal{A} = M_n$（$\mathbb{C}$），我们将在第*5.1*节中对其进行详细考察。

例 2 （交换代数）。 每个交换 *C**-代数都是 *I*型。对于 $\mathcal{A} = C_0$（X），其中 X局部紧豪斯多夫，我们有 $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \cong X$，它是局部紧豪斯多夫的。含幺情形$C$（$X$），其中 X 紧豪斯多夫，将在第*5.2*节中讨论。

例 3 （紧算子）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}$（$H$）~ 是可分无限维希尔伯特空间上紧算子的单位化 H。此代数是 *I* 型，其本原理想空间由两点 $\{0\}$ 和 $\mathcal{K}$（H）组成。在雅各布森拓扑下，单点集 $\{\{0\}\}$是开集，因此该空间是一个两点豪斯多夫空间。我们将在第 *5.3* 节详细考察此例。

例 4 （非豪斯多夫 I 型代数）。 存在本原理想空间非豪斯多夫的 *I* 型 *C** 代数。例如，这类代数可由变换群 *C**-代数 C_0（X） $\rtimes \Gamma$产生，其轨道空间 X/Γ 是非豪斯多夫的。这说明，仅有 *I* 型条件并不能保证Prim（$\mathcal{A}$）是豪斯多夫的，这一事实促使我们在后续的一些结果中采用连续迹假设。第 *5.4* 节将作更详细的阐述。

2.2 子代数空间上的 Fell 拓扑

通过拓扑方法对巴拿赫空间的闭子空间进行参数化，是泛函分析中的一个经典主题。在其 1960 年的开创性回忆录中，Fell 为 C*-代数 [6] 的闭子集（以及不可约表示）的集合引入了一种拓扑。这种拓扑如今称为 *Fell* 拓扑；当将闭 C*-子代数视为 $\mathcal{A}$ 的闭子集中的一个子集时，它自然会在闭 C*-子代数的空间 Sub($\mathcal{A}$) 上诱导出一种拓扑。

Fell 拓扑在研究 C*-代数的连续场，以及理解子代数如何随扰动和变形而变化方面发挥着重要作用。对于可分 C*-代数，将此拓扑限制在适当的子代数类上时，它是波兰拓扑；这一事实将在下文中发挥作用。

在本文中，Fell 拓扑用作参考拓扑，我们据此比较单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上更细的拓扑。正如我们将在第 3.6 节中看到的，仅凭 Fell 拓扑不足以满足我们的目的，因为它会坍缩由特征编码的谱数据；要刻画单位空间的完整结构，需要一种严格更细的拓扑。这两种拓扑之间的详细比较在第 3.6 节中进行。

定义 4（子代数空间）。 设 $\mathcal{A}$ 为一个 C*-代数。我们用$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$的所有 C*-子代数的集合，包括含幺子代数和非含幺子代数。当 $\mathcal{A}$ 含幺时，我们还考虑由含幺 C*-子代数组成的子集$\mathrm{Sub}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{A})$ 。

定义 5（闭子集上的 Fell 拓扑）。 设 $\mathcal{A}$ 为一个配备其范数拓扑的 C*-代数。用 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$的所有闭子集的集合。 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$上的Fell 拓扑 由以下两族子基开集生成：

1. 对于每个开集 $U \subseteq \mathcal{A}$,

$$\mathcal{O}_U := \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}) \mid F \cap U \neq \varnothing\}.$$

2. 对于每个紧集 $K \subseteq \mathcal{A}$,

$$\mathcal{C}_K := \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}) \mid F \cap K = \varnothing\}.$$

该拓扑的一个基由这些子基集的有限交构成。

定义 6（子代数上的 Fell 拓扑）。 令$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$表示 $\mathcal{A}$ 的所有 C*-子代数构成的集合。由于每个 C*-子代数都是 $\mathcal{A}$ 的闭子集，因此有 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$。我们赋予$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 从 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ 上的 *Fell* 拓扑继承的子空间拓扑，其中该拓扑由定义 *5* 给出。

注 4（关于无限维情形下 Fell 拓扑的注意事项）。 经典 *Fell* 拓扑通常定义在局部紧豪斯多夫空间的闭子集上。这里， $\mathcal{A}$ 在其范数拓扑下，当 $\mathcal{A}$ 为无限维时并非局部紧。然而，作为度量空间上的超空间拓扑 的一个特例，上述定义仍然在 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ 上给出了良定义的拓扑。不过，在此情形下应当注意：

- 若不加进一步限制，该拓扑可能不是波兰拓扑，甚至可能不是第一可数的 *s.*
- 对于紧 K，子基集$\mathcal{C}_K$相对稀疏，因为在无限维巴拿赫空间中，范数紧集十分罕见。

本文仅将 *Fell* 拓扑用作参考拓扑；除其定义之外，我们不依赖任何特定性质。

注 5 (几何解释**).** *Fell* 拓扑编码了关于闭子代数的两种互补的几何信息。集合 $\mathcal{O}_U$ 记录子代数是否与给定开区域相交，从而捕捉“正向”的隶属信息；而集合 $\mathcal{C}_K$ 记录子代数是否避开给定紧区域，从而捕捉“负向”的排除信息。这两个族共同刻画了相对于 *Fell* 拓扑的子代数网的收敛，其方式类似于超空间拓扑中闭子集的 *Kuratowski* 收敛。

以下给出的 Fell 拓扑中收敛的刻画，通常更便于进行具体计算。

命题 1（Fell 拓扑中的收敛）。 设 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$中的一个网，并设 $B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$。那么，$B_\lambda \to B$ 在 ***Fell*** 拓扑中收敛，当且仅当以下两个条件成立：

1. 下极限条件：对于每个 $b \in B$，都存在一个网 $\{b_\lambda\}$ ***with*** $b_\lambda \in B_\lambda$，使得 $b_\lambda \to b$ 在范数下成立。*2.* 上极限条件：对于每个收敛子网 $\{b_{\lambda_\mu}\}$ ***with*** $b_{\lambda_\mu} \in B_{\lambda_\mu}$ 且极限为 b，我们有$b \in B$。

等价地，按照闭子集的 ***Kuratowski*** 收敛意义， B 既是网 $\{B_\lambda\}$ 的下极限，也是其上极限。

证明。这一刻画是闭子集 Fell 拓扑理论中的标准结果；详细证明可见 [7]。其核心思想是，下极限条件对应于如下要求：对于每个满足 $B \cap U \neq \emptyset$的开集 U， $B_\lambda \in \mathcal{O}_U$ 最终成立；而上极限条件则对应于如下要求：对于每个满足 $B \cap K = \emptyset$的紧集 K， $B_\lambda \in \mathcal{C}_K$ 最终成立。

□

Fell 拓扑具有若干重要性质，使其特别适用于研究子代数。

定理 2 （Fell 拓扑的性质）。 设 $\mathcal{A}$是一个可分 ***C**-***代数。那么：

1. 紧致性： 赋予 ***Fell*** 拓扑的空间 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 是紧的。*2.* 豪斯多夫条件： 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是有限维时，$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 上的 ***Fell*** 拓扑才是豪斯多夫的。*3.* 可度量化：

性： 当且仅当 $\mathcal{A}$可分且有限维时，$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 才是可度量化的。

4. 波兰结构： 对于可分的 $\mathcal{A}$，当且仅当 $\mathcal{A}$有限维时，$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 才是紧波兰空间（即紧且可度量化）。在无限维情形下，$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 是紧的，但不可度量化，因此不是波兰空间。

证明。 命题 (1) 是 Fell 的一项经典结果 [7], ：他在局部紧空间的闭子集空间上构造了一种紧豪斯多夫拓扑；现代阐述另见 [9] 。命题 (2) 源于这样一个事实：所有闭子集的空间 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ 在 Fell 拓扑下是豪斯多夫的 [7], ，但子空间 $\mathbf{Sub}(\mathcal{A})$ 仅当 $\mathcal{A}$有限维时才继承这一性质；在无限维情形下，不同的子代数无法通过相对拓扑分离。命题 (3) 和 (4) 则由 (1) 以及一般拓扑学中的标准结果推出：紧豪斯多夫空间可度量化，当且仅当它是第二可数的（见 [10]）；当 $\mathcal{A}$ 无限维时，$\mathbf{Sub}(\mathcal{A})$ 不满足这一条件。 □

在处理含幺子代数时，以下对 Fell 拓扑的另一种描述有时很有用。

命题 2（通过距离函数描述 Fell 拓扑）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个可分含幺 ***C**-***代数， $\mathcal{A}^1$ 表示其闭单位球。对于每个 $B \in \mathrm{Sub}_{\textit{unit}}(\mathcal{A})$，定义距离函数

$$d_B : \mathcal{A}^1 \to \mathbb{R}, \qquad d_B(a) = \inf\{\|a - b\| : b \in B \cap \mathcal{A}^1\}.$$

映射

$$\Phi : \mathrm{Sub}_{\textit{unit}}(\mathcal{A}) \longrightarrow C(\mathcal{A}^1), \qquad \Phi(B) = d_B,$$

其中 $C(\mathcal{A}^1)$ 赋予紧子集上一致收敛的拓扑，是一个同胚嵌入。因此，对于可分的 $\mathcal{A}$，$\mathrm{Sub}_{\textit{unit}}(\mathcal{A})$ 在 ***Fell*** 拓扑下是一个波兰空间。

证明。 这是 [8] 关于将 Fell 拓扑嵌入函数空间的一般定理的一个特例。其核心思想是，距离函数编码了闭集的完整结构，而 Fell 拓扑中的收敛恰好对应于这些距离函数在紧子集上一致收敛。 □

就我们的目的而言，Fell 拓扑主要充当参考拓扑。我们在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上构造的拓扑严格细于由核映射 ker : $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 诱导的相对拓扑，因为它还必须编码纯态的收敛。尽管如此，Fell 拓扑仍是分析核映射连续性以及在适当假设下确立 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的波兰性不可或缺的工具。

例 5 (交换代数的 Fell 拓扑)。 设 $\mathcal{A} = C(X)$ 对应一个紧豪斯多夫空间X。 $C(X)$ 的闭 *C**-子代数与 X的商空间相对应：每个子代数都具有如下形式：$\{f \circ q : f \in C(Y)\}$，其中 $q : X \to Y$ 是到某个紧豪斯多夫空间 Y 的连续满射。$\mathrm{Sub}(C(X))$ 上的 ***Fell*** 拓扑编码了这些商映射的收敛。当 X 可度量化时， X 的闭子集空间在 ***Fell*** 拓扑下是紧且可度量化的，但这是一个不同的对象——它对应的是理想，而非子代数。

例 6 （矩阵代数的 Fell 拓扑）。 设 $\mathcal{A} = M_n$（$\mathbb{C}$）。由于 $\mathcal{A}$ 是有限维的，子代数（$\mathcal{A}$） 是一个有限集（同构意义下只有有限多个 *C**-子代数，但作为 M_n（$\mathbb{C}$）的具体子代数，则有不可数多个）。此时的 ***Fell*** 拓扑不是豪斯多夫的；事实上，彼此不同但由某个酉元共轭的子代数无法通过 ***Fell*** 开集分离。这反映了 ***Fell*** 拓扑将酉等价子代数视为相同。

例 7 （紧算子上的 Fell 拓扑）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}$（$H$）~ 是可分无限维希尔伯特空间 H上紧算子的单位化。空间子代数（$\mathcal{A}$） 是不可数的，且在 ***Fell*** 拓扑下是紧的，但不是豪斯多夫的。其结构反映了紧算子的闭理想与子代数所形成的复杂格。对这一空间的详细分析超出了本文的范围，其中涉及 *C**- 代数结构理论的深层结果。

注 6. 总之，***Fell*** 拓扑为参数化闭 *C**-子代数提供了一个自然而强大的框架。即使它不满足豪斯多夫或可度量化的条件，其紧致性仍是一项至关重要的技术工具。对于本文而言，***Fell*** 拓扑最重要的结果是投影 $\pi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$的连续性，这使我们能够在单位空间与子代数空间之间传递信息。然而，正如我们将在第 *3.6* 节中所展示的，仅靠 ***Fell*** 拓扑不足以支持我们的构造：它无法区分同一子代数上的不同特征，因此，如果我们只使用 ***Fell*** 拓扑， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的共轭作用便不会连续。这一根本缺陷促使我们在第 *3* 节中通过部分求值映射定义更细的拓扑。

2.3 波兰空间与强算子拓扑

C*-代数 $\mathcal{A}$ 的酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$通常赋予范数拓扑。然而，正如引言中所论述的，范数拓扑对于我们的目的而言过于精细：它使得 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$成为一个连通的无限维李群，既非局部紧也不可分，因此作用群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 将不是波兰的。为了获得一个性质良好的拓扑群胚，我们用强算子拓扑 （SOT）替代范数拓扑。当该拓扑限制在作用于可分希尔伯特空间上的可分 C*-代数的酉群上时，它产生一个波兰群 ——即一个可分且完全可度量化的拓扑群。波兰群和波兰空间为非局部紧几何分析提供了适当的框架，并且非常适合用于构造酉共轭群胚。

定义 7（波兰空间）。 拓扑空间 X 称为波兰空间，当且仅当它是可分且完全可度量化的（即存在一个度量 d 作用于 X 上，该度量诱导出该拓扑，并使（X, d） 成为完备度量空间）。

定义 8（波兰群）。 如果一个拓扑群 G 的底层拓扑空间是波兰空间，则称其为波兰群。

例 8（标准波兰空间）。 以下空间是波兰空间：

1. $\mathbb{R}^n$、 $\mathbb{C}^n$以及任意可分巴拿赫空间。
2. 希尔伯特立方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$。*3.* 康托尔空间 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$。*4.* 任意可分紧致可度量空间。
5. 任意可分完备度量空间。

定义 9（强算子拓扑）。 B上的强算子拓扑 （*SOT*）是 H（H） 上逐点收敛的拓扑。也就是说，网 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq B(H)$ 在强算子拓扑中收敛到 $T \in B(H)$，当且仅当

$$\|T_\lambda\xi - T\xi\|_H \longrightarrow 0 \quad \textit{for every } \xi \in H.$$

等价地，强算子拓扑是由求值映射族诱导的初始拓扑

$$\{\, B(H) \to H : T \mapsto T\xi \,\}_{\xi\in H}.$$

备注 7（与范数拓扑的比较）。 强算子拓扑明显弱于范数拓扑。对于无限维希尔伯特空间，范数拓扑不可分，而限制在酉群上的强算子拓扑是波兰的。此外，强算子拓扑不是局部紧的，但这与我们的目的无关；我们只要求波兰性，而不要求局部紧性。

强算子拓扑在酉群上的限制具有特别良好的性质。

命题 3 (酉群是波兰群**)**。 设 H 是一个可分希尔伯特空间，令 $\mathcal{U}(H)$表示其上所有酉算子构成的群，并赋予强算子拓扑。那么：

1. $\mathcal{U}(H)$ 是一个波兰群。

2. $\mathcal{U}(H)$ 是可分且完全可度量化的；一个与之相容的完备度量由下式给出

$$d(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|(u-v)e_n\|,$$

其中 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H的一组标准正交基。

3. $\mathcal{U}(H)$ 不是局部紧的（除非 H 是有限维的）。

4. $\mathcal{U}$（H）是可缩的（*Kuiper*定理 *[3]*），因此是连通的。

证明。 赋予强算子拓扑的 $\mathcal{U}(H)$ 是一个波兰群，这是描述集合论中的一个标准结果；参见 [10]。

度量 d 定义了一个与强算子拓扑相容的完备度量：在 d中收敛等价于相对于标准正交基 $\{e_n\}$ 逐坐标收敛，而这刻画了 $B(H)$有界子集上的强算子拓扑。可分性源于以下事实： $B(H)$单位球上的强算子拓扑是可分的，而 $\mathcal{U}(H)$是一个闭子集。

无限维 H 不具备局部紧性是一个普遍事实：任何拓扑由半范数族诱导的无限维拓扑向量空间都不是局部紧的。

可缩性是 Kuiper 的一项深刻结果 [3]；另见 [4]，其中给出了强算子拓扑下的证明。 □

对于含幺可分 C*-代数 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$，酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$继承了其作为 $\mathcal{U}(H)$子空间所具有的强算子拓扑。

推论 1 ($\mathcal{U}(\mathcal{A})$是一个波兰群。 设 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ 是一个含幺可分 C*-代数。那么，赋予强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群。

证明。 我们证明， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是波兰群 $\mathcal{U}(H)$ 的一个 G_δ子群；这类子群自动构成波兰 [10]。

令 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个可数范数稠密子集。对于每个 n，映射

$$\phi_n : \mathcal{U}(H) \to B(H), \quad \phi_n(u) = ua_nu^*$$

在两个空间都赋予强算子拓扑时是连续的（酉元的共轭作用在强算子拓扑下连续）。

对于每个 n，集合

$$G_n := \{u \in \mathcal{U}(H) : ua_nu^* \in \mathcal{A}\}$$

在 $\mathcal{U}(H)$ 中是 G_δ。事实上，由于 $\mathcal{A}$ 在 $B(H)$ 中是闭的，且 $B(H)$ 在强算子拓扑下可度量化， $\mathcal{A}$ 是一个 G_δ 集。连续映射下， G_δ 集的原像是 G_δ，并且 $G_n = \phi_n^{-1}(\mathcal{A})$。

现在注意到

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n,$$

因为对于所有 n， $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 当且仅当 $ua_nu^* \in \mathcal{A}$ （因为 $\{a_n\}$ 在 $\mathcal{A}$ 中稠密，且 $\mathcal{A}$ 是范数闭的）。因此，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是可数个 G_δ 集的交集，故其本身是 G_δ。作为波兰群的 G_δ 子群， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是波兰的。

□

注 8 （为何不采用范数拓扑？）。 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）上的范数拓扑是波兰拓扑，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是有限维的。对于无限维代数，范数拓扑是完全可度量化的（借助范数度量），但不可分，因此不是波兰拓扑。尽管赋予范数拓扑的 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）是一个巴拿赫李群，但这种结构不适合我们的目的，因为群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 的构造要求在 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）上采用波兰拓扑，以保证 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是波兰群胚。强算子拓扑为 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）提供了一种自然的波兰拓扑；它与对偶空间 $\mathcal{A}^*$ 上的弱-*拓扑相容，并使共轭作用连续。

$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 上的共轭作用相对于强算子拓扑仍然连续。这是一个关键事实，我们现在来验证。

定义 10（部分求值映射）。 设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺 C*-代数。对于每个 $a \in \mathcal{A}$，定义部分求值映射

$$\mathrm{ev}_a : \mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

by

$$\mathrm{ev}_a(B,\chi)=\begin{cases}\chi(a) & \text{if } a\in B,\\ \infty & \text{if } a\notin B.\end{cases}$$

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是由族 $\{$求值映射$_a\}_{a\in\mathcal{A}}$生成的初始拓扑，其中 $\mathbb{C}_\infty$ 赋予一点紧化拓扑。

引理 1（强算子拓扑下共轭作用的连续性）。 设 $\mathcal{A}\subseteq B(H)$ 是一个含幺可分 C*-代数，并赋予 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 部分求值映射的初始拓扑（定义 *10*）。那么作用映射

$$\alpha:\mathcal{U}(\mathcal{A})\times\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\longrightarrow\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)},\qquad \alpha(u,(B,\chi)):=(uBu^*,\ \chi\circ\mathrm{Ad}_{u^*})$$

当 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑，且其定义域赋予积拓扑时是连续的。

证明。 根据初始拓扑的泛性质，只需证明对每个 $a\in\mathcal{A}$，复合映射 $\mathrm{ev}_a\circ\alpha$ 是连续的。固定 $(u_0,(B_0,\ \chi_0))\in\mathcal{U}(\mathcal{A})\times\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 并令 $b_0:=u_0^*au_0$。我们分两种情形讨论。

情形 1： $a\in u_0B_0u_0^*$ **（即** $b_0\in B_0$**）**。 由于 $\chi\mapsto\chi(b_0)$在盖尔范德拓扑下于 χ_0 处连续，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 B_0 中 χ_0 的一个邻域 $\mathcal{W}_0$，使得对所有 $\chi\in\mathcal{W}_0$，均有 $|\chi(b_0)-\chi_0(b_0)|<\varepsilon/2$。

映射 $u\mapsto u^*au$ 是强算子拓扑连续的；因此存在 u_0 的一个强算子拓扑邻域 U_0，使得对所有 $u\in U_0$，$\|u^*au-b_0\|<\varepsilon/2$。对于任意 $(u,(B,\chi))\in U_0\times(\mathcal{V}_0\times\mathcal{W}_0)$，其中 $\mathcal{V}_0$ 是 B_0 的一个 Fell 邻域，确保 $b_0\in B$（由命题 1 可知这样的邻域存在），我们有

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{ev}_a(\alpha(u,(B,\chi)))-\chi_0(b_0)|&\le|\chi(u^*au)-\chi(b_0)|+|\chi(b_0)-\chi_0(b_0)|\\&\le\|u^*au-b_0\|+|\chi(b_0)-\chi_0(b_0)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

情形 2： $a\notin u_0B_0u_0^*$（即 $b_0\notin B_0$）。那么 $\mathrm{ev}_a(\alpha(u_0,(B_0,\chi_0)))=\infty$。由于 $b_0\notin B_0$ 和 B_0 是闭的，存在 $\delta>0$，使得 $B_\delta(b_0)\cap B_0=\emptyset$。由 Fell 收敛可知，存在 B_0的一个邻域 $\mathcal{V}$，使得对所有 $B\in\mathcal{V}$，$B\cap B_\delta(b_0)=\emptyset$。由 $u\mapsto u^*au$的强算子拓扑连续性可知，存在 u_0 的一个邻域 U，使得对所有 $u\in U$，$\|u^*au-b_0\|<\delta/2$。那么对于任意 $(u,(B,\chi))\in U\times\mathcal{V}$，我们有 $u^*au\in B_\delta(b_0)$ 且 $B\cap B_\delta(b_0)=\emptyset$，因此 $u^*au\notin B$，从而 $\mathrm{ev}_a(\alpha(u,(B,\chi)))=\infty$。

这两种情形都证明了 $\mathrm{ev}_a\circ\alpha$ 的连续性，因此 α 是连续的。 □

备注 9（示例中的强算子拓扑与范数拓扑）。 在本文考察的具体 C*-代数类中，选择 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的强算子拓扑是自然且一致的：

1. 有限维代数： 对于 $\mathcal{A}=M_n(\mathbb{C})$，强算子拓扑与范数拓扑一致，因为有限维空间上的所有豪斯多夫局部凸拓扑都等价。因此，我们的框架无需修改即可涵盖经典的有限维情形。

2. 交换代数： 对于 $\mathcal{A}=C(X)$ 且 X 紧致可度量的情形，酉群 $\mathcal{U}(C(X))$自然地与 $C(X,\mathbb{T})$相识别，即从 X 到圆周的连续函数。在将 $C(X)$ 表示为作用于 $L^2(X,\mu)$上的乘法算子的标准表示中，强算子拓扑对应于函数的逐点收敛。该拓扑是波兰的（作为带有积拓扑的 $\mathbb{T}^X$ 的闭子空间），但除非 X 有限，否则不是局部紧的，这说明我们的框架能够涵盖非局部紧的酉群。

3. 紧算子： 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$（紧算子的单位化），强算子拓扑是研究考尔金代数 $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$的酉群时所采用的自然拓扑。 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的酉元是恒等算子的紧扰动，而强算子拓扑为分析扩张和指标理论提供了适当的框架。

这些例子表明，强算子拓扑虽然在无限维情形下严格弱于范数拓扑，却是构建统一框架的正确选择：它是波兰的，与对偶空间上的共轭作用连续相容，并且在具体情形中退化为熟悉的拓扑。

推论 2 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。那么 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，其中 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑，而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 赋予由部分求值映射生成的初始拓扑，是一个波兰群胚。也就是说，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是波兰空间，且所有结构映射都是连续的。

证明。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的波兰性由命题 13 得出。 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的波兰性是推论 1，因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 作为波兰空间的乘积是波兰空间。

源映射 $s(u, (B, \chi)) = (B, \chi)$ 是到第二因子的投影，因此是连续的。值域映射 $r(u, (B, \chi)) = \alpha(u, (B, \chi))$ 根据引理 1 是连续的。复合是连续的，因为 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中的乘法是连续的（SOT 是群拓扑），且可复合对的条件是闭的。求逆 $(u, (B, \chi))^{-1} = (u^*, \alpha(u, (B, \chi)))$ 是连续的，因为 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中的求逆是连续的，并且α 是连续的。单位映射 $(B, \chi) \mapsto (1, (B, \chi))$ 显然是连续的。因此，所有结构映射都是连续的。 □

备注 10 （缺乏局部紧性以及 ´étale性）。 我们强调，群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是局部紧的（除非 $\mathcal{A}$ 是有限维的），并且不是 *´étale*。对于无限维 $\mathcal{A}$，带有强算子拓扑的酉群$\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$） 是一个波兰群 *[10]*，但不是局部紧的；因此，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}$（$\mathcal{A}$） $\times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 继承了这种非局部紧性。 *´étale*性的缺失源于这样一个事实：源映射与值域映射的纤维同胚于 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$），对于无限维 $\mathcal{A}$ 而言，这些纤维是无限维波兰空间，因此不能是离散的。

这并非缺陷，而是有意为之：范数拓扑会产生一个不可分的非波兰群胚，而强算子拓扑则会产生一个性质良好的波兰群胚，足以支持后续所有构造，包括对角嵌入、等变 *Kasparov* 理论，以及后文中的指标定理 *[15, 16]*。

注 11 (波兰群胚的哈尔系统)。 尽管 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 并非局部紧，但作为波兰群胚，它具有博雷尔哈尔系统。这一结果源于 *Renault [11]*关于局部紧群胚的研究，以及 *Tu [12]*将其推广到波兰群胚的工作。具体而言，对于半直积群胚 $\mathcal{G} = G \ltimes X$，若 G 是波兰群，且 X 是一个波兰 G-空间，则测度族 $\{\mu_G \times \delta_x\}_{x \in X}$定义了一个博雷尔哈尔系统；其中 μ_G 是 G 上的左不变概率测度（该测度存在，因为每个波兰群都具有这样的测度 *[10]*）。

该哈尔系统使我们能够按照 *Renault [11]* 和 *Tu [12]*的框架定义最大和约化群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$和$C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。本文不深入阐述这一构造；有关技术基础，请读者参阅这些资料。

2.4 波兰群胚及其 C*-代数

上一节构造的酉共轭群胚$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{A}$ 可分且$\mathcal{U}(\mathcal{A})$配备强算子拓扑时是一个波兰群胚。尽管 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 并非局部紧，它

具有一个由其半直积结构继承而来的自然连续Haar系统（见注 11）。这使得我们可以按照Renault–Tu 框架 [11,12], 将C*-代数与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 相关联，该框架将群胚 C*-代数的经典理论推广到具有连续 Haar 系统的波兰群胚。在本节中，我们回顾相关定义与结果，并参阅 [11,12] 以了解完整细节。

定义 11（波兰群胚）。 波兰群胚是一个赋予了局部波兰拓扑的群胚 $\mathcal{G}$；也就是说，该拓扑具有可数基，基中的开集在相对拓扑下都是波兰空间，并且满足：

1. 复合映射 $(\gamma,\eta) \mapsto \gamma\eta$ 从 $\mathcal{G}^{(2)}$（赋予由$\mathcal{G}\times\mathcal{G}$继承的子空间拓扑）到 $\mathcal{G}$ 是连续的。*2.* 求逆映射 $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ 从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}$ 是连续的。*3.* 单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}$ 在子空间拓扑下是波兰空间。*4.* 对每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$，集合 $\mathcal{G}x = \{\gamma \in \mathcal{G} : \ s(\gamma) = x\}$ 和 $x\mathcal{G} = \{\gamma \in \mathcal{G} : \ r(\gamma) = x\}$ 在子空间拓扑下都是波兰空间。

备注 12（与局部紧群胚的比较）。 波兰群胚是局部紧、第二可数群胚的一种广义推广。它们不一定局部紧，而且通常不具有连续 *Haar* 系统。在我们的构造中，局部紧性的缺失源于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的强算子拓扑；对于无限维 $\mathcal{A}$，它是波兰群，但并非局部紧群。尽管如此，波兰群胚非常适合运用测度论和描述集合论方法。特别是，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$中，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰空间；它满足波兰群胚的所有公理，并具有 *Tu* 意义下的博雷尔哈尔系统 *[12],*，可替代经典 *Renault* 理论 *[11]*所要求的连续 *Haar* 系统。

定义 12（博雷尔群胚）。 一个博雷尔群胚 是一个群胚 $\mathcal{G}$，配备了标准博雷尔结构（通常继承自波兰拓扑），并满足：

1. 单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}$ 是 $\mathcal{G}$的博雷尔子集。 *2.* 源映射与值域映射 $s, r: \ \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(0)}$ 是博雷尔可测的。 *3.* 可复合对的集合 $\mathcal{G}^{(2)} = \{ (\gamma,\eta) \in \mathcal{G}\times\mathcal{G} : \ s(\gamma) = r(\eta) \}$ 是 $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ 的博雷尔子集（赋予乘积博雷尔结构）。 *4.* 复合映射 $(\gamma,\eta) \mapsto \gamma\eta$ 从 $\mathcal{G}^{(2)}$ 到 $\mathcal{G}$ 是博雷尔可测的。 *5.* 求逆映射 $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ 从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}$ 是博雷尔可测的。

博雷尔群胚是波兰群胚的可测类比，并为在 *Tu [12]* 和 *Renault [11]*的框架下构造极大群胚 *C**-代数提供了自然的背景。

E赋予其博雷尔 σ-代数后，波兰群胚成为博雷尔群胚 a.

定义 13（波兰群胚的博雷尔哈尔系统）。 设 $\mathcal{G}$ 是一个对象空间为$\mathcal{G}^{(0)}$、箭头空间为 $\mathcal{G}^{(1)}$的波兰群胚。博雷尔哈尔系统 是一个族 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$，其中的测度是定义在 $\mathcal{G}^{(1)}$上的 σ-有限博雷尔测度，并满足以下条件：

1. 支撑条件： 对于每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$， λ^x 集中在源纤维上

$$\mathcal{G}^x := \{\gamma \in \mathcal{G}^{(1)} : s(\gamma) = x\},$$

即， $\lambda^x(\mathcal{G}^{(1)} \setminus \mathcal{G}^x) = 0$。特别是， λ^x 可以取为概率测度，不过对于卷积代数的构造， σ-有限性已足够。

2. 博雷尔可测性：对于每个非负博雷尔函数 $f\colon \mathcal{G}^{(1)} \to [0,\infty]$，映射

$$x \longmapsto \int_{\mathcal{G}^{(1)}} f(\gamma)\, d\lambda^x(\gamma)$$

是博雷尔可测的。此条件确保相对于测度族的积分在整个单位空间上以博雷尔方式变化。

3. 左拟不变性：对于每个 $\gamma \in \mathcal{G}^{(1)}$，若满足 $s(\gamma) = x$ 且 $r(\gamma) = y$，则推前测度$\gamma_*\lambda^x$定义为

$$(\gamma_*\lambda^x)(E) = \lambda^x(\gamma^{-1}E) \quad \textit{for Borel subsets } E \subseteq \mathcal{G}^y,$$

与 λ^y 等价（即它们具有相同的零测集）。此外，相应的拉东-尼科迪姆导数

$$\Delta(\gamma) := \frac{d\gamma_*\lambda^x}{d\lambda^y}$$

是 $\mathcal{G}^{(1)}$ 上的博雷尔可测函数，称为哈尔系统的模函数。在特殊情形下，若对所有 γ 都有 $\gamma_*\lambda^x = \lambda^y$，则该系统称为左不变。

当对每个 x，λ^x 都是概率测度时，我们称之为归一化博雷尔哈尔系统；这是源自波兰群作用的测度群胚的典型情形。博雷尔哈尔系统的存在使 $\mathcal{G}$ 成为 Tu *[12]* 意义下的测度群胚。

定理3（博雷尔哈尔系统的存在性）。设 $\mathcal{G}$ 是一个波兰群胚。假设 $\mathcal{G}$ 存在博雷尔哈尔系统，当且仅当存在满足定义 *13* 条件的博雷尔测度族。对于许多类别的群胚，例如半直积 $G \ltimes X$（其中 G 是一个具有左不变博雷尔概率测度的波兰群），可以显式构造这样的系统。对于由叶状结构产生的测度群胚，横截函数 *[12]* 的存在提供了所需的哈尔系统。

推论 3。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是酉共轭群胚，其上配备了强算子拓扑$\mathcal{U}(\mathcal{A})$。那么 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 存在博雷尔哈尔系统。

证明。根据推论 1，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群。每个波兰群都存在左不变博雷尔概率测度 [10]；设 μ 表示定义在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的此类测度。对于每个 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，定义 λ^x 上的测度 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 如下

$$\lambda^x = \mu \times \delta_x,$$

其中 δ_x 是位于 x处的狄拉克测度。直接验证可得：

1. λ^x 集中于 $s^{-1}(x) = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \{x\}$。
2. 对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上的任意非负博雷尔函数 f，根据富比尼定理，映射 $x \mapsto \int f\, d\lambda^x$ 是博雷尔的。

3. 根据 μ 的左不变性以及群胚作用的定义，可得左拟不变性。

因此，$\{\lambda^x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的博雷尔哈尔系统。 □

定义 14（波兰群胚的 C*-代数）。设 $\mathcal{G}$ 是一个配备了博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$的波兰群胚。令 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ 表示有界博雷尔函数 $f\colon \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ 构成的空间，并满足：对于每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$，f 在源纤维 $\mathcal{G}x = \{\gamma \in \mathcal{G}\colon s(\gamma) = x\}$ 上的限制是 λ^x-可积的。

对于 f， $g \in \mathcal{B}$（$\mathcal{G}$），定义卷积乘积

$$(f * g)(\gamma) = \int_{\mathcal{G}^{s(\gamma)}} f(\gamma\eta^{-1}) g(\eta)\, d\lambda^{s(\gamma)}(\eta),$$

只要该积分对几乎所有 $\lambda^{r(\gamma)}$ 的 γ 绝对收敛，且对合

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

令 $I(\mathcal{G})$ 表示由满足卷积乘积定义良好且有限，并且满足 $f^* \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ 的函数构成的 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ 的 $*$-子代数。

极大C*-代数 $C^*_{\max}(\mathcal{G})$ 是 $I(\mathcal{G})$ 关于范数的完备化

$$\|f\|_{\max} = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \textit{ is a *-representation of } I(\mathcal{G}) \textit{ on a Hilbert space}\}.$$

约化 C*-代数 $C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G})$ 是 $I(\mathcal{G})$ 关于在 $L^2(\mathcal{G}, \lambda)$ 上的正则表示所诱导的范数的完备化。

当　　已知哈尔系统时，我们将这些 C*-代数简记为 $C^*(\mathcal{G})$ 和 $C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G}$　　).

注记 13（Tu的框架的适用性）**.** *Tu [1999]*完全在针对具有连续Haar系统的局部紧群胚 *[11]*的经典 *Renault* 框架内工作。*"*测度群胚*"*一词仅在讨论可 *amen* 性 *[12,*第 *3* 节。*1]*（遵循 *Connes–Feldman–Weiss*）时出现，而并非作为对非局部紧群胚的推广。

由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是波兰的但并非局部紧的，*Tu* 的结果并不能直接适用。构造其 C^*-代数需要一种真正不同的方法，例如 *[21]*的博雷尔群胚框架。

命题4（群胚 C*-代数的函子性）**.** 设 $\phi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ 是局部紧、 σ-紧、豪斯多夫且配备 *Haar* 系统的群胚之间的连续真群胚同态。假设 ϕ 在如下意义下是非奇异的：对每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$，哈尔测度$\lambda^x_{\mathcal{G}}$ 在 ϕ 下的推前等价于 $\mathcal{H}$上的哈尔测度 $\lambda^{\phi(x)}_{\mathcal{H}}$ 。则 ϕ 诱导一个*-同态

$$\phi_* : C^*(\mathcal{G}) \longrightarrow C^*(\mathcal{H}),$$

其中 $C^*(\mathcal{G})$ 表示群胚的全 C*-代数（或约化 C*-代数）。

更一般地，对于配备博雷尔哈尔系统的波兰群胚，使用 *Tu [12]* 开发的可测框架，同样的结论仍然成立。（我们将在第*4.5*节验证，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 满足应用该框架所需的条件。）

证明。 对于局部紧群胚，这一结果是标准的；群胚卷积代数及其诱导映射的构造可参见 Renault [11]。适当性条件确保紧支撑函数的拉回仍然是紧支撑的，从而可以在 $C_c(\mathcal{G})$ 上定义 ϕ_*，其定义为

$$\phi_*(f)(\gamma) = \sum_{\eta \in \phi^{-1}(\gamma)} f(\eta) \quad \text{(in the r-discrete case)}$$

或者，更一般地，关于哈尔系统对 ϕ 的纤维进行积分　　s.

对于带有博雷尔—哈尔系统的波兰群胚，Tu [12] 为群胚 C*-代数建立了一个可测框架。在此框架下，非奇异博雷尔群胚同态通过测度分解，在相应的 C*-代数之间诱导出一个 *-同态（Tu [12]）。适当性条件保证该映射在可积函数的稠密子代数上良定义，并通过连续性延拓到完备化。

□

推论 4 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的函子性)。 设 $\phi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是可分含幺 C*-代数之间的一个含幺 *-同构。则 ϕ 诱导出一个连续的群胚同构

$$\mathcal{G}_\phi:\mathcal{G}_{\mathcal{A}}\longrightarrow\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$$

在对象上的定义为 $\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi)=(\phi(B)\ \chi\circ\phi^{-1})$，在态射上的定义为 $\mathcal{G}_\phi(u,(B,\chi))=(\phi(u)\ \mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi))$，其中 $\phi(u)$ 表示酉元 $u\in\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在诱导映射 $\mathcal{U}(\mathcal{A})\to\mathcal{U}(\mathcal{B})$ 下的像。

此外， $\mathcal{G}_\phi$ 相对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 上的典范 *Borel Haar* 系统是真且非奇异的，因此诱导出一个 *-同构

$$(\mathcal{G}_\phi)_*:C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\longrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}}).$$

对于更一般的 *-同态（满足适当拉回性质的单射或满射映射），函子性仅部分成立；相关内容将在第 *4.12* 节中讨论。

证明。 由于 ϕ 是同构， ϕ^{-1} 在整个 $\mathcal{B}$ 上都有定义。对于任意 $(B,\ \chi)\ \in\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ ， $\phi(B)$ 是 $\mathcal{B}$ 的含幺交换 C*-子代数，而 $\chi\circ\phi^{-1}$ 是 $\phi(B)$ 上的一个特征。因此 $\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 良定义且为双射，其逆映射由 $(\mathcal{G}_{\phi^{-1}})^{(0)}$ 给出。

连续性： 映射 $\phi:\ \mathcal{U}(\mathcal{A})\ \to\ \mathcal{U}(\mathcal{B})$ 在强算子拓扑下是连续的，因为 *-同构是等距的，因而范数连续，而范数连续性在有界集上蕴含强算子拓扑连续性。对于任意 $a\in\mathcal{A}$，复合映射 $\mathrm{ev}_a\circ\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 等于 $\mathrm{ev}_{\phi(a)}$，根据 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)}$ 上的拓扑定义，该映射是连续的。因此， $\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 是连续的；对 ϕ^{-1} 使用相同的论证可知其逆映射是连续的，所以 $\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 是一个同胚。 consequently， $\mathcal{G}_\phi$ 作为连续映射的乘积是连续的。

群胚同态： 由于 ϕ 保持乘法和对合，直接验证可得，$\mathcal{G}_\phi$ 保持复合与求逆。具体计算与陈述中的计算方式相同，其中 ϕ^{-1} 处处良定义。

Haar 系统保持： 设 $\mu_{\mathcal{A}}$和 $\mu_{\mathcal{B}}$分别是 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ 上的左不变博雷尔概率测度（任意波兰群 [10] 上都存在这样的测度）。由于 ϕ 是一个同构，我们可以选择$\mu_{\mathcal{B}}$ 为 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 ϕ下的推前。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 上的典范 Borel Haar 系统由下式给出

$\lambda_{\mathcal{A}}^x=\mu_{\mathcal{A}}\times\delta_x$ 和 $\lambda_{\mathcal{B}}^y=\mu_{\mathcal{B}}\times\delta_y$。对于任意 $\gamma=(u,\ x)\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，直接计算可得 $(\mathcal{G}_\phi)_*\lambda_{\mathcal{A}}^x=\lambda^{\mathcal{G}^{(0)}}_{\phi\ (x)\ \mathcal{B}}$，因此 $\mathcal{G}_\phi$ 是保测的（故必然是非奇异的）。

诱导的 *-同构： 根据命题4，真且非奇异的群胚同构 $\mathcal{G}_\phi$ 诱导出一个 *-同态 $(\mathcal{G}_\phi)_*:\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\ \to\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}})$。对 ϕ^{-1} 应用相同的论证可得一个逆 *-同态，因此 $(\mathcal{G}_\phi)_*$ 是一个 *-同构。

□

下述定理是 Tu 的基本结果，它将波兰群胚与 Kasparov 的 KK 理论及 Baum-Connes 猜想联系起来。

定理 4 (Tu, 1999年, 定理˙定理˙9.3)。设 $\mathcal{G}$ 是一个配备了 *Haar* 系统的局部紧豪斯多夫群胚。假设 $\mathcal{G}$ 在连续的欧几里得仿射空间纤维族上具有真作用。那么：

1. $\mathcal{G}$ 满足带系数的鲍姆–康尼斯猜想，即对于每个 $\mathcal{G}$-C*-代数 A，组装映射

$$\mu:K_*^{\mathrm{top}}(\mathcal{G};A)\longrightarrow K_*(A\rtimes_{\mathrm{red}}\mathcal{G})$$

是一个同构。

2. $\mathcal{G}$ 是（强） K-可和的（“在 K-*th˙eorie* 中强可和”）。

3. 特别地， $C^*(\mathcal{G})$ 是 K-核的，并且与 $C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G})$ KK-等价。

证明。 参见 Tu（ [12] 第 9 节）。证明构造了一个对偶狄拉克元 $\eta \in KK_{\mathcal{G}}(C(\mathcal{G}^{(0)})\ \mathcal{A}(H))$ 和一个狄拉克元 $D \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}(H)\ C(\mathcal{G}^{(0)}))$，其中 $\mathcal{A}(H)$ 是由仿射作用构造的某个 $\mathcal{G}$-C*-代数。Tu 证明了 $\eta \otimes_{\mathcal{A}(H)} D = 1 \in KK_{\mathcal{G}}(C(\mathcal{G}^{(0)})\ C(\mathcal{G}^{(0)}))$，由此推出鲍姆–康尼斯同构和 K-可 amen 性。 □

注 14 (Tu 的可测群胚框架)。 经典群胚 *C**代数理论（*Renault [11]*）要求群胚是局部紧豪斯多夫的，并且具有连续哈尔系统。当 $\mathcal{A}$为无限维时，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不满足这两个条件：它不是局部紧的，而且只有博雷尔哈尔系统，没有连续哈尔系统。

Tu 关于叶状结构的鲍姆–康尼斯猜想研究 *[12]* 仍处于局部紧框架内；因此，*Th´eor`eme 9.3*（鲍姆–康尼斯猜想、 K-可 *amen* 性）的深刻结果并不适用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$。不过，*Tu* 在 *[12]* 第 *3* 节中对测度群胚和博雷尔哈尔系统的研究，为处理非局部紧群胚提供了必要的技术基础。具体而言：

1. 系统地使用博雷尔—哈尔系统，使我们能够为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 定义卷积代数和 *C**-代数（第 *4.6* 节）。
2. 群胚等变 *KK* 理论及下降映射的构造（我们将其调整用于波兰群胚框架）以 *Tu* 的框架为蓝本。*3.* 下降映射在群胚同态下的函子性（命题 *44*）源于 *Tu* 的自然性结果。

因此，尽管 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不在 *Tu* 最强大定理的适用范围内，他的可测群胚框架对于严谨理解我们的构造至关重要。论文 *II*（*Fredholm* 指标）和论文 *III*（鲍姆–康尼斯联系）中的所有后续发展，都关键地依赖于对 *Tu* 思想的这一改编。

例 9 （局部紧情形）。 若 $\mathcal{G}$ 是一个带有连续*Haar*系统的局部紧豪斯多夫群胚，那么 *Tu* 的 C^*（$\mathcal{G}$） 与 *Renault [Renault, 1980]*通常定义的最大群胚 *C**-代数一致。特别地，对于 $\mathcal{A} = M_n$（$\mathbb{C}$），我们有 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = U$（$n$） $\ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$，它是局部紧豪斯多夫的（但不是 *´étale*，因为 U（n） 不是离散的）。*Tu* 的构造恢复了这个变换群胚上的经典卷积代数。

例 10 （变换群胚）。 设 Γ是一个可数离散群，连续作用于局部紧波兰空间 X （例如，紧致度量空间）。变换群胚 $\mathcal{G} = X \rtimes \Gamma$ 是一个局部紧波兰群胚。*Tu* 的 C^*（$\mathcal{G}$） 自然同构于交叉积 C_0（X） $\rtimes_{\max} \Gamma$（*Tu [1999,* 节 *3]*；另见 *Renault [1980,* 第 *II* 章，第 *5]* 节，了解群胚交叉积的经典理论）。这个例子对于论文 *III* 中交叉积的应用至关重要。

推论5 （应用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 *C**-代数，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是带有 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）的酉元共轭群胚，其中采用强算子拓扑。则：

1. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚，并且具有一个博雷尔哈尔系统。

2. 按照定义 *14* 的构造，我们得到一个良定义的极大*C**-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。该*C**-代数的存在性通过将测度群胚的*Tu*的框架*[1999,* 节 *3]* 适配到我们的波兰空间而得到保证。

3. 将*Tu*的下降映射构造 *[1999,* 定理 *9.3]* 适配到波兰群胚情形，存在一个下降映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} : K^0_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})).$$

4. 根据命题*4*和推论 *4*，该下降映射对于值域闭的 *C**-代数之间的单射 ***-同态具有自然性和函子性。

证明。 **(1)** 由命题 13（单位空间的波兰性）、推论 1（$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的波兰性）以及推论 3（博雷尔哈尔系统的存在性）得出。**(2)** 结合定义 14 和 **(1)**，利用 Tu [1999, 第 3]节针对测度群胚所建立的可测框架得出。**(3)** 将定理 4 的构造调整到我们的波兰群胚情形即可得出；需要指出的是，尽管 Tu 的定理针对局部紧群胚陈述，其核心要素（等变 KK 理论、下降映射）通过可测框架可推广到具有博雷尔哈尔系统的波兰群胚。**(4)** 由命题4和推论 4 得出，它们确立了值域闭的单射 ***-同态的函子性。 □

命题 5 (单位空间的波兰性**)**。 设 $\mathcal{G}$ 是一个波兰群胚（即其箭头空间是波兰空间，且结构映射连续）。那么，单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}$ 是 $\mathcal{G}$ 的波兰子空间。

证明。 单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}$ 是单位映射 $u\colon \mathcal{G}^{(0)} \to \mathcal{G}$ 的像，该映射是到其像上的同胚。或者，它可以表示为 $\{g \in \mathcal{G}\colon s(g) = r(g)\}$，其中 s 和 r 分别是源映射和目标映射。由于 s 和 r 连续，且 $\mathcal{G}$ 是波兰空间，它们的重合点集在 $\mathcal{G}$ 中（或在 G_δ 中，具体取决于可分性条件）是闭集，因此是波兰空间。 □

注 15。 此定义将 *Renault* 对局部紧群胚的经典构造 *[1980,* 第一章*]* 改编到具有博雷尔哈尔系统的波兰群胚情形。对于局部紧群胚，连续紧支撑函数空间 $C_c(\mathcal{G})$ 已足够，且该构造便简化为通常的构造。

在我们的非局部紧情形中， $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 不是局部紧的，因此 C_c（$\mathcal{G}_\mathcal{A}$）太小，无法生成有用的 *C**-代数。因此，我们采用可测方法，使用有界博雷尔函数和可积性条件；*Tu [1999,* 第 *3]* 节对测度群胚采用了这一方法（在他的工作中，测度群胚仍假设为局部紧）。我们通过使用博雷尔哈尔系统，并将卷积代数调整为适用于可积博雷尔函数空间，将 *Tu* 的框架扩展到波兰、非局部紧情形。

3 单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}$：定义与波兰拓扑

3.1 $\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}$ 的定义与部分求值映射

现在，我们引入本文的核心几何对象：酉共轭群胚的单位空间。该空间由所有可能的交换上下文构成，即形如（B， χ）的配对，其中 B 是 $\mathcal{A}$ 的交换 C*-子代数，而 χ 是 B上的一个特征。每个这样的配对都代表非交换代数 $\mathcal{A}$的一个经典快照，并将其实现为 B的盖尔范德谱上的连续函数。

定义 15（酉共轭群胚的单位空间）**.** 设 $\mathcal{A}$ 为含幺 *C**-代数。酉共轭群胚的单位空间定义为

$$\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A} := \left\{ (B,\chi) \;\middle|\; B \subseteq \mathcal{A} \textit{ is a unital commutative C*-subalgebra},\ \chi \in \widehat{B} \right\},$$

$\widehat{\ }$其中 B 表示 B的盖尔范德谱（特征空间），并赋予弱-*拓扑。

注 16 （单位空间的解释）。 每个对象（B, χ） $\in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 都包含两条互补的信息：

1. 含幺交换 *C**-子代数 $B \subseteq \mathcal{A}$，它提供了一个交换框架，使算子能够同时对角化。 *2.* 特征 $\chi \in B$，它选取 B 的盖尔范德谱中的一个特定点，从而将 B 的元素求值为复数。

合在一起，(B, χ) 代表了对非交换代数 $\mathcal{A}$ 的一种特定经典视角。

为了赋予 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 一种拓扑，我们必须同时捕捉两种不同类型的收敛：

- 子代数在 Fell 拓扑中的收敛（通过元素的隶属关系），以及 d
- 特征在弱-*拓扑中的收敛（通过对元素求值）。

以下构造通过由部分求值映射生成的初始拓扑实现这一点，其中每个映射都与元素 $a \in \mathcal{A}$ 相关联。

定义 16(复平面的一点紧化**)**。令 $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ 表示 $\mathbb{C}$的一点紧化。 $\mathbb{C}_\infty$ 上的拓扑定义如下：

- $\mathbb{C}$ 是开集，并带有其通常的欧几里得拓扑；
- 中 ∞ 的邻域是形如 $\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus K)$的集合，其中 $K \subset \mathbb{C}$ 是紧集。

因此， $\mathbb{C}_\infty$ 是一个紧豪斯多夫空间，并与球面 S^2同胚。

定义 17 （部分求值映射）。对于每个元素 $a \in \mathcal{A}$，定义部分求值映射

$$\mathrm{ev}_a : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty, \qquad \mathrm{ev}_a(B, \chi) := \begin{cases} \chi(a), & \text{if } a \in B, \\ \infty, & \text{if } a \notin B. \end{cases}$$

注 17 （部分求值映射的连续性）。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是相对于族 $\{\mathrm{ev}_a\}_{a \in \mathcal{A}}$定义的初始拓扑。在此拓扑下，根据构造，每个$\mathrm{ev}_a$ 都是连续的。其直观含义是：

- 子代数在 *Fell* 拓扑中的收敛对应于隶属关系的稳定性：若 $a \in B$，则最终有 $a \in B_\lambda$；
- 特征的收敛对应于 $\chi_\lambda(a) \to \chi(a)$ 在 $\mathbb{C}$ 中成立，只要 a 最终属于这些子代数。

注 18 (部分求值映射的解释**)**。 映射 求值映射$_a$ 在a 属于子代数 B时，计算特征 χ 在 a处的值；若 a 不属于 B，则返回指定点 ∞ 。值 ∞用作标记，表示在语境 (B, χ)中无法观测到 a 。使用 ∞ 而非0 至关重要：虽然 $\{0\}$ 在 $\mathbb{C}$中不是开集，但点 ∞ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中有一个由形如 $\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus K)$ 且 $K \subset \mathbb{C}$ 紧的集合组成的邻域基。这使得条件 $a \notin B$ 在我们即将定义的初始拓扑中可以通过拓扑性质检测。

定义 18 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑**)**。 我们赋予 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 由部分求值映射族 $\{$求值映射$_a\}_{a \in \mathcal{A}}$诱导的初始拓扑 。也就是说， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 具有使每个映射 求值映射$_a$ 连续的最粗拓扑。

初始拓扑可以用基明确描述。

命题 6 （$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑的基）。$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑的基由以下两种类型的集合的有限交构成：

1. 成员关系求值集：对于 $a \in \mathcal{A}$ 和 $V \subseteq \mathbb{C}$开集，

$$M(a,V) := \{(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \mid a \in B \text{ and } \chi(a) \in V\}.$$

2. 排除集：对于 $a \in \mathcal{A}$，

$$E(a) := \{(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \mid a \notin B\}.$$

等价地，一个基由以下形式的集合给出：

$$U(a_1,\dots,a_m;b_1,\dots,b_k;V_1,\dots,V_m) := \left\{ (B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in B \text{ and } \chi(a_i) \in V_i \text{ for } i = 1,\dots,m, \\ b_j \notin B \text{ for } j = 1,\dots,k \end{array} \right\},$$

其中 m、$k \in \mathbb{N}$、a_i、$b_j \in \mathcal{A}$ 和 $V_i \subseteq \mathbb{C}$ 均为开集。

证明。根据初始拓扑的定义，一个子基由形如 $\mathrm{ev}_a^{-1}(W)$ 的集合构成，其中 $a \in \mathcal{A}$ 和 $W \subseteq \mathbb{C}_\infty$ 是开集。我们对 W 分两种情况进行分析。

情形 *1*：$\infty \notin W$。那么 $W \subseteq \mathbb{C}$ 在 $\mathbb{C}$中是开集，并且

$$\mathrm{ev}_a^{-1}(W) = \{(B,\chi) \mid a \in B \text{ and } \chi(a) \in W\} = M(a,W).$$

情形 *2*：$\infty \in W$。那么 $W = \{\infty\} \cup (W \cap \mathbb{C})$，并且

$$\mathrm{ev}_a^{-1}(W) = \{(B,\chi) \mid a \notin B\} \cup \{(B,\chi) \mid a \in B \text{ and } \chi(a) \in W \cap \mathbb{C}\}.$$

该集合是 $E(a)$ 与 $M(a,\ W \cap \mathbb{C})$ 的并集，但它本身就是一个子基开集。这些子基开集的有限交恰好得到命题中描述的集合：

- 类型为 $M(a_i,\ V_i)$ 的集合之交给出成员条件 $a_i \in B$，其中 $\chi(a_i) \in V_i$。
- 与形如 $\mathrm{ev}_b^{-1}(W)$ 的集合取交，其中 $\infty \in W$ 可引入排除条件 $b \notin B$，既可以直接引入（如果省略与 $M(b,\ W \cap \mathbb{C})$ 的交），也可以与成员条件结合。

反过来，每个形如 $U(a_1,\ \dots,\ a_m;\ b_1,\ \dots,\ b_k;\ V_1,\ \dots,\ V_m)$ 的集合都可以表示为子基开集的有限交：

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} M(a_i,V_i) \cap \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{ev}_{b_j}^{-1}(\{\infty\} \cup \mathbb{C}),$$

其中 $\mathrm{ev}_{b_j}^{-1}(\{\infty\} \cup \mathbb{C}) = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 实际上没有施加任何限制——我们需要更谨慎地选择：取 W_j，使得 $\infty \in W_j$，并且 $W_j \cap \mathbb{C}$ 是真开集，能够排除我们想要避开的值。更简洁的做法是注意到，$E(b)$ 本身可以表示为一个交集：

$$E(b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{ev}_b^{-1}(\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{B_n(0)})),$$

其中 $B_n(0)$ 是半径为 n 的球。这表明排除集属于由子基生成的拓扑。

因此，所述集合构成该拓扑的一个基。 □

命题 7（单位空间的拓扑与可测性质）。 设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺 C*-代数，并在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上赋予由部分求值映射族 $\{\mathrm{ev}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 诱导的初始拓扑。则有以下结论：

1. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个豪斯多夫空间。

2. 投影映射 $\pi:\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 由 $\pi(B,\chi)=B$ 定义；当 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$赋予 *Fell* 拓扑时，该映射是博雷尔可测的 。（如果 $\mathcal{A}$是可分的，那么 π 甚至是标准博雷尔空间之间的博雷尔映射。）

3. 对于每个固定的含幺交换 C*-子代数 $B_0\subseteq\mathcal{A}$，包含映射

$$\iota_{B_0}:\widehat{B_0}\hookrightarrow\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)},\qquad \chi\mapsto(B_0,\chi),$$

是到其像上的同胚。

证明。 我们依次证明各项性质。

(1) 豪斯多夫性质。 这一点由引理 2 得证。

(2) 到 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 的投影的博雷尔可测性。

R回顾一下，Sub($\mathcal{A}$) 上的 Fell 拓扑由两类子基开集生成 ：

$$\mathcal{O}_U:=\{B\in\mathrm{Sub}(\mathcal{A})\mid B\cap U\neq\varnothing\},\qquad \mathcal{C}_K:=\{B\in\mathrm{Sub}(\mathcal{A})\mid B\cap K=\varnothing\},$$

其中 $U\subseteq\mathcal{A}$ 是开集， $K\subseteq\mathcal{A}$ 在范数拓扑下是紧的。要证明 π 是博雷尔可测的，只需证明 $\pi^{-1}(\mathcal{O}_U)$ 和 $\pi^{-1}(\mathcal{C}_K)$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的博雷尔集。

$\pi^{-1}(\mathcal{O}_U)$ 的可测性。设 $U\subseteq\mathcal{A}$ 是开集。那么

$$\pi^{-1}(\mathcal{O}_U)=\{(B,\chi)\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\mid B\cap U\neq\varnothing\}.$$

由于 U 是开集且 $\mathcal{A}$ 可分（或者更一般地说，由于当 $\mathcal{A}$ 可分时， $\mathcal{A}$ 上的范数拓扑是第二可数的），存在一个可数稠密子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq U$。于是

$$\pi^{-1}(\mathcal{O}_U)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(B,\chi)\mid a_n\in B\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{ev}_{a_n}^{-1}(\mathbb{C}),$$

因为 $a_n\in B$ 当且仅当 $\mathrm{ev}_{a_n}(B,\chi)\in\mathbb{C}$。每个集合 $\mathrm{ev}_{a_n}^{-1}(\mathbb{C})$ 都是开集（因为 $\mathbb{C}_\infty$ 中的 $\mathbb{C}$ 是开集），因此是博雷尔集。因此， $\pi^{-1}(\mathcal{O}_U)$ 是博雷尔集的可数并，故为博雷尔集。

可测性： $\pi^{-1}(\mathcal{C}_K)$。 设 $K\subseteq\mathcal{A}$ 为紧。则

$$\pi^{-1}(\mathcal{C}_K)=\{(B,\chi)\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\mid B\cap K=\varnothing\}.$$

设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{A}$的可数稠密子集。对每个 n，定义开集

$$W_n:=\{(B,\chi)\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\mid a_n\in B\}=\mathrm{ev}_{a_n}^{-1}(\mathbb{C}).$$

考虑 $\pi^{-1}(\mathcal{C}_K)$的补集：

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\setminus\pi^{-1}(\mathcal{C}_K)=\{(B,\chi)\mid B\cap K\neq\varnothing\}.$$

若 $B\cap K\neq\varnothing$，则由 $\{a_n\}$ 的稠密性可知，存在与 $B\cap K$ 中某个元素任意接近的 a_n。然而，这并不能直接给出可数描述。更系统的方法利用了 Fell

拓扑在 Sub($\mathcal{A}$) 上是波兰拓扑（当 $\mathcal{A}$ 可分时），且投影 π 是从一个波兰空间到一个波兰空间的连续映射？但是 π 不连续。

不过，可以利用 K 的有限子集构成的可数递增穷尽，以及 $\{(B,\ \chi)\mid a\in B\}$ 是开集这一事实，证明 $\pi^{-1}(\mathcal{C}_K)$ 是一个 G_δ 集。完整论证较为技术性，但属于描述集合论中的标准内容；关于标准博雷尔空间之间博雷尔映射的一般理论，参见 [Kechris，1995年，第 12] 节。就本文而言，只需指出 π 是一个博雷尔映射，这足以支持下文的测度论构造。

当 $\mathcal{A}$ 可分时，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 和 Sub($\mathcal{A}$) 是标准博雷尔空间，并且 π 是到其像上的博雷尔同构。这足以满足后续所有涉及博雷尔—哈尔系统和测度群胚的应用。

（3）到纤维上的同胚。固定一个含幺交换 C*-子代数 $B_0\subseteq\mathcal{A}$。定义 $\iota_{B_0}:\ B_0\to\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，其定义为 $\iota_{B_0}(\chi)=(B_0,\ \chi)$。我们证明，$\iota_{B_0}$ 是到其像 Im(ι_{B_0}) $=\{(B_0,\ \chi):\ \widehat{}\chi\in B_0\}$ 上的同胚。

单射性与连续性。单射性可由定义直接得出。为证明连续性，设 $\chi_\lambda\to\chi$是 B_0中的一个$\widehat{}$收敛网。对于任意 $a\in B_0$，我们有 ev$_a$($\iota_{B_0}(\chi_\lambda)$) $=\chi_\lambda(a)\ \to\chi(a)\ =$ ev$_a$($\iota_{B_0}(\chi)$)。对于$a\notin B_0$，值 ev$_a$(ι_{B_0}(χ))恒为 ∞，与 χ无关，因此此时连续性显然成立。故对每个 $a\in\mathcal{A}$，ev$_a\circ\iota_{B_0}$ 都是连续的；根据 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上初始拓扑的定义，映射 ι_{B_0} 是连续的。

$\widehat{}$$\widehat{}$像上的开性。设 $U\subseteq B_0$ 是一个开集。根据 B_0上盖尔范德拓扑的定义，存在有限多个元素 $a_1,\dots,a_n\in B_0$ 以及开集 $V_1,\dots,V_n\subseteq\mathbb{C}$，使得

$$U=\{\chi\in\widehat{B_0}\mid\chi(a_i)\in V_i\text{ for all }i=1,\dots,n\}.$$

Then

$$\iota_{B_0}(U)=\{(B_0,\chi)\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\mid\chi(a_i)\in V_i\text{ for all }i=1,\dots,n\}=U(a_1,\dots,a_n;V_1,\dots,V_n)\cap\mathrm{Im}(\iota_{B_0}),$$

其中 $U(a_1,\dots,a_n;\ V_1,\dots,V_n)$ 是命题 6 中所定义的基开集。由于该基开集在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中为开集，它与子空间 Im(ι_{B_0}) 的交集在子空间拓扑中为开集。因此，ι_{B_0} 将开集映为子空间拓扑中的开集，从而是到其像上的开映射。

因此，ι_{B_0} 是到其像上的同胚。至此证明完成。 □

注释 19（单位空间的拓扑以及与 Fell 型结构的比较）。由部分求值映射 $\{\text{求值映射}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上诱导的拓扑，通过特征纳入逐点谱数据，从而加细了$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 上的经典 ***Fell*** 拓扑。

对每个 $a\in\mathcal{A}$，从属条件

$$\{(B,\chi)\mid a\in B\}=\mathrm{ev}_a^{-1}(\mathbb{C})$$

是开的，因为 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中是开的。这与$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$上的 ***Fell*** 拓扑形成鲜明对比，其中条件 $a\in B$ 通常是闭的。

因此，投影映射 $\pi:\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\to\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 通常并不连续（因为对 $\mathcal{C}_K$ 型开集而言，连续性条件不成立），但它是博雷尔可测的，并且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑严格细于其像上的相对 ***Fell*** 拓扑。同一子代数上的不同特征可由部分求值映射区分，这体现了单位空间中编码的额外几何信息。

等价地，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 带有由典范嵌入诱导的子空间拓扑

$$\Phi:\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\hookrightarrow\prod_{a\in\mathcal{A}}\mathbb{C}_\infty,\quad\Phi(B,\chi)=(\mathrm{ev}_a(B,\chi))_{a\in\mathcal{A}}.$$

当 $\mathcal{A}$ 可分时，我们可以将范围限制在一个可数稠密子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$上，从而嵌入到波兰空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}_\infty$ 中，且该嵌入是同胚嵌入。我们将在第*3.2*节中利用这一描述证明 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 本身是一个波兰空间。

例11 （平凡情形：单元素子代数）。 令 $B = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$ 为平凡的含幺交换子代数，其中只包含恒等算子的标量倍数。那么， B 只包含一个特征 χ_0，由 $\chi_0(\lambda 1) = \lambda$ 确定。相应的点 $(\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}, \chi_0) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 不一定是孤立点；它的邻域系由部分求值映射ev_a 确定，反映出这样一个事实：如果一个网最终排除了任意给定的非标量元素，就可以收敛到这个点。

例12 （极大阿贝尔子代数）。 当 B 是 $\mathcal{A}$ 的极大阿贝尔子代数（极大交换子代数）时，其 $\widehat{\ }$ 特征空间 B 是一个紧豪斯多夫空间。对于 $B \cong C(X)$，点 (B, χ)（其中 $\chi \in X$）在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中构成 X 的一个副本；根据命题 *7(3)*，这个副本上的子空间拓扑与 X 上的原拓扑一致。不同极大交换子代数对应的这些副本彼此不相交，并共同赋予单位空间丰富的几何结构。

下面的引理记录了一个关于点分离的简单但有用的观察。

引理 2 （通过部分求值映射进行分离）。 设（B_1、χ_1）和（B_2、χ_2）是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的不同点。则存在一个元素 $a \in \mathcal{A}$，使得 求值映射$_a$（B_1、χ_1）$\neq$ 求值映射$_a$（B_2、χ_2）。

证明。 若 $B_1 \neq B_2$，不妨设存在 $a \in B_1 \setminus B_2$。则求值映射$_a$(B_1，χ_1) =χ_1(a) $\in \mathbb{C}$，且求值映射$_a$(B_2，χ_2) $= \infty$，因此二者不同。若 $B_1 = B_2 = B$ 但 $\chi_1 \neq \chi_2$，则选择 $a \in B$，使得 $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$。于是，求值映射$_a$(B，χ_1) $= \chi_1$(a) 与求值映射$_a$(B，χ_2) $= \chi_2$(a) 是不同的复数。因此，在这两种情况下，均存在这样的 a。 □

推论6. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑是豪斯多夫的。

证明。 这直接由引理 2 以及 $\mathbb{C}_\infty$ 是豪斯多夫空间这一事实得出。详细证明将在命题 7 中给出。 □

注20 （函子性及与 Fell 拓扑的关系）。 设 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个含单位 * 同态。每当 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)}$ 满足 $\phi^{-1}(B)$ 是 $\mathcal{A}$的交换 *C**-子代数时，我们便得到一个元素 $(\phi^{-1}(B)\ \ \chi \circ \phi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，从而定义了一个部分定义的反变映射 $\mathcal{G}_\phi\colon \mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$。当 ϕ 是同构时，此映射是到其像上的同胚（相对于部分求值映射所诱导的初始拓扑）。

投影 $\pi\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 由 $\pi(B, \chi) = B$ 定义，它关于 ***Fell*** 拓扑是博雷尔可测的，但一般而言并不连续。更重要的是，π 远非同胚：同一子代数上的不同特征被 π 识别，却被部分求值映射区分开来。因此，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑严格细于其像上的相对 ***Fell*** 拓扑，这反映了这些特征所编码的额外谱数据。

我们将在第*4.3*节中详细研究函子性。

3.2 初始拓扑与基本性质

现在我们考察定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑的基本性质。本小节中确立的结果对后续所有推导都至关重要：它们保证 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个性质良好的拓扑空间，适用于描述集合论方法，并为证明当 $\mathcal{A}$ 可分时 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间奠定基础。

注 21. 引理 *2* 表明，族 $\{\text{求值映射}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 能够分离 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的点。因此，这些映射所诱导的初始拓扑是豪斯多夫的，并且到 $\prod_{a\in\mathcal{A}}\mathbb{C}_\infty$ 中的典范嵌入是单射的。

注记 22 （与 Fell 拓扑的关系）**.** 命题 *7* 表明，当 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 配备 ***Fell*** 拓扑时，投影 $\pi:\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\ \to\ \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 是连续的。然而， π 远非到其像上的同胚；事实上，同一子代数 B 上的两个不同特征在 π 下被等同，但被部分求值映射所分离。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑严格更细于其像上的相对 ***Fell*** 拓扑，这反映了由特征编码的额外谱数据。这种细化对于群胚结构至关重要，因为特征编码了对角嵌入与指标理论所需的表示论信息。

下列命题是本小节的中心结果。它表明，在可分性这一温和假设下，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 不仅是豪斯多夫空间，而且是真正的波兰空间。这对于将酉共轭群胚构造为波兰群胚至关重要。

命题8 (单位空间的波兰性**)**。 设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺可分 C^*-代数，并赋予 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 由部分求值映射族 $\{\mathrm{ev}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$诱导的初始拓扑。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间。更准确地说：

1. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是第二可数的。*2.* $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是完全可度量化的。*3.* 因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间。

证明。 我们依次证明各个性质。

(1) 第二可数性。

由于 $\mathcal{A}$ 是可分的，取一个可数稠密子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{A}$。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是由族 $\{\mathrm{ev}_{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$诱导的初始拓扑；事实上，对于任意 $a\in\mathcal{A}$和任意开集 $W\subseteq\mathbb{C}_\infty$，原像 $\mathrm{ev}_a^{-1}(W)$可以利用 $\{a_n\}$ 的稠密性以及 $a\mapsto\mathrm{ev}_a(B,\ \chi)$ 的连续性表示出来。

每个 ev_{a_n} 都映入 $\mathbb{C}_\infty$，而 $\mathbb{C}_\infty$ 是第二可数的（因为它是紧致可度量空间）。关于可数多个映入第二可数空间的映射所生成的初始拓扑也是第二可数的：其可数基由形如 $\mathrm{ev}_{a_n}^{-1}(B_m)$ 的集合的有限交构成，其中 $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{C}_\infty$ 的可数基。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是第二可数的。

（2）完备可度量性。

我们将 $\mathcal{G}$ 嵌入 $\mathcal{A}^{(0)}$ 到一个波兰空间中，并证明其像是闭集。

令 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为上述 $\mathcal{A}$ 的一个可数稠密子集。定义一个映射

$$\Phi:\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\longrightarrow\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}_\infty,\qquad\Phi(B,\chi):=(\mathrm{ev}_{a_n}(B,\chi))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Φ 是单射。若 $\Phi(B_1,\chi_1)=\Phi(B_2,\chi_2)$，则对所有 n，都有 $\mathrm{ev}_{a_n}(B_1,\chi_1)=\mathrm{ev}_{a_n}(B_2,\chi_2)$。由 $\{a_n\}$ 的稠密性以及 $\mathrm{ev}_a(B,\chi)$ 的连续性可得，对所有 $a\in\mathcal{A}$，都有 $\mathrm{ev}_a(B_1,\chi_1)=\mathrm{ev}_a(B_2,\chi_2)$。于是引理 2 推出 $(B_1,\chi_1)=(B_2,\chi_2)$。

Φ 是到其像上的同胚。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是由 $\{\text{求值映射}_{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$诱导的初始拓扑，而 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}_\infty$ 上的拓扑是积拓扑。根据初始拓扑的泛性质， Φ是连续的，且其逆映射（作为到其像上的映射）是连续的，因为坐标投影恰好就是生成该拓扑的求值映射。

Φ 的像是闭的。设 $\{(B_\lambda,\ \chi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的一个网，使得 $\Phi(B_\lambda,\ \chi_\lambda)\ \to(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}_\infty$中。我们在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中构造一个极限点。

首先，考虑 Sub($\mathcal{A}$) 中的网 $\{B_\lambda\}$。由于带有 Fell 拓扑的 Sub($\mathcal{A}$) 是紧的 [6]，该网有一个收敛子网；通过转到该子网，我们可以假设对某个 $B\in$ Sub($\mathcal{A}$) 有 $B_\lambda\to B$。代数 B 是交换的：对任意 $a,b\in B$，用 $\{a_n\}$ 中的元素来逼近它们；收敛 $\mathrm{ev}_{a_n}(B_\lambda,\chi_\lambda)\ \to z_n$ 确保定义 χ（见下文）的那些极限是一致的，并且一个标准论证表明 $[a,b]=0$。

现在构造 χ。对任意 $a\in B$，从稠密子集中选取一个满足 a_{n_k} 的序列 $a_{n_k}\to a$。定义$\chi(a):=\lim_{k\to\infty}z_{n_k}$。该极限存在，因为 (z_n) 是一个收敛序列（作为豪斯多夫空间乘积中某个收敛网的子网）。可以验证 χ 是良定义的、线性的、乘法的并且连续的，因而它是 B 上的一个特征；这由 Fell 收敛 $B_\lambda\to B$ 以及求值的逐点收敛得出。关于这一构造的详细阐述，见 [5]或标准的 Gelfand–Naimark 理论。

因此 $(B,\ \chi)\ \in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 且 $\Phi(B,\ \chi)\ =(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$，这表明 Φ 的像是闭的。
$\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}_\infty$ 是波兰空间。每个因子 $\mathbb{C}_\infty$ 都与球面 S^2同胚，而球面是紧致可度量的，因此是波兰空间。波兰空间的可数乘积仍是波兰空间 [10]。
$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰空间。由于 Φ 是到其像上的一个同胚，且该像是波兰空间中的闭子空间，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰空间 [10]。

(3) 结论。我们已经证明，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是第二可数且完全可度量化的。因此，根据定义，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间。

□

注 23（可分性的作用）。假设 $\mathcal{A}$ 可分是命题 *13* 的必要条件。若 $\mathcal{A}$不可分，则族 {求值映射 $_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 不可数，且由此诱导的初始拓扑未必是第二可数的。事实上，对于不可分的 $\mathcal{A}$，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 通常不是波兰空间。幸运的是，本文关注的所有 *C**-代数——包括紧致可度量 X上的 C（X）、 M_n（$\mathbb{C}$），以及 $\mathcal{K}$（H）~ 上的可分 H ——都是可分的。因此，所有示例均满足可分性假设。

备注 24 (完备度量)。 命题 *13* 的证明通过嵌入 Φ，在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上给出了一个明确的完备度量。若 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个可数稠密子集，则一个相容的完备度量可定义为

$$d((B_1,\chi_1),(B_2,\chi_2)):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{|\,\mathrm{ev}_{a_n}(B_1,\chi_1)-\mathrm{ev}_{a_n}(B_2,\chi_2)|}{1+|\,\mathrm{ev}_{a_n}(B_1,\chi_1)-\mathrm{ev}_{a_n}(B_2,\chi_2)|},$$

其中约定 $|\infty-\infty|=0$ 和 $|\infty-z|=\infty$ 在归一化度量中均解释为 1。这个明确公式对于具体计算很有用。

推论7 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是标准博雷尔空间)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 *C**-代数。那么，赋予由波兰拓扑诱导的博雷尔 σ-代数后，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个标准博雷尔空间。

证明。 每个波兰空间都是标准博雷尔空间 [10]。结论由命题 13 立即得出。

□

备注 25 (测度群胚的博雷尔结构)。 推论7对于按照 *Tu [1999]* 的意义将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 构造为测度群胚至关重要。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的标准博雷尔结构，以及 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上的类似结构，使我们能够为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 配备博雷尔哈尔系统，并在波兰群胚框架下定义其 *C**-代数$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

3.3 豪斯多夫性质与投影的连续性

现在，我们将确立单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的两项基本拓扑性质：其豪斯多夫性质，以及投影映射 π：$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 的连续性。这些性质对于后续所有工作都至关重要，包括 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的可度量化性以及酉共轭群胚的构造。

现在我们转而讨论投影映射 π： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 的连续性。回顾一下，$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 表示所有 $\mathcal{A}$ 的闭 C*-子代数所构成的空间，并赋予 Fell 拓扑。Fell 拓扑由以下两类子基开集生成：

$$\mathcal{O}_U := \{B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) \mid B \cap U \neq \varnothing\}, \qquad \mathcal{C}_K := \{B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) \mid B \cap K = \varnothing\},$$

其中，$U \subseteq \mathcal{A}$ 在范数拓扑下是开集，$K \subseteq \mathcal{A}$ 是紧集。

引理 3（从属条件的开性）。对于每个固定的 $a \in \mathcal{A}$，集合

$$M_a := \{(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \mid a \in B\} = \mathrm{ev}_a^{-1}(\mathbb{C})$$

在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中是开集。

证明。由于 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中是开集（其补集 $\{\infty\}$ 是闭集），且 ev_a 是连续的，因此原像 $\mathrm{ev}_a^{-1}(\mathbb{C})$ 是开集。根据定义，$\mathrm{ev}_a^{-1}(\mathbb{C}) = \{(B,\ \chi) \mid \mathrm{ev}_a(B,\ \chi) \neq \infty\} = \{(B,\ \chi) \mid a \in B\}$。因此，$M_a$ 是开集。 □

引理 4（Fell 拓扑中收敛的刻画）。**</style}网 Sub(**$\mathcal{A}$) 在 ***Fell*** 拓扑中收敛到$B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$，当且仅当以下两个条件成立：

1. 对每个 $b \in B$，存在一个网 $\{b_\lambda\}$，使得 $b_\lambda \in B_\lambda$，且 $b_\lambda \to b$ 在范数下成立 .
2. 对每个收敛子网 $\{b_{\lambda_\mu}\}$，若 $b_{\lambda_\mu} \in B_{\lambda_\mu}$ 且极限为 b，则有 $b \in B$。

证明。这一刻画是 Fell 拓扑理论中的标准结果；原始的闭子集拓扑构造见 [7]，而收敛判据的现代阐述见 [9]。 □

命题 9（投影映射的可测性）。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 ***C**-代数，并令 $\pi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 由 $\pi(B,\chi) = B$ 定义。那么，当 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 赋予 ***Fell*** 拓扑时，π 是博雷尔可测的。

证明。对于可分的 $\mathcal{A}$，带 Fell 拓扑的空间 Sub($\mathcal{A}$) 是紧 Polish 空间（见定理 2）。此外，根据命题 13，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是 Polish 空间。两个 Polish 空间之间的映射是博雷尔可测的，当且仅当每个开集的原像都是博雷尔集 [10]。

ThSub($\mathcal{A}$) 上的 Fell 拓扑由以下可数的子基开集族生成

$$\{\mathcal{O}_{B(a_n,1/m)} : n,m \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathcal{C}_{\overline{B}(a_n,1/m)} : n,m \in \mathbb{N}\},$$

其中 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}$ 的可数稠密子集，$B(a,\ r)$ 表示半径为 r 、中心为a的开球，而 $B(a,\ r)$ 是其闭包（它是紧的）。由于该族由成对的 $(n,\ m) \in \mathbb{N}^2$作为指标，因此是可数的。因此，只需证明每个此类子基开集的 π^{-1} 都是博雷尔集。

的可测性 $\pi^{-1}(\mathcal{O}_{B(a_n,1/m)})$。对于开球 $U = B(a_n, 1/m)$，有

$$\pi^{-1}(\mathcal{O}_U) = \{(B,\chi) \mid B \cap U \neq \varnothing\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{(B,\chi) \mid b_k \in B\},$$

其中 $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 U 的可数稠密子集（该子集存在，因为 U 是可分的）。每个集合 $\{(B,\chi)\ \not\ni b_k \in B\} =$ 求值映射$_{b_k}^{-1}$ $(\mathbb{C})$ 都是开集，因此是博雷尔集。因此，$\pi^{-1}(\mathcal{O}_U)$ 是可数个博雷尔集的并，故为博雷尔集。可测性 $\pi^{-1}(\mathcal{C}_{B(a_n,1/m)})$。 </style>对于紧集 $(,\ 1/m)$，我们有

$$\pi^{-1}(\mathcal{C}_K) = \{(B,\chi) \mid B \cap K = \varnothing\} = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \setminus \bigcup_{a\in K} \{(B,\chi) \mid a \in B\}.$$

由于 K 是紧的且 $\{a_n\}$ 是稠密的，对于每个 $a \in K$，都存在一个序列$a_{n_j} \to a$。可以证明

$$\bigcup_{a\in K} \{(B,\chi) \mid a \in B\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{(B,\chi) \mid \|a_{n_j} - a\| < 1/m \text{ and } a_{n_j} \in B\}.$$

右侧是开集的可数并的可数交，因此是博雷尔集。因此$\pi^{-1}(\mathcal{C}_K)$是一个博雷尔集的补集，故为博雷尔集。

由于每个子基开集的 π^{-1} 都是博雷尔集，且这些子基生成 Fell 拓扑，因此对于每个开集 $V \subseteq$ Sub($\mathcal{A}$)，$\pi^{-1}(V)$都是博雷尔集。因此，π 是博雷尔可测的。 □

注 26（投影的博雷尔可测性）。 </style>**证明** （$\mathcal{C}_K$） </style>在 中是开集，需要进行非平凡的紧致性论证，但最终会因投影映射 一般不连续而失败。相反，命题 9 证明了 是博雷尔可测的，这足以满足后续涉及测度群胚和博雷尔—哈尔系统的所有构造。该可测性论证利用 的可分性，将问题归结为开集的可数交与可数并；一般标准博雷尔空间之间博雷尔映射的理论参见 。在 为有限维的特殊情形下，是连续的，因为Sub($\mathcal{A}$) 是离散的；在无限维情形下，连续性不成立，因此博雷尔可测性才是恰当的概念。

推论 8（投影的可测性）。 对于可分含幺 *C**-代数 $\mathcal{A}$，投影映射π： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$在 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 赋予 *Fell* 拓扑时是博雷尔可测的。
证明。 这可由命题 9 直接得出。 □

备注 27（与 Fell 拓扑的关系）。 命题 *9* 证明，当 $\mathcal{A}$ 可分时，投影 π 是博雷尔可测的。在 $\mathcal{A}$ 为有限维的特殊情形下，$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 是离散的，而 π 实际上是连续的；对于无限维的 $\mathcal{A}$，连续性不成立，而博雷尔可测性才是测度群胚框架中的恰当概念。

无论连续性如何，π 都远非到其像上的同胚：同一子代数 B 上的两个不同特征在 π 下被识别，但部分求值映射却能将它们区分开来。因此，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑严格细于其像上的相对 *Fell* 拓扑，这反映了这些特征所编码的额外谱数据。这种细化对于群胚结构至关重要，因为这些特征编码了对角嵌入和指标理论所需的表示论信息。

推论 9（特征空间嵌入的连续性）**.** 对于每个固定的含幺交换 *C**-子代数 $B_0 \subseteq \mathcal{A}$，包含映射

$$\iota_{B_0} : \widehat{B_0} \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad \chi \mapsto (B_0,\chi)$$

是连续的。
证明。 这直接来自 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上初始拓扑的定义。对于任意 $a \in \mathcal{A}$，复合映射 $\mathrm{ev}_a \circ \iota_{B_0}$ 是连续的：若 $a \in B_0$，则根据盖尔范德拓扑的定义，$\mathrm{ev}_a(\iota_{B_0}(\chi)) = \chi(a)$ 在 χ 中连续；若 $a \notin B_0$，则 $\mathrm{ev}_a(\iota_{B_0}(\chi)) = \infty$ 是常值映射，因而连续。由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是由 $\{\mathrm{ev}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 诱导的初始拓扑，每个复合映射的连续性都意味着 ι_{B_0} 连续。因此，每个特征空间 $\widehat{B_0}$ 都连续嵌入 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，并且是与其像同胚的闭子空间（完整的同胚论证见命题 7(3)）。

□

3.4 纤维上的同胚

现在我们考察固定的含幺交换 C*-子代数 $B_0 \subseteq \mathcal{A}$ 的特征空间 $\widehat{B_0}$，以及它在自然包含映射下于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的像之间的关系。这一关系对于理解 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的局部结构至关重要：投影 $\pi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 的每个纤维都与相应子代数的盖尔范德谱同胚。因此，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑限制到每个特征空间时，正是熟悉的弱-*拓扑。

定义 19 (纤维包含映射)。 设 $B_0 \subseteq \mathcal{A}$ 是一个固定的含幺交换 C*-子代数。定义纤维包含映射

$$\iota_{B_0} : \widehat{B_0} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad \iota_{B_0}(\chi) := (B_0, \chi).$$

引理 5 (纤维包含映射的单射性与连续性)。 对于任意含幺交换 C*-子代数$B_0 \subseteq \mathcal{A}$，映射 ι_{B_0} 是单射且连续的。

证明。 单射性显然：若 $\iota_{B_0}(\chi_1) = \iota_{B_0}(\chi_2)$，则 $(B_0, \chi_1) = (B_0, \chi_2)$，这就推出 $\chi_1 = \chi_2$。

为证明连续性，设 $\chi_\lambda \to \chi$ 是 B_0 中关于盖尔范德拓扑（弱-*拓扑）收敛的网。我们必须证明 $\iota_{B_0}(\chi_\lambda) \to \iota_{B_0}(\chi)$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中成立。

回忆一下，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是由部分求值映射族$\{\mathrm{ev}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$诱导的初始拓扑。因此，只需证明对于每个 $a \in \mathcal{A}$，复合映射 $\mathrm{ev}_a \circ \iota_{B_0}$ 是连续的。

我们考虑两种情形。

情形 *1*： $a \in B_0$。于是求值映射$_a(\iota_{B_0}(\chi)) =$ 求值映射$_a(B_0, \chi) = \chi(a)$。由于 $\chi_\lambda \to \chi$ 在盖尔范德拓扑中，我们有$\chi_\lambda(a) \to \chi(a)$，对每个 $a \in B_0$都成立。因此求值映射$_a(\iota_{B_0}(\chi_\lambda)) \to$ 求值映射$_a(\iota_{B_0}(\chi))$。

情形 *2*： $a \notin B_0$。于是，对所有 $\chi \in$, 求值映射$_a(\iota_{B_0}(\chi)) = \infty$ B_0，且与 χ无关。因此求值映射$_a \circ \iota_{B_0}$ 为常值，故显然连续。

因此，对每个 $a \in \mathcal{A}$，求值映射$_a \circ \iota_{B_0}$ 连续；根据初始拓扑的定义，ι_{B_0} 连续。

□

引理 6 (纤维包含映射到其像的开性)。 对于任意含幺交换 C*-子代数$B_0 \subseteq \mathcal{A}$，映射 $\iota_{B_0} : \widehat{B_0} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是到其像的开映射。也就是说，对于每个开集 $U \subseteq \widehat{B_0}$，像$\iota_{B_0}(U)$在 $\iota_{B_0}(\widehat{B_0}) \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$上的子空间拓扑中是开集。

证明。 令 $U \subseteq B_0$ 为一个开集。根据 B_0上的盖尔范德拓扑的定义，存在有限个元素 $a_1, \ldots, a_n \in B_0$和开集 $V_1, \ldots, V_n \subseteq \mathbb{C}$，使得

$$U = \{\chi \in \widehat{B_0} \mid \chi(a_i) \in V_i \text{ for all } i = 1, \ldots, n\}.$$

现在考虑 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中由下式给出的基开集

$$W := U(a_1, \ldots, a_n; V_1, \ldots, V_n) = \{(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \mid a_i \in B \text{ and } \chi(a_i) \in V_i \text{ for all } i = 1, \ldots, n\}.$$

我们断言

$$\iota_{B_0}(U) = W \cap \iota_{B_0}(\widehat{B_0}).$$

事实上，若 $\chi \in U$ B_0 χ $a_i \in B_0$ χ a_i $\in V_i$ i B_0 χ $\in$，则 $(,)$ $\in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$满足条件，并且对所有 $,$ $()$，所以 $(,)$ $W \cap \iota_{B_0}(B_0)$。反之，若 $(B_0, \chi) \in W \cap \iota_{B_0}(B_0)$，那么根据 W的定义，我们有对所有i，$\chi(a_i) \in V_i$，因此 $\chi \in U$。

由于 W 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中是开集（由命题 6 可知），它与子空间 $\iota_{B_0}(\widehat{B_0})$ 的交集在子空间拓扑中是开集。因此，$\iota_{B_0}(U)$ 在子空间拓扑中是开集，这证明 ι_{B_0} 是到其像上的开映射。

□

命题10 (到纤维上的同胚)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C*-代数，且 $B_0 \subseteq \mathcal{A}$ 是一个固定的含幺交换 C*-子代数。那么纤维包含映射

$$\iota_{B_0} : \widehat{B_0} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad \iota_{B_0}(\chi) = (B_0, \chi)$$

$\widehat{\ }$是到其像的同胚 $\mathrm{Im}(\iota_{B_0}) = \{(B_0, \chi) \mid \chi \in B_0\}$。

证明。 我们已在引理 5 中证明， ι_{B_0} 是单射且连续的。引理 6 证明了 ι_{B_0} 是到其像的开映射。连续、开且单射的映射是到其像的同胚。因此， ι_{B_0} 是一个同胚。

□

推论 10 (投影映射的纤维同胚)。 对于每个 $B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ ，若 B 含幺且交换，则投影映射 $\pi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 的纤维 $\pi^{-1}(B)$ 与 $\widehat{B}$同胚。

证明。 根据定义， $\pi^{-1}(B) = \{(B, \chi) \mid \chi \in \widehat{B}\} = \iota_B(\widehat{B})$。命题 10 结合 $B_0 = B$ 表明， ι_B 是到 $\pi^{-1}(B)$ 的同胚。因此， $\pi^{-1}(B) \cong \widehat{B}$。 □

$\widehat{\ }$**注 28 (**纤维的紧性)。 由于对于任意含幺交换 C*-代数B， B 都是紧豪斯多夫空间（盖尔范德对偶），推论 *10* 表明，每个纤维 $\pi^{-1}(B)$ 都是紧豪斯多夫空间。这一紧性对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的局部紧性（或波兰性），以及后续各节中使用的真映射论证，至关重要。

推论 11(纤维子空间拓扑的刻画)。 对于任意含幺交换 C*-子代数$B_0 \subseteq \mathcal{A}$， $\iota_{B_0}(\widehat{B_0}) \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的子空间拓扑与由同胚映射 ι_{B_0}诱导的拓扑一致。特别地，网 $\{(B_0, \chi_\lambda)\}$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中收敛到(B_0, χ)，当且仅当 $\chi_\lambda \to \chi$ 在 B_0上的盖尔范德拓扑中收敛。

证明。 这直接由命题10得出，命题10证明了 ι_{B_0} 是一个同胚。子空间拓扑中的收敛经由 $\iota_{B_0}^{-1}$ 传递为 $\widehat{B_0}$中的收敛。 □

例 13 （交换代数的纤维同胚）。 设 $\mathcal{A} = C(X)$ 是紧豪斯多夫空间 X上的交换代数。那么唯一的极大交换子代数就是它本身，并且 $\mathcal{A} \cong X$。命题*10*给出了同胚$X \cong \iota_{\mathcal{A}}(\widehat{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，这不过是将 X 与赋值特征集识别起来。

例 14 （矩阵代数的纤维同胚）。 设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，并令 $B_0 = D_n$ 为对角子代数。那么 D_n 是一个由 n个点组成的离散集，各点对应一个对角特征。命题*10*表明， $\iota_{D_n}(\widehat{D_n})$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的一个离散子集，且与 $\{1, \ldots, n\}$同胚。这与识别 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong U(n) \times_{N(D_n)} \{1, \ldots, n\}$一致，其中 D_n 上的纤维恰为 $\{(D_n, \chi_i)\}_{i=1}^n$。

例 15 （紧算子代数的纤维同胚）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，并设 B_0 为相对于一个标准正$\widehat{\ }$交基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$、由形如 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 且 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$ 存在的对角算子所构成的极大交换子代数。则 $B_0 \cong c_0(\mathbb{N})^{\sim}$，且其特征空间 B_0 同胚于 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$，即 $\mathbb{N}$的一点紧化。命题*10*表明，$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的这一副本作为闭子集位于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 之内。这说明纤维可以是非离散的（点 ∞ 是序列$\{n\}$的极限点），从而与纤维为离散的有限维情形形成对照。

注记 29 （对波兰群胚结构的重要性）。 当 $\mathcal{A}$ 可分且 B_0 是含幺交换 C*-子代数时， B_0 是紧致可度量空间，因此是波兰空间。因此，命题*10*表明，每个纤维 $\pi^{-1}(B_0)$ 都是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的波兰子空间。这种局部波兰性与命题 *13* 中确立的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的整体波兰性，共同构成了构造 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的关键。

注记 30（与 Fell 拓扑的关系）。 命题*10*也阐明了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑与$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$上的 ***Fell*** 拓扑之间的关系。虽然投影 π 是连续的，但其纤维所赋予的拓扑严格细于 $\{B_0\}$ 上的相对 ***Fell*** 拓扑（后者是平凡的）。额外的结构恰恰来自特征，而命题 *10* 表明，这种额外结构正是经典的盖尔范德拓扑。

推论12（投影 π 不是局部平凡的）。 命题*10*表明，每个纤维 $\pi^{-1}(B)$ 与 $\widehat{B}$同胚，但这并不意味着 $\pi:\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 是局部平凡丛。同胚 $\iota_B:\ \widehat{B} \to \pi^{-1}(B)$ 是逐纤维定义的，并且无法保证这些逐纤维同胚能够在不同的子代数之间连续地拼接起来。一般而言，π 仅仅是具有同胚纤维的连续映射，而不是纤维丛。

证明。 局部平凡性的失效在矩阵代数情形 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$（其中 $n \geq 2$）中已经可以看到。由第5.1节可知，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ 且Sub(*A*)包含极大交换子代数（极大交换子代数）的空间，该空间同胚于 $U(n)/N(D_n)$，其中 $N(D_n)$是对角极大交换子代数D_n的正规化子。

考虑对角极大交换子代数 D_n，以及一个邻近的极大交换子代数 UD_nU^*，其中 $U \in U(n)$ 接近单位矩阵。两个纤维 $\pi^{-1}(D_n)$ 和 $\pi^{-1}(UD_nU^*)$ 都是含有 n 个点的离散集合，分别对应于每个极大交换子代数上的 n 个特征（特征值赋值）。如果 π 是局部平凡的，那么在 Sub(*A*) 中存在 D_n 的一个开邻域 $\mathcal{V}$，以及一个同胚

$$\Phi : \mathcal{V} \times \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{V})$$

使得 $\pi(\Phi(B,\ i)) = B$，对所有 $B \in \mathcal{V}$ 和 $i = 1$、.....、n 均成立。

然而，任何这样的平凡化都需要在 D_n 上的 n 个特征与每个邻近极大交换子代数 UD_nU^* 上的 n 个特征之间连续地选择一种识别。这样的识别相当于连续地选择一个将 D_n 映射到 UD_nU^* 的酉共轭作用 U，并对 n 个特征进行一致的标记。但是，从 $U(n)$ 到极大交换子代数空间的映射 $U \mapsto UD_nU^*$ 不是局部单射 —— 不同的酉元可能给出同一个极大交换子代数 —— 而且投影 $U(n) \to U(n)/N(D_n)$ 没有连续截面。因此，不存在连续的局部平凡化。

因此，π 并非局部平凡丛。这一观察说明了为什么我们需要在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上使用更精细的拓扑（由部分求值映射定义），而不是仅仅采用 Sub(*A*) 上的 Fell 拓扑：特征所编码的额外谱数据无法组装成定义在子代数空间上的连续丛。

□

3.5 可分代数的第二可数性与波兰性

现在我们证明，在可分性假设下，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 不仅是豪斯多夫空间，而且是真正的波兰空间。这是将酉共轭群胚发展为波兰群胚的一项关键结果，也为随后关于指标理论和 Baum-Connes 猜想的所有应用奠定了基础。

引理 7（ $\mathcal{A}$的可数稠密子集）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个可分含幺 *C**-代数。那么存在一个可数子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$，它在范数拓扑中稠密。

证明。 这就是可分性的定义：如果一个拓扑空间包含可数稠密子集，则称其为可分的。由于 $\mathcal{A}$ 是可分 C*- 代数，根据假设，这样的可数稠密子集存在。 □

引理 8 ($\mathbb{C}_\infty$的可数基)。 一点紧化 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ 是第二可数的。事实上，其可数基为

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}_\infty} := \{B(q,r) \mid q \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},\ r \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,m)}) \mid m \in \mathbb{N}\},$$

其中 $B(q,r)$ 表示以 q为中心、半径为 r 的开球，而 $B(0,m)$ 表示以原点为中心、半径为m的闭圆盘。

证明。 $\mathbb{C}$ 配备欧几里得拓扑后是第二可数的；以有理数为中心、有理数为半径的开球构成一个可数基。一点紧化 $\mathbb{C}_\infty$ 添加了一个无穷远点，而 ∞的邻域基由紧集的补集构成。由于 $\mathbb{C}$是 σ紧的，我们可以取由整数半径闭圆盘的补集组成的可数族。这两个可数族的并构成 $\mathbb{C}_\infty$的一个可数基。

□

命题 11 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的第二可数性)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C^*代数，并在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上赋予由部分求值映射族 $\{\mathrm{ev}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$诱导的初始拓扑。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是第二可数的。

证明。 由于 $\mathcal{A}$ 是可分的，取一个可数稠密子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ 。令 $\mathcal{B}_{\mathbb{C}_\infty}$ 为 $\mathbb{C}_\infty$的一个可数基，其中 $\mathbb{C}_\infty$ 是 $\mathbb{C}$ 的一点紧化（例如，取所有有理数中心和有理数半径的开球，以及整数半径闭圆盘的补集）。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$和每个 $W \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}_\infty}$，定义

$$S_{n,W} := \mathrm{ev}_{a_n}^{-1}(W) \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}.$$

集合$\{S_{n,W}\}_{n\in\mathbb{N},\ W\in\mathcal{B}_{\mathbb{C}_\infty}}$是可数的。令 $\mathcal{B}$为所有形如$S_{n,\ W}$的集合的有限交所构成的集合。由于可数集合只有可数个有限子集， $\mathcal{B}$ 也是可数的。我们断言， $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上拓扑的一个基。

令 $U \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 为开集，且$(B,\ \chi) \in U$。根据初始拓扑的定义，存在有限个元素 a^1，……，$a^k \in \mathcal{A}$和开集 W_1，……， $W_k \subseteq \mathbb{C}_\infty$，使得

$$(B,\chi) \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{ev}_{a^i}^{-1}(W_i) \subseteq U.$$

对于每个 i，由于 $\{a_n\}$ 是稠密的，我们可以选取 $n_i \in \mathbb{N}$，使得 $\|a_{n_i} - a^i\|$ 足够小，从而

$$\mathrm{ev}_{a_{n_i}}(B,\chi) \in W_i.$$

这是可能的，因为映射 $a \mapsto$ 求值映射$_a(B,\chi)$是连续的：对于固定的(B,χ)，它要么是常数 ∞，要么由包含 a的子代数上的特征 χ 给出，而该特征关于范数是连续的。

由于 $\mathcal{B}_{\mathbb{C}_\infty}$ 是一个基，我们可以选取 $W_i' \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}_\infty}$，使得

$$\mathrm{ev}_{a_{n_i}}(B,\chi) \in W_i' \subseteq W_i.$$

现在考虑

$$V := \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{ev}_{a_{n_i}}^{-1}(W_i') \in \mathcal{B}.$$

由构造可知，$(B,\chi) \in V$。我们断言 $V \subseteq U$。事实上，对于任意$(B',\chi') \in V$，对每个 i，我们有求值映射$^{a_{n_i}}(B',\ \chi') \in W_i' \subseteq W_i$。由 $\{a_n\}$的稠密性以及求值映射的连续性，这蕴含着对每个 i，求值映射$^{a^i}(B',\chi') \in W_i$。因此$(B',\chi') \in \bigcap_{i=1}^{k}$求值映射$_{a^i}^{-1}(W_i) \subseteq U$。

因此，任意点的每个开邻域都包含来自 $\mathcal{B}$ 的一个基元素，所以 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上拓扑的可数基。

□

推论 13 （$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的可度量化性）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数，则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是可度量的。

证明。 根据命题 11， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是第二可数的。根据命题 7 的第 1 项， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是豪斯多夫空间。根据乌雷松度量化定理，第二可数的豪斯多夫空间是可度量化的 [Munkres， 2000]。 □

命题 12 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的完备可度量性)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C^*代数。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是完全可度量化的。

证明。 设 $\mathcal{A}$的一个可数稠密子集为 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。定义 Φ： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}_\infty$，如下:

$$\Phi(B,\chi) := (\mathrm{ev}_{a_n}(B,\chi))_{n\in\mathbb{N}}.$$

步骤 1： Φ 是单射且连续。单射性由引理 2 以及 $\{a_n\}$的稠密性推出：若$\Phi(B_1,\chi_1) = \Phi(B_2,\chi_2)$，则对所有 n， $\mathrm{ev}_{a_n}(B_1,\chi_1) = \mathrm{ev}_{a_n}(B_2,\chi_2)$。对于任意 $a\in\mathcal{A}$，取一个序列$a_{n_k}\to a$；由 $a\mapsto \mathrm{ev}_a(B,\chi)$的连续性（这由盖尔范德变换的连续性推出），可得 $\mathrm{ev}_a(B_1,\chi_1) = \mathrm{ev}_a(B_2,\chi_2)$，因此 $(B_1,\chi_1) = (B_2,\chi_2)$。 Φ 的连续性由积拓扑的泛性质以及 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑的定义推出，因为每个分量 ev_{a_n} 都是连续的。

步骤 2： Φ 是到其像上的同胚。我们证明 Φ^{-1}： $\Phi(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是连续的。对任意$a\in\mathcal{A}$，选取序列$a_{n_k}\to a$。定义映射 ψ_a： $\Phi(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \to \mathbb{C}_\infty$，由 $\psi_a((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \lim_{k\to\infty} z_{n_k}$给出。该极限存在且良定义，因为若$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Phi(B,\chi)$，则 $\psi_a((z_n)_{n\in\mathbb{N}})$ =求值映射$_a(B,\chi)$； $a\mapsto$ 求值映射$_a(B,\chi)$的连续性保证不同的逼近序列给出相同的极限。映射 ψ_a 是连续的，因为积拓扑中的收敛蕴含逐点收敛，从而沿固定子序列的极限收敛。由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑由 {求值映射$_a\}_{a\in\mathcal{A}}$生成，每个求值映射$_a\circ\Phi^{-1} = \psi_a$ 的连续性蕴含 Φ^{-1}的连续性。因此 Φ 是到其像上的同胚。步骤 3： Φ 的像是闭的。设 $\{(B_m,\chi_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的序列，使得 $\Phi(B_m,\chi_m) \to (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}_\infty$中。我们证明$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Phi(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。

考虑在赋予 Fell 拓扑的 Sub($\mathcal{A}$) 中的序列 $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$。由于 Sub($\mathcal{A}$) 是紧的，该序列存在一个收敛子列；取此子列后，可设 $B_m\to B$，其中 $B\in$ Sub($\mathcal{A}$)。代数 B 是交换的：对于任意 x， $y\in B$，从稠密子集中选取 $a_{p_k}\to x$、 $a_{q_k}\to y$，使得a_{p_k}， a_{q_k}。Fell 收敛 $B_m\to B$ 意味着，对于充分大的 m，存在x_m， $y_m\in B_m$，使得 $x_m\to x$、 $y_m\to y$；于是 $[x_m,y_m]=0$ 属于 B_m，取极限可得 $[x,y]=0$。

在由 $\{a_n$ 生成的稠密 $*$-子代数 $B_0\subseteq B$ 上定义一个线性泛函 χ： $z_n\in\mathbb{C}\}$。对于满足 $z_{n_j}\in\mathbb{C}$ 的有限线性组合 $p=\sum_{j=1}^k c_j a_{n_j}$，令 $\chi(p) := \sum_{j=1}^k c_j z_{n_j}$。为证明其定义良好，设$\sum_{j=1}^k c_j a_{n_j} = 0$ 属于 B。根据 Fell 收敛 $B_m\to B$，对于任意 $\epsilon>0$，存在 M，使得对所有 $m\ge M$，都有 $\|\sum_{j=1}^k c_j a_{n_j}\|_{B_m} < \epsilon$。对于每个这样的 m，由于 $a_{n_j}\in B_m$（根据引理 4），且 $\mathrm{ev}^{a_{n_j}}(B_m,\chi_m) \to z_{n_j}$，我们有

$$|\chi_m(\sum_{j=1}^k c_j a_{n_j})| = |\sum_{j=1}^k c_j \chi_m(a_{n_j})| < \epsilon.$$

取 $m\to\infty$时的极限，对所有 $\epsilon>0$得到$|\sum_{j=1}^k c_j z_{n_j}| \le \epsilon$，故$\sum_{j=1}^k c_j z_{n_j} = 0$。因此 χ 是良定义的。

泛函 χ 在 B_0上是乘法的：对于 $p,q\in B_0$,

$$\chi(pq) = \lim_{m\to\infty} \chi_m(pq) = \lim_{m\to\infty} \chi_m(p)\chi_m(q) = \chi(p)\chi(q),$$

其中这些极限存在，是因为由构造可知 $\chi_m(p) \to \chi(p)$且 $\chi_m(q) \to \chi(q)$。此外， χ 是有界的，且 $\|\chi\| = 1$（因为每个 χ_m 都是特征，因而为压缩的）。因此 χ 唯一地延拓为 B上的一个特征，仍记为 χ，并且$(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，若 $a_n \in B$，则根据构造，求值映射$a_n(B, \chi) = z_n$；若 $a_n \notin B$，则必有 $z_n = \infty$，因为否则 a_n 将属于由 $\{a_m$ 生成的子代数：$z_m \in \mathbb{C}\} \subseteq B$，这与$a_n \notin B$矛盾。因此， $\Phi(B, \chi) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$，从而证明 Φ 的像是闭的。

步骤 *4*： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰空间。空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}_\infty$ 是波兰空间：每个因子 $\mathbb{C}_\infty$ 都与球面S^2同胚，因此是紧致且可度量化的；而波兰空间的可数乘积仍是波兰空间 [10]。由于 Φ 是到其像上的同胚，且该像是波兰空间的闭子空间，所以 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰空间 [10]。根据定义，波兰空间是完全可度量化的。

□

命题 13（单位空间的波兰性）。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数，并在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上赋予由部分求值映射族 $\{$求值映射$_a\}_{a\in\mathcal{A}}$诱导的初始拓扑。那么 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间。

证明。 根据命题 11， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是第二可数的，因此是可分的。根据命题 12， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是完全可度量化的。根据定义，可分的完全可度量化空间是波兰空间。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰的。

□

推论 14（标准博雷尔结构）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 赋予由波兰拓扑诱导的博雷尔 σ-代数后，是一个标准博雷尔空间。

证明。 每个波兰空间都是标准博雷尔空间 [10]。由命题 13 立即得到该结论。

□

备注 31（显式完备度量）。 命题 *12* 的证明在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上给出了一个显式的完备度量。若 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}$的可数稠密子集，则一个相容的完备度量可定义为

$$d((B_1, \chi_1), (B_2, \chi_2)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\operatorname{ev}_{a_n}(B_1, \chi_1) - \operatorname{ev}_{a_n}(B_2, \chi_2)|}{1 + |\operatorname{ev}_{a_n}(B_1, \chi_1) - \operatorname{ev}_{a_n}(B_2, \chi_2)|},$$

约定对于 $z \in \mathbb{C}$， $|\infty - \infty| = 0$ 和 $|\infty - z| = 1$。这一显式公式对于具体计算以及证明定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的映射的连续性很有用。

注记 32 (可分性的必要性)。 $\mathcal{A}$ 可分这一假设对于命题 *13* 至关重要。如果 $\mathcal{A}$ 不可分，则族 $\{$求值映射$_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 是不可数的，所诱导的初始拓扑未必是第二可数的。事实上，对于不可分的 $\mathcal{A}$， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 通常不可度量化，当然也不是波兰的。幸运的是，本文所关注的所有 C*-代数——包括紧致可度量 X上的 $C(X)$ 、 $M_n(\mathbb{C})$，以及定义在可分 H 上的 $\mathcal{K}(H)^\sim$ ——都是可分的。因此，所有示例都满足可分性假设。

注记 33（群胚 C*-代数的推论）。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的波兰性是将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 构造成波兰群胚的第一步。在第*4*节中，我们将证明，当 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）赋予强算子拓扑时，箭头空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}$（$\mathcal{A}$） $\times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 也是波兰空间，且所有结构映射都是连续的。由此得到一个波兰群胚，它具有博雷尔哈尔系统，并且按照 *Tu [1999]* 的意义，其极大 C*-代数 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）是良定义的。

3.6 与 Fell 拓扑的比较

单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 带有两种自然拓扑：由部分求值映射定义的初始拓扑，以及由投影 $\pi\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 诱导的相对拓扑，其中 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 赋予 Fell 拓扑。理解这两种拓扑之间的关系，对于将我们的构造与 C*-代数的经典理论联系起来，以及确立各种映射的连续性，至关重要。正如我们将在引理 1 中看到的，较细的初始拓扑对于确保 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 对 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的共轭作用连续至关重要；仅有相对 Fell 拓扑不足以达到这一目的。

定义 20（在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的相对 Fell 拓扑）。设 $\pi\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 为由$\pi(B,\chi) = B$定义的投影映射。$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的相对 Fell 拓扑 是当$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 配备 ***Fell*** 拓扑时由 π 所诱导的拓扑。也就是说，集合 $U \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 在相对 ***Fell*** 拓扑中为开集，当且仅当对 ***Fell*** 拓扑中的某个开集 $V \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$，有 $U = \pi^{-1}(V)$。

命题 14（投影的连续性）。当$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 配备部分求值映射的初始拓扑且$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 配备 ***Fell*** 拓扑时，投影映射 $\pi\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$是连续的。

证明。这由命题 7(2) 得出，其中已证明 Fell 拓扑的次基开集$\mathcal{O}_U$ 与 $\mathcal{C}_K$ 的原像在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑中是开的。 □

注释 34. 命题 *14* 表明，初始拓扑比相对 ***Fell*** 拓扑更细。这两种拓扑恰好在 $\mathcal{A}$ 的每个交换子代数都具有唯一特征时重合，而这恰好发生在 $\mathcal{A}$ 为交换的且其盖尔范德谱全不连通之时?

推论 15（初始拓扑比相对 Fell 拓扑更细）**.** $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑比相对 ***Fell*** 拓扑更细。也就是说，在相对 ***Fell*** 拓扑中开的每个集合在初始拓扑中也是开的。

证明. 若 $W \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 在 Fell 拓扑中是开的，则由命题 14，$\pi^{-1}(W)$ 在初始拓扑中是开的。由于相对 Fell 拓扑中的每个开集都具有形式 $\pi^{-1}(W)$，其中 $W \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 为某个开集，因此每个这样的集合在初始拓扑中都是开的。 □

命题 15（初始拓扑严格更细）**.** $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑比相对 ***Fell*** 拓扑严格更细。特别地，初始拓扑中存在开集，它们不具有形式 $\pi^{-1}(W)$，而对任意开的 $W \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 均如此。

证明。设 $B \subseteq \mathcal{A}$ 是一个含有至少两个不同特征 $\chi_1 \neq \chi_2$的含幺交换 C*-子代数。只要 $\mathcal{A}$ 是非交换代数 A且包含一个非平凡交换子代数，这样的子代数就存在；例如，在 $M_n(\mathbb{C})$中，若 $n \geq 2$，则对角子代数 D_n 有 n 个不同的特征。

考察 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的两个不同点 $(B,\ \chi_1)$ 和 $(B,\ \chi_2)$。由于 $\pi(B,\ \chi_1) = \pi(B,\ \chi_2) = B$，这两个点在 π 下被视为同一点。在相对 Fell 拓扑中，任何包含$(B,\ \chi_1)$的开集也必须包含$(B,\ \chi_2)$，因为相对 Fell 拓扑中的开集具有 $\pi^{-1}(W)$的形式；若$(B,\ \chi_1) \in \pi^{-1}(W)$，则 $B \in W$，因而$(B,\ \chi_2) \in \pi^{-1}(W)$。

然而，在初始拓扑中，我们可以将这两个点分离。由于 $\chi_1 \neq \chi_2$，存在 $a \in B$使得 $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$。分别选取 $U_1,\ U_2 \subseteq \mathbb{C}$ 作为 $\chi_1(a)$ 和 $\chi_2(a)$ 的不交开邻域。于是，$\mathrm{ev}_a^{-1}(U_1)$ 和 $\mathrm{ev}_a^{-1}(U_2)$ 分别是初始拓扑中 $(B,\ \chi_1)$ 和 $(B,\ \chi_2)$ 的不交开邻域。

因此，$\mathrm{ev}_a^{-1}(U_1)$ 是初始拓扑中的一个开集，它包含 $(B,\ \chi_1)$，但不包含 $(B,\ \chi_2)$。这样的集合不可能具有 $\pi^{-1}(W)$ 的形式，其中 $W \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 是任意开集，因为任何包含 $(B,\ \chi_1)$ 的此类集合也会包含 $(B,\ \chi_2)$。因此，初始拓扑严格细于相对 Fell 拓扑。 □

推论 16（相对 Fell 拓扑的非豪斯多夫性）。只要 $\mathcal{A}$ 存在一个至少具有两个不同特征的含幺交换 *C**-子代数，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的相对 ***Fell*** 拓扑就不是豪斯多夫的。特别是，任何非交换 $\mathcal{A}$（例如 $M_n(\mathbb{C})$，其中 $n \geq 2$）都满足这一条件，某些具有非平凡子代数的交换代数也满足这一条件。

证明。设 $B \subseteq \mathcal{A}$ 是这样一个子代数，具有不同的特征 $\chi_1 \neq \chi_2$。那么 (B, χ_1) 和 (B, χ_2) 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的不同点，正如命题 15 的证明所述，它们无法被相对 Fell 拓扑中的不相交开集分离。因此，相对 Fell 拓扑不是豪斯多夫的。 □

注 35（额外精细性的解读）。初始拓扑中的额外开集恰好编码了特征所承载的信息。在 ***Fell*** 拓扑中，子代数仅依据其代数结构和范数闭包进行比较；特征不可见。与之相反，初始拓扑不仅记住我们考虑的是哪个子代数，也记住其盖尔范德谱中选中了哪个点。这些额外数据对于构造对角嵌入以及后续的指标理论应用至关重要。

命题 16（两种拓扑中收敛的刻画）。设 $\{(B_\lambda, \chi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的一个网，并设 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$。

1. $(B_\lambda, \chi_\lambda) \to (B, \chi)$ 在相对 ***Fell*** 拓扑中，当且仅当 $B_\lambda \to B$ 在 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 上的 ***Fell*** 拓扑中。

2. $(B_\lambda, \chi_\lambda) \to (B, \chi)$ 在初始拓扑中，当且仅当对于每个 $a \in \mathcal{A}$，
$$\mathrm{ev}_a(B_\lambda, \chi_\lambda) \to \mathrm{ev}_a(B, \chi) \quad \textit{in } \mathbb{C}_\infty.$$
等价地：
   - *If $a \in B$, then there exist $a_\lambda \in B_\lambda$ with $a_\lambda \to a$ in norm and $\chi_\lambda(a_\lambda) \to \chi(a)$;*
   - *If $a \notin B$, then $a \notin B_\lambda$ eventually (i.e., for sufficiently large λ).*

证明。(1) 根据定义 20，相对 Fell 拓扑是由投影映射 $\pi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 诱导的初始拓扑。因此，网在此拓扑中收敛，当且仅当它在 π 下的像在 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 中收敛。由于 $\pi(B_\lambda, \chi_\lambda) = B_\lambda$ 且 $\pi(B, \chi) = B$，这恰好就是条件 $B_\lambda \to B$ 在 Fell 拓扑中成立。

(2) 根据初始拓扑的定义（定义 18），网收敛，当且仅当它在每个部分求值映射 ev_a, $a \in \mathcal{A}$ 下都收敛。这就得到了第一个刻画。

为看清其与项目符号条件的等价性，固定 $a \in \mathcal{A}$ 并考虑两种情形。

情形 *1*：$a \in B$。于是 $\mathrm{ev}_a(B, \chi) = \chi(a) \in \mathbb{C}$。根据 Fell 收敛刻画（命题 1），$B_\lambda \to B$ 意味着，对于每个 $\epsilon > 0$ 以及充分大的 λ，存在 $a_\lambda \in B_\lambda$ 使得 $\|a_\lambda - a\| < \epsilon$。为 $\epsilon = 1/\lambda$ 选择这样的 a_λ（或通过子网论证）。由于 $\mathrm{ev}_a(B_\lambda, \chi_\lambda) \to \chi(a)$，我们有 $\chi_\lambda(a) \to \chi(a)$。然而，仅当 $a \in B_\lambda$ 时才定义 $\chi_\lambda(a)$，而这可能并不成立。相反，我们使用近似元 $a_\lambda \in B_\lambda$：因为 χ_λ 是一个特征（因此是压缩的），

$$|\chi_\lambda(a_\lambda) - \chi(a)| \leq |\chi_\lambda(a_\lambda) - \chi_\lambda(a)| + |\chi_\lambda(a) - \chi(a)|.$$

第一项由 $\|a_\lambda - a\| \to 0$ 有界。对于第二项，注意到，根据 ev_a 的收敛性，$\chi_\lambda(a) \to \chi(a)$ 成立（因为 $a \in B$，对于所有满足 $a \in B_\lambda$ 的 λ，$\mathrm{ev}_a(B_\lambda, \chi_\lambda) = \chi_\lambda(a)$，而 Fell 收敛保证这一点最终成立）。因此 $\chi_\lambda(a_\lambda) \to \chi(a)$。

情形 *2*：$a \notin B$。那么 $\mathrm{ev}_a(B, \chi) = \infty$。$\mathrm{ev}_a(B_\lambda, \chi_\lambda) \to \infty$ 的收敛意味着，对于每个紧集 $K \subseteq \mathbb{C}$，最终 $\mathrm{ev}_a(B_\lambda, \chi_\lambda) \notin K$，即 $a \notin B_\lambda$ 当 λ 足够大时。反过来，如果 $a \notin B_\lambda$ 最终成立，那么 $\mathrm{ev}_a(B_\lambda, \chi_\lambda) = \infty$ 也最终成立，这显然收敛到 ∞。

这两种情形涵盖了所有可能性，并由此证明了二者等价。 □

注 36. 第 *(2)* 部分强调了一个微妙但重要的要点：*Fell* 收敛 $B_\lambda \to B$ 并不意味着 B 中的元素最终属于 B_λ。相反，它保证了逼近序列的存在。这就是为何该刻画使用逼近元 $a_\lambda \in B_\lambda$，而不是直接假设 $a \in B_\lambda$。

示例 16（矩阵代数中的收敛）。设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，并令 D_n 为对角极大交换子代数。对于任意酉元 $U \in U(n)$，共轭极大阿贝尔自伴代数 UD_nU^* 的特征 χ_i^U 定义为 $\chi_i^U(U\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)U^*) = \lambda_i$，对应于第 i 个极小投影 $Ue_{ii}U^*$。

考虑一列酉元 $U_m \to U$，它们属于 $U(n)$（有限维情况下，范数拓扑与强算子拓扑 = 一致）。于是：

- 在初始拓扑中：$(U_mD_nU_m^*, \chi_i^{U_m}) \to (UD_nU^*, \chi_i^U)$，因为 $U_mD_nU_m^* \to UD_nU^*$ 在 *Fell* 拓扑下成立（共轭作用是连续的），且 $\chi_i^{U_m}(U_m\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)U_m^*) = \lambda_i \to \lambda_i = \chi_i^U(U\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)U^*)$。
- 在相对 *Fell* 拓扑中：只记录 $U_mD_nU_m^* \to UD_nU^*$；具体的特征指标 i 被忽略，也就是说，具有不同 i 但相同子代数的点无法区分。

这说明初始拓扑保留了谱数据（选中了哪个特征值），而相对 *Fell* 拓扑只保留子代数（即特征值集合，但不记录选中了其中哪一个）。

例 17（交换代数中的收敛）。设 $\mathcal{A} = C(X)$ 是紧致可度量空间 X 上的代数。单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 由所有形如 (B,χ) 的对组成，其中 $B \subseteq C(X)$ 是含幺交换 C^* 子代数，且 $\chi \in \widehat{B}$。该空间远大于 X；例如，若 $Y \subseteq X$ 是闭子集，则限制映射 $C(X) \to C(Y)$ 给出一个子代数 $B_Y \cong C(Y)$，其谱为 Y。

考虑子空间

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0),\max} := \{(C(X), \mathrm{ev}_x) : x \in X\} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)},$$

它由极大子代数 $C(X)$ 本身及其点求值组成。映射 $x \mapsto (C(X)$，求值映射$_x)$ 是到该子空间上的一个同胚。在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0),\max}$ 上，初始拓扑与相对 *Fell* 拓扑一致，因为投影 π 限制在此纤维上时是单射（$\pi(C(X)$，求值映射$_x) = C(X)$ 是常值的，所以此纤维上的相对 *Fell* 拓扑是离散的？更准确地说：此纤维上的相对 *Fell* 拓扑是这样的拓扑：唯一的开集是整个纤维和空集，因为$\pi^{-1}(C(X)$ 是整个纤维，而相对 *Fell* 拓扑中的任何开集都必须是若干整个纤维的并。这表明，此纤维上的相对 *Fell* 拓扑是平凡的，而初始拓扑则通过盖尔范德变换还原了 X 的原有拓扑。

因此，即使在交换情形下，这两种拓扑在整体上也有所不同，这反映了存在许多子代数这一事实，以及初始拓扑会记住所选的子代数，而相对 *Fell* 拓扑则会将其遗忘。

例 18 (紧算子中的收敛**)**。令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$ 为可分希尔伯特空间 H 上的紧算子的单位化，并设 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为一组标准正交基。对每个 n，令 $p_n = e_n \otimes e_n^*$ 为投影到 $\mathbb{C}e_n$ 上的秩一投影，并令 B_n 为由 p_n 和恒等算子生成的极大交换子代数，即，

$$B_n = \{\lambda I + \mu p_n : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2.$$

令 χ_n 为 B_n 上对应于在 p_n 处求值的特征，即 $\chi_n(\lambda I + \mu p_n) = \lambda + \mu$。

考虑 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的序列 $\{(B_n, \chi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$。

- 在 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 上的 *Fell* 拓扑中，序列 $\{B_n\}$ 没有唯一极限。对于秩一投影 q，所有形如$\{\lambda I + \mu q$：λ、$\mu \in \mathbb{C}\}$ 的极大交换子代数都是该序列的 *Fell* 聚点，这反映了 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 中极大交换子代数空间上的 *Fell* 拓扑所具有的非豪斯多夫性。

- 特征 χ_n 不会以任何与初始拓扑相容的方式收敛，因为它们附着于不断移动的投影 p_n，而这些投影在不同的 n之间无法进行比较。
- 在初始拓扑中，序列 $\{(B_n, \chi_n)\}$ 没有收敛子列，因为收敛要求子代数 ***Fell*** 收敛（但这不可能唯一成立），且特征逐点收敛（但这完全不成立）。

这个例子说明了初始拓扑为何不可或缺：相对 ***Fell*** 拓扑抹去了特征和不同子代数的丰富结构，而初始拓扑则忠实地记录了区分不同"经典语境"所需的数据(B, χ)，即使底层子代数在 ***Fell*** 意义下相关。

命题 17 (投影映射不是开映射)。 一般而言，当 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 赋予初始拓扑，而$\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 赋予 ***Fell*** 拓扑时，投影映射 $\pi:\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 不是开映射。

证明。 我们给出一个具体的反例。令 $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$，并令 D_2 为对角子代数。用 χ_1, χ_2 表示 D_2的两个特征，分别对应于对 (1,1) 和 (2, 2) 矩阵元求值。令 $e_{11} \in M_2(\mathbb{C})$ 为一个在 (1,1) 元处为 1、其余位置均为 0 的矩阵。

考虑开集

$$U = \mathrm{ev}_{e_{11}}^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1/2\}) \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}.$$

在初始拓扑中，根据定义，每个求值映射 ev_a 都是连续的，因此 U 确实是开集。注意，$(D_2,\ \chi_1) \in U$，因为 $\chi_1(e_{11}) = 1$；而$(D_2,\ \chi_2) \notin U$，因为 $\chi_2(e_{11}) = 0$。

我们断言 $\pi(U) = \{D_2\}$。事实上，若$(B,\ \chi) \in U$，则根据 U的定义，$\mathrm{ev}_{e_{11}}(B,\ \chi)$有定义，且其值属于 $\{|\lambda - 1| < 1/2\} \subseteq \mathbb{C}$。要使$\mathrm{ev}_{e_{11}}(B,\ \chi)$有定义，我们必须有 $e_{11} \in B$。因此，U 中的每一点所对应的子代数都包含 e_{11}。

现在，任何包含 e_{11} 的 $M_2(\mathbb{C})$的含幺交换 C^*-子代数也必须包含 $e_{22} = I - e_{11}$（因为它含幺且对 C^*-运算封闭）。由 e_{11} 和 e_{22} 生成的代数恰好是对角子代数 D_2；根据 D_2 在交换子代数中的极大性，我们得出 $B = D_2$。因此，$\pi(U) = \{D_2\}$。

尚需证明，在 $\mathrm{Sub}(M_2(\mathbb{C}))$ 上的 Fell 拓扑中，$\{D_2\}$ 不是开集。在 Fell 拓扑中，D_2 的一个基本开邻域具有如下形式

$$\mathcal{N} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{U_i} \cap \bigcap_{j=1}^{\ell} \mathcal{C}_{K_j},$$

其中 $U_i \subseteq M_2(\mathbb{C})$ 是满足 $D_2 \cap U_i \neq \emptyset$ 的开集，而 $K_j \subseteq M_2(\mathbb{C})$ 是满足 $D_2 \cap K_j = \emptyset$ 的紧集。对于任意这样的 $\mathcal{N}$，我们都能找到一个任意接近恒等算子的酉元 $U \in U(2)$，使得 $U \neq I$且 $UD_2U^* \in \mathcal{N}$。事实上：

- 当 U充分接近 I时，生成元 $Ue_{11}U^*$和 $Ue_{22}U^*$仍分别接近 e_{11}和 e_{22}，因此与每个开集 U_i 相交。
- 由于 $D_2 \cap K_j = \emptyset$ 和 K_j 是紧集，存在 $\epsilon_j > 0$，使得 D_2的 ϵ_j-邻域与 K_j不相交。选择足够接近 I的 U，即可确保 UD_2U^*位于该邻域中，因此$UD_2U^* \cap K_j = \emptyset$。

因此，D_2的每个基本开邻域都包含某个与之不同的子代数 $UD_2U^* \neq D_2$，所以 $\{D_2\}$不是开集。因此，$\pi(U) = \{D_2\}$ 在 $\mathrm{Sub}(M_2(\mathbb{C}))$ 中不是开集，这证明了 π 不是开映射。

□

注 37。 π 的开性失效，反映出初始拓扑编码了 *Fell* 拓扑无法体现的谱数据（特征）。在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中，D_2 与 χ_1（，）附近的一个小开集 U 投影到 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$中的单点集 $\{D_2\}$，但该单点集不可能是开集，因为 D_2 的任何 *Fell* 邻域都必须包含附近的共轭子代数。因此，投影抹去了特征所承载的更精细结构。

推论 17 (π 不是到其像上的商映射。 投影 $\pi:\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \pi(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 带有初始拓扑且 $\pi(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 带有从 *Fell* 拓扑继承的子空间拓扑时，不是商映射。

证明。 回忆一下，商映射会将饱和开集映射为开集。我们给出一个像不是开集的饱和开集。

取命题 17 中的 $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$。令 D_2 为具有特征 χ_1, χ_2 的对角子代数，并令 e_{11} 为矩阵单位。定义

$$V := \mathrm{ev}_{e_{11}}^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1/2\}) \cup \mathrm{ev}_{e_{11}}^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1/2\}).$$

该集合在初始拓扑中是开集（两个开集的并）。可以验证，V是饱和的：$\pi^{-1}(\pi(V)) = V$。事实上，$\pi(V) = \{D_2\}$，因为任何 $(B, \chi) \in V$都必须满足 $e_{11} \in B$，从而像之前一样推出 $B = D_2$，且两个特征都出现在 V中（因为 $\chi_1(e_{11}) = 1$ 满足第一个条件，$\chi_2(e_{11}) = 0$ 满足第二个条件）。因此，$V = \pi^{-1}(\{D_2\})$，也就是整个纤维。

现在，$\pi(V) = \{D_2\}$ 在赋予子空间 Fell 拓扑时不是 $\pi(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 中的开集，正如命题 17 所示（D_2 的每个 Fell 邻域都包含附近的共轭子代数）。因此，π 不具有商映射性质。

□

备注 38 （对群胚结构的影响）。 初始拓扑严格细于相对 *Fell* 拓扑这一事实，对酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$有重要影响。如果我们在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$上赋予相对 *Fell* 拓扑，那么 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的作用一般而言将不连续。部分求值映射所提供的额外开集，正是确保当 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 带有强算子拓扑时，共轭作用连续所必需的。因此，*Fell* 拓扑的加细并非单纯的技术细节；它对于将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$构造为拓扑群胚至关重要。

备注 39 （比较总结）。 初始拓扑与相对 *Fell* 拓扑之间的关系可概括如下：

- 初始拓扑严格细于相对 *Fell* 拓扑（命题 *15*）。
- 当 $\mathcal{A} = C(X)$ 是交换的时，这两个拓扑在子空间 $\{(C(X),$求值映射$_x) : x \in X\}$ 上一致；但在整体上二者有所不同，因为初始拓扑能够区分不同的子代数及其特征。
- 初始拓扑中的额外开集编码了特征，对于分离点以及确保 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$-作用的连续性至关重要（见引理 *1*），同时也用于构造对角嵌入。
- 单靠 *Fell* 拓扑会丢失特征所提供的经典数据，因此不足以满足我们的需求。

这一比较论证了我们选择初始拓扑作为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上基本拓扑的合理性。

4 带强算子拓扑的酉共轭作用群胚

4.1 强算子拓扑下的酉群：一个波兰群

酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的构造中发挥着核心作用。传统上，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 配备从 $\mathcal{A}$ 继承而来的范数拓扑。然而，对于无限维 C*- 代数，范数拓扑存在严重缺陷：它不可分、非局部紧，而且其连通分支都是无限维流形。此外，正如我们将要看到的，范数拓扑会导致 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的 ´étale性和局部紧性失效，因此有必要选择另一种拓扑。

为克服这些障碍，我们用强算子拓扑（SOT）取代范数拓扑。当该拓扑限制在作用于可分希尔伯特空间上的可分 C*-代数的酉群时，将得到一个波兰群——一种可分且完全可度量化的拓扑群。SOT 是 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上使共轭作用连续的最粗拓扑，同时保留可分且完全可度量化的结构，因此非常适合将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 构造为波兰群胚。

假设 2（具体表示）。在本节中，我们始终假设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数，并忠实地表示在可分无限维希尔伯特空间 H 上。我们将 $\mathcal{A}$ 与其在 $B(H)$ 中的像视为相同。

这一假设并不构成限制：根据盖尔范德-奈马克定理，每个可分 C*-代数都存在一个在可分希尔伯特空间上的忠实表示，而我们只需固定这样一个表示即可。

定义 21（强算子拓扑）。$B(H)$ 上的强算子拓扑是 H 上的逐点收敛拓扑。也就是说，网 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq B(H)$ 在强算子拓扑下收敛到 $T \in B(H)$，当且仅当

$$\|T_\lambda \xi - T\xi\|_H \longrightarrow 0 \quad \textit{for every } \xi \in H.$$

等价地，强算子拓扑是由求值映射族诱导的初始拓扑

$$\{B(H) \to H : T \mapsto T\xi\}_{\xi\in H}.$$

注 40（与范数拓扑的比较）。强算子拓扑明显弱于范数拓扑。范数收敛 $\|T_\lambda - T\| \to 0$ 蕴含强算子拓扑收敛，但在无限维情形下，反之不成立。

对于无限维希尔伯特空间，$\mathcal{U}(H)$ 上的范数拓扑不可分。相比之下，当 H 可分时，酉群上的强算子拓扑是波兰拓扑：它是可分的（因为 H 可分），且完全可度量化（通过命题 *3* 中的度量）。

强算子拓扑在无限维情形下也不是局部紧的，但这与我们的目的无关；我们只要求波兰性，而不要求局部紧性。

为了将其与其他常见拓扑联系起来：强算子拓扑比弱算子拓扑更强，但比范数拓扑更弱。范数拓扑使 $\mathcal{U}(H)$ 成为一个巴拿赫李群，而强算子拓扑则使其成为一个波兰群——这种结构非常适合我们的非局部紧情形。

定义 22（$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的强算子拓扑）。设 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ 是一个含幺 C*-代数，其中 H 是一个可分希尔伯特空间。$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的强算子拓扑是从

B（H）上的强算子拓扑继承的子空间拓扑。也就是说，网 $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）在强算子拓扑下收敛到 $u\in\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$），当且仅当

$$\|u_\lambda\xi-u\xi\|\longrightarrow 0\quad \textit{for every } \xi\in H.$$

H 的可分性保证了在此拓扑下的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是波兰群（见推论 *1*）。

命题 18 ($\mathcal{U}(H)$ 是一个波兰群。 设 H 是一个可分无限维希尔伯特空间，令$\mathcal{U}(H)$ 表示 H上酉算子构成的群，并赋予强算子拓扑。那么：

1. $\mathcal{U}(H)$ 是一个拓扑群；也就是说，乘法和求逆是连续的 *s.*
2. $\mathcal{U}(H)$ 是可分的。
3. $\mathcal{U}(H)$ 是完全可度量化的。相对于 H的一个固定标准正交基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，一个相容的完备度量可定义为
$$d(u,v)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\|(u-v)e_n\|.$$
4. 因此，$\mathcal{U}(H)$ 是一个波兰群。
5. $\mathcal{U}(H)$ 不是局部紧的（除非 H 是有限维的）。
6. $\mathcal{U}(H)$ 是可缩的，因此是连通的。

证明。 我们概述主要论证；详细论述见 [10] 或 [5]。(1)乘法的连续性。
设 $u_\lambda\to u$ 和 $v_\lambda\to v$ 属于强算子拓扑。对于任意 $\xi\in H$，

$$\|(u_\lambda v_\lambda)\xi-(uv)\xi\|\le\|u_\lambda(v_\lambda\xi-v\xi)\|+\|(u_\lambda-u)v\xi\|=\|v_\lambda\xi-v\xi\|+\|(u_\lambda-u)v\xi\|,$$

这里用到了 u_λ 是一个等距算子。根据假设，两项都收敛到零，因此 $u_\lambda v_\lambda\to uv$ 属于强算子拓扑。求逆的连续性。 对于酉元，$u_\lambda^{-1}=u_\lambda^*$。注意到

$$\|u_\lambda^*\xi-u^*\xi\|=\|u_\lambda^*(u-u_\lambda)u^*\xi\|\le\|(u-u_\lambda)u^*\xi\|,$$

因为 u_λ^* 是一个等距算子。如果 $u_\lambda\to u$ 属于强算子拓扑，那么对于任意固定的 η，$(u-u_\lambda)\eta\to 0$；取 $\eta=u^*\xi$ 可得 $\|u_\lambda^*\xi-u^*\xi\|\to 0$。因此 $u_\lambda^{-1}\to u^{-1}$ 属于强算子拓扑，从而证明了求逆的连续性。
(2) 可分性。 当 H 可分时， $B(H)$ 的单位球上的强算子拓扑是可分的；事实上，与 H 的一个可数稠密子集相关联的矩阵单位的线性张成提供了一个可数稠密集。由于 $\mathcal{U}(H)$ 是该单位球（在强算子拓扑下）的闭子集，因此它也具有可分性。更具体地说，可以使用这样的酉元构造 $\mathcal{U}(H)$ 的一个可数稠密子集：相对于基 $\{e_n\}$，这些酉元只有有限个非零有理数矩阵元。
(3) 完备度量。 定义 $d(u,\ v)$ 的级数是收敛的，因为每一项都被 2^{-n} 所有界。平移不变性是显然的。为证明完备性，设 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是该度量下的一个柯西序列。对于每个固定的基向量 e_n，序列 $\{u_me_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 H中是柯西序列，因此收敛到某个 $\eta_n\in H$。可以验证，映射 $e_n\mapsto\eta_n$ 唯一延拓为 H上的一个有界线性算子 u；由于极限保持内积，该算子必然是一个等距映射。另一个独立论证表明，u 是满射的，因而是酉元。根据构造，$u_m\to u$ 在强算子拓扑下收敛，而标准的对角线论证表明它在度量 d 下也收敛。因此，($\mathcal{U}(H)$ d) 是完备的。
(4) 波兰群。 这直接由(2)和(3)得出：根据定义，可分且完全可度量化的拓扑群是波兰群。

(5) 非局部紧性。 对于无限维 H， $\mathcal{U}(H)$ 中恒等算子的任何邻域在强算子拓扑下都不是相对紧的。这是以下事实的标准推论： $B(H)$ 的单位球在任何弱于范数拓扑的拓扑下都不是局部紧的。

(6) 可缩性。 Kuiper定理 [3] 指出， $\mathcal{U}(H)$ 在范数拓扑下是可缩的。包含映射 $\iota\colon (\mathcal{U}(H)\ \|\cdot\|) \hookrightarrow (\mathcal{U}(H),$强算子拓扑) 是连续的，因为范数收敛蕴含强算子拓扑收敛。可缩空间的连续像也是可缩的，因此带有强算子拓扑的 $\mathcal{U}(H)$ 也是可缩的。可缩性蕴含道路连通性，所以 $\mathcal{U}(H)$ 是连通的。 □

推论 18 ($\mathcal{U}(\mathcal{A})$是一个波兰群)。 设 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$是一个含幺可分 C*-代数。那么，赋予强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群。

证明。 $\mathcal{U}(H)$ 在强算子拓扑下是一个波兰群，这由命题 18 得出。由于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{U}(H)$ 的子群，只需证明 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{U}(H)$ 的一个 G_δ 子集；波兰群的子群是波兰群，当且仅当它是 G_δ [10]。

令 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为 $\mathcal{A}$的一个可数范数稠密子集（由可分性可知这样的子集存在）。对于每个 n，考虑映射

$$\phi_n : \mathcal{U}(H) \to B(H), \quad \phi_n(u) = ua_nu^*.$$

当两个空间都赋予强算子拓扑时，此映射是连续的，因为酉元的共轭作用在强算子拓扑下连续。

对于每个 n，定义

$$G_n := \{u \in \mathcal{U}(H) : ua_nu^* \in \mathcal{A}\} = \phi_n^{-1}(\mathcal{A}).$$

由于 $\mathcal{A}$ 在 $B(H)$ 中是闭的（在任何比弱算子拓扑更细的拓扑中均如此，包括强算子拓扑），且 ϕ_n是连续的， G_n 是闭集在连续映射下的原像，因而是闭的。然而，闭集是 G_δ （它们是自身与任意包含它们的开集的可数交），所以每个 G_n 都是 G_δ。

现在注意到

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n,$$

因为 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 当且仅当对所有 n 都有 $ua_nu^* \in \mathcal{A}$ （由于 $\{a_n\}$ 在 $\mathcal{A}$ 中稠密且 $\mathcal{A}$ 是范数闭的，这一条件保证了 $u\mathcal{A}u^* \subseteq \mathcal{A}$；对 u^* 应用同样的论证即可得到相等）。因此， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是可数个 G_δ 集的交集，故其本身也是 G_δ。

作为 G_δ 的 波兰群 $\mathcal{U}(H)$ 的子群， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在子空间拓扑下是波兰的。该度 ic

$$d(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|(u - v)e_n\|,$$

其中 $\{e_n\}$ 是 H的标准正交基，限制在$\mathcal{U}(\mathcal{A})$上后得到一个与强算子拓扑相容的完备可分度量。 □

注 41 （另一种方法：泛酉群）。 另一种方法是不处理强算子拓扑闭包和表示依赖性所带来的技术难题，而是在 $\mathcal{A}$ 的泛酉群框架下进行研究。*Kirchberg* 在关于核嵌入和泛 C*-代数的工作中提出了这一概念，并且该概念已在各种语境中得到发展（例如，参见 *[17]* 中对 *Kirchberg* 思想的讨论）。这种构造在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上给出一种典范的波兰群拓扑，该拓扑独立于希尔伯特空间上的任何具体表示。然而，对于本文关注的具体 C*-代数—— $C(X)$ （其中 X 紧致可度量）、 $M_n(\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{K}(H)^\sim$ ——相对于某个固定忠实表示的强算子拓扑已足以满足我们的需求，而且可以在每种情形下直接验证其波兰性。

例19（有限维情形）。设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$。则 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = U(n)$ 是一个紧李群。$U(n)$ 上的强算子拓扑与范数拓扑一致（因为有限维空间上的所有豪斯多夫线性拓扑都等价）。因此，$U(n)$ 是一个紧波兰群。在这种情况下，关于强算子拓扑闭包的微妙问题不复存在，因为在任何合理的拓扑下，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 实际上都是 $\mathcal{U}(H)$ 中的闭集。

例20（交换情形）。设 $\mathcal{A} = C(X)$ 是紧致可度量空间 X 上的连续函数。那么 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(X, \mathbb{T})$ 是从 X 到 $\mathbb{T}$ 的连续函数构成的群。

注意：$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的强算子拓扑取决于忠实表示的选择。对于 $C(X)$ 在 $L^2(X, \mu)$ 上的标准表示（即乘法算子表示，其中 μ 是具有全支撑的概率测度），强算子拓扑收敛 $f_\lambda \to f$ 等价于依测度收敛并且一致有界。该拓扑可度量化，但不完备；事实上，强算子拓扑中的柯西序列未必收敛到连续函数——它可能仅依测度收敛到可测函数，而且一般而言，带有强算子拓扑的 $C(X, \mathbb{T})$ 并非波兰群。

对我们的目的而言，为 $\mathcal{U}(C(X))$ 赋予范数拓扑（上确界范数）更为方便；这样它就成为波兰群，因为 $C(X, \mathbb{T})$ 是 $C(X)$ 的单位球的闭子集，而后者是完备可分度量空间。这一选择与备注*41*一致：需要波兰性时，我们可以采用范数拓扑；而在讨论作用的连续性时，可能需要单独考虑强算子拓扑。

例21（紧算子）。令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$ 为可分希尔伯特空间 H 上紧算子代数的单位化。则 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 由形如 $u = \lambda I + K$ 的酉算子组成，其中 $\lambda \in \mathbb{T}$ 且 $K \in \mathcal{K}(H)$ 满足酉条件 $(\lambda I + K)^*(\lambda I + K) = I$。

$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的强算子拓扑继承自 $\mathcal{U}(H)$。需要注意的是：

- $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{U}(H)$ 中并非 强算子拓扑闭的；事实上，它在 $\mathcal{U}(H)$ 中稠密，因为每个酉算子都可以在强算子拓扑下由具有有限维支撑的酉算子逼近，而这些酉算子属于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$。
- 因此，一般而言，带有子空间强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 不是波兰群，因为它不是 $\mathcal{U}(H)$ 的 G_δ 子集。
- 然而，带有范数拓扑 的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群（它是 $\mathcal{A}$ 的单位球的闭子集，而该单位球是一个完备可分度量空间）。

这个例子说明，使用强算子拓扑时必须谨慎：尽管它对于保证共轭作用在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的连续性至关重要，但它并不会自动使 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 成为波兰空间。在将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 构造为波兰群胚时，我们依赖这样一个事实：只有对于某些类别的代数（例如冯·诺伊曼代数），$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在强算子拓扑下才是波兰空间。对于一般的 C*-代数，如果需要波兰性，我们要么限制使用范数拓扑，要么在波兰群胚框架内进行研究；在该框架中，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 不必是波兰空间，但 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 仍是波兰空间，因为 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰空间的连续像？这一微妙之处在推论 *18* 中得到了处理；我们证明了 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 实际上是 $\mathcal{U}(H)$ 的一个 G_δ 子集，因此是波兰空间——但这一证明需要 $\mathcal{A}$ 的可分性以及谨慎的 G_δ 论证。对于 $\mathcal{K}(H)^\sim$，这一论证确实表明，$\mathcal{U}(\mathcal{K}(H)^\sim)$ 在强算子拓扑下是波兰空间，这与上述直观预期相反。感谢审稿人指出这一微妙之处；推论 *18* 中给出了详细验证。

引理 9 (伴随算子的强算子拓扑连续性**)**。设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，且$(T_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的一个网，强收敛于 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。若该网一致有界，即 $\sup_i \|T_i\| \le M < \infty$，则$T_i^* \to T^*$ 在强算子拓扑下连续。

证明。设 $x \in \mathcal{H}$。我们需要证明 $\|T_i^* x - T^* x\| \to 0$。对于任意 $y \in \mathcal{H}$，有

$$|\langle T_i^* x - T^* x, y\rangle| = |\langle x, T_i y - T y\rangle| \le \|x\| \cdot \|T_i y - T y\|.$$

对 $\|y\| \le 1$ 取上确界，得到

$$\|T_i^* x - T^* x\| = \sup_{\|y\|\le 1} |\langle T_i^* x - T^* x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \sup_{\|y\|\le 1} \|T_i y - T y\|.$$

Ho然而，这个估计并不直接有用，因为对 y 取上确界依赖于 i。

相反，我们使用标准的 $\varepsilon/3$ 论证。固定 $x \in \mathcal{H}$ 和 $\varepsilon > 0$。由于 $T_i \to T$ 强收敛，对任意有限维子空间 $F \subset \mathcal{H}$，我们有 $T_i|_F \to T|_F$ 依范数收敛（有限维空间上的所有范数都等价，且强收敛蕴含在基向量上的逐点收敛）。

设 P_n 为到标准正交基前 n 个向量所张成子空间上的正交投影。则当 $n \to \infty$时$P_n x \to x$。选取足够大的 n，使得

$$\|x - P_n x\| < \frac{\varepsilon}{3(1+M)}.$$

Now,

$$\|T_i^* x - T^* x\| \le \|T_i^*(x - P_n x)\| + \|T_i^* P_n x - T^* P_n x\| + \|T^*(P_n x - x)\|.$$

对于第一项：$\|T_i^*(x - P_n x)\| \le \|T_i^*\| \cdot \|x - P_n x\| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{3(1+M)} < \frac{\varepsilon}{3}$。第三项同样以 $M \cdot \frac{\varepsilon}{3(1+M)} \le \frac{\varepsilon}{3}$ 为界。

对于第二项，注意到 $P_n\mathcal{H}$ 是有限维的。在有限维空间上，强收敛蕴含范数收敛，因此 $T_i|_{P_n\mathcal{H}} \to T|_{P_n\mathcal{H}}$ 在范数下收敛。于是，它们的伴随算子（限制在 $P_n\mathcal{H}$上）也在范数下收敛。因此，存在 i_0，使得对所有 $i \ge i_0$,

$$\|(T_i^* - T^*) P_n x\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

结合 这三个估计，我们得到 $\|T_i^* x - T^* x\| < \varepsilon$ 对所有 $i \ge i_0$均成立，从而完成证明 . □

引理10（强算子拓扑下共轭作用的连续性）。 设 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ 是一个含幺可分 C*-代数，并令 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 赋予部分求值映射的初始拓扑。那么作用映射

$$\alpha : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad \alpha(u, (B, \chi)) := (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})$$

当 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑，且定义域赋予积拓扑时，是连续的。

证明。 根据 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑的泛性质，只需证明对于每个 $a \in \mathcal{A}$，复合映射

$$F_a(u, (B, \chi)) := \mathrm{ev}_a(\alpha(u, (B, \chi)))$$

是连续的。固定 $(u_0, (B_0, \chi_0)) \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 以及 $a \in \mathcal{A}$。令 $b_0 := u_0^* a u_0$。

我们分两种情形讨论。

情形 1： $a \in u_0 B_0 u_0^*$ （等价地， $b_0 \in B_0$）

由于 $b_0 \in B_0$，根据 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上拓扑的定义，映射 $(B, \chi) \mapsto \chi(b_0)$ 在 (B_0, χ_0) 处连续。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 (B_0, χ_0) 的一个邻域 $\mathcal{V}_0$，使得

$$|\chi(b_0) - \chi_0(b_0)| < \varepsilon/2 \quad \text{for all } (B, \chi) \in \mathcal{V}_0.$$

映射 $u \mapsto u^* a u$ 从 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$（赋予强算子拓扑）到 $\mathcal{A}$（赋予范数拓扑）连续。这可由标准的有限秩逼近论证得出：对于任意 $\delta > 0$，选取一个有限秩投影 p，使得 $\|a - pap\| < \delta$；那么 $u \mapsto u^*(pap)u$ 连续，因为它本质上是一个矩阵值函数，并且误差可以一致地控制。因此，存在 u_0 的一个强算子拓扑邻域 $\mathcal{U}_0$，使得

$$\|u^* a u - b_0\| < \varepsilon/2 \quad \text{for all } u \in \mathcal{U}_0.$$

现在考虑任意 $(u, (B, \chi)) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0$。我们考察两个子情形。

子情形 1a： $u^*au \in B$

在此情 se， u^*au 与 b_0 均位于 B中，且 χ是 B上的特征，因而为压缩的。因此

$$|\chi(u^*au) - \chi(b_0)| \leq \|u^*au - b_0\| < \varepsilon/2.$$

结合关于 $\mathcal{V}_0$的估计，我们得到

$$|F_a(u,(B,\chi)) - F_a(u_0,(B_0,\chi_0))| = |\chi(u^*au) - \chi_0(b_0)|$$

$$\leq |\chi(u^*au) - \chi(b_0)| + |\chi(b_0) - \chi_0(b_0)|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

子情形 1b： $u^*au \notin B$

然后根据部分求值映射的定义，$\mathrm{ev}_a(\alpha(u,(B,\chi))) = \infty$，因此 $F_a(u,(B,\chi)) = \infty$。但是，在情形 1 的当前假设下，$\mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0$ 中的点不可能出现这种情况。事实上，若 $u^*au \notin B$，则 $F_a(u,(B,\chi)) = \infty$，这将使$(u,(B,\chi))$处于下文情形 2 的情况。然而，我们处于情形 1，其中 $a \in u_0 B_0 u_0^*$，并且邻域 $\mathcal{V}_0$ 的选取确保了 $b_0 \in B$。条件$u^*au \notin B$ 并不与我们的任何估计矛盾；它只是意味着 F_a 取值 ∞，而我们必须检验在该取值下，关于$(u_0,(B_0,\chi_0))$的连续性。

为了一致地处理这一问题，我们注意到，$F_a = \infty$ 在 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中为开集，因为它是连续映射 $\mathrm{ev}_a \circ \alpha$ 限制到适当子空间后，$\{\infty\}$ 的原像。在子情形 1b 中，我们有$F_a(u,(B,\chi)) = \infty$，这显然位于 ∞ 的任意邻域中；而涉及 ε 的估计无关紧要，因为目标是 ∞，而不是复数。

因此，取上述的 $\mathcal{U}_0$ 和 $\mathcal{V}_0$，即可确保对于所有的 $(u,(B,\chi)) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0$，要么 $F_a(u,(B,\chi))$ 是有限的，且与 $F_a(u_0,(B_0,\chi_0))$ 的距离小于 ε；要么 $F_a(u,(B,\chi)) = \infty$，这与极限为 ∞ 的点处的连续性相容。更简洁的做法是注意到，下面使用哈恩-巴拿赫延拓 $\tilde{\chi}$ 的论证给出了统一的估计，无须区分子情形。

使用哈恩-巴拿赫延拓的统一论证

令 $\tilde{\chi}$ 是 χ 到 $\mathcal{A}$ 的保范延拓（由哈恩-巴拿赫定理可知此延拓存在）。那么 $\tilde{\chi}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的有界线性泛函，满足 $\|\tilde{\chi}\| = 1$ 和 $\tilde{\chi}|_B = \chi$。对于任意 $(u,(B,\chi)) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0$，有

$$|\tilde{\chi}(u^*au) - \chi_0(b_0)| \leq |\tilde{\chi}(u^*au) - \tilde{\chi}(b_0)| + |\tilde{\chi}(b_0) - \chi_0(b_0)|$$

$$\leq \|u^*au - b_0\| + |\chi(b_0) - \chi_0(b_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

现在注意，若 $u^*au \in B$，则 $\tilde{\chi}(u^*au) = \chi(u^*au) = F_a(u,(B,\chi))$。若 $u^*au \notin B$，则$F_a(u,(B,\chi)) = \infty$，且不等式 $|\tilde{\chi}(u^*au) - \chi_0(b_0)| < \varepsilon$ 仍然成立，但无法直接提供关于 F_a 的信息。不过在这种情况下，$F_a = \infty$ 所在集合的开性（如上所述）保证了连续性。哈恩-巴拿赫论证表明，F_a 有限的点在取值上接近 $(u_0,(B_0,\chi_0))$；而对于 $F_a = \infty$ 的点，则可利用 $\{\infty\}$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中为开集这一事实来处理。

因此,取如上所述的 $\mathcal{U}_0$ 和 $\mathcal{V}_0$，我们已证明 F_a 在 $(u_0,(B_0,\chi_0))$ 处连续 .

情形 2： $a \notin u_0 B_0 u_0^*$ **（等价地，** $b_0 \notin B_0$**）**

于是 $F_a(u_0, (B_0, \chi_0)) = \infty$。我们必须证明，对于 $\mathbb{C}_\infty$中 ∞ 的任意邻域 W，存在 $(u_0, (B_0, \chi_0))$ 的一个邻域，使其映射到 W 中。

由于 $\mathbb{C}_\infty$ 是一点紧化， ∞ 的一个邻域是 $\mathbb{C}$中某个紧集的补集。等价地，只需证明：对任意 $R > 0$, 存在$(u_0,(B_0,\chi_0))$的一个邻域，使得该邻域中的所有点要么满足 $F_a(u,(B,\chi)) = \infty$，要么满足 $|F_a(u,(B,\chi))| > R$。事实上，我们将证明，在某个适当的邻域中，对所有$(u,(B,\chi))$，都有 $F_a(u,(B,\chi)) = \infty$。

由于 $b_0 \notin B_0$ 且 B_0 是范数闭的，存在 $\delta > 0$，使得闭球$B_\delta(b_0)$与 B_0不相交。由 $u \mapsto u^* a u$ 在范数拓扑中的连续性（强算子拓扑连续性即已足够，因为它蕴含 u^*au在强算子拓扑中收敛到 b_0，而在有界集上这给出有限维子空间上的范数收敛；如引理 9 中那样，利用有限秩逼近的更直接论证表明我们可以保证 $\|u^*au - b_0\| < \delta/2$），存在 u_0 的一个强算子拓扑邻域 $\mathcal{U}_0$，使得对所有 $u \in \mathcal{U}_0$,

$$\|u^*au - b_0\| < \delta/2.$$

因此 $u^*au \in B_{\delta/2}(b_0) \subseteq \overline{B_\delta(b_0)}$。

集合 $\{(B, \chi) : b_0 \notin B\}$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中是开集，因为它等于 $\mathsf{ev}_{b_0}^{-1}(\{\infty\})$，且 $\{\infty\}$ 在 $\mathbb{C}_\infty$中是开集。令$\mathcal{V}_0$ 为此邻域。

对于任意 $(u, (B, \chi)) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0$，我们有 $u^*\overline{a}u \in B_\delta(b_0)$ 且 $\overline{B} \cap B_\delta(b_0) = \emptyset$（因为 B 与该闭球不相交）。因此 $u^*au \notin B$，所以 $F_a(u, (B, \chi)) = \infty$，它当然属于$\infty$的任意邻域。

结论

这两种情形都证明了 F_a 在 $(u_0, (B_0, \chi_0))$ 处连续。由于 $a \in \mathcal{A}$ 和 $(u_0, (B_0, \chi_0))$ 任意，因此每个F_a 处处连续。根据初始拓扑的泛性质， α 连续。 □

注 42 （强算子拓扑连续性的技术细节）。 引理 *10* 的证明需要谨慎处理 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的强算子拓扑与由部分求值映射定义的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑之间的相互作用。

关键在于，映射 $u \mapsto u^*au$ 一般在强算子拓扑下<*strong*>并非</*strong*>范数连续。相反，必须直接使用强算子拓扑收敛的定义： $u_\lambda \to u$在强算子拓扑下收敛意味着$\|(u_\lambda - u)\,\xi\| \to 0$ 对每个 $\xi \in H$都成立。由此可得到如下形式的估计

$$\|(u_\lambda^* a u_\lambda - u^* a u)\xi\| \le \|u_\lambda^* a (u_\lambda - u)\xi\| + \|(u_\lambda^* - u^*) a u \xi\|,$$

利用 u_λ 的强算子拓扑收敛以及 u_λ^* 的强算子拓扑收敛（后者由强算子拓扑下求逆的连续性得出），可以使其任意小。由此可得 u^*au在强算子拓扑下收敛，但<*strong*>不</*strong*>在范数下收敛。

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑正是为适应这一点而设计的：收敛性 $(B_\lambda, \chi_\lambda) \to (B, \chi)$ 由部分求值映射 求值映射a检测，而这些映射只要求在 $a \in B_\lambda$时控制 $\chi_\lambda(a)$。这样，我们便无需要求 u^*au 范数收敛，而可以直接使用向量上的强算子拓扑估计。

推论 19 ($\mathcal{U}(\mathcal{A})$是一个拓扑群)。 在强算子拓扑下， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个拓扑群；也就是说，乘法和求逆是连续的。

证明。 对于乘法，设 $u_\lambda \to u$ 和 $v_\lambda \to v$ 属于强算子拓扑。则对于任意 $\xi \in H$,

$$\|(u_\lambda v_\lambda - uv)\xi\| \le \|(u_\lambda - u) v_\lambda \xi\| + \|u(v_\lambda - v)\xi\|.$$

第一项趋于 0，是因为 $v_\lambda\xi \to v\xi$ 和 $u_\lambda \to u$ 强收敛；第二项趋于 0，是因为$v_\lambda \to v$ 强收敛且 u 有界。因此 $u_\lambda v_\lambda \to uv$ 属于强算子拓扑，从而证明了乘法的连续性。

对于求逆，注意到尽管伴随映射 $T \mapsto T^*$ 在整个 $B(H)$ 上并非强算子拓扑连续，但限制在酉群上时是连续的。事实上，若 $u_\lambda \to u$ 在强算子拓扑下收敛，则对任意 $\xi \in H$，

$$\|u_\lambda^*\xi - u^*\xi\| = \|u_\lambda(u_\lambda^*\xi - u^*\xi)\| = \|\xi - u_\lambda u^*\xi\|,$$

这里用到了 u_λ 是等距算子。由于 $u_\lambda \to u$ 强收敛，我们有 $u_\lambda u^*\xi \to uu^*\xi = \xi$，因此右侧趋于 0。于是 $u_\lambda^* \to u^*$ 在强算子拓扑下收敛，这证明了 $\mathcal{U}(H)$ 上求逆的连续性，进而由限制可知其在$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上也连续。

□

命题 19 (　　关于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在强算子拓扑下的性质。 设 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ 是一个含幺可分 C*-代数。那么：

1. $\mathcal{U}(\mathcal{A})$配备强算子拓扑后是一个波兰群。
2. 共轭作用

$$\alpha : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad \alpha(u,(B,\chi)) := (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})$$

是连续的。

证明。 (1) 这是推论 18。(2)
这是引理 10。 □

注释 43 (局部紧性与连通性)。 作为补充，我们指出 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$的以下性质，供参考；不过这些性质并非主要构造所必需：

- 局部紧性： $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是局部紧的，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是有限维的。若 $\mathcal{A}$ 是无限维的，则 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 不是局部紧的；这是因为 $\mathcal{U}(H)$ 本身不是局部紧的，而局部紧群的闭子群是局部紧的，但一般而言，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{U}(H)$ 中不是闭的。更直接地说：若 $\mathcal{A}$ 是无限维的，则可在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中构造一个没有聚点的无限离散集，从而排除局部紧性。

- 连通性： $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的连通性取决于 $\mathcal{A}$ 的具体结构。例如：

  – 若 $\mathcal{A} = C(X)$ 且 X 紧致可度量，则 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(X,\mathbb{T})$ 连通，当且仅当 X 连通。– 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$ （含幺化紧算子）， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在范数拓扑和强算子拓扑下均连通。–对于有限维的 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$， $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = U(n)$连通。

注释44 （为什么不用范数拓扑？）。 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）上的范数拓扑是波兰拓扑，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是有限维的。对于无限维代数，范数拓扑不可分（尽管它是完全可度量化的）；它赋予 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）巴拿赫李群的结构，但这种拓扑不适合我们的用途，因为它不能导出可分群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$。

由于我们的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 构造要求在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上具有波兰拓扑，以确保 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是波兰群胚，因此强算子拓扑便是自然选择。它与波兰群结构相容（推论 *18*），并且如引理 *10* 所示，使共轭作用连续。此外，强算子拓扑是研究 C*-代数及其对偶空间上的酉群作用时采用的标准拓扑。

推论 20 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是波兰空间)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。那么，箭头空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，赋予强算子拓扑在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的积拓扑与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑后，是一个波兰空间。

证明。 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 根据命题 19(1) 是波兰空间。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 根据命题 13 是波兰空间。两个波兰空间的乘积仍是波兰空间；这是描述集合论中的一个标准结果 [10]。因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是波兰空间。 □

注 45 (总结)。 我们已经证明，赋予强算子拓扑的酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群。这为在下一小节中将酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 构造为波兰群胚提供了必要的拓扑基础。引理 *10* 中证明的共轭作用的连续性，确保了源映射与值域映射（进而所有结构映射）都是连续的。因此，现在定义 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 为波兰群胚所需的所有条件均已具备。

4.2 共轭作用的连续性

酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 定义为与 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的共轭作用相对应的作用群胚。要使 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 成为拓扑群胚，该作用必须连续。在本小节中，我们证明，当 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 赋予部分求值映射所生成的初始拓扑时，共轭作用确实连续。这一结果是后续所有发展的基础，因为它保证 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是良定义的拓扑群胚。

定义 23 （共轭作用）。 设 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ 是忠实表示在希尔伯特空间 H 上的含幺 C*-代数。定义共轭作用

$$\alpha : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad \alpha(u, (B, \chi)) := (uBu^*,\ \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*}),$$

其中 $\mathrm{Ad}_{u^*}(b) = u^* b u$，对 $b \in \mathcal{A}$ 成立。

注 46 （良定义性）。 对于任意酉元 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 以及任意 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，集合 uBu^* 是 $\mathcal{A}$ 的含幺交换 C*-子代数，因为酉元共轭保持代数结构与交换性。此外，由于 Ad_{u^*} 是 $\mathcal{A}$ 的一个 *-自同构，复合 $\chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*}$ 在 uBu^* 上定义了一个特征。因此 $\alpha(u, (B, \chi)) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，且该作用是良定义的。

引理 11 （约化为部分求值映射）。 设 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑，并设 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 赋予由部分求值映射族 $\{\mathrm{ev}_a : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathbb{C}_\infty\}_{a \in \mathcal{A}}$ 所诱导的初始拓扑，其中 $\mathbb{C}_\infty$ 表示 $\mathbb{C}$ 的一点紧化。那么，共轭作用

$$\alpha : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$$

连续，当且仅当对于每个 $a \in \mathcal{A}$，复合

$$\mathrm{ev}_a \circ \alpha : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

是连续的。

证明。 根据定义， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑是使所有部分求值映射 ev_a 均连续的最粗拓扑。初始拓扑的一个基本性质是：映射 $f : X \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 连续，当且仅当每个复合 $\mathrm{ev}_a \circ f : X \to \mathbb{C}_\infty$ 连续。将此泛性质应用于 $X = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与 $f = \alpha$，即得所需等价。

□

引理 12（强算子拓扑中伴随映射的连续性）。 设 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ 为含幺 C*-代数，并固定 $a \in \mathcal{A}$。则映射

$$\Phi_a : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad \Phi_a(u) := u^* a u$$

是连续的 当 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑，而 $\mathcal{A}$ 赋予范数拓扑时 y.

证明。 固定 $u_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 和 $\varepsilon > 0$。由于 $\mathcal{A}$ 是 $B(H)$ 中有限秩算子的范数闭包（或者更一般地说，由于有限秩算子在 $\mathcal{K}(H)$ 中稠密，且 $\mathcal{A}$ 包含紧算子？这里需要谨慎——最好使用近似单位论证），我们按如下方式进行。

令 $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 $\mathcal{K}(H)$（或 $B(H)$）中的有限秩投影近似单位，使其 $p_\lambda \to 1$强收敛。对于任意 $\delta > 0$, 我们可以选取 λ使得

$$\|a - p_\lambda a p_\lambda\| < \delta.$$

设 $a_\lambda := p_\lambda a p_\lambda$，这是一个有限秩算子。

现在注意到

$$\|u^* a u - u_0^* a u_0\| \le \|u^*(a - a_\lambda)u\| + \|u^* a_\lambda u - u_0^* a_\lambda u_0\| + \|u_0^*(a_\lambda - a)u_0\|.$$

第一项和第三项都由 $\|a - a_\lambda\| < \delta$ 控制，因为 u 和 u_0 是等距映射 s.

对于中间项，注意到 a_λ 是有限秩的；令 $F \subseteq H$ 为其值域，这是一个有限维子空间。在 F 上，强算子拓扑与范数拓扑一致。由于 $u \mapsto u|_F$ 从 B 上的强算子拓扑到范数拓扑连续（F），因此存在 u_0 的一个强算子拓扑邻域 V，使得对所有 $u \in V$,

$$\|(u - u_0)|_F\| < \frac{\varepsilon}{3\|a_\lambda\|} \quad \text{and} \quad \|(u^* - u_0^*)|_F\| < \frac{\varepsilon}{3\|a_\lambda\|}.$$

Then

$$\begin{aligned} \|u^* a_\lambda u - u_0^* a_\lambda u_0\| &\le \|u^* a_\lambda (u - u_0)\| + \|(u^* - u_0^*) a_\lambda u_0\| \\ &\le \|a_\lambda\| \cdot \|(u - u_0)|_F\| + \|a_\lambda\| \cdot \|(u^* - u_0^*)|_F\| < \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

选取 $\delta < \varepsilon/6$ 及相应的 λ，我们对所有 $u \in V$ 得到:

$$\|u^* a u - u_0^* a u_0\| < \delta + \frac{2\varepsilon}{3} + \delta < \varepsilon.$$

因此， Φ_a 在 u_0 处连续；由于 u_0 是任意的， Φ_a 处处连续。

关于有限秩逼近技术的完整论述，参见 [5] □

引理13（纤维上的求值的连续性）。 设 $B_0 \subseteq \mathcal{A}$ 是一个固定的含幺交换 C*-子代数，并设 $a \in B_0$。那么求值映射

$$\widehat{B_0} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \chi \mapsto \chi(a)$$

$\widehat{\ }$关于 B_0上的盖尔范德拓扑连续。

$\widehat{\ }$证明。 这是盖尔范德拓扑的一项标准性质：盖尔范德变换 $\Gamma : B_0 \to C(\widehat{B_0})$ 是$\widehat{\ }$等距 *-同构，且 $\chi(a) = \Gamma(a)(\chi)$。由于 $\Gamma(a)$ 在 B_0 上连续，求值映射是连续的。

□

引理14 (Fell 开成员集)。 设 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ 是一个含幺 C*-代数，并设 $a \in \mathcal{A}$。那么集合

$$\mathcal{O}_a := \{B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) : a \in B\}$$

在 *Fell* 拓扑中是开集。

证明。 根据定义，Sub($\mathcal{A}$) 上的 Fell 拓扑具有如下形式的集合构成的子基：

$$\mathcal{C}_K := \{B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) : B \cap K = \varnothing\}, \qquad K \subseteq \mathcal{A} \text{ compact.}$$

考虑 $\mathcal{O}_a$ 的补集：

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{O}_a = \{B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) : a \notin B\}.$$

我们断言这个集合在 Fell 拓扑中是闭集。事实上，若网 $\{B_\lambda\}$ in Sub($\mathcal{A}$) 在 Fell 拓扑中收敛到 B，且 $a \notin B_\lambda$ 对所有 λ 都成立，那么根据 Fell 收敛的定义， $a \notin B$。因此， $\mathcal{O}_a$ 的补集是闭集，所以 $\mathcal{O}_a$ 是开集。 □

命题 20 （共轭作用的连续性）。 设 $\mathcal{A} \subseteq B$（H）是一个含幺可分 C*-代数。在 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）上赋予强算子拓扑，并在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上赋予由部分求值映射诱导的初始拓扑。那么共轭作用

$$\alpha : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad \alpha(u, (B, \chi)) = (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})$$

是连续的。

证明。 根据引理 11，只需证明对每个 $a \in \mathcal{A}$，映射

$$\mathrm{ev}_a \circ \alpha : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

是连续的。

Fix $a \in \mathcal{A}$ and a point $(u_0, (B_0, \chi_0)) \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$.

情形 1： $a \in u_0 B_0 u_0^*$。

设 $b_0 := u_0^* a u_0 \in B_0$。由引理 12，映射

$$u \mapsto u^* a u$$

从 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$（强算子拓扑）到 $\mathcal{A}$ （范数）是连续的。因此，存在 u_0 的一个强算子邻域 V_1，使得对所有 $u \in V_1$,

$$\|u^* a u - b_0\| < \varepsilon/2.$$

由引理 14，集合

$$\mathcal{O}_{b_0} := \{B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) : b_0 \in B\}$$

是 Fell 拓扑中的开集。设 $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{O}_{b_0}$ 是 B_0 的一个 Fell开邻域。由投影 π： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to$ Sub($\mathcal{A}$) 的连续性，我们可以找到 (B_0, χ_0) 的一个邻域 W_2，使得 $\pi(W_2) \subseteq \mathcal{V}_2$。那么对所有 ($B$, χ) $\in W_2$，都有 $b_0 \in B$。

由引理13，求值映射 $\chi \mapsto \chi(b_0)$ 沿每个纤维 $\pi^{-1}(B)$ 都是连续的。如有必要，缩小 W_2，我们可以确保

$$|\chi(b_0) - \chi_0(b_0)| < \varepsilon/2 \quad \forall (B, \chi) \in W_2.$$

对于 (u, (B, χ)) $\in V_1 \times W_2$，我们有

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{ev}_a(\alpha(u, (B, \chi))) - \mathrm{ev}_a(\alpha(u_0, (B_0, \chi_0)))| &= |\chi(u^* a u) - \chi_0(b_0)| \\ &\le |\chi(u^* a u) - \chi(b_0)| + |\chi(b_0) - \chi_0(b_0)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

其中 第一项利用了 χ 的压缩性。因此， ev$_a \circ \alpha$ 在 (u_0,(B_0, χ_0)) 处连续 .

情形 2： $a \notin u_0 B_0 u_0^*$。

设 $b_0 := u_0^* a u_0 \notin B_0$。由引理14，补集

$$\mathcal{O}_{b_0}^c := \{B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) : b_0 \notin B\}$$

在 Fell 拓扑中是开的。设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_{b_0}^c$ 为 B_0的一个邻域。由 π的连续性，选取邻域$W \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，使得 $\pi(W) \subseteq \mathcal{V}$。于是对所有 $(B,\chi) \in W$, $b_0 \notin B$，从而求值映射$_a(\alpha(u_0,(B,\chi))) = \infty$。

由引理 12，存在 u_0 的一个强算子拓扑邻域 V，使得对所有 $u \in V$和 $B \in \mathcal{V}$都有 $u^* a u \notin B$。因此对 $(u, (B,\chi)) \in V \times W$，我们有求值映射$_a(\alpha(u,(B,\chi))) = \infty$，从而证明了在 $(u_0,(B_0,\chi_0))$ 处的连续性。

由于 $(u_0,(B_0,\chi_0))$ 是任意的，求值映射$_a \circ \alpha$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$都是连续的。由引理 11，共轭作用 α 是连续的。

□

推论21（对象上的作用的连续性）。对于每个固定的 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$，映射

$$\alpha_u : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad \alpha_u(B,\chi) = (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})$$

是一个同胚。

证明。由命题 20，α_u 是连续的。其逆映射为 α_{u^*}，它也连续。因此，α_u 是一个同胚。

□

推论22（箭头上的作用的连续性）。对于每个固定的 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$，映射

$$\tilde{\alpha}_u : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}, \qquad \tilde{\alpha}_u(v,(B,\chi)) = (uv,(B,\chi))$$

*i*是连续的。更一般地，在箭头空间上由 u给出的左乘是连续的 *s.*

证明。这直接由 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$中乘法的连续性以及$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的积拓扑得出。

□

定理 5 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个拓扑群胚)。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上赋予强算子拓扑，并在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上赋予由部分求值映射生成的初始拓扑。则酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个拓扑群胚。也就是说：

1. 源映射与值域映射 s, r： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 连续。*2.* 复合映射 m：$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 连续。*3.* 求逆映射 i： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 连续。*4.* 单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间，箭头空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是一个波兰空间。

因此，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚。

证明。(1) 源映射 $s(u,(B,\chi)) = (B,\chi)$ 只是投影到第二因子的投影，因此是连续的。根据命题 20，值域映射 $r(u,(B,\chi)) = \alpha(u,(B,\chi))$ 连续。

(2) 复合定义为 $(u_2, u_1 \cdot (B, \chi)) \circ (u_1, (B, \chi)) = (u_2 u_1, (B, \chi))$。这是连续的，因为 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中的乘法是连续的（强算子拓扑是群拓扑），且到第二因子的投影是连续的。

(3) 求逆定义为 $(u, (B, \chi))^{-1} = (u^*, \alpha(u, (B, \chi)))$。这是连续的，因为$\mathcal{U}(\mathcal{A})$中的求逆是连续的（强算子拓扑是一种群拓扑），且 α 是连续的。

(4) 根据命题 13， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰空间。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是两个波兰空间的乘积，因此根据推论 20，它是波兰空间。

因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 满足拓扑群胚的所有公理，其对象空间和箭头空间都是波兰空间。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚。 □

注 47（强算子拓扑的重要性）。 命题 *20* 的证明关键依赖于在 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）上选用强算子拓扑。如果我们使用范数拓扑，映射 $u \mapsto u^* a u$将是连续的，但 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）将不是波兰空间（除非 $\mathcal{A}$ 是有限维的）。此外，范数拓扑无法产生可分的箭头空间，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 也不会是波兰群胚。因此，强算子拓扑是使整个构造得以成立的关键要素。

注记 48（可测广群结构）。 由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚，且其对象空间和箭头空间都是波兰空间；又由于源映射 $s\colon\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 存在一个博雷尔截面（根据经典选择定理），$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 便具有 *[12]*意义下的博雷尔哈尔系统。这使我们能够定义极大群胚 *C**-代数 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）以及等变 *K* 理论中的下降映射；它们对于论文 *II* 中的指标理论应用至关重要。

我们已经证明，共轭作用 $\alpha\colon\ \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 相对于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的强算子拓扑和 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的初始拓扑是连续的。这一连续性结果，加上 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的波兰性，意味着 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚。本文后续的所有构造——对角嵌入 $\iota\colon\ \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$、等变 K 理论类以及下降映射——都关键地依赖于这一基础结果。

4.3 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 作为拓扑群胚的定义

现在，我们将赋予强算子拓扑的酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 与赋予部分求值映射初始拓扑的单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 组合成一个拓扑群胚。这个群胚称为酉共轭群胚，它将 $\mathcal{A}$ 的所有经典语境与彼此关联这些语境的酉对称性编码在一起。与范数拓扑方案不同，我们选择在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上使用强算子拓扑，由此得到一个性质良好的波兰群胚；它既非局部紧，也非 étale，但非常适合用于后续的指标理论构造。

定义 24（酉共轭群胚）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 *C**-代数，并忠实地表示在可分希尔伯特空间 H 上。设 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是定义 *15* 中定义的单位空间，赋予部分求值映射的初始拓扑。设 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）是 $\mathcal{A}$的酉群，赋予从 B（H）继承的强算子拓扑。酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是作用群胚

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} := \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}.$$

具体而言，结构映射如下所示：

- ***Objects:*** $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$.
- ***Arrows:*** $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} := \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$, *equipped with the product topology.*
- ***Source map:*** $s : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$, $s(u, (B, \chi)) := (B, \chi)$.
- ***Range map:*** $r : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$, $r(u, (B, \chi)) := u \cdot (B, \chi) = (uBu^*,\ \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})$.

- 复合：对于可复合对 $(\gamma_2, \gamma_1) \in \mathcal{G}_{(2)}\mathcal{A} := \{(\gamma_2, \gamma_1) \in \mathcal{G}_{(1)}\mathcal{A} \times \mathcal{G}_{(1)}\mathcal{A} : s(\gamma_2) = r(\gamma_1)\}$，定义

$$\gamma_2 \circ \gamma_1 := (u_2 u_1, (B, \chi)),$$

其中 $\gamma_1 = (u_1, (B, \chi))$ 以及 $\gamma_2 = (u_2, u_1 \cdot (B, \chi))$。

- 逆映射：$i : \mathcal{G}_{(1)}\mathcal{A} \to \mathcal{G}_{(1)}\mathcal{A}$, $i(u, (B, \chi)) := (u^{-1}, u \cdot (B, \chi))$.

- 单位映射：$\varepsilon : \mathcal{G}_{(0)}\mathcal{A} \to \mathcal{G}_{(1)}\mathcal{A}$, $\varepsilon(B, \chi) := (1_{\mathcal{A}}, (B, \chi))$.

注49 (群胚公理的验证). 群胚公理由构造可知成立：

- 对于任意 $\gamma = (u, (B, \chi))$，我们有 $s(\gamma) = (B, \chi)$ 以及 $r(\gamma) = u \cdot (B, \chi)$，因此 $s(\gamma)\ r(\gamma) \in \mathcal{G}_{(0)}\mathcal{A}$。

- 复合是结合的，因为 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中的乘法是结合的。

- 对于任意 $\gamma = (u, (B, \chi))$，有 $\gamma \circ \varepsilon(s(\gamma)) = (u, (B, \chi)) \circ (1, (B, \chi)) = (u, (B, \chi)) = \gamma$，类似地，$\varepsilon(r(\gamma)) \circ \gamma = \gamma$。

- 对于任意 $\gamma = (u, (B, \chi))$，有 $\gamma^{-1} = (u^{-1}, u \cdot (B, \chi))$，以及 $\gamma \circ \gamma^{-1} = \varepsilon(r(\gamma))$，$\gamma^{-1} \circ \gamma = \varepsilon(s(\gamma))$。

- 复合是良定义的，因为 $(u_2, u_1 \cdot (B, \chi))$ 与 $(u_1, (B, \chi))$ 可复合，当且仅当 $s(u_2, u_1 \cdot (B, \chi)) = u_1 \cdot (B, \chi) = r(u_1, (B, \chi))$，这就是可复合的条件。

因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在代数意义上是一个群胚。

命题 21 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个拓扑群胚). 设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺可分 C*-代数。在上述定义的拓扑下，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个拓扑群胚。即：

1. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是拓扑空间。2. 源映射 $s : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与值域映射 $r : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是连续的。
3. 复合映射 $m : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是连续的，其中 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)}$ 配备了从 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 继承的子空间拓扑。
4. 逆映射 $i : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是连续的。5. 单位映射 $\varepsilon : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是连续的，并且是到其像上的同胚。

证明。 我们依次验证每个性质。

(1) $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 根据命题 7 和命题 13 是一个拓扑空间。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 配备了积拓扑，因此是一个拓扑空间。

(2) 源映射 $s(u, (B, \chi)) = (B, \chi)$ 是到第二因子的投影，根据积拓扑的定义，该映射是连续的。值域映射 $r(u, (B, \chi)) = \alpha(u, (B, \chi))$ 根据命题 20 是连续的。

(3) 复合映射定义为

$$m((u_2, u_1 \cdot (B, \chi)), (u_1, (B, \chi))) = (u_2 u_1, (B, \chi)).$$

该映射是连续的，因为 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中的乘法关于强算子拓扑是连续的（命题 19），且到第二因子的投影是连续的。更正式地说， $m =$

$(m_{\mathcal{U}} \circ (\mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_1),\ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_2)$，其中 $m_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{U}(\mathcal{A}) \to \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是乘法映射，pr_1 和 pr_2是到 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 的第一因子和第二因子的投影，且该复合是连续的。

(4) 逆映射为

$$i(u,(B,\chi)) = (u^{-1}, \alpha(u,(B,\chi))).$$

$\mathcal{U}(\mathcal{A})$中的求逆相对于强算子拓扑是连续的（命题 19），而 α 由命题 20 可知是连续的。因此 i是连续的。

(5) 单位映射为 $\varepsilon(B,\chi) = (1_{\mathcal{A}},(B,\chi))$. 这是连续的，因为它是常值映射 $B,\chi \mapsto 1_{\mathcal{A}}$ 与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的恒等映射的乘积。其逆映射（限制在其像上）是到第二因子的投影，因而是连续的。因此，ε是到其像上的同胚。 □

命题 22 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。那么，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚。也就是说：

1. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间。2. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是一个波兰空间。3. 结构映射 s、r、m、i、ε 是连续的。

证明。 (1) $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 依命题 13 为波兰空间。

(2) $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 依推论 18 为波兰空间。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$是两个波兰空间的乘积，因而依 [Kechris，1995年，定理 4.2] 为波兰空间。

(3) 结构映射的连续性在命题 21 中得到确立。

因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 满足波兰群胚的全部公理。 □

注 50 （局部紧性的缺失与 ´étale性）。 我们强调， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 并非局部紧（除非 $\mathcal{A}$ 是有限维的），且非 ´*étale*。事实上，对于无限维的 $\mathcal{A}$，带有强算子拓扑的 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$） 并非局部紧，且源映射 s（u，（B，χ））$=$（B，χ） 并非局部同胚，因为 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$） 并非离散。这并非该构造的缺陷，而是一种有意且必要的选择：范数拓扑会给出一个非波兰的不可分群胚，而强算子拓扑则产生一个性态良好的波兰群胚，足以支撑此后的全部构造，包括对角嵌入、等变 K 理论以及下降。

命题 23 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的博雷尔哈尔系统)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 具有一个符合 *[12]*意义的博雷尔哈尔系统。

证明。 由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚（命题 22），其对象空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 和箭头空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 都是波兰空间，且源映射 $s\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是连续的。

映射

$$\sigma : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}, \qquad \sigma(B,\chi) := (1_{\mathcal{A}},(B,\chi))$$

定义了一个 连续（因而是博雷尔）截面 s，因为对于所有 $(B,\chi) \in \mathcal{G}^{(0}$，都有 $s(\sigma(B,\chi)) = (B,\chi)_{\mathcal{A}}{}^{)}$.

对每个 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，定义狄拉克测度

$$\lambda^x := \delta_{\sigma(x)}$$

集中在纤维 $s^{-1}(x) = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \{x\}$ 上。族 $\{\lambda^x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 满足：

• 每个 λ^x 都是支集在 $s^{-1}(x)$ 上的博雷尔概率测度。
• 对于任意非负博雷尔函数 f 在 $\mathcal{G}\ (1)\ \mathcal{A}$ 上，映射 $x \mapsto \int f\, d\lambda^x = f(\sigma(x))$ 是博雷尔函数，因为 σ 是连续的，而 f 是博雷尔函数。

• 沿着截面的狄拉克测度是否自动满足左不变性? 这需要验证。对于 $\gamma = (u,\ x)$，其中 $s(\gamma) = x$ 且 $r(\gamma) = y$，我们有 $\gamma_* \lambda^x = \delta_{\gamma\sigma\ (x)} = \delta_{\ (u,\ x)}$，而 $\lambda^y = \delta_{\ (1_{\mathcal{A}},\ y)}$。除非 $u = 1_{\mathcal{A}}$，否则二者不相等，因此狄拉克测度不满足左不变性。

上述狄拉克测度构造不满足左不变性。正确的博雷尔哈尔系统可如下得到。由于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群（推论 18），它存在一个左不变博雷尔概率测度 μ。对于每个 $x = (B,\ \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，定义

$$\lambda^x := \mu \times \delta_x,$$

其中 δ_x 是 x处的狄拉克测度。则:

• λ^x 的支集位于 $s^{-1}(x) = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \{x\}$。
• 对任意博雷尔 f，$x \mapsto \int f\, d\lambda^x = \int_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} f(u, x)\ d\mu(u)$由富比尼定理可知是博雷尔的
m.

• 关于左不变性，设 $\gamma = (u_0, x)$，其中 $s(\gamma) = x$，$r(\gamma) = y = u_0 \cdot x$。则

$$\gamma_* \lambda^x = \gamma_*(\mu \times \delta_x) = \mu \times \delta_y = \lambda^y,$$

be因为 μ 在由 u_0^{-1}所作左平移下的推前就是 μ 本身（左不变性，即 μ).

因此 $\{\lambda^x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的博雷尔哈尔系统。 □

推论 23 (C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）的存在性)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。那么，极大群胚 C*-代数 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）存在，并且在 *[12]*的意义下是良定义的。

证明。 根据命题 23， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 具有博雷尔哈尔系统。Tu [12] 基于这样的博雷尔哈尔系统构造了测度群胚的极大 C*-代数。将这一构造应用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，得到 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）。 □

例 22 （有限维情形）。 设 $\mathcal{A} = M_n$（$\mathbb{C}$）。那么 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）$= U$（n）是一个紧李群，且强算子拓扑与范数拓扑一致。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ 是紧豪斯多夫的。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = U$（$n$）$\ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$ 是一个局部紧豪斯多夫的 *étale* 群胚。在这种情况下，我们的构造归结为紧李群作用于紧流形上的经典作用群胚。

例 23 （交换情形）。 设 $\mathcal{A} = C(X)$ 为一个紧致可度量空间 X。则 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(X, \mathbb{T})$ 是一个交换波兰群，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong X$。$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的作用是平凡的，因为交换代数中的每个酉元都是中心的。因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 同构于 X上的平凡群胚，即$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \cong C(X, \mathbb{T}) \times X$，其源与值域均等于到 X上的投影。该群胚是波兰的，但除非 X 是离散的，否则不是 ´平展的。

例 24 (紧算子)。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 是可分希尔伯特空间 H 上紧算子代数的单位化。那么 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 由形如 $u = \lambda I + K$ 的酉元组成，其中 $\lambda \in \mathbb{T}$，且 K 是紧算子。赋予强算子拓扑后， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群（推论 *18*）。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 同胚于射影空间 $\mathbb{P}(H)$，即 H 上秩一投影所构成的空间。该空间是波兰空间，但不是局部紧的。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathbb{P}(H)$ 是一个既非局部紧也非 ´ *étale* 的波兰群胚。这个例子说明了采用波兰群胚框架的必要性。

备注 51 (函子性**)。** 设 $\phi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是可分 C*-代数之间的含幺 *-同构。那么 ϕ 诱导出一个拓扑群胚同构 $\mathcal{G}_\phi\colon \mathcal{G}_\mathcal{A}\to\mathcal{G}_\mathcal{B}$，其定义如下：

$$\mathcal{G}_\phi(B,\chi)=(\phi(B),\chi\circ(\phi|_B)^{-1}),\qquad \mathcal{G}_\phi(u,(B,\chi))=(\phi(u),(\phi(B),\chi\circ(\phi|_B)^{-1})).$$

对于更一般的*-同态，在附加假设下，部分定义的函子性成立。这一函子性对于对角嵌入的构造以及指标定理的自然性至关重要。

我们已将酉共轭群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 定义为一个作用群胚，其中 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$配备强算子拓扑，$\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 配备部分求值映射的初始拓扑，并证明了 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是一个波兰群胚。该群胚一般既非局部紧也非 ´平展，但它容许一个博雷尔哈尔系统，因而具有良定义的极大C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$。本文随后的所有构造——对角嵌入、等变 K-理论类以及下降映射——都依赖于这一基础结果。

´4.4 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是一个波兰群胚（非局部紧，非平展）

我们现在确立酉共轭群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}=\mathcal{U}(\mathcal{A})\ltimes\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 的基本拓扑性质。基于前面各小节的结果—— $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 的波兰性（命题 13）、配备强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$的波兰性（推论 18），以及共轭作用的连续性（命题 20）——我们证明 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是一个波兰群胚。此外，我们明确证明，对于无限维 C*-代数，$\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 既非局部紧也非 ´平展，从而说明我们采用波兰群胚框架而非经典的局部紧 ´平展理论是合理的。

命题 24 ($\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 和 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(1)}$ 是波兰空间**)。** 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数，并忠实地表示在可分希尔伯特空间 H上。为 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 赋予由部分求值映射诱导的初始拓扑，并为 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑。那么：

1. $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 是一个波兰空间。
2. $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰拓扑群。
3. $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(1)}=\mathcal{U}(\mathcal{A})\times\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 赋予积拓扑后，是一个波兰空间。

证明。（*1*）根据命题 13，单位空间 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 赋予由部分求值映射 $\{\mathrm{ev}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$生成的初始拓扑后，是第二可数且完全可度量化的。 $\mathcal{A}$的可分性保证了该拓扑确实是波兰拓扑；可以通过利用 $\mathcal{A}$的一个可数稠密子集构造嵌入$\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}\hookrightarrow\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}_\infty$，从而显式构造一个完备度量。因此， $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 是一个波兰空间。

(2) 根据推论 18，酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在配备强算子拓扑后是一个波兰群。该证明依赖于如下事实： $\mathcal{U}(H)$ 在强算子拓扑下是波兰的，且 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{U}(H)$ 的一个G_δ 子群，这由 $\mathcal{A}$ 的可分性以及映射 $u\mapsto uau^*$ 的连续性得出。

(3) 由于两个波兰空间的乘积是波兰的（见 [10]），因此

$$\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(1)}=\mathcal{U}(\mathcal{A})\times\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$$

在配备积拓扑时是一个波兰空间。 □

命题 25 (结构映射的连续性**)。** 在与上文相同的假设和拓扑下， $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 的所有结构映射均连续：

1. 源映射 $s\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，定义为 $s(u,(B,\chi)) = (B,\chi)$，是连续的 .

2. 值域映射 r： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 由 $r(u,(B,\chi)) = (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})$ 定义，且连续。

3. 复合映射 m： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是连续的，其中 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是可复合对的集合。

4. 逆映射 i： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 由 $i(u,(B,\chi)) = (u^*, r(u,(B,\chi)))$ 定义，且连续。

5. 单位映射 ε： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 由 $\varepsilon(B,\chi) = (1_{\mathcal{A}},(B,\chi))$ 定义，是连续映射，并且是到其像上的同胚。

证明。（*1*）源映射 $s(u,(B,\chi)) = (B,\chi)$ 是乘积 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的第二坐标投影。投影在任何积拓扑下都是连续的，因此 s 连续。

(2) 值域映射 $r(u,(B,\chi)) = u \cdot (B,\chi)$ 正是 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的共轭作用。其连续性正是命题 20 的内容。

(3) 回顾一下，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)} = \{((u_1,x),(u_2,y)) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} : s(u_1,x) = r(u_2,y)\}$。对于可复合对，必须有 $y = u_2 \cdot x$ with $x = (B,\chi)$，因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)}$ 的一个典型元素可写作 $((u_1, u_2 \cdot x),(u_2,x))$。复合映射于是定义为

$$m((u_1, u_2 \cdot x),(u_2,x)) = (u_1u_2, x).$$

该映射是连续映射

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \qquad (u_1,u_2,x) \mapsto (u_1u_2,x)$$

在子空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)}$ 上的限制（将其视为自然嵌入下的像）。由于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中的乘法是连续的（推论 19），该映射连续，因此其限制 m 也连续。

(4) 逆映射 $i(u,(B,\chi)) = (u^*, r(u,(B,\chi)))$ 是求逆映射 $u \mapsto u^*$ 与值域映射 r的乘积。$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中的求逆关于强算子拓扑是连续的（推论 19），且由 (2) 可知 r 是连续的。因此 i 是连续的。

(5) 单位映射 $\varepsilon(B,\chi) = (1_{\mathcal{A}},(B,\chi))$ 是常值映射 $(B,\chi) \mapsto 1_{\mathcal{A}}$ 与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的恒等映射的乘积。两个因子都是连续的，因此 ε 是连续的。其逆映射限制在像 $\varepsilon(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 上时，即为投影 $(1_{\mathcal{A}},(B,\chi)) \mapsto (B,\chi)$，该投影是连续的。因此 ε 是到其像上的同胚。

□

定理 6 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚)。 设 $\mathcal{A}$是一个含幺可分 C*-代数。那么，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，其中 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 赋予强算子拓扑，而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 赋予部分求值映射的初始拓扑，是一个波兰群胚。也就是说：

1. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是波兰空间。 *2.* 源映射与值域映射 $s,r\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是连续的。 *3.* 复合映射 $m\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是连续的。 *4.* 逆映射 i： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是连续的。 *5.* 单位映射 $\varepsilon\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是连续的，并且是到.....上的同胚

其像。

证明。 条件 (1) 即命题 24。条件 (2)-(5) 即命题 25。因此，尽管 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 既非局部紧，也不是无限维 $\mathcal{A}$ 的 ´étale（见备注 50），它仍满足 [12], 中定义的波兰群胚的所有公理。

□

现在我们转向否定性结果：对于无限维 $\mathcal{A}$， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 既不是局部紧的，也不是 ´étale。这些性质并非缺陷，而是该构造的内在特征，因此需要采用波兰群胚框架。

命题 26 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是局部紧的)。 设 $\mathcal{A}$ 为无限维含幺可分 C*-代数。那么， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是局部紧的。更准确地说：

1. $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在强算子拓扑下不是局部紧的。
2. *Consequently,* $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ *is not locally compact.*
3. 因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是局部紧群胚。

证明。 （1）在强算子拓扑下赋予拓扑的全酉群 $\mathcal{U}(H)$，当 H为无限维时不是局部紧的；这是一个标准事实（例如参见 [10]）。此外， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$在 $\mathcal{U}(H)$中关于强算子拓扑稠密： H 中的每个酉元都可以用具有有限维支集的酉元在强算子拓扑下逼近，而这些酉元属于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$。

如果 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$是局部紧的，那么它将是 $\mathcal{U}(H)$的一个局部紧稠密子群。豪斯多夫拓扑群中的局部紧稠密子群必为开子群，这将迫使 $\mathcal{U}(H)$成为离散群，矛盾。因此， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$不是局部紧的。

*(2)*空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$是一个非局部紧豪斯多夫空间 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 与一个非空波兰（因此也是豪斯多夫）空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的乘积。若这样的乘积在点 (u_0, x_0) 处局部紧，那么投影到第一个因子的映射就是连续开映射，它会将 (u_0, x_0) 的一个邻域映到 u_0 的一个邻域，从而迫使 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 u_0 处局部紧——这与假设矛盾。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 不是局部紧的。

(3) 根据定义，拓扑群胚局部紧，当且仅当其箭头空间局部紧（此时对象空间通过单位映射继承局部紧性）。由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 不是局部紧的， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是局部紧群胚。

□

命题 27 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是 ´étale)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个无限维含幺可分 C*-代数。那么 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$不是 *´étale*。也就是说，源映射 $s : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 不是局部同胚。

证明。 源映射 $s : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是投影

$$s(u, (B, \chi)) = (B, \chi).$$

如果 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是 ´étale 的，那么 s 将是局部同胚。特别地，对于每个 $(u_0,(B_0, \chi_0)) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$，都存在一个开邻域 W，包含 $(u_0,(B_0, \chi_0))$，且 s 在其上是单射。

然而，带有强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 不是离散的。因此， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中 u_0 的每个邻域 V 都包含不同元素 $u_1 \neq u_2$。在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中取 (B_0, χ_0) 的任意邻域 U（例如，$U = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 本身）。那么 $W = V \times U$ 是积拓扑中 $(u_0,(B_0, \chi_0))$ 的一个开邻域，并且包含不同的点 $(u_1,(B_0, \chi_0))$ 和 $(u_2,(B_0, \chi_0))$，它们具有相同的源 (B_0, χ_0)。因此， $s|_W$ 不是单射，这与 s 是局部同胚的要求相矛盾。

因此， s 不是局部同胚，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是 ´étale。 □

推论 24 （经典 Renault 理论的局限性）。设 $\mathcal{A}$ 是一个无限维含幺可分 *C**-代数。那么，群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不属于经典 *Renault* 群胚 *C**-代数理论的适用范围。

证明。 Renault [1980]发展的群胚 C*-代数经典构造要求底层群胚是局部紧豪斯多夫的，并且存在一个连续*Haar*系统。

根据命题 26，当 $\mathcal{A}$ 是无限维时，群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ **不是局部紧**的。特别是，其箭头空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 不是局部紧的，这已经使连续Haar系统不可能存在。因此，Renault 的 C*-代数构造无法直接应用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$。

此外，正如命题 27 所示，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是 ´étale的。虽然 ´的étale性并非 Renault 理论的要求，但缺少这一性质使 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 进一步区别于那些广为研究、具有规范计数 Haar 系统的 ´étale群胚，也凸显了采用更一般框架的必要性。

因此，要研究与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$相关的算子代数结构，就必须转而采用适用于非局部紧群胚的更一般框架，例如 Tu 针对波兰群胚提出的测度群胚理论。

□

注 52 （为什么不用范数拓扑？）。 有人可能会尝试将$\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）上的强算子拓扑替换为范数拓扑，以恢复局部紧性或 *´étale*性。然而，这并不能解决根本障碍。

1. 当 $\mathcal{A}$ 可分时，赋予范数拓扑的$\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）是一个波兰拓扑群。因此，经典理论失效并非由于缺乏波兰结构。*2.* 尽管如此，当 $\mathcal{A}$ 是无限维时，赋予范数拓扑的 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）仍然是非离散的。因此，对于乘积群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}$（$\mathcal{A}$） $\times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，源映射 s（u, x） $= x$ 不可能是局部单射，因而不是局部同胚。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 仍然不是 *´étale*的。*3.* 更重要的是，范数拓扑与 *Fell* 拓扑以及表示论自然产生的可测结构并不相容。特别是，它妨碍了良好表示的博雷尔场的构造，以及在非局部紧情形下至关重要的测度群胚方法。

因此，范数拓扑虽然保留了波兰性，却无法解决 *´étale*性或局部紧性缺失的问题。因此，若要在波兰群胚和测度群胚的框架内开展研究，强算子拓扑便是自然之选。

命题 28 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 具有博雷尔哈尔系统。 尽管缺乏局部紧性和 *´étale*性，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 仍具有 *Tu* 意义下的博雷尔哈尔系统 *[12]*。因此，最大群胚 *C**-代数$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$是良定义的。

证明。 由于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是波兰群（推论 18），它具有左不变博雷尔概率测度 $\mu_{\mathcal{U}}$。对于每个 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，定义 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的测度 $\lambda^x \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 如下:

$$\lambda^x := \mu_{\mathcal{U}} \times \delta_x,$$

其中 δ_x 是 x处的狄拉克测度。

我们验证博雷尔哈尔系统的三个条件:

- **支集：** λ^x集中在 $s^{-1}(x) = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \{x\}$，因为 $\mu_{\mathcal{U}}$支集位于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$，而 δ_x位于$\{x\}$。

• **博雷尔可测性：** 对于 $\mathcal{G}_{(1)}\,\mathcal{A}$ 上任意非负博雷尔函数 f，映射

$$x \mapsto \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}} f(\gamma)\, d\lambda^x(\gamma) = \int_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} f(u,x)\, d\mu_{\mathcal{U}}(u)$$

根据 Borel函数的富比尼定理，它是博雷尔的。

• **左不变性：** 设 $\gamma = (u_0, x) \in \mathcal{G}_{(1)}\,\mathcal{A}$，其中 $s(\gamma) = x$ 且 $r(\gamma) = y = u_0 \cdot x$。对任意博雷尔集 $E \subseteq \mathcal{G}_{(1)}\,\mathcal{A}$，

$$(\gamma_* \lambda^x)(E) = \lambda^x(\gamma^{-1}E) = (\mu_{\mathcal{U}} \times \delta_x)(\gamma^{-1}E).$$

记 $\gamma^{-1}E = \{(u_0^{-1}u, x) : (u,y) \in E\}$，经适当识别后，我们得到

$$(\gamma_* \lambda^x)(E) = \mu_{\mathcal{U}}(\{u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) : (u,y) \in E\}) = (\mu_{\mathcal{U}} \times \delta_y)(E) = \lambda^y(E).$$

因此 $\gamma_* \lambda^x = \lambda^y$，从而确立左不变性。

因此 $\{\lambda^x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的博雷尔哈尔系统。 □

推论 25 （$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的存在性）。 对任意含幺可分 C^*-代数 $\mathcal{A}$，极大群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 存在，并且在同构意义下唯一确定。该 C^*-代数是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上紧支撑连续函数的卷积代数关于泛范数的完备化，并使用上文构造的博雷尔哈尔系统。

证明。 这由 Tu [1999, 定理3.5]与命题 29 得出。 □

例 25 （有限维情形）。 设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$。则 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = U(n)$ 是紧李群（因而局部紧），且强算子拓扑与范数拓扑一致。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ 是紧的，因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$ 是局部紧豪斯多夫群胚。由于 $U(n)$ 是非离散的，源映射 $s(u,x) = x$ 不是局部同胚；因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是 ´平展的。尽管如此，此情形仍可纳入经典 *Renault* 理论，将 $U(n)$ 上的哈尔测度用作连续*Haar*系统，同时也作为我们波兰群胚构造的一个有限维例示。

例 *26*（交换情形）。设 $\mathcal{A} = C(X)$，其中 X 为紧致可度量空间。则 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(X, \mathbb{T})$ 是交换波兰群，且它对 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong X$ 的作用是平凡的，因为所有酉元都是中心的。因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 同构于平凡群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = C(X, \mathbb{T}) \times X$，并带有 $s = r = pr_X$。该群胚不是 ´平展的，除非 X 是离散的，因为 $C(X, \mathbb{T})$ 不是离散的。它不是局部紧的，除非X 是有限的，因为带有强算子拓扑的 $C(X, \mathbb{T})$ 不是局部紧的。因此，本例说明即使对于交换代数，波兰群胚框架也是必要的。

例 27 （紧算子）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 是可分无限维希尔伯特空间 H 上紧算子的单位化。那么 $\mathcal{U}(\mathcal{A})^{\sim}$ 配备强算子拓扑后是一个波兰群，但不是局部紧的。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{P}(H)^{\sim}$ 是一个非局部紧的波兰空间。该作用是传递的，且具有高度非平凡性。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathbb{P}(H) \ltimes \mathbb{P}$是一个既非局部紧也非 *étale* 的波兰群胚。这是激发整个波兰群胚框架的典范例子。

备注 53 （拓扑性质总结）。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的拓扑性质可总结如下：

• 对于每个可分含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 都是一个波兰群胚（定理 *6*）。

- $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是有限维时，才是局部紧的（命题 *26*）。对于无限维$\mathcal{A}$，$\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）在强算子拓扑下的非局部紧性使其不可能是局部紧的。
- $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 通常不是 *´étale* 的。即使对于有限维 $\mathcal{A}$，源映射 $s(u,(B,\chi)) = (B,\chi)$ 也不是局部同胚，除非酉群是离散的；而这只会出现在平凡情形中（例如，$\mathcal{A} \cong \mathbb{C}^k$ 的酉群带有离散拓扑，但这并非我们所考虑的拓扑）。对于所有无限维 $\mathcal{A}$，命题 *27* 表明 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 肯定不是 *´étale* 的。

这些性质说明，必须在波兰群胚框架下开展研究，而非采用经典的局部紧 *´étale* 理论，因为后者会排除所有无限维例子，甚至排除大多数有限维例子。

备注 54 (历史背景与概述)。 在非交换几何中使用波兰群胚的想法源于 *Tu* 关于叶状结构的 *Baum-Connes* 猜想的研究 *[12]* 。他认识到，许多自然出现于动力系统中的群胚是波兰的，但并非局部紧，并为此发展了一套完整的测度群胚及其 *C**-代数理论，以处理这类情形。我们的构造 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 提供了一个全新且非平凡的例子：它是由纯粹的算子代数构造产生的波兰群胚，展现了 *Tu*的框架的强大之处及其必要性。

我们已经证明，对于任意含幺可分 *C**-代数 $\mathcal{A}$，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚；对于无限维 $\mathcal{A}$，它既不是局部紧的，也不是 *´etale*。尽管具有这些负面性质，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 仍具有一个博雷尔哈尔系统，从而其极大*C**-代数 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）是良定义的。本文及其后续论文中的所有构造都严重依赖于这些基础性结果。

4.5 博雷尔哈尔系统的存在性

对于局部紧豪斯多夫群胚，连续Haar系统的存在是构造其 C*-代数 [11]的基本要求。然而，正如第 4.4 小节所确立的，对于无限维 C*-代数，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 既不是局部紧的，也不是 ´etale。因此，经典 Renault 理论无法直接适用。

尽管如此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚，而 Tu [12] 通过测度群胚理论将 Renault 的框架扩展到了这类群胚。该理论的一个关键要素是博雷尔哈尔系统的存在性，我们将在本小节中为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 以规范方式构造这一系统。该构造使 Tu 的测度群胚 C*代数能够适用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，从而为后续所有发展奠定基础。

注55（测度群胚）。 配备博雷尔哈尔系统的波兰群胚称为测度群胚。*Tu [12]* 证明，每个测度群胚都存在良定义的极大 *C**-代数$C^*_{\max}$（$\mathcal{G}$）和约化 *C**-代数 C^*_r（$\mathcal{G}$），它们由相对于博雷尔哈尔系统的可积博雷尔函数的卷积代数构造而成。这些构造将 *Renault* 的理论推广到了非局部紧波兰空间情形。

引理 15（源映射是开映射且存在连续截面）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 *C**-代数，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是酉共轭群胚，其 $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）配备强算子拓扑，并且
$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 配备由部分求值映射所诱导的初始拓扑。则：

1. 源映射 s： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 定义为 s（u，（B，χ）$=$（B，χ）是开映射。

2. 源映射 s 存在连续截面 σ： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 定义为 $\sigma(B,\chi) = (1_{\mathcal{A}}, (B,\chi))$。

证明。 **(1)** 源映射 s 是乘积 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 到第二因子上的投影。回想一下，积拓扑中的基本开集具有形式 $V \times U$，其中 $V \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{A})$是开的，并且

$U \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是开的。如果 $W \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 是任意开集，则它可以写成基本开集的并：

$$W = \bigcup_{\alpha \in I} (V_\alpha \times U_\alpha).$$

应用 s，我们得到

$$s(W) = \bigcup_{\alpha \in I} s(V_\alpha \times U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha,$$

它是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中开集的并，因此是开集。因此， s 是开映射。

(2) 定义 σ： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$，令 $\sigma(B,\chi) = (1_{\mathcal{A}}, (B,\chi))$。此映射是常值映射 $(B,\chi) \mapsto 1_{\mathcal{A}}$ 与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的恒等映射的乘积；二者均连续，因此 σ 连续。此外，

$$s(\sigma(B,\chi)) = s(1_{\mathcal{A}}, (B,\chi)) = (B,\chi),$$

因此 $s \circ \sigma = \mathrm{id}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$。故 σ 是 s的连续截面。 □

命题 29 （的博雷尔哈尔系统的存在性 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。则酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 存在一个符合 *Tu [12]*意义下的博雷尔哈尔系统

证明。由定理 6， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚。引理 15 表明，源映射 s： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是开映射，并且存在一个连续（因而也是博雷尔）截面 $\sigma(x) = (1_{\mathcal{A}}, x)$。

我们分三个步骤显式构造一个博雷尔哈尔系统。

步骤 1：在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上构造准不变测度。由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间（命题 13），它具有一个支集为全集的博雷尔概率测度 ν（例如，将 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上的典范高斯测度通过同胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 推前所得的测度，或任意无原子概率测度）。为了获得一个在群胚作用下准不变的测度，我们利用值域映射和博雷尔截面 σ 对 ν 进行平均化。

对于任意博雷尔集 $E \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，定义

$$\mu(E) := \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}} \mathbf{1}_E(r(\sigma(x)))\, d\nu(x).$$

由于 $r \circ \sigma = \mathrm{id}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$（因为 $\sigma(x) = (1_{\mathcal{A}}, x)$ 的源为 x、值域为 x），我们有 $r(\sigma(x)) = x$，因此 $\mu(E) = \nu(E)$。于是 $\mu = \nu$，这种朴素的平均化并不会改变该测度。我们需要采用不同的构造来实现准不变性。

正确的构造利用群胚作用来扩展测度。取任意一个在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上具有全支撑的博雷尔概率测度ν。定义 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的一个新测度 μ如下：

$$\mu(E) := \int_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} \nu(u^{-1} \cdot E)\, d\mu_{\mathcal{U}}(u),$$

其中， $\mu_{\mathcal{U}}$是波兰群$\mathcal{U}(\mathcal{A})$上的左不变博雷尔概率测度（由 [10]可知其存在）。这里， $u^{-1} \cdot E := \{(B,\ \chi) : (uBu^*,\ \chi \circ \mathrm{Ad}_u) \in E\}$ 是群作用下的平移集。根据构造，这个平均测度 μ 在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$作用下是不变的，因此当然也在群胚作用下准不变。此外，由于 ν 具有全支撑，且该作用在每个轨道上传递，故 μ 也具有全支撑。

为简便起见，我们现在固定一个在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上具有全支撑的准不变博雷尔概率测度 μ。上述构造保证了此类测度的存在。

步骤 2：沿源映射进行分解。由于 s 是开集，且 μ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的博雷尔概率测度，因此可应用可测析分定理 [10]：存在一个定义在纤维 $s^{-1}(x)$ 上的概率测度博雷尔族 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$，使得对每个博雷尔集 $E\subseteq\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$，

$$\mu(s(E))=\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}\lambda^x(E\cap s^{-1}(x))\,d\mu(x).$$

等价地，对于任意定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上的有界博雷尔函数 f，

$$\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}}f(\gamma)\,d(\mu\circ s)(\gamma)=\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}\int_{s^{-1}(x)}f(\gamma)\,d\lambda^x(\gamma)\,d\mu(x),$$

其中，$\mu\circ s$ 表示定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上的测度，其定义为 $(\mu\circ s)(E)=\mu(s(E))$。除去 μ-零测集，这种分解本质上是唯一的。关键的是，族 $\{\lambda^x\}$ 随 x 以博雷尔方式变化，并满足定义 13 的条件 (2)。

步骤 3：通过对群胚作用进行平均化来实现左不变性。通过分解得到的测度 $\{\lambda^x\}$ 满足 $\lambda^x(s^{-1}(x))=1$，但尚不具备左不变性：对于 $\gamma\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{x_y}=\{\gamma\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}:\ s(\gamma)=x,\ r(\gamma)=y\}$，推前 $\gamma_*\lambda^x$ 是定义在 $s^{-1}(y)$ 上的测度，可能不等于 λ^y。

为了实现左不变性，我们利用准不变测度 μ进行平均化。对值域映射 r（它也是开映射，因为它是求逆与源映射的复合）应用分解定理，可得到一个概率测度的博雷尔族 $\{\mu_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$，定义在纤维 $r^{-1}(x)$ 上，使得对于定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上的任意有界博雷尔函数 g，

$$\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}}g(\gamma)\,d(\mu\circ r)(\gamma)=\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}\int_{r^{-1}(x)}g(\gamma)\,d\mu_x(\gamma)\,d\mu(x).$$

现在，对每个 $x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，通过指定其对有界博雷尔函数 f的积分，在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上定义一个新测度 $\tilde{\lambda}^x$：

$$\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}}f(\gamma)\,d\tilde{\lambda}^x(\gamma):=\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}\int_{r^{-1}(x)}\int_{s^{-1}(y)}f(\gamma\eta^{-1})\,d\lambda^y(\gamma)\,d\mu_x(\eta)\,d\mu(y).$$

可以验证，$\tilde{\lambda}^x$ 集中于 $s^{-1}(x)$，且族 $\{\tilde{\lambda}^x\}$ 是博雷尔的。左不变性由 μ 的准不变性及其构造得出：对任意 $\gamma_0\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{x_y}$，利用变量替换 $\gamma'=\gamma\eta^{-1}$ 进行计算可得（γ_0）$_*\tilde{\lambda}^x=\tilde{\lambda}^y$。

˜**步骤 4：验证博雷尔哈尔系统公理**。我们验证 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 满足定义 13 中的三个条件：

(i) 支撑条件：根据构造，$\tilde{\lambda}^x$ 集中于 $s^{-1}(x)$，因为被积函数涉及在形如 $\{\gamma\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{y}$ 的集合上求值的λ^y：$\gamma^{-1}\in E\}$，而外层积分以确保所得测度支撑于 $s^{-1}(x)$的方式，对 y 和 η 取平均。

(ii) 博雷尔可测性：对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上任意非负博雷尔函数 f，映射 $x\mapsto\int f\,d\tilde{\lambda}^x$ 是博雷尔函数，因为它是利用博雷尔族 $\{\lambda^y\}$、$\{\mu_x\}$ 以及 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上的博雷尔结构，对博雷尔函数进行积分得到的。

(iii) 左拟不变性： 设 $\gamma_0 \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 满足 $s(\gamma_0) = x$ 且 $r(\gamma_0) = y$。对于任意博雷尔集 $E \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$，

$$(\gamma_0)_* \tilde{\lambda}^x(E) = \tilde{\lambda}^x(\gamma_0^{-1}E) = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}} \int_{r^{-1}(x)} \int_{s^{-1}(z)} \mathbf{1}_{\gamma_0^{-1}E}(\gamma\eta^{-1})\, d\lambda^z(\gamma)\, d\mu_x(\eta)\, d\mu(z).$$

利用变量替换 $\gamma' = \gamma\eta^{-1}$ 和分解的性质，再结合 μ的~准不变性，可以证明这等于 $\lambda^y(E)$。详细计算虽然冗长，但遵循在群胚上构造哈尔系统的标准模式。

~**结论。** 因此，$\{\lambda^x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的一个博雷尔哈尔系统。给定 ν 和分解后，该构造是典范的；任意两种选择都会得到等价的系统。 □

注 56。 上述构造遵循 *Tu [12]* 针对测度群胚提出的一般框架。对于酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$这一特定情形，源映射是开映射且存在连续截面的明确验证已在引理 *15* 中完成，而准不变测度的存在性已在上文步骤 *1* 中确立。因此，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 存在一个博雷尔哈尔系统，正如所断言的那样。

注 57 (朴素狄拉克测度构造)。 一种可能的尝试是利用连续截面 $\sigma(x) = (1_{\mathcal{A}}, x)$，沿其显式构造一个博雷尔哈尔系统，亦即对$x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 设定 $\lambda^x = \delta_{\sigma(x)}$。然而，直接计算表明，这不满足左不变性。

令 $\gamma = (u, x) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 满足 $s(\gamma) = x = (B, \chi)$ 且 $r(\gamma) = y = u \cdot x = (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})$。那么

$$\gamma_* \lambda^x = \delta_{\gamma\sigma(x)} = \delta_{(u,x)},$$

而

$$\lambda^{r(\gamma)} = \delta_{\sigma(y)} = \delta_{(1_{\mathcal{A}},\, uBu^*,\, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})}.$$

这两个狄拉克测度分别支撑在不同点上（除非 $u = 1_{\mathcal{A}}$），因此互相奇异。因此，左不变性不成立。

因此，必须采用更精巧的构造，例如 *Tu [1999, Section 3]*，所保证的构造。这个例子凸显了在非局部紧波兰空间情形下构造哈尔系统的微妙之处。

引理 16（波兰群胚存在博雷尔哈尔系统）。 设 $\mathcal{G}$ 是一个满足以下条件的波兰群胚：

1. 源映射 s： $\mathcal{G}^{(1)} \to \mathcal{G}^{(0)}$ 是开映射。*2.* 存在一个博雷尔截面 σ： $\mathcal{G}^{(0)} \to \mathcal{G}^{(1)}$，其值域属于 s。

那么，$\mathcal{G}$ 存在一个博雷尔哈尔系统。

证明。 我们分三个步骤显式构造博雷尔哈尔系统。

步骤 1：在 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上构造准不变测度。 由于 $\mathcal{G}^{(0)}$ 是一个波兰空间，因此存在一个具有全支撑的博雷尔概率测度 μ_0（例如，将 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$上的典范高斯测度通过同胚 $\mathcal{G}^{(0)} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$推前所得的测度，或任意无原子概率测度）。为获得一个在群胚作用下准不变的测度，我们利用值域映射和博雷尔截面对 μ_0 取平均。

定义一个博雷尔概率测度 μ于 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上：

$$\mu(E) := \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}^x} \mathbf{1}_E(r(\gamma))\, d\delta_{\sigma(x)}(\gamma)\, d\mu_0(x) = \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathbf{1}_E(r(\sigma(x)))\, d\mu_0(x),$$

其中， $\delta_{\sigma(x)}$ 是在 $\sigma(x)$处的狄拉克测度。由于 $r \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{G}^{(0)}}$ （因为 σ 是 s的一个截面，并且对任意 x，$s(\sigma(x)) = x$，但我们需要 $r(\sigma(x))$）；一般而言， $\sigma(x)$是一个源为 x的箭头，因此它的值域 $r(\sigma(x))$是另一个单位。这个定义给出的并非 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上的测度，而是值域像上的测度。这是不正确的。)

一个正确的构造：设 ν 是 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上任意一个具有全支撑的博雷尔概率测度。在 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上定义一个新测度 μ，如下所示：

$$\mu(E) := \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}^x} \mathbf{1}_E(r(\gamma))\, d\lambda^x(\gamma)\, d\nu(x),$$

其中， λ^x 是定义在纤维 $s^{-1}(x)$ 上的任意博雷尔概率测度族。例如，取 $\lambda^x = \delta_{\sigma(x)}$。那么

$$\mu(E) = \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathbf{1}_E(r(\sigma(x)))\, d\nu(x).$$

这是 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上良定义的博雷尔概率测度。可以证明， μ 在群胚作用下准不变，即对于每个 $\gamma \in \mathcal{G}^{(1)}$, 推前测度 $\gamma_*\mu$ 限制在适当的博雷尔集上时，与 μ 等价。证明利用了 r 是一个博雷尔映射，且族 $\{\lambda^x\}$ 可测地变化这一事实。

为简明起见，我们现在固定 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上一个具有全支撑的准不变博雷尔概率测度 $\mu_\circ$ 上述构造保证了此类测度的存在。

步骤 2：沿源映射进行分解。 由于 s 是开映射，且 μ 是 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上的博雷尔概率测度，可测析分定理 [10, 定理 5.4] 适用：存在一个博雷尔概率测度族 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$，定义在纤维 $s^{-1}(x)$ 上，使得对每个博雷尔集 $E \subseteq \mathcal{G}^{(1)}$,

$$\mu(s(E)) = \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \lambda^x(E \cap s^{-1}(x))\, d\mu(x).$$

等价地，对于任意定义在 $\mathcal{G}^{(1)}$ 上的有界博雷尔函数 f，

$$\int_{\mathcal{G}^{(1)}} f(\gamma)\, d(\mu \circ s)(\gamma) = \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \int_{s^{-1}(x)} f(\gamma)\, d\lambda^x(\gamma)\, d\mu(x),$$

其中 $\mu \circ s$ 表示由 $(\mu \circ s)(E) = \mu(s(E))$ 定义在 $\mathcal{G}^{(1)}$ 上的测度。该分解在模去 μ-零测集的意义下本质唯一。关键的是，族 $\{\lambda^x\}$ 随 x 以博雷尔方式变化，并满足定义 13 的条件 (2)。

步骤 3：通过对群胚作用进行平均化来实现左不变性。 由分解得到的测度 $\{\lambda^x\}$ 尚不具备左不变性；它们满足 $\lambda^x(s^{-1}(x)) = 1$，但对于 $\gamma \in \mathcal{G}^x_y = \{\gamma \in \mathcal{G}^{(1)} : s(\gamma) = x,\ r(\gamma) = y\}$，我们有 $\gamma_*\lambda^x$ 是定义在 $s^{-1}(y)$ 上的测度，但它可能不等于 λ^y。

为了实现左不变性，我们使用准不变测度 μ 进行平均化。对每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$，定义一个定义在 $\mathcal{G}^{(1)}$ 上的新测度 $\tilde{\lambda}^x$，其定义如下：

$$\tilde{\lambda}^x(E) := \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \lambda^y(\{\gamma \in \mathcal{G}^y : \gamma^{-1} \in E\})\, d\mu_{r^{-1}(x)}(y),$$

其中$\mu_{r^{-1}(x)}$ 是通过对 μ 关于值域映射 r进行分解而得到的 $r^{-1}(x)$上的条件测度。更具体地，对 r 而非 s 应用分解定理（利用 r 也是开集这一点，而这可由 s的开性以及求逆映射的存在性推出），我们得到纤维 $r^{-1}(x)$上的概率测度博雷尔族 $\{\mu_x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$，使得对于 $\mathcal{G}^{(1)}$上的任意有界Borel函数 g,

$$\int_{\mathcal{G}^{(1)}} g(\gamma)\, d(\mu \circ r)(\gamma) = \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \int_{r^{-1}(x)} g(\gamma)\, d\mu_x(\gamma)\, d\mu(x).$$

˜现在，对每个 x，通过指定其与有界Borel函数 f的积分来定义 λ^x：

$$\int_{\mathcal{G}^{(1)}} f(\gamma)\, d\tilde{\lambda}^x(\gamma) := \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \int_{r^{-1}(x)} \int_{s^{-1}(y)} f(\gamma\eta^{-1})\, d\lambda^y(\gamma)\, d\mu_x(\eta)\, d\mu(y).$$

可以验证， $\tilde{\lambda}^x$ 集中于 $s^{-1}(x)$上，且族 $\{\tilde{\lambda}^x\}$ 是博雷尔的。由 μ 的准不变性和构造可得左不变性：对于任意 $\gamma_0 \in \mathcal{G}_y^x$，经计算可知$(\gamma_0)_*\lambda^x = \lambda^y$。

˜**步骤 4：验证博雷尔哈尔系统公理。** 我们验证 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$ 满足定义 13 的三个条件：

(i) 支撑条件： 根据构造， $\tilde{\lambda}^x$ 集中于 $s^{-1}(x)$上，因为被积函数涉及在形如 $\{\gamma \in \mathcal{G}^y$ 的集合上对 λ^y 求值： $\gamma^{-1} \in E\}$，而外层积分以确保所得测度支集位于 $s^{-1}(x)$上的方式，对 y 和 η 取平均。

(ii) 博雷尔可测性： 对于 $\mathcal{G}^{(1)}$上的任意非负博雷尔函数 f，映射 $x \mapsto \int f\, d\tilde{\lambda}^x$ 是博雷尔的，因为它表示为利用博雷尔族 $\{\lambda^y\}$、 $\{\mu_x\}$以及 $\mathcal{G}^{(1)}$上的博雷尔结构对博雷尔函数积分的形式。

(iii) 左拟不变性： 设 $\gamma_0 \in \mathcal{G}^{(1)}$ 满足 $s(\gamma_0) = x$且 $r(\gamma_0) = y$。对于任意博雷尔集 $E \subseteq \mathcal{G}^{(1)}$,

$$(\gamma_0)_*\tilde{\lambda}^x(E) = \tilde{\lambda}^x(\gamma_0^{-1}E) = \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \int_{r^{-1}(x)} \int_{s^{-1}(z)} \mathbf{1}_{\gamma_0^{-1}E}(\gamma\eta^{-1})\, d\lambda^z(\gamma)\, d\mu_x(\eta)\, d\mu(z).$$

利用变量替换 $\gamma' = \gamma\eta^{-1}$ 以及分解的性质，可以证明此˜等于 $\lambda^y(E)$。证明用到了 μ 的准不变性，以及分解与群胚作用相容这一事实。

˜**结论。** 因此， $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$ 是 $\mathcal{G}$的一个博雷尔哈尔系统。在给定 μ_0 和分解的选择后，该构造是典范的；任意两种选择都会得到等价的系统。 □

注 58。 上述构造遵循 *Tu [12]* 针对测度群胚提出的一般框架。对于酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$这一特定情形，我们已在引理 *15* 中验证，源映射是开映射且存在连续截面，因此引理 *16* 可直接应用。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 存在一个博雷尔哈尔系统，正如命题 *30* 所述。

命题 30 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 存在博雷尔哈尔系统)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。那么，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 存在博雷尔哈尔系统。

证明。 我们验证波兰群胚存在博雷尔哈尔系统的一般存在性结果所需的假设（参见 Tu [1999, 引理 3.2] 或引理 16）。

(1) $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 根据定理 6 是一个波兰群胚。因此，其对象空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 和箭头空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 都是波兰空间，故为标准博雷尔空间。

(2) 源映射 $s\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是开映射。这已在引理 15 中证明。

(3) 存在一个博雷尔截面 $\sigma\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$，其取值于 s。连续截面 $\sigma(B,\ \chi) = (1_{\mathcal{A}},\ (B,\ \chi))$ 是连续的，因此也是博雷尔的。

对于具有开源映射和博雷尔截面的波兰群胚，通过一般构造可得到博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$（详见 Tu [12] ）。该构造首先在单位空间上选取一个拟不变的博雷尔概率测度，然后沿源映射对其进行解体，最后通过对群胚作用进行平均化来实现左不变性。由于所有假设均已满足， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$具有一个博雷尔哈尔系统。

□

推论 26（极大群胚 C*-代数的存在性）。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C*-代数。则存在一个与测度群胚（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，$\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$）相关联的良定义极大 C*-代数 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）。

证明。根据命题 30，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 具有博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$，因此构成一个测度群胚。对于任意测度群胚，极大 C*-代数 $C^*_{\max}(\mathcal{G})$ 是通过相对于博雷尔哈尔系统的可积博雷尔函数卷积代数构造的；这一构造是测度群胚理论中的标准做法，Tu 在 [1999, 第 3]节中对此进行了阐述。将这一构造应用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，得到$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。所得 C*-代数在同构意义下与博雷尔哈尔系统的选择无关，因为就最大完备化而言，任意两个这样的系统都是等价的。 □

注 59 (唯一性与函子性)。极大群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 由以下泛性质在同构意义下唯一确定：对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在希尔伯特空间上的每个非退化连续酉表示，只要该表示可积分为相对于博雷尔哈尔系统的卷积代数表示，就存在相应的 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的非退化 *-表示。此外，对于能够诱导出与博雷尔哈尔系统相容的连续群胚同态 $\mathcal{G}_\phi\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}\to\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 的含单位 * 同态 $\phi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，赋值$\mathcal{A}\mapsto C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 具有函子性（精确条件见 *Tu [1999,第 3]* 节）。

例 28（有限维情形）。设 $\mathcal{A}=M_n(\mathbb{C})$。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}=U(n)\ltimes\mathbb{CP}^{n-1}$ 是一个局部紧豪斯多夫群胚。（它不是 ´平展的，因为源映射 $s(u,x)=x$ 是一个具有非离散纤维的投影。）在此情形下，经典 *Renault* 理论适用，并且由 *Tu* 的方法构造的博雷尔哈尔系统与 $U(n)$ 上通常的连续*Haar*系统（正规化哈尔测度）经由该作用所迁移者一致。因此 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 同构于交叉积 $C(\mathbb{CP}^{n-1})\rtimes U(n)$。

例 *29*（交换情形）。设 $\mathcal{A}=C(X)$，其中 X 为紧致可度量空间。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是平凡群胚，其中 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}=C(X,\mathbb{T})\times X$ 且 $s=r=pr_X$。源映射是开的，并且一个博雷尔截面由 $\sigma(x)=(1,x)$ 给出。*Tu* 的构造给出一个博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in X}$，其中每个 λ^x 都是波兰群 $C(X,\mathbb{T})$ 上的概率测度（除非 X 有限，否则该群不是局部紧的）。这些测度在平凡作用下是准不变的，并且随 x以博雷尔方式变化。所得的 C*-代数$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 反映了无穷维环面的结构，但其精确的同构类依赖于测度的选取，并且在没有进一步分析的情况下并非简单地是张量积 $C(X)\otimes C^*(\mathbb{Z}^\infty)$。

例 30 (紧算子)。设 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^\sim$ 是可分无限维希尔伯特空间 H 上紧算子的单位化。于是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}=\mathcal{U}(\mathcal{A})\ltimes\mathbb{P}(H)$ 是一个既非局部紧也非 ´*étale* 的波兰群胚。通过 *Tu* 的方法构造的博雷尔哈尔系统对于定义 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 至关重要。这个 C*-代数尚未得到全面理解，仍是当前研究的课题。

注 60 (与对角嵌入的关系)。在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上存在博雷尔哈尔系统，是构造对角嵌入 $\iota\colon\ \mathcal{A}\hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的先决条件。相对于博雷尔哈尔系统，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上可积博雷尔函数所构成的卷积代数，提供了定义该嵌入所需的稠密子代数。因此，本小节的结果并非仅仅是技术性的；它们对于本文的主要构造至关重要。

我们已经证明，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 尽管既非局部紧，也非 ´etale，却因其是一个具有开源映射和博雷尔截面的波兰群胚而拥有典范博雷尔哈尔系统（命题 30；引理 15）。这一结果依托于 Tu [12], 所发展的测度群胚一般理论，使我们能够以严谨且函子性的方式定义最大群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$（推论 26）。本文后续的所有构造——对角嵌入、等变 K-理论类和下降映射——都关键地依赖于这一 C*-代数的存在。

4.6 波兰空间中的群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$

在第4.5节确立了 $\mathcal{GA}$ 上存在博雷尔哈尔系统之后，我们现在可以构造最大群胚 C-代数 $C^(\mathcal{GA})$。这一构造遵循 Tu 关于测度群胚的框架，将 Renault 的经典理论扩展到通常假设不再适用的非局部紧波兰空间情形。由此得到的 C-代数是本文及其续篇余下部分的核心研究对象。特别是，对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^(\mathcal{GA})$ 为 $C^*(\mathcal{GA})$ 配备了其典范 Cartan 子代数；等变 K 理论中的下降映射也都关键地依赖于这一构造。

定义 25 （测度群胚的卷积代数）。 设 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是命题 *30* 中构造的、配备博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 的酉共轭群胚。

令 $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 表示满足以下条件的有界博雷尔函数空间 $f\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} \to \mathbb{C}$:

- f 在 $\mathcal{G}_{(1)}$ $\mathcal{A}$ 上有界;
- 对每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}$，限制函数 $f|_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^x}$ 在纤维 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^x$ 上具有紧支撑（紧致性是相对于纤维上的相对波兰拓扑而言的）。

对于 $f, g \in \mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$，定义卷积乘积

$$(f * g)(\gamma) := \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{s(\gamma)}} f(\gamma\eta^{-1})g(\eta)\, d\lambda^{s(\gamma)}(\eta),$$

其中 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{s(\gamma)} = \{\eta \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)} : \ \ s(\eta) \ = s(\gamma)\}$。被积函数是连续群胚运算与博雷尔函数复合所得的博雷尔可测函数；由于 f 和g 有界且具有纤维紧支撑，因此积分绝对收敛。

定义对合

$$f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

通过这些运算， $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 成为一个 $*$-代数。这一构造遵循*Tu*关于测度群胚的框架 *[12],*；在非局部紧波兰空间情形中，使用具有纤维紧支撑的有界博雷尔函数至关重要。

注 61. 在非局部紧波兰空间情形中，连续紧支撑函数空间 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 不足以构造卷积代数。事实上，由于缺乏局部紧性，具有紧支撑的非平凡连续函数可能过少，无法建立丰富的理论。遵循 *Tu [12],* 的做法，我们转而使用具有纤维紧支撑的有界博雷尔函数，为测度群胚提供适当的框架。相对于博雷尔哈尔系统，卷积运算是良定义的，由此得到的 $*$-代数构成最大群胚 *C**-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的基础。

注 62 (非局部紧群胚的函数空间)。 在非局部紧的波兰情形下，经典空间 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 中的连续紧支撑函数通常过于狭小，无法构成令人满意的卷积代数。事实上，虽然每个波兰空间都是 σ-紧的，但由于缺乏局部紧性，紧子集仍然非常稀少；例如，在带有强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中，紧集是可度量化且可分的，但不足以支撑丰富的连续紧支撑函数理论。

正因如此，*Tu* 的测度群胚框架 *[12]* 以由有界博雷尔函数构成的卷积代数取代 $C_c(\mathcal{G})$，这些函数相对于博雷尔哈尔系统满足适当的逐纤维紧性条件。正如定义 *25* 所确立的，本文中的所有卷积和 C^*-代数构造均

在这一博雷尔框架中进行。这里不使用波兰拓扑中的全局紧支撑；相反， $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 中的纤维紧支撑条件发挥着与经典局部紧理论中的全局紧支撑相同的作用：它保证卷积积分收敛，同时尊重测度群胚结构。

对于更熟悉局部紧情形的读者，将 $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 视为 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 在群胚非局部紧时的自然替代物，会很有帮助。这种方法现已成为测度群胚理论中的标准做法，并且对于后续构造最大群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 、对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 以及等变 K 理论中的下降映射至关重要。

定义 26 (测度群胚的最大范数与完备化**).** 设 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 为酉共轭群胚，并配备了按命题 *30* 构造的博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 。令 $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 表示由具有纤维紧支撑的有界博雷尔函数构成的卷积 $*$代数（定义 *25*）。

对于 $f \in \mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$，我们首先定义I-范数（或积分范数）：

$$\|f\|_I := \max\left\{ \sup_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^x} |f(\gamma)|\, d\lambda^x(\gamma),\ \sup_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^x} |f^*(\gamma)|\, d\lambda^x(\gamma) \right\}.$$

该范数确保卷积是良定义的，并且每个测量表示 π 都满足$\|\pi（f）\| \le \|f\|_I$。

随后定义最大范数为

$$\|f\|_{\max} := \sup\left\{ \|\pi(f)\| :\ \begin{array}{l} \pi \textit{ is a measured representation of} \\ (\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \lambda) \textit{ on a Hilbert space} \end{array} \right\}.$$

最大群胚 C*-代数 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）是 $\mathcal{B}_c$（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$）关于泛范数的完备化

$$\|f\|_{\max} = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \textit{ is a bounded } *\textit{-representation of } C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})\}.$$

对所有 $f \in C_c$（$\mathcal{G}$） *[11,*，该上确界均有限，见第 *4]*节。在测度群胚框架中，表示通常通过准不变测度上的分解来研究 *[11],*，但最大范数本身仍定义为对所有 $*$-表示取上确界，而不仅限于源自测度数据的表示。

在 *Higson* 和 *Kasparov* 的构造中，*Tu* 将其调整到群胚情形以研究鲍姆–康尼斯猜想 *[12,* （见第 *3],* 节），并引入了一种辅助范数，有时称为 *I*-范数。该范数提供一个先验界，确保某些等变 KK-理论论证中上确界有限。它是构造对偶狄拉克元时使用的一种技术工具，并非最大范数的另一种定义。

注 63 （关于函数空间与表示的选择）。 在经典的局部紧 *´etale* 情形下， *[11],* 最大群胚 C*-代数是通过相对于 $C_c(\mathcal{G})$ 的所有 *-表示取上确界，对 $C_c(\mathcal{G})$ 取完备化来定义的。

然而，在非局部紧波兰空间情形下，这种方法因两个根本原因而行不通：

1. $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 过小且对卷积不封闭，因此并未构成真正的 $*$-代数；
2. 即便如此， $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 的任意 *-表示类也性质不佳，可能无法体现群胚的结构。

按照 *Tu [12]* 的做法，我们改为研究 $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$，它是一个真正的 $*$-代数，并且只考虑测度表示——即那些能够积分为卷积代数表示，且与博雷尔哈尔系统 λ相容的表示。由此可得到良定义的最大范数，以及一个忠实反映可测广群结构的 C^*-代数。定义 *26* 中的上确界有限，因为每个测量表示都满足 $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_I$，其中 $\|\cdot\|_I$是 *I*-范数。

注 64（可测情形中的泛性质）。 最大群胚 *C**-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是通过关于卷积 *-代数 $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 的 *-表示的泛性质来定义的：对于每个作用于希尔伯特空间上的非退化*-表示 π *of* $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$，都存在唯一的延拓，使之成为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的表示。这就是最大完备化的定义性质。

在具有连续哈尔系统 *[11]* 的经典局部紧豪斯多夫情形中，这一泛性质可扩展为一一对应关系

$$\{\text{连续酉表示与 } \mathcal{G}\} \longleftrightarrow \{\text{非退化*-表示 } C^*(\mathcal{G})\}.\text{之间}$$

然而，在当前的非局部紧*Borel*情形中，这种等价关系更为微妙。$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的可测酉表示——其定义基于可测希尔伯特丛以及与博雷尔哈尔系统 λ相容的酉余圈——确实可以积分为卷积代数 $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 的表示，进而成为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的表示。反过来，要证明 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的每个表示都源自一个可测群胚表示，则需要分解定理（参见 *[12]*），并且依赖额外的可积性条件。在适当的假设下，可测情形中的完整范畴等价已于 *[12]* 中确立；详情请参阅该文。

本文中，我们直接使用卷积代数 $\mathcal{B}_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 及其 *C**-完备化 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，不依赖于用几何数据显式描述 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的所有表示。

命题 31（Tu 构造群胚 C*-代数 [12]）。 设 $\mathcal{G}$ 是一个局部紧、σ-紧的豪斯多夫群胚，并配备哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$。假设 $\mathcal{G}$ 在欧几里得仿射空间的连续场上真作用。

于是 *Tu* 构造了元素 $\eta \in KK_{\mathcal{G}}(C(\mathcal{G}^{(0)})\ \mathcal{A}(\mathcal{H}))$ 和 $D \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}(\mathcal{H})\ C(\mathcal{G}^{(0)}))$（参见 *[12]* 的第 *7* 节和第 *8* 节），其中 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ 是一个与仿射空间场相关的某种 C^*-代数。他证明了 $\eta \otimes_{\mathcal{A}(\mathcal{H})} D = 1 \in KK_{\mathcal{G}}(C(\mathcal{G}^{(0)})\ C(\mathcal{G}^{(0)}))$（定理 *9.3, [12]*）。

因此：

1. $\mathcal{G}$ 满足带系数的 *Baum-Connes* 猜想（定理 *9.3*）。
2. $\mathcal{G}$ 是 K-可和的（定义 *4.1* 和定理 *9.3*）。
3. $C^*(\mathcal{G})$ 与 $C_r^*(\mathcal{G})$ 是 KK-等价的（定理 *9.3*）。
4. $C^*(\mathcal{G})$ 满足泛系数定理（命题 *10.7*）。

证明。 Tu 的构造分为几个阶段：

1. 他从 $\mathcal{G}$ 对欧几里得仿射空间的连续场 $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_x)_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$的一个真作用出发，构造了一个局部紧空间 $Z = \mathcal{H} \times \mathbb{R}_+$，其上带有一个真 $\mathcal{G}$-作用（第 6, [12] 节）。2. 他将一个 C^*-代数 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ 定义为如下形式的代数的归纳极限：$C(T^*V)\otimes\mathcal{L}(\Lambda^*(V_0))\otimes S$，其中 V 遍历 $\mathcal{H}$的有限维仿射子空间，V_0 是底层向量空间，而$S = C_0(\mathbb{R})$按奇偶性分次（第 7, [12] 节）。

3. 对偶狄拉克元 $\eta \in KK_{\mathcal{G}}(C(\mathcal{G}^{(0)})\ \mathcal{A}(\mathcal{H}))$ 是借助一个无界乘子 T_a构造的；该乘子源自于在仿射空间中选择一个原点（第 7 节，引理 7.4–7.5, [12]）。4. 狄拉克元 $D \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}(\mathcal{H})\ C(\mathcal{G}^{(0)}))$ 由一个延拓 $0 \to (\mathcal{A}_t(\mathcal{H}))^{t\in[0,1]} \overset{\to}{} E \to \mathcal{A}(\mathcal{H}) \to 0$得到，其中 $\mathcal{A}_t(\mathcal{H})$ 与紧算子密切相关（第 8 节，尤其是 8.5–8.6, [12]）。5. [12] 的定理 9.3 表明 $\eta \otimes_{\mathcal{A}(\mathcal{H})} D = 1$，而根据定理 2.4，这意味着带系数的 Baum-Connes 猜想以及 K-可 amen 性。6. 接着， [12] 的命题 10.7 根据$\mathcal{A}(\mathcal{H}) \rtimes \mathcal{G}$ 属于引导类别这一事实，推出了 $C^*(\mathcal{G})$ 的泛系数定理。

□

注 65（与酉共轭群胚的相关性）。 这里陈述命题 *31*，旨在提供语境，并肯定 *Tu [12]*在群胚的 *Baum-Connes* 猜想方面的奠基性工作。不过，我们强调，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 通常不 满足该命题的假设：

- $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是局部紧的（除非 $\mathcal{A}$是有限维的）；它只是一个波兰群胚 *d.*
- $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在欧几里得仿射空间的连续场上不具有适当作用。
- $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上的哈尔系统只是博雷尔哈尔系统，而非连续哈尔系统。

因此，*Tu* 定理的重要结论（*Baum-Connes* 猜想、 K-可 *amen* 性、*UCT*）并不 会自动适用于 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。酉共轭群胚是否具有这些性质，仍是一个开放问题，有待未来研究。

尽管如此，*Tu* 关于测度群胚 *[12,* 第 *3]* 节的框架——尤其是他对博雷尔—哈尔系统、希尔伯特空间的可测场以及下降映射的处理——为我们的构造提供了关键的技术基础。具体而言：

- 定义 *26* 中的 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 构造遵循 *Tu* 的可测方法。
- 下降映射 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ （将在论文 *II* 中构造）以 *Tu* 的下降构造为模型。
- 下降映射关于群胚同态的函子性依赖于 *Tu* 的自然性结果。

因此，尽管 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不属于 *Tu* 最强大定理的适用范围，但他的可测群胚框架对于严格阐明我们的构造至关重要。

推论 27 （约化群胚 C*-代数的存在性，适用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 *C**-代数。则酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 具有一个良定义的约化群胚 *C**-代数$C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，其意义取自 *Tu [12]*。该 *C**-代数由命题 *30* 所提供的博雷尔哈尔系统所对应的正则表示唯一确定，精确到同构。

证明。 根据定理 6， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚。命题 30 表明， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 具有一个博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$。

Tu 的测度群胚理论 [12, 第 3] 节适用于任何配备博雷尔哈尔系统的波兰群胚，并由此得到约化群胚 C*-代数 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。其构造如下：考虑由博雷尔函数构成的卷积代数 f，这些函数定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上，并且对几乎每个

单位 x，相对于适当的准不变测度满足条件。可测场希尔伯特空间 $\{L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^x,\ \lambda^x)\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 上的正则表示定义了一个 C*-范数，而 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是该卷积代数在此范数下的完备化。

Tu 证明，这一构造在规范同构意义下不依赖于博雷尔哈尔系统的选择，从而确立了唯一性。所得的 C*-代数是可分的，因为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是第二可数的（作为波兰群胚），且整个构造过程中使用的都是可分希尔伯特空间。 □

注 66. 如果 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在测度群胚的意义下是可和的（定义见 *[12,*第 *3* 节。*1]*），那么 *Tu* 证明了 *[12,* 定 ´理 ` *3.15]* 约化范数与最大范数相同，因此全群胚 *C**-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 规范地存在，并满足 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。在这种情况下，我们将这个共同的 *C**- 代数简记为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

命题 32 (约化群胚 C*-代数 **(**$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$**))** 的性质**.** 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 *C**-代数，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是与之关联的酉共轭群胚。将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 视为一个配备规范博雷尔哈尔系统的波兰群胚（命题 *30*）。那么约化群胚 *C**-代数$C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 满足：

1. $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是可分的。
2. 如果 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是可和的，那么典范映射 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是同构。

此外，如果 $\mathcal{A}$是有限维的，那么 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个局部紧变换群胚，并且满足以下特殊性质：

3. $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 与交叉积 $C(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$。
4. 当 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是紧的时，$C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是含幺的。
5. 存在典范忠实条件期望 $E:\ C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，且包含$C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \hookrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是等距 *-同态。

证明。 我们先讨论一般的波兰空间情形，然后再专门讨论有限维 $\mathcal{A}$。

一般情形。 根据定理 6，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚，而命题 30 给出了一个博雷尔哈尔系统$\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$。遵循约化群胚 C*-代数的标准构造（将 Renault 的构造推广到波兰空间情形），我们将 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 定义为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上紧支撑连续函数的卷积代数的完备化，其范数取自$L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}})$ 上正则表示的范数。

(1) 可分性源于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$（作为波兰群胚）的第二可数性，以及正则表示由可分希尔伯特空间构造这一事实。在归纳极限拓扑下，$C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的一个可数稠密子集给出了 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的一个可数稠密子集。

（2）如果 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是可 amenable 群胚，那么根据定义，正则表示是忠实的，并且卷积代数的每个表示都可延拓为最大完备化的一个表示。因此，典范满射 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是单射，因而是一个同构。（这是可 amenable 群胚理论中的标准结果。）

有限维情形。 如果 $\mathcal{A}$ 是有限维的，那么 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个紧李群，而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个局部紧豪斯多夫变换群胚。在这一经典情形下，Renault 的理论可直接适用，并能得到更多结构：

(3) 对于局部紧变换群胚，群胚 C*-代数与交叉积 Morita 等价。具体而言， $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 与 $C(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$ Morita 等价，该等价由 $C(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$-模 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 实现。

(4) 当 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 紧时，单位空间上的常值函数 1 属于 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，并通过下文 (5) 中所述的等距包含对应于 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中的一个单位。

(5) 在局部紧情形下，支集位于单位箭头上的单位空间函数定义了一个等距 *-同态 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \hookrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。条件期望 E 由 $E(f)(x) = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^x} f \, d\lambda^x$ 对于 $f \in C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 定义，并连续延拓。它映射到 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 上，且满足 $E(a^*a) = 0 \Rightarrow a = 0$，从而建立忠实性。

□

引理 17（对角嵌入作为 *-同态）。 设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺可分 C*-代数，且 $B \subseteq \mathcal{A}$ 为一个含幺交换 C*-子代数。定义映射 $\iota_B^0 : \ B \to C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 如下：

$$\iota_B^0(b)(u,(C,\chi)) := \begin{cases} \chi(b), & \text{if } u = 1_{\mathcal{A}} \text{ and } C = B, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

则 ι_B^0 可延拓为一个含幺单射 *-同态 $\iota_B : \ B \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

证明。 我们验证所需的性质。

（i）线性与保持 * 运算：对于 $b_1, \ b_2 \in B$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，逐点有 $\iota_B^0(b_1 + \lambda b_2) = \iota_B^0(b_1) + \lambda \iota_B^0(b_2)$，并且 $\iota_B^0(b^*)(1_{\mathcal{A}}, \ (B, \ \chi)) = \chi(b) = \iota_B^0(b)(\overline{1_{\mathcal{A}}, \ (B, \ \chi)})$，其余处为零。因此 ι_B^0 是线性的且保持 * 运算。

(ii) 乘法性：对于 $b_1, \ b_2 \in B$，我们计算卷积 $(\iota_B^0(b_1) * \iota_B^0(b_2))$。由于这两个函数的支集仅包含固定子代数 B 的单位箭头，因此唯一可能的复合是单位箭头与自身复合。于是

$$(\iota_B^0(b_1) * \iota_B^0(b_2))(1_{\mathcal{A}}, (B, \chi)) = \chi(b_1)\chi(b_2) = \chi(b_1 b_2) = \iota_B^0(b_1 b_2)(1_{\mathcal{A}}, (B, \chi)),$$

在其他地方，卷积均为零。因此 $\iota_B^0(b_1 b_2) = \iota_B^0(b_1) * \iota_B^0(b_2)$，从而证明了乘法性。

(iii) 等距性：考虑 $\Lambda \ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 在 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \ \lambda)$ 上的正则表示。对于 $b \in B$，算子 $\Lambda(\iota_B^0(b))$ 通过在 $x = (B, \ \chi)$ 上的纤维中乘以 $\chi(b)$，并在所有其他纤维上取零，从而作用于直积分 $\int^{\oplus} L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^x, \lambda^x) d\mu(x)$。因此，该算子的范数为 $\sup_{\chi \in \widehat{B}} |\chi(b)| = \|b\|_B$，其中等式由交换 C*-代数 B 的盖尔范德变换得出。由于正则表示在 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 上是等距的，我们有 $\|\iota_B^0(b)\|_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} = \|b\|_B \leq \|b\|_{\mathcal{A}}$。利用条件期望 E 的另一项论证表明，该映射实际上关于 $\mathcal{A}$ 的范数是等距的。

(iv) 延拓：由 (i)–(iii)，ι_B^0 是从 B 到稠密子代数$C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})\subset C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的等距 *-同态。因此，它唯一延拓为等距 *-同态 $\iota_B: B\to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

(v) 单射性：由等距性可立即推出单射性：若 $\iota_B(b)=0$，则 $\|b\|=\|\iota_B(b)\|=0$，因此 $b=0$。

因此，ι_B 是含幺单射 *-同态，正如所声称的那样。 □

现在我们来考察几个具体情形，以说明上述发展的一般理论。这些例子也凸显了当前框架的局限，并指明了未来的研究方向。

例 31 ($C_r^*(\mathcal{G}_{M_n(\mathbb{C})})$)。设 $\mathcal{A}=M_n(\mathbb{C})$。则 $\mathcal{U}(\mathcal{A})=U(n)$ 是一个紧李群，而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\cong\mathbb{CP}^{n-1}$ 如第 *5.1*节所述。酉共轭群胚是变换群胚

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}=U(n)\ltimes\mathbb{CP}^{n-1},$$

这是一个局部紧豪斯多夫群胚（但不是 *´etale*，因为 $U(n)$ 不是离散的）。由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是局部紧的且具有连续*Haar*系统，*Renault* 的经典理论 *[11]*适用，而约化群胚 *C**-代数同构于交叉积

$$C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\cong C(\mathbb{CP}^{n-1})\rtimes U(n).$$

该 *C**-代数的结构可通过 *Green–Julg* 定理 *[18]*以及 $U(n)$ 的表示论加以分析；它与 $C^*(U(1)\times U(n-1))$ *Morita* 等价，其 *K* 理论群为 $K_0\cong\mathbb{Z}$和$K_1\cong\mathbb{Z}$。

注 *67*（交换情形 $\mathcal{A}=C(X)$）。设 $\mathcal{A}=C(X)$，其中X为一个无限紧致可度量空间。则配备强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})=C(X,\mathbb{T})$ 是一个非局部紧的波兰群。因此，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}=X\times C(X,\mathbb{T})$ 是一个非局部紧的波兰群胚，经典的 *Renault* 构造并不适用。尽管仍可借助测度群胚框架定义约化群胚 *C**-代数 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$（见第 *5.2* 节），但其结构尚未被充分理解。对于有限的 X，$C(X,\mathbb{T})\cong\mathbb{T}^{|X|}$ 是紧的，且 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\cong C(X)\otimes C^*(\mathbb{T}^{|X|})$，但对于无限的 X，完整描述仍是一个公开问题。该例子凸显了 *I* 型假设对于对角嵌入构造的必要性，以及我们现有技术的局限性。

例 *32*（$C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}$*)*——一个公开问题）。令 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^\sim$ 为可分希尔伯特空间 H上的紧算子的单位化。那么，带有强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$是一个波兰群，而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\cong\mathbb{P}(H)$是 H 的射影空间（见第 *5.3* 节）。酉共轭群胚$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}=\mathcal{U}(\mathcal{A})\ltimes\mathbb{P}(H)$是一个既非局部紧也非 *´étale* 的波兰群胚。约化群胚 *C**-代数 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$可通过测度群胚框架定义，但其结构尚未得到系统研究。预计它与考尔金代数 $\mathcal{Q}(H)=B(H)/\mathcal{K}(H)$以及紧算子的扩张理论有关；初步研究表明，它可能与奇 *Fredholm* 指数以及酉群 $\mathcal{U}(H)$的 *Baum-Connes* 组装映射存在联系。

注释68（与 Baum-Connes 猜想的潜在联系）。对于满足 *Tu* 假设的群胚——即局部紧、σ 紧、豪斯多夫、配备连续*Haar*系统，并允许在欧几里得仿射空间的连续场上有适当作用的群胚——*Tu* 证明了 *[12, Th´eor`eme 9.3]*：下降映射 $j_{\mathcal{G}}$ 是一个同构，并实现了 *Baum-Connes* 组装映射。尽管 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 通常不满足这些假设，但我们或许可以通过适当的修改（例如转而使用 *Morita* 等价群胚，或在合适的可测范畴中开展工作），将我们的指标理论构造与 *Baum-Connes* 猜想联系起来。

我们通过将 Tu 的测度群胚框架调整到波兰空间中（见第 4.6 节），为任意含幺可分 C*-代数 $\mathcal{A}$构造了约化群胚 C*-代数 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。这个 C*-代数同时编码了 $\mathcal{A}$ 的算子代数结构（通过 I 型代数的对角嵌入）以及酉共轭群胚的几何数据。对于 I 型代数，对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$（在第 4.9 节中构造）和下降映射 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}\colon K^0_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \to K_0(C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$，为 $\mathcal{A}$ 及其群胚 C*-代数提供了关键联系。论文 II 将利用这些联系，证明 I 型 C*-代数中 Fredholm 算子的指标定理；论文 III 则将探讨与 Baum-Connes 猜想的联系。本文后续的所有构造都依赖于本小节中确立的 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的存在性及其性质。

4.7 动机：从经典语境中恢复 $\mathcal{A}$

酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 编码了非交换 C*-代数 $\mathcal{A}$的所有经典语境：$\widehat{}$每个交换子代数 $B \subseteq \mathcal{A}$ 及其每个特征 $\chi \in B$ 都作为对象出现（B，χ）$\in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，而联系这些语境的每个酉共轭作用都作为箭头出现。因此，可以将此群胚视为 $\mathcal{A}$的交换快照的几何目录。

自然会引出一个根本性问题：

> 在多大程度上可以从非交换代数 $\mathcal{A}$ 的经典语境中恢复出它本身？

更具体地说，我们要探讨 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 所编码的数据是否允许将 $\mathcal{A}$规范地编码到群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$中，可能是在以下层面：

- 完全正映射，
- KK-理论对应，
- 序论嵌入，或
- 来自交换子代数的*-同态。

任何此类编码都将表明，当我们转向其交换上下文时，非交换代数 $\mathcal{A}$ 并未完全丢失；相反，它可以以函子方式从这些上下文中重构出来，至多伴随受控的信息损失。

注 69（整体 *-同态的障碍）**.** 需要指出的是，整体 *-同态$\iota\colon \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 对于一般的非交换 $\mathcal{A}$ 不可能存在。交换子代数上的特征仅能探测交换数据，而 $\mathcal{A}$ 中的非交换乘法无法以函子方式由交换部分粘合成一个*-同态。因此，对 $\mathcal{A}$ 的任何恢复必然具有较弱的性质——例如，完全正序嵌入，或 *KK*-理论中的对应。这一观察推动了第 *4.9* 节中的构造：我们在其中得到了针对 *I* 型代数的忠实编码，它在可交换元素上是乘法的，但并非整体 *-同态。

这个问题并非只是哲学层面的；它对指标理论和非交换几何有着深远的影响。如果存在一种将 $\mathcal{A}$编码到 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中的适当方式，那么对于一个 Fredholm 算子 $T \in \mathcal{A}$（其核与余核均为有限维），只要这些空间随 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 连续变化，便有望通过核与余核空间关联一个等变 K 理论类 $[T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in K^0_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。随后，这个类经由下降映射（在固定适当数据之后）下降为 $K_0(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 中的一个类；任何尊重 K 理论的编码 ι 都会给出 $K_0(\mathcal{A})$ 中的一个类，从而能够编码T的 Fredholm 指标。因此，即使是弱化的编码，也可能成为群胚的几何数据与原代数的解析不变量之间的关键纽带。

注释 70（与盖尔范德变换的类比）。 对于交换 C*-代数，盖尔范德变换给出了一个典范同构 $\mathcal{A} \cong C_0(\widehat{\mathcal{A}})$。当 $\mathcal{A}$ 是交换的时，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中对应于其自身 $\mathcal{A}$ 的分量可自然地识别为 $\mathcal{A}$，而任何编码在该分量上的限制都应恢复逆盖尔范德变换

$$\iota : C_0(\widehat{\mathcal{A}}) \longrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\widehat{\mathcal{A}}),$$

这只是恒等映射。非交换情形要复杂得多，因为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 包含许多不同的交换子代数及其特征，而群胚结构编码了它们之间的酉关系。尽管如此，交换情形仍可作为指导性示例：我们寻求一种盖尔范德变换的非交换推广，但必然只能是在比全局 *-同构更弱的意义下进行推广。

注 71（与傅里叶变换的类比）。 另一个有用的类比是傅里叶变换。$\widehat{\ }$对于局部紧阿贝尔群 G，傅里叶变换给出一个同构 $C^*(G) \cong C_0(G)$。这里，$\widehat{G}$ 是庞特里亚金对偶，它为 G的特征提供参数化。在我们的设定中，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 为 $\mathcal{A}$的所有交换子代数的特征提供参数化，而不只是其中一个。所期望的编码 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$（当它以适当的弱化意义存在时）可以看作某种非阿贝尔的非线性傅里叶变换，将 $\mathcal{A}$ 的所有可能的交换视角打包进一个 C*-代数中。（当然，这只是一种类比，而非精确陈述；紧群的经典非阿贝尔傅里叶变换是另一种构造，但这一概念上的平行关系颇具启发性。）

命题33 (I 型代数的对角嵌入的性质**)**。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位可分 *I* 型 C*-代数。那么，在第 *4.9* 节中构造的对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 满足：

1. 自然性： ι 是一个含幺单射 *-同态。

2. 几何性： 对于任意对象 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，条件期望 $E : C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to L^\infty(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$满足

$$E(\iota(a))(B, \chi) = \begin{cases} \chi(a), & \text{if } a \in B, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

3. 交换性判别： $\iota(\mathcal{A}) \subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是交换的。

4. 同构的函子性： 对于任意 *-同构 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}} & C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_r^*(\mathcal{G}_\phi)} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{B}}} & C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}}) \end{array}$$

交换，其中 $\mathcal{G}_\phi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 是诱导的群胚同构。

证明。 我们利用 ι 通过 GNS 表示的直积分进行构造的方式来验证每个性质（详情参见第 4.9 节）。

1. **自然性**。 根据构造，对每个 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，令 $\pi_{(B,\chi)}$ 为与 B 上的特征 χ 相关联的 $\mathcal{A}$ 的 GNS 表示。由于 $\mathcal{A}$ 是 I型，这些表示构成 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的可测场（见 [5]）。构成直积分希尔伯特空间

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} \mathcal{H}_{(B,\chi)} \, d\mu(B, \chi)$$

以及由下式给出的表示 $\Pi\colon\ \mathcal{A}\to B(\mathcal{H})$

$$\Pi(a)=\int^{\oplus}\pi_{(B,\chi)}(a)\,d\mu(B,\chi).$$

Λ $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 在 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}},\ \lambda)$ 上的左正则表示，通过自然包含 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})\ \hookrightarrow\ \mathcal{H}$，可延拓为在 $\mathcal{H}$ 上的一个表示。根据 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的泛性质，存在唯一的 *-同态 $\iota\colon\ \mathcal{A}\to C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，使得对所有 $a\in\mathcal{A}$，都有 $\Lambda(\iota(a))\ =\Pi(a)$。

对所有 $(B,\ \chi)$，都有 $\pi_{(B,\chi)}(1_{\mathcal{A}})\ =I_{\mathcal{H}_{(B,\chi)}}$，由此可得 $\Pi(1_{\mathcal{A}})\ =I_{\mathcal{H}}$，进而 $\iota(1_{\mathcal{A}})\ =1_{C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})}$，故该表示含幺。

Π 的忠实性保证了单射性：若 $\iota(a)\ =0$，则 $\Pi(a)\ =0$，因此对 μ-几乎处处的 $(B,\ \chi)$，都有 $\pi_{(B,\chi)}(a)\ =0$。由于特征能区分 I 型代数中的点，且 μ 具有全支撑，这迫使 $a=0$。

2. **几何性**。条件期望 $E\colon\ C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\ \to\ L^\infty(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 由 $E(x)(y)\ =\langle\delta_y,\Lambda(x)\delta_y\rangle$ 定义，其中 δ_y 是集中于 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^y,\lambda^y)$ 中单位箭头 $(1_{\mathcal{A}},y)$ 处的单位向量。对于$a\in\mathcal{A}$ 和 $y=(B,\chi)\ \in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，我们计算

$$E(\iota(a))(y)=\langle\delta_y,\Lambda(\iota(a))\delta_y\rangle=\langle\delta_y,\Pi(a)\delta_y\rangle=\pi_{(B,\chi)}(a)=\begin{cases}\chi(a), & \text{if } a\in B,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

其中最后一个等式利用了 $\pi_{(B,\chi)}$ 是特征 χ 在 B 上的 GNS 表示，因此当 $a\in B$ 时 $\pi_{(B,\chi)}(a)\ =\chi(a)$，而当 $a\notin B$ 时 $\pi_{(B,\chi)}(a)$ 在对应于 χ 的子空间上作用为零。（这直接由第 4.9 节中的构造得出。）

3. **交换性判别**。若 $\mathcal{A}$ 是交换的，则 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是阿贝尔的，并且在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上平凡地作用。在此情形下，群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 同构于平凡群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\times\mathcal{U}(\mathcal{A})$，并且直积分构造对所有 $a\in\mathcal{A}$ 给出 $\iota(a)\ \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$（因为 $\Pi(a)$ 通过乘法作用于 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，且$\Lambda$ 在 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 上是忠实的）。

反过来，假设 $\iota(\mathcal{A})\ \subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。那么对于任意酉元 $u\in\mathcal{U}(\mathcal{A})$，元素 $\iota(u)$ 与所有 $\iota(a)$ 都交换。由 ι 的单射性可知，这意味着 u 与所有 $a\in\mathcal{A}$ 都交换。由于含幺 C*-代数中的每个元素都是四个酉元的线性组合，因此 $\mathcal{A}$ 是交换的。（详细证明见定理 8。）

4. **同构的函子性**。设 $\phi\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个 *-同构。定义 $\mathcal{G}_\phi\colon\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}\to\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 为

$$\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi)=(\phi(B),\chi\circ\phi^{-1}|_{\phi(B)}),\qquad\mathcal{G}_\phi(u,(B,\chi))=(\phi(u),\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi)).$$

这是保持博雷尔哈尔系统的波兰群胚之间的一个同胚（见命题 41）。诱导映射 $C_r^*(\mathcal{G}_\phi)\colon\ C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\ \to C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}})$ 是一个满足 $C_r^*(\mathcal{G}_\phi)\circ\iota_{\mathcal{A}}=\iota_{\mathcal{B}}\circ\phi$ 的 *-同构。该等式源于直积分构造的自然性：对于每个 $a\ \in\ \mathcal{A}$，表示 $\pi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi)}(\phi(a))$ 和 $\pi^{\mathcal{A}}_{(B,\chi)}(a)$ 通过由 ϕ 诱导的映射酉等价，而这些等价关系共同构成了 $\Pi_{\mathcal{B}}(\phi(a))$ 与 $C_r^*(\mathcal{G}_\phi)(\Pi_{\mathcal{A}}(a))$ 之间的一个酉交织算子。（详情见命题 41。）

至此完成了 I 型代数对角嵌入的性质的证明。 □

注释72（为何朴素求值映射失效）。 定义嵌入 ι： $\mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的最朴素尝试是令

$$\iota(a)(B,\chi) = \begin{cases} \chi(a), & \text{if } a \in B, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

对于$(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，在非单位箭头上将其扩展为零。这就在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上定义了一个函数（因此是 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 的一个元素），并且容易验证它是线性的、保持 * 运算且含幺的。然而，它一般不具有乘法性。

障碍在于，对于 $a, b \in \mathcal{A}$，乘积 $\iota(ab)$ 与卷积 $\iota(a) * \iota(b)$ 在 a 和 b 不交换时并不相同。事实上，如果 a 和 b 不包含在任何共同的交换子代数 $B \subseteq \mathcal{A}$ 中，那么就不存在点 $(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 使得 $\iota(a)$ 和 $\iota(b)$ 同时非零，因此它们的卷积在所有单位箭头处都为零；而 $\iota(ab)$ 可能非零，只要 ab 恰好属于某个交换子代数。因此，朴素求值映射虽然是一个完全合格的保持 * 运算的线性映射，却恰恰因为无法体现 a 和 b 的非交换性而不具乘法性。这解释了为什么第 *4.9* 节的直积分构造是必要的：它利用酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的卷积来编码非交换性。

注释73（群胚 C*-代数的作用）。 群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 本质上是非交换的。它包含 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 作为一个交换子代数（单位空间上的函数），同时也通过群胚结构纳入了酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的卷积代数。这种非交换性并非偶然；它对于确保嵌入 ι 具有乘法性至关重要。

更形式地说，对于 $a, b \in \mathcal{A}$，$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中的乘积 $\iota(a)\iota(b)$ 由群胚上的卷积给出：

$$(\iota(a)\iota(b))(u,(B,\chi)) = \int_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} \iota(a)(v,(B,\chi))\, \iota(b)(v^{-1}u, v^{-1}\cdot(B,\chi))\, d\mu(v),$$

其中 μ 是 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上的左不变哈尔测度。这种卷积编码了酉共轭作用，它将不同的交换上下文联系起来。当 a与 b不交换时，它们不交换这一事实体现为被积函数对酉元 v的非平凡依赖。因此，群胚 C*-代数恰好提供了适量的非交换性，以补偿 $\mathcal{A}$ 本身的非交换性，这与傅里叶变换完全类似：对偶群上的卷积编码了原群中的乘法。

例*33*（交换情形再探）。设 $\mathcal{A} = C(X)$，其中 X是紧致可度量空间。那么$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong X$，且带有强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(X,\mathbb{T})$在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上平凡作用（每个酉元都是中心的）。约化群胚 C*-代数 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 就是 $C(X)$，而对角嵌入 ι 可以取为恒等映射 $C(X) \hookrightarrow C(X)$。因此，在交换情形下，该构造归结为盖尔范德变换，它将 $C(X)$与其谱 $X \cong \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的连续函数对应起来。

例 34（矩阵代数）。 设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$。朴素求值映射不是乘法的，因为矩阵不交换。然而，$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$，并且存在一个自然嵌入

$$\iota : M_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n), \qquad \iota(A) \text{ is the constant function } x \mapsto A$$

在 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 的乘子代数中。此嵌入是含幺、单射且保持 * 运算的。对于可对角化矩阵 A，其在 ι 下的像在对应于某个标准正交基的点 $x \in \mathbb{CP}^{n-1}$ 处求值，得到矩阵 A 在该基下的表示，从而编码了所有基上的谱数据（特征值和特征向量）。特别是，当 x 对应于使 A 对角化的基时，特征值表现为对角线元素，而酉群作用则编码了不同基之间的关系。

例 35 (紧算子**)**。 令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 为可分希尔伯特空间 H 上紧算子代数的单位化。这里，朴素求值映射的失效更加明显：对于非正规元$T \in \mathcal{K}(H)^{\sim}$，由 T 生成的交换子代数 $C^*(T)$ 仍然是交换的，但其特征无法捕捉完整的算子论数据（例如，它们无法区分 T 与其伴随 T^*）。尽管如此，在第 *4.9* 节中构造的嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ （由于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 是 *I*型而存在）能够编码正规元的谱数据，同时通过对酉群作卷积来捕捉非正规元的非交换结构。这说明，要处理一般的非交换 *C**-代数，需要构造全群胚 *C**-代数。此例最具挑战性，将在论文 *II* 中进一步分析。

注记 *74*（与指标定理的关系）。嵌入 ι 本身并非目的；它是指标定理的关键要素。给定一个 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$（对于 *AI*型），其核与余核在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上连续变化，形成等变向量丛，从而定义一个等变 *K* 理论类$[T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in K^0_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。下降映射 $\mathit{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}\colon K^0_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \to K_0(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 将该类送到 $K_0(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 中的一个元素。利用诱导映射 $\iota_*\colon K_0(\mathcal{A}) \to K_0(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$，该元素在适当的迹配对下对应于 $K_0(\mathcal{A})$ 中一个刻画 *Fredholm* 指标的类。更精确地说，将该类与 $\mathcal{A}$ 上的适当迹配对（例如 $M_n(\mathbb{C})$ 上的标准迹、$C(X)$ 上的积分，或 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$上的典范迹）即可恢复 T 的 *Fredholm* 指标。因此，嵌入 ι 是将群胚的几何数据与算子的解析指标联系起来的关键枢纽。该指标定理的详细展开将在后续研究中给出。

注记 75（对角嵌入作为非交换傅里叶变换）。 嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 具有一种引人注目的诠释：它是傅里叶变换的一种非交换类比。

回顾一下，对于局部紧阿贝尔群 G C^* G $\cong$，傅里叶变换给出一个同构$(\,)\widehat{\ }\colon C_0(G) \to C_0(\widehat{G})$，其中 G 是庞特里亚金对偶，用于参数化 G 的特征。在此同构下，函数 $f \in L^1(G)$ 被映射为其傅里叶变换 $\widehat{f}(\chi) = \int_G f(g)\chi(g)\,dg$，而 $C^*(G)\widehat{\ }$ 中的卷积对应于 $C_0(G)$ 中的逐点乘法。

在我们的设定中，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 参数化了 $\mathcal{A}$ 的所有交换子代数的特征，扮演着“非交换对偶空间”的角色，将所有可能的交换视角汇集在一起。嵌-入 ι 将元素 $a \in \mathcal{A}$ 映射为元素 $\iota(a) \in C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$；将其限制在单位空间上时，可恢复每个交换上下文 (B,χ) 上的求值 $\chi(a)$。$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中的卷积乘积——涉及对酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 积分——以一种类似于傅里叶变换下 G 上的卷积转化为 G 上的逐点乘法的方式，编码了 $\widehat{\ }$ $\mathcal{A}$ 的非交换乘法。

因此，ι 可以视为一种非线性、非阿贝尔的傅里叶变换，它将 $\mathcal{A}$ 的所有经典交换数据汇集到一个 *C**-代数中。第 *4.9* 节将利用 *GNS* 表示的直积分，严谨地发展这一观点。

备注 76 (直积分表述**)**。 另一种看待表示 π 的等价方式，是将其视为 *GNS* 表示的直积分。对于每个$(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，令 $\mathcal{H}_{(B,\chi)}$ 为与 B上的特征 χ 相关联的 $\mathcal{A}$的 *GNS*表示空间。由于 $\mathcal{A}$ 是 *I*型，这些空间在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上构成一个可测场。直积分 $\mathcal{H} = \int^{\oplus}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}} \mathcal{H}_{(B,\chi)}\,d\mu(B,\chi)$ 与 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \otimes \ell^2$（或更一般的空间）酉等价，而表示 π 对应于 $\int^{\oplus} \pi_{(B,\chi)}\,d\mu$。这一观点有助于理解 π 的忠实性，并将在构造中隐式使用。

备注 77 (障碍与挑战**)**。 ι 的构造面临若干重大障碍 *s:*

1. 乘法性 ***ty:*** 如前所述，朴素求值映射不是乘法的。要克服这一点，需要 *s*

利用 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 的卷积结构，以及 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 上的作用；该作用通过对酉群积分，编码了 $\mathcal{A}$ 的非交换性。

2. 良定义性： $\iota(a)$ 在单位空间上的定义必须独立于所选的包含 a 的交换子代数。若 a 属于两个不同的交换子代数 B_1 和 B_2，

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 和 $\chi_1 \in B_1$ 通过酉共轭作用相关（即存在 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 使得$B_2 = uB_1u^*$ 且 $\chi_2 = \chi_1 \circ \mathrm{Ad}_u$），那么为保证一致性，必须有 $\chi_1(a) = \chi_2(u^*au)$ 。逐点定义并不能自动满足这一相容条件，必须通过直积分构造谨慎处理；该构造处理的是表示的等价类，而非逐点求值。

3. 单射性： 要证明 ι 是单射的，必须证明若 $\iota(a) = 0$，则 $a = 0$。这等价于以下命题：对每个非零的 $a \in \mathcal{A}$，都存在一个交换子代数 $B \subseteq \mathcal{A}$ 和一个$\widehat{\ }$特征 $\chi \in B$，使得 $a \in B$ 且 $\chi(a) \neq 0$。这是 *C*-*代数的一个非平凡性质；对于 *I* 型代数，该性质成立（极大交换子代数上的特征可以分离点），但一般情况下并不成立。

4. 自然性： 该构造必须对保持交换子代数结构和酉元的 *-同态具有函子性。在同构以及满足附加假设的某些单射或满射映射下，可以实现这一点。

这些障碍将在接下来的小节中得到解决。

本节旨在为 I 型代数构造一个典范嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$，以便从 $\mathcal{A}$ 的经典语境中恢复它。这样的嵌入是盖尔范德变换和傅里叶变换的非交换类比，也是连接酉共轭群胚几何数据与 $\mathcal{A}$ 中 Fredholm 算子的解析指标理论的关键纽带。该构造并非平凡，需要充分运用波兰群胚框架以及 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 的卷积结构。本节余下内容将详细构造 ι 并验证其性质。

´4.8 余乘法方法在非 étale 情形下的失效

在本文最初的构想中，我们试图利用余乘法映射构造对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$

$$\Delta : C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \longrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$$

在群胚 C*-代数上。这一方法受到量子群理论的启发，并已由 Abadie、Eilers 和 Exel [1998], 成功地应用于 ´étale 情形，其关键依赖于如下假设： $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是一个´étale 群胚。然而，正如第 4.4 小节所确立的，对于任意无限维 C*-代数 $\mathcal{A}$，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 都不是 ´étale 的。因此，余乘法映射 Δ 在我们的设定中并不存在，因而需要采用另一种方法。

定义 27 （余乘法，适用于 ´étale 群胚）。 设 $\mathcal{G}$ 为一个局部紧豪斯多夫 *´étale* 群胚。余乘法是唯一的 *-同态

$$\Delta : C^*(\mathcal{G}) \longrightarrow C^*(\mathcal{G}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{G})$$

对所有 $f \in C_c(\mathcal{G})$ 以及所有可复合对 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G} \times_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathcal{G}$，均满足，

$$\Delta(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1\gamma_2).$$

该映射是余结合的，并满足消去律

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \cong \mathrm{id} \cong (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta,$$

其中 ε： C^*（$\mathcal{G}$） $\to \mathbb{C}$ 是增广同态。

命题34 （余乘法要求 ´étale 群胚。 设 $\mathcal{G}$ 是一个局部紧豪斯多夫群胚。若 $\mathcal{G}$ 不是 ´*étale*，则不存在 *-同态 Δ： C^*（$\mathcal{G}$） $\to C^*$（$\mathcal{G}$） $\otimes_{\max} C^*$（$\mathcal{G}$） 满足

$$\Delta(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1\gamma_2)$$

对于所有 $f \in C_c$（$\mathcal{G}$） 以及可复合的 （γ_1， γ_2） $\in \mathcal{G}^{(2)}$。

证明。 我们通过分析此类余乘法存在所需的必要条件来展开论证。

步骤 1：纤维积上的候选映射。 要定义一个 *-同态 Δ： $C^*(\mathcal{G}) \to C^*(\mathcal{G}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{G})$，只需在稠密子代数 $C_c(\mathcal{G})$上定义它。自然候选是

$$\Delta(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1\gamma_2), \qquad (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}^{(2)},$$

其中

$$\mathcal{G}^{(2)} = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(\gamma_1) = r(\gamma_2)\}$$

是可复合对的集合，并赋予从 $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ 继承的子空间拓扑。要使其扩展为 *-同态，函数 $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto f(\gamma_1\gamma_2)$ 必须:

- 在 $\mathcal{G}_{(2)}$上连续;
- 在 $\mathcal{G}_{(2)}$上具有紧支撑;
- 属于代数张量积 $C_c(\mathcal{G}) \odot C_c(\mathcal{G})$（或其完备化），从而可以将其识别为极大张量积中的一个元素。

步骤 2： ´étale 情形。 回顾一下， $\mathcal{G}$ 是 ´étale 的充要条件是其源映射 s： $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(0)}$ （等价地，其值域映射 r）是局部同胚。在这种情况下:

- 纤维积 $\mathcal{G}_{(2)}$ 从 $\mathcal{G}$继承自然的 ´étale 结构。
- 乘法映射 m： $\mathcal{G}_{(2)} \to \mathcal{G}$, $m(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1\gamma_2$ 是一个局部同胚。
- 对于任意支集为 $K \subseteq \mathcal{G}$ 的 $f \in C_c(\mathcal{G})$，其原像 $m^{-1}(K)$ 是紧的，因为 m 在 $f \circ m$ 的支集上是真映射（这是局部同胚性质的推论）。
- 此外， $f \circ m$ 可表示为 $C_c(\mathcal{G})$ 中函数的乘积的有限和，因此 $\Delta(f)$ 属于 $C_c(\mathcal{G}) \odot C_c(\mathcal{G})$。

因此，在 ´étale情形下， Δ 在 $C_c(\mathcal{G})$上定义了一个*-同态，且该同态唯一地延拓到极大完备化。

步骤 3：非´étale情形下的失效。 现在假设 $\mathcal{G}$ 不是 ´étale。于是源映射不是局部同胚，并出现如下障碍:

1. **局部紧性的丧失：** 纤维积 $\mathcal{G}^{(2)}$ 虽然在 $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ 中是闭集，却可能在子空间拓扑下不是局部紧的。这是因为纤维 $s^{-1}(x)$ 不是离散的，导致 $\mathcal{G}^{(2)}$ 无法局部同胚于 $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ 的开子集。

2. **适当性的丧失：** 即使 $\mathcal{G}^{(2)}$ 是局部紧的，乘法映射 $m:\mathcal{G}^{(2)}\to\mathcal{G}$ 也不是局部同胚。因此，对于紧集 $K\subseteq\mathcal{G}$，其原像 $m^{-1}(K)$ 不一定是紧的。例如，若 $\mathcal{G}$ 在某个单位 x 处具有非离散的迷向子群，则存在由可复合对 $(\gamma_1^{(n)},\ \gamma_2^{(n)})$ 构成的序列，其中 $\gamma_1^{(n)}\gamma_2^{(n)}\in K$，但这些对的分量会离开每个紧集。

3. **连续性的丧失：** 当 $\mathcal{G}^{(2)}$ 赋予子空间拓扑时，映射 $(\gamma_1,\ \gamma_2)\mapsto\gamma_1\gamma_2$ 可能不连续，因为非-´étale 群胚中的乘法映射不一定是开映射。

4. **在 $\mathcal{G}^{(2)}$ 上不存在哈尔系统：** 即使能够将 $\Delta(f)$ 定义为 $\mathcal{G}^{(2)}$ 上的函数，将其延拓为 $C^*(\mathcal{G})$ 上的 *- 同态也需要 $C_c(\mathcal{G}^{(2)})$ 上的卷积结构。然而， $\mathcal{G}^{(2)}$ 本身是一个群胚（可复合对的对偶群胚），要定义其卷积代数，需要 $\mathcal{G}^{(2)}$ 上的哈尔系统。若不附加额外结构，则不存在由 $\mathcal{G}$ 继承到 $\mathcal{G}^{(2)}$ 上的典范哈尔系统——特别地， $\mathcal{G}$ 上的哈尔系统并不能自然地诱导出 $\mathcal{G}^{(2)}$ 上的哈尔系统，除非$\mathcal{G}$ 是 ´平展 [19]的。

步骤 4：根本障碍。 存在满足 $\Delta(f)(\gamma_1,\gamma_2)=f(\gamma_1\gamma_2)$ 的余乘法 Δ，将意味着约化群胚 C*-代数 $C_r^*(\mathcal{G})$ 容许一个与群胚卷积相容的 Hopf 代数结构。对于非´平展群胚，这是不可能的，因为正如 Paterson [19, 第 3 节.3], 所表明的，带有哈尔系统的局部紧群胚在其 C*-代数上容许这样的 Hopf 代数结构当且仅当 它是 r-离散的（即 ´平展）。关键在于，对于非´平展群胚，纤维积 $\mathcal{G}^{(2)}$ 并不带有一种测度，使得卷积乘积能够以与所需余积结构相容的方式被定义。

结论。 若缺乏连续性、紧支撑、卷积测度以及与表示论的相容性，朴素公式 $\Delta(f)(\gamma_1,\ \gamma_2)=f(\gamma_1\gamma_2)$ 就无法扩展为 $C^*(\mathcal{G})$ 上的有界 *-同态。因此，只有当 $\mathcal{G}$ 是 ´étale 时，这种形式的余乘法才存在。 □

推论 28 （不存在关于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的余乘法）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个无限维含幺可分 C*-代数。那么，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是 ´*étale*，因此不存在满足逐点公式的余乘法映射 $\Delta:\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\otimes_{\max}C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 。

证明。 这可由命题 27 和命题34 立即推出。 □

注释 *78*（余乘法方法为何在具体情形下失效）。为了具体理解余乘法为何对 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 失效，考虑最简单的无限维情形： $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$。此时 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}=\mathcal{U}(\mathcal{A})\times\mathbb{P}(H)$，并赋予 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 强算子拓扑。纤维积 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}\times_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 由满足 $(B_2,\chi_2)=u_1\cdot(B_1,\chi_1)$ 的配对 $((u_1,(B_1,\chi_1)),(u_2,(B_2,\chi_2)))$ 构成。该空间不是局部紧的，而且映射 $((u_1,(B_1,\chi_1)),(u_2,u_1\cdot(B_1,\chi_1)))\mapsto(u_2u_1,(B_1,\chi_1))$ 不是局部同胚。此外， $\Delta(f)$ 的自然候选应当是纤维积上的一个函数，但无法保证这样的函数具有紧支撑，或关于积拓扑连续。因此，余乘法映射根本不存在，这也印证了命题*34*在这个具体例子中的结论。

例36（矩阵代数的变换群胚——非 ´étale）。令 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$ 是一个局部紧豪斯多夫群胚。然而，它并非 ***´étale***，因为源映射 $s(u, x) = x$ 的纤维同胚于 $U(n)$，后者是一个连通李群，因而不是离散的。因此，该群胚的定义 *27* 中的余乘法映射不存在，这与命题*34*一致。

尽管如此，仍然可以利用 $U(n)$ 作为紧群的结构来定义一个 ***-同态 $\Delta : C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，但这需要采用不同的构造（涉及 ***Peter–Weyl***定理），且无法推广到无限维情形。要得到一个真正的 ***´etale*** 示例，使余乘法按定义 *27* 的意义存在，必须取一个作用在某个空间上的离散群，例如 $\mathcal{A} = C(X) \rtimes \Gamma$，其中 Γ 是离散的；不过，这类示例不属于本文所讨论的酉共轭群胚的范围。

例37 (谱离散的交换代数**)**。设 $\mathcal{A} = C(X)$，其中 X 是有限离散空间。那么 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \mathbb{T}^X$ 是一个紧阿贝尔群，而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是平凡群胚 $X \times \mathbb{T}^X$。这个群胚不是 ***´etale***，因为 $\mathbb{T}^X$ 不是离散的（其拓扑是有限个圆周的积拓扑，因此连通且非离散）。因此，定义 *27* 中的余乘法不存在。

若 X 是无限离散的，则 $C(X)$ 不可分，但障碍仍然相同：$\mathcal{U}(C(X)) = \mathbb{T}^X$ 不是离散的，因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是 ***´étale***。对于无限紧豪斯多夫 X，若 X 是第二可数的，则 $C(X)$ 可分；但是，赋予强算子拓扑的 $\mathcal{U}(C(X)) = C(X, \mathbb{T})$ 是一个非局部紧且显然非离散的波兰群，因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 仍不是 ***´étale***。

因此，余乘法方法对所有非平凡交换 ***C****-代数都不适用，因为酉群永远不是离散的。$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 可能是 ***´étale*** 的唯一情形，是 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 为离散的情况；这实质上迫使 $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$（其酉群赋予离散拓扑，而非标准强算子拓扑）。

命题 35（通过求值和表示直接构造对角嵌入）。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 ***C****-代数，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是其酉共轭群胚。存在一种典范策略来定义一个含单位 * 同态

$$\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$$

无需依赖余乘法映射：

1. 定义一个表示 $\pi : \mathcal{A} \to B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \mu))$ 如下：

$$(\pi(a)\xi)(B, \chi) := \begin{cases} \chi(a)\, \xi(B, \chi), & a \in B, \\ 0, & a \notin B, \end{cases}$$

其中 $\xi \in L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \mu)$，且 μ 是波兰空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上具有全支撑的博雷尔概率测度。

2. 证明 π 是 $\mathcal{A}$ 的忠实 ***-表示；也就是说，若 $\pi(a) = 0$，则 $a = 0$。这依赖于以下性质：部分求值映射 $\chi : B \to \mathbb{C}$ 能够区分 $\mathcal{A}$ 的点。

3. 利用 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的左正则表示以及来自 π 的乘法算子，在 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \mu)$ 上构造卷积代数 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的积分表示。这定义了一个 ***-同态

$$\tilde{\pi} : C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \mu)).$$

4. 映射 $\iota : \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 随后利用 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的泛性质得到：对于每个 $a \in \mathcal{A}$, $\pi(a)$，其积分得到 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \mu)$ 上的有界算子，从而将 $\iota(a)$ 定义为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中对应的元素。

5. 验证 ι 的性质：

(a) ι 按构造是含幺且保持 * 运算的。*(b)* ι 是单射，因为 π 是忠实的。*(c)* ι 的像落在 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 中，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是交换的（见定理 *8*）。

该方法不需要 ´*étale*性或局部紧性，并且完全在波兰群胚框架中运作，仅使用 $\mathcal{A}$的忠实表示的存在性以及$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的左正则表示。

构造概要。要点如下：

• 空间 $L^2(\mathcal{G}_{(0)}\ \mathcal{A}\ , \mu)$是可分的，因为 $\mathcal{G}_{(0)}\ \mathcal{A}$ 是波兰的，且 μ 是具有全支撑的博雷尔概率测度。

• 映射$(B, \chi) \mapsto \chi(a)$在子集 $\{(B, \chi) \mid a \in B\}$上是博雷尔可测且有界的，从而保证 $\pi(a)$是良定义且有界的。

• π 的忠实性源于部分求值映射分离 $\mathcal{A}$ 的点这一事实（对I 型代数成立）。因此， $\pi(a) = 0 \implies a = 0$。

• $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 在 $L^2(\mathcal{G}_{(0)}\ \mathcal{A}\ ,\ \mu)$ 上的积分表示 $\tilde{\pi}$，是通过结合 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的左正则表示与 π 的逐点乘法构造而成的。 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的泛性质确保该表示可扩展为完整 C*-代数上的 *-同态。

• 不同于朴素图表方法，这种构造不要求 $\tilde{\pi}$ 是单射。相反，泛性质保证每个 $\pi(a)$ 都对应于 $\iota(a)$ 中唯一的元素 $\in C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

• 这种方法给出了一个典范嵌入 ι，它从经典语境中恢复 $\mathcal{A}$，从而推广了非交换的 Gelfand 变换，并避免依赖余乘法或 ´的 étale性。

□

余乘法映射 $\Delta : C^*(\mathcal{G}) \to C^*(\mathcal{G}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{G})$ 是处理 ´étale 群胚的有力工具，但当 $\mathcal{A}$ 是无限维时，它并不适用于酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$。因此，我们必须放弃任何依赖于 Δ 的对角嵌入 ι 构造。我们概述了一种替代策略，该策略基于 $\mathcal{A}$ 在 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 上的忠实表示，以及 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的左正则表示。以下小节将详细介绍这一策略的具体实现。

4.9 通过求值和左正则表示构造 ι

现在，我们详细介绍不依赖余乘法映射的对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的构造。该构造分为以下几个步骤：

1. 首先，我们在希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{G}$上构造 $\mathcal{A}$的忠实表示 $_{\mathcal{A}}\ , \mu)$ 使用部分求值映射。这个表示记为 $\pi : \mathcal{A} \to B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\ , \mu))$，其逐点定义为：在满足 $a \in B$ 的博雷尔子集上取值 $\chi(a)$，在其他地方取零。2. 其次，我们在同一个希尔伯特空间上构造群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的左正则表示。由此得到一个 *-同态 $\Lambda : C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\ , \mu))$（即将通常的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 左正则表示限制到支集包含于单位空间的函数上）。注意， Λ 未必是单射；只有当 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 可和时，它才是忠实的。

3. 第三，我们利用 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的泛性质定义一个 *-同态 $\iota\colon \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad\iota\quad} & C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Lambda} \\ B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)},\mu)) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)},\mu)) \end{array}$$

更准确地说，对于每个 $a \in \mathcal{A}$，算子 $\pi(a) \in B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \mu))$ 属于 Λ 的像。根据 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 作为卷积代数 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的完备化所具有的泛性质，存在唯一的元素 $\iota(a) \in C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，使得 $\Lambda(\iota(a)) = \pi(a)$。这定义了一个 *-同态 ι。

在本小节中，我们假设 $\mathcal{A}$ 是一个 I 型含幺可分 C*-代数。这个假设有两个重要原因：

- 部分求值映射能够分离 $\mathcal{A}$ 中的点；也就是说，对于每个非零 $a \in \mathcal{A}$，都存在一个$\widehat{}$交换子代数 $B \subseteq \mathcal{A}$和一个特征 $\chi \in B$，使得 $a \in B$ 且 $\chi(a) \neq 0$。这保证了下文定义的表示 π 是忠实的。

- 与交换子代数上的特征相关联的GNS表示构成一个可测场，这对于 π 的直积分表述是必要的（见备注 76）。

对于非 I 型代数，该构造可能失败；讨论见第 5.4 节。

定义 28（希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$）。设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺可分 C*-代数。由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰空间（命题 *13*），它容许一个具有全支撑的博雷尔概率测度 μ（例如，任意无原子概率测度，或高斯测度在到 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的同胚嵌入下的像；见 *[10]*）。固定这样一个测度 μ。定义希尔伯特空间

$$L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) := L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \mu),$$

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上关于 μ 的平方可积复值函数空间。该空间是可分的，因为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰的，且 μ 是博雷尔概率测度 *[10]*。

备注 79（测度选择的独立性）。</*style*}构造 ι 与测度 μ 的选择无关（在酉等价意义下），前提是这些测度等价（即相互绝对连续）。对于波兰空间上具有全支撑的等价博雷尔概率测度，相应的 L^2 空间通过拉东-尼科迪姆导数酉等价。因此，我们可以固定任意方便的测度；具体而言，可以取 μ 为典范测度在嵌入 Φ 下的推前测度，其中该嵌入来自命题 *12* $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}_\infty$。

引理 18（GNS 表示场的可测性）。设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺可分 *I*型 *C*-代数。对于每个 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，令 $\pi_x\colon \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_x)$ 为交换子代数 B上的特征 χ 所对应的 *GNS* 表示。于是，希尔伯特空间的纤维族 $\{\mathcal{H}_x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$ 是可测的按照 *Dixmier [5, 第 8] 章的定义。因此，对于任意定义在 $\mathcal{G}$ 上的博雷尔概率测度 μ，直积分 $\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} \mathcal{H}_x \, d\mu(x)$ 是良定义的。

$\widehat{}$证明。由于 $\mathcal{A}$ 是 I 型，其对偶空间 $\mathcal{A}$（不可约表示的酉等价类集合）是一个标准博雷尔空间 [5, 定理 7。2]。映射 $\Phi\colon \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \widehat{\mathcal{A}}$ 由 $\Phi(B, \chi) = [\pi_x]$定义，其中

$[\pi_x]$ 表示 π_x的酉等价类，它是博雷尔可测的。这是由通过部分求值映射构造 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的拓扑得出的：对于任意 $a \in \mathcal{A}$，函数 $x \mapsto \mathrm{Tr}(\pi_x(a)E)$（对于适当的$\widehat{}$投影 E）是博雷尔可测的，并且这些函数生成了 $\mathcal{A}$上的博雷尔结构。

纤维族 $\{\mathcal{H}_x\}$恰好是与 $\mathcal{A}$ 上表示的可测场相关联的希尔伯特空间纤维族，该可测场通过 Φ拉回。根据希尔伯特空间可测场的一般理论 [5, 第 8 章第 1], 节，可测场在博雷尔映射下的拉回仍然是可测的。此外，对于 I 型$\widehat{}$代数，已知 $\mathcal{A}$上的典范希尔伯特空间纤维族（其中每个点都被赋予相应不可约表示的希尔伯特空间）是可测的 [5, 命题 8.4.1]。

□

定义 29 ($\mathcal{A}$的直积分表示)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位可分 *I* 型 *C**-代数。对于每个 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，令 $\pi_x : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_x)$ 表示与交换子代数 B上的特征 χ相关联的 *GNS* 表示。由于 $\mathcal{A}$ 是 *I* 型代数，希尔伯特空间纤维族 $\{\mathcal{H}_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是可测的，因此我们可以在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上固定一个具有全支撑的博雷尔概率测度 μ （例如，将 $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}_\infty$ 上的典范测度通过命题 *13* 的嵌入 Φ 推前得到）。

构造直积分希尔伯特空间

$$\mathcal{H} := \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} \mathcal{H}_x \, d\mu(x).$$

定义一个 *-表示 Π： $\mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$为

$$(\Pi(a)\xi)(x) := \pi_x(a)\xi(x), \qquad a \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{H},$$

其中，对于 μ-几乎处处的 x， $\xi(x) \in \mathcal{H}_x$ 且 $\pi_x(a)\xi(x) \in \mathcal{H}_x$。该表示是忠实的，因为对于 *I* 型代数，不可约表示族 $\{\pi_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 能够区分 $\mathcal{A}$ 中的点（见下文引理 *21*）。

引理 19 (π的良定义性)。 对于 $\mathcal{A}$ *I* 型且可分，映射 π 是良定义、有界、保持 * 运算的线性映射。此外， $\|\pi(a)\| \le \|a\|$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$均成立。

证明。 我们验证所需的性质：

1. **博雷尔可测性：** 对于每个 $a \in \mathcal{A}$，集合 $\{(B, \chi) : a \in B\} =$ 求值映射$\mathrm{ev}_a^{-1}(\mathbb{C})$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的一个博雷尔子集（它是开集，因此也是博雷尔集）。函数 $(B, \chi) \mapsto \chi(a)$ 在此集合上是博雷尔可测的，因为它是连续映射ev_a 在博雷尔集上的限制。因此，对于任意可测的 ξ， $\pi(a)\xi$ 是可测的。

2. **交叠处的良定义性：** 若 $a \in B_1 \cap B_2$ 和 $\chi_1 \in \widehat{B_1}$、 $\chi_2 \in \widehat{B_2}$ 是对应于同一点 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的特征，那么根据 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的定义，我们有 $(B_1, \chi_1) = (B_2, \chi_2)$ 作为点，因此 $\chi_1 = \chi_2$ 在 $B_1 \cap B_2$ 上成立。于是 $\chi_1(a) = \chi_2(a)$，并且 $\pi(a)$ 的定义与该点的表示方式无关。

3. **有界性：** 对于 μ-几乎处处的 (B, χ)，我们有 $|\chi(a)| \le \|a\|$，因为 χ 是特征，因而是压缩线性泛函。因此， $\pi(a)$ 是由一个本质上确界范数至多为 $\|a\|$ 的函数所定义的乘法算子，并限制在满足 $a \in B$ 的博雷尔集上。由此， $\|\pi(a)\| \le \|a\|$。

4. **线性与保持 * 运算：** 这些性质可直接由逐点定义和特征的性质得出：$\chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)$、 $\chi(\lambda a) = \lambda\chi(a)$，以及 $\chi(a^*) = \chi(a)$。

因此， π 是一个良定义的压缩 *-表示 $\mathcal{A}$。 □

引理 20 （朴素求值是线性的且保持 * 运算，但不是乘法的）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位可分 I 型 C^*-代数。定义一个映射 $\pi_0 : \mathcal{A} \to B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}))$ 为

$$(\pi_0(a)\xi)(B,\chi) := \begin{cases} \chi(a)\,\xi(B,\chi), & \text{if } a \in B, \\ 0, & \text{if } a \notin B, \end{cases}$$

对于 $a \in \mathcal{A}$ 和 $\xi \in L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。那么 π_0 具有以下性质：

1. π_0 是线性的，并且保持 * 运算。
2. π_0 是含幺的： $\pi_0(1_{\mathcal{A}}) = I$。
3. 对所有 $a \in \mathcal{A}$， $\|\pi_0(a)\| \le \|a\|$。
4. 然而，通常情况下， π_0 并非乘法的，因此它不是 $\mathcal{A}$的 *-表示。

证明。 线性和保持 * 运算直接由特征的性质得出： $\chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)$， $\chi(\lambda a) = \lambda\chi(a)$，以及 $\chi(a^*) = \chi(a)$。由于对于每个特征 χ， $\chi(1_{\mathcal{A}}) = 1$，故含幺性成立。对于有界性，注意到对于所有特征， $|\chi(a)| \le \|a\|$，因此 $\pi_0(a)$ 是一个乘法算子，其对应函数在满足 $a \in B$ 的博雷尔集上具有不超过 $\|a\|$ 的上确界范数，而在其他地方为零；因此 $\|\pi_0(a)\| \le \|a\|$。

为说明 π_0 不是乘法的，取不交换的 a， $b \in \mathcal{A}$。对于点$(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，我们有：

$$(\pi_0(ab)\xi)(B,\chi) = \begin{cases} \chi(ab)\xi(B,\chi), & ab \in B, \\ 0, & ab \notin B, \end{cases}$$

而

$$(\pi_0(a)\pi_0(b)\xi)(B,\chi) = \begin{cases} \chi(a)\chi(b)\xi(B,\chi), & a \in B \text{ and } b \in B, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如果 a 和 b 不交换，则存在一些点(B, χ)，使得 $ab \in B$，但 $a \in B$ 和 $b \in B$均不成立（例如，取 B 为一个包含 ab 、但不分别包含 a 或 b 的交换子代数）。在这些点上，$(\pi_0(ab)\xi)(B, \chi) \neq 0$，而$(\pi_0(a)\pi_0(b)\xi)(B, \chi) = 0$，因此 $\pi_0(ab) \neq \pi_0(a)\pi_0(b)$。所以 π_0 不满足乘法性。 □

注释 80 (逐点乘法性的失效)。 朴素求值映射会失效，因为函数$\chi(a)$ 和 $\chi(b)$ 定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的不同子集上，而且当a 和 b 不属于同一个交换子代数时，它们的乘积并不对应于 $\chi(ab)$ 。这是阻碍在 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$上对 $\mathcal{A}$直接构造逐点 *-表示的根本障碍。

要得到真正的 *-表示，必须改用第 *4.9* 节中的 *GNS* 表示的直积分。在那里，每个点 (B,χ) 都有自己的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{(B,\chi)}$ （χ的 *GNS* 空间），而表示由 $\Pi(a) = \int^{\oplus} \pi_{(B,\chi)}(a)\, d\mu(B,\chi)$给出。这种构造具有乘法性，因为每个 $\pi_{(B,\chi)}$ 本身都是作用在自己的希尔伯特空间上的 $\mathcal{A}$的真正表示，而直积分将它们粘合在一起，同时不会丧失乘法性。

引理 21 (GNS表示分离点)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位可分 I 型 C^*-代数。对于每个 $x = (B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，令 π_x 为与 B 上的特征 χ 相对应的 $\mathcal{A}$ 的 *GNS* 表示。那么，族 $\{\pi_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 分离 $\mathcal{A}$ 中的点：对于任意非零 $a \in \mathcal{A}$，存在 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 使得 $\pi_x(a) \neq 0$。

证明。 由于 $\mathcal{A}$ 是I型，其不可约表示能够分离点 [5]。 $\mathcal{A}$ 的每个不可约表示都酉等价于某个 $\mathcal{A}$ 上纯态 ω 的GNS表示。由于I型代数上的每个纯态限制到某个极大交换子代数 $B \subseteq \mathcal{A}$ 上时仍为纯态，而该纯态对应于 B 上的特征 χ。因此，$(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，且 $\pi_{(B,\chi)}$ 与原不可约表示酉等价。由此，族 $\{\pi_x\}$（在酉等价意义下）包含 $\mathcal{A}$ 的所有不可约表示，因此能够分离点。

□

命题 36（通过直积分和左正则表示构造 ι）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位可分 *I* 型 *C**-代数。则存在一个典范的含幺单射 ***-同态 $\iota:\ \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，其构造如下。

1. 的直积分表示。 对每个 $x = (B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，令 $\pi_x:\ \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_x)$ 为与交换子代数 B 上的特征 χ 相关联的 *GNS* 表示。由于 $\mathcal{A}$ 是 *I* 型的，希尔伯特空间纤维族 $\{\mathcal{H}_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是可测的。固定一个在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的全支撑博雷尔概率测度 μ（例如，将典范测度从 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}_\infty$ 经命题 *13* 的嵌入推前所得）。构造直积分希尔伯特空间

$$\mathcal{H} := \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} \mathcal{H}_x \, d\mu(x),$$

并定义一个 ***-表示 $\Pi:\ \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$如下

$$(\Pi(a)\xi)(x) := \pi_x(a)\xi(x), \qquad a \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{H}.$$

此表示是忠实的，因为对于 *I* 型代数，族 $\{\pi_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 能够分离 $\mathcal{A}$中的点（见引理 *21*）。

2. $(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的左正则表示 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。 令 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上的博雷尔哈尔系统（命题 *30*）。左正则表示 $\Lambda:\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to B(L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}))$ 定义在 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$ 上如下

$$(\Lambda(f)\xi)(x) = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{x}} f(\gamma)\,\xi(s(\gamma))\,d\lambda^x(\gamma), \qquad \xi \in L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}),\ x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)},$$

并通过连续性延拓。此表示不一定是忠实的；其核对应于全群胚 *C**-代数与约化群胚 *C**-代数之间的差异。

3. 在上的酉表示 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{H}$上。 群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 通过酉共轭作用于纤维族 $\{\mathcal{H}_x\}$：对于 $\gamma = (u,(B,\chi))$，其中 $s(\gamma) = x$ 且 $r(\gamma) = y$，定义 $U_\gamma:\ \mathcal{H}_x \to \mathcal{H}_y$ 如下

$$U_\gamma := \pi_y(u) \circ \mathrm{Ad}_{u^*}.$$

这定义了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在直积分 $\mathcal{H}$上的酉表示，它积分为一个 ***-表示$\widetilde{\Lambda}:\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to B(\mathcal{H})$。根据构造，$\widetilde{\Lambda}$ 通过自然包含 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \hookrightarrow \mathcal{H}$与 Λ 相关，但我们不需要显式用到这一点。

4. 包含 $\Pi(\mathcal{A}) \subseteq \Lambda(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$。对于每个 $a \in \mathcal{A}$，算子 $\Pi(a) \in B(\mathcal{H})$由 $\pi_x(a)$的逐纤维乘法给出。根据卷积代数的定义进行标准论证可知， $\Pi(a)$属于 $\widetilde{\Lambda}$的像。更具体地说，对于任意有限集 $F \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 以及任意一组实现纤维间同构的酉元 u_x，都可以构造函数 $f_n \in C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})^{\sim}$，使得 $\Lambda(f_n) \to \Pi(a)$在强算子拓扑下成立。由 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的泛性质可知， $\Lambda(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$在 $B(\mathcal{H})$中的$^{\sim}$闭包是一个包含 $\Pi(\mathcal{A})$的*C**-代数。

5. 通过泛性质定义 ι。 根据 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 作为卷积代数完备化的泛性质，对于每个 $a \in \mathcal{A}$，存在唯一元素 $\iota(a) \in C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 使得

$$\widetilde{\Lambda}(\iota(a)) = \Pi(a).$$

这定义了一个映射 $\iota: \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。由于 Λ 在约化代数上是忠实的（或者更一般地，由于泛性质保证了唯一性，且对应关系保持代数运算），映射 ι 是一个 *-同态。

6. ι的单射性。若 $\iota(a) = 0$，则 $\Pi(a) = \Lambda(\iota(a)) = 0$。由于 Π 是忠实的（步骤 *1*），我们得出$a = 0$。因此，ι是单射。对于所有 x，含幺性由 $\pi_x(1_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{H}_x}$ 得出，从而有 $\Pi(1_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{H}}$；而泛性质中的唯一性进而迫使 $\iota(1_{\mathcal{A}}) = 1_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})}$。

证明。</style}上述构造在概念上很清晰，但在技术上颇具挑战。下面概述主要步骤；有关希尔伯特空间可测场的理论，请参阅 [5]；有关群胚 C*-代数，请参阅 [11]；有关测度群胚框架，请参阅 [12]。

步骤 1：可测场结构。对于每个 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，GNS 表示 π_x 是不可约的，因为 χ是 B 上的纯态，而 B 是极大交换子代数。由于 $\mathcal{A}$ 是 I 型，映射 $x \mapsto \pi_x$ 按照 Dixmier [5, 第 8] 章中的意义是可测的。因此，纤维族 $\{\mathcal{H}_x\}$ 是希尔伯特空间的可测场。

步骤 2：直积分。选择具有全支撑的 μ（例如，通过命题 5 的嵌入 Φ），直积分 $\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_x \, d\mu(x)$ 是一个可分希尔伯特空间。由 $(\Pi(a)\xi)(x) = \pi_x(a)\xi(x)$ 定义的表示 Π 是一个 *-表示，因为每个 π_x 都是。

步骤 3：的忠实性。对于 I 型代数，不可约表示能够分离点 [5, 推论 4.3.7]。由于族 $\{\pi_x\}$包含了 $\mathcal{A}$ 的所有不可约表示（相差酉等价；这是因为 $\mathcal{A}$ 的每个纯态在某个极大交换子代数 B上的限制都是纯态，而且每个不可约表示都是某个纯态的 GNS 表示），我们得出结论：Π是忠实的。

步骤 4：酉表示 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$。 </style}公式 () Ad定义了一个酉算子：，对 (， x)，满足 $s(\gamma) = x, r(\gamma) = y$。可以验证 $U_{\gamma_1\gamma_2} = U_{\gamma_1}U_{\gamma_2}$和 $U_{\gamma^{-1}} = U_\gamma^*$，因此 $\gamma \mapsto U_\gamma$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的酉表示。根据测度群胚的一般理论 [12], ，此$\widetilde{}$表示可积分为一个 *-表示 $\Lambda: C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to B(\mathcal{H})$。

步骤 5： $\Pi(\mathcal{A}) \subseteq \widetilde{\Lambda}(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$。对于任意 $a \in \mathcal{A}$，考虑定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上的函数 f_a，其定义为 $f_a(u, (B, \chi)) = \chi(u^*au)$（当 $u^*au \in B$时），否则为 0。利用卷积结构直接计算可得$\widetilde{\Lambda}(f_a) = \Pi(a)$。虽然 f_a 可能不属于 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)})$，但利用博雷尔哈尔系统以及 $\mathcal{A}$的可分性，可以用此类函数对其进行逼近。因此 $\Pi(a)$属于 $\widetilde{\Lambda}(C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}))$的范数闭包，也就是$\sim\Lambda(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$。

步骤 6：定义 ι。 由 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的泛性质，存在唯一的 *-同态 $\sim$ $\sim\iota$：$\mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，使得 $\Lambda \circ \iota = \Pi$。唯一性由 Λ 在约化代数上的忠实性得出；在最大代数中，则可利用泛表示进行论证。

步骤 7：单射性。若 $\iota(a) = 0$，则 $\Pi(a) = \widetilde{\Lambda}(\iota(a)) = 0$，而 Π 的忠实性给出 $a = 0$。

步骤 8：含幺性。由于对所有 x，$\pi_x(1_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{H}_x}$，因此我们有 $\Pi(1_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{H}} = \widetilde{\Lambda}(1_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})})$。由泛性质的唯一性，$\iota(1_{\mathcal{A}}) = 1_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})}$。 □

注 81 (技术难点)。 上述构造在概念上虽然清晰，但在技术上颇具挑战：

1. 纤维族 H_x 的可测性以及直积分的定义，需要仔细的测度论论证。*2.* 必须证明 $\mathcal{GA}$ 对纤维族 H_x 的作用是可测的，并且保持直积分结构。

3. $C^*(\mathcal{GA})$ 关于能够积分 $\mathcal{GA}$ 的酉元表示的表示所具有的泛性质并非显而易见，且依赖于博雷尔哈尔系统。

4. Π 的忠实性要求表示族 π_x 能够分离 $\mathcal{A}$的点。对于 *I*型 C^*代数，若允许使用所有不可约表示，则这一条件成立；但若仅限于特征（即一维表示），则不成立。在 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔代数的情形下，特征确实足够，因为它们与谱中的点一一对应。

要完整而严谨地阐述这一构造，需要另行撰写一篇论文。在本工作采用的关于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{GA}$ 的既定假设下，我们假设可以完成这样的构造，且 ι 满足命题*33*中所述的性质。

命题37（对角嵌入的条件性质）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺、可分的 *I*型 C^*代数，配有一个 *Cartan* 子代数 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$以及一个忠实不变态，该态在 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$上诱导出一个博雷尔哈尔系统。假设可以通过第 *X* 节概述的可测场／直积分方法构造对角嵌入 $\iota:\ \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$。那么，$\iota$ 满足以下性质：

1. ι 是一个含幺的单射 *-同态。

2. 对任意 $a \in \mathcal{A}$ 以及任意单位 $(B,\chi) \in \mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$，其中 $B \subseteq \mathcal{C}$ 是极大阿贝尔子代数，且$\chi:\ B \to \mathbb{C}$ 是一个特征，$\iota(a)$在单位箭头 $1_{(B,\chi)}$ 处的取值（按单位空间上的逐点求值理解）等于 $\chi(\mathbb{E}_B(a))$，其中 $\mathbb{E}_B:\ \mathcal{A} \to B$ 是到 B 上的条件期望（若其存在）。特别地，当 $a \in B$时，该值等于 $\chi(a)$；否则等于0。

3. 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是交换的时，$\iota(\mathcal{A}) \subseteq C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)})$。

4.（函子性）若 $\phi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个含幺 *-同态，满足 $\phi(\mathcal{C}_\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}_\mathcal{B}$，且 ϕ 将 $\mathcal{C}_\mathcal{A}$ 中的酉元映为 $\mathcal{C}_\mathcal{B}$中的酉元，则 ϕ 诱导出一个连续的群胚态射 $\phi_*:\ \mathcal{G}_\mathcal{A} \to \mathcal{G}_\mathcal{B}$，满足$\iota_\mathcal{B} \circ \phi = (\phi_*)_* \circ \iota_\mathcal{A}$，其中 $(\phi_*)_*$ 是群胚 C^*-代数上的诱导映射。只要 ι 的构造关于这类态射是自然的，上述结论便成立。

5.（指标相容性）进一步假设 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是可和的，并且 ι 的构造与 *Kasparov* 积相容。那么对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$，类 $\iota_*\big([\,\text{核 }T] - [\,\text{余核 }T]\big) \in K_0\big(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})\big)$ 与等变 *K* 理论类 $[T]_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 在组装映射下的像重合。

证明概要。 这些性质的完整证明需要对该构造进行详细分析，并将发表于即将发表的论文中。下面我们在上述假设下概述关键思路：

• 性质（1）源于通过直积分构造的表示 Π 的忠实性；这要求不可约表示族 $\{\pi_x\}$ 能够分离 $\mathcal{A}$中的点——当允许使用所有不可约表示（而不仅仅是特征）时，I型 C^*-代数满足这一条件。

• 性质（2）是 ι 定义的结果，即将 $\mathcal{A}$ 包含到 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$的卷积代数中，并由 Cartan结构导出条件期望。逐点求值是在可测场构造的意义下理解的；严格的完整处理需要验证，相对于哈尔系统，这类求值几乎处处良定义。

• 性质 (3) 成立，是因为只有当群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 为主群胚时，$\iota(\mathcal{A})$ 才由支集恰好包含在单位空间上的函数构成；在此情形下，这对应于 $\mathcal{A}$ 为交换的。在非交换情形下，$\iota(a)$ 涉及非平凡的酉共轭，从而产生支集不包含在单位空间上的函数。

• 性质 (4) 是 Cartan 群胚构造的函子性的结果，前提是 ι 的构造具有自然性。这要求群胚上的诱导映射 ϕ_* 保持可测纤维族结构和 Haar 系统。

• 性质 (5) 源于 Fredholm 指标与 Kasparov 积的相容性，并将在 [Author, Paper II] 中利用等变 KK 理论予以证明，同时还需满足可 amen 性以及 ι 与 Kasparov 积相容的额外假设。

第 X 节给出了交换情形以及带有对角 Cartan 子代数的矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 中验证 (1)–(3) 的例子。在矩阵代数情形中，$\mathcal{G}_{M_n(\mathbb{C})}$ 是定义在 n 个点上的对偶群胚，而 ι 是从 $M_n(\mathbb{C})$ 到卷积代数 $C^*(M_n(\mathbb{C}) \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ 的包含，其中 (2) 化简为对矩阵元求值。 □

我们在三个基本情形中说明对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$：交换代数、矩阵代数和紧算子。这些例子展示了该构造在有限维、无限维和交换情形下的表现。

例 *38*（交换代数）。设 $\mathcal{A} = C(X)$，其中 X 是紧致可度量空间，且 *Cartan* 子代数为其自身 $\mathcal{C} = \mathcal{A}$。那么 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong X$，对于每个 $x \in X$，与特征 ev_x 对应的 *GNS* 表示 π_x 是由在 x 处求值给出的一维表示。直积分$\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathbb{C}\, d\mu(x)$ 同构于 $L^2(X, \mu)$。表示 Π 是$C(X)$ 在 $L^2(X, \mu)$ 上的乘法表示。在这一交换情形下，群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 化为单位空间 X，其 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 就是 $C(X)$。因此，映射 ι 就是恒等映射 $C(X) \hookrightarrow C(X)$。由此，这一构造在交换情形下恢复了盖尔范德变换。

例 *39*（矩阵代数）。设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，并选择 *Cartan* 子代数 $\mathcal{C}$ 为对角矩阵。那么 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$，其参数化的是模去相位后的秩一投影。对于每个与秩一投影 p_x 对应的 $x \in \mathbb{CP}^{n-1}$，*GNS* 表示 π_x 是 $M_n(\mathbb{C})$ 在一个 n 维希尔伯特空间上的不可约表示，且与标准表示酉等价。直积分 $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}}^{\oplus} \mathbb{C}^n\, d\mu(x)$ 同构于 $L^2(\mathbb{CP}^{n-1}) \otimes \mathbb{C}^n$。表示 Π 将矩阵A 映为该希尔伯特空间上的算子 $1 \otimes A$。采用这一 *Cartan* 子代数后，群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 同构于变换群胚 $U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$，因此 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是交叉积 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$（全交叉积或约化交叉积均可；对于紧群，两者相同）。Λ *(* $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$*)* 的左正则表示就是这一交叉积的正则表示。映射 ι 将 A 映为 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 的乘子代数中的常值函数 $A \otimes 1$。这与例 *34* 中描述的嵌入一致。

例 *40*（紧算子）。令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 为可分无限维希尔伯特空间 H 上紧算子的单位化。固定 H 的一个标准正交基，并令 $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 为相对于该基对角化的算子（以及恒等算子）构成的极大交换子代数。于是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{P}(H)$ 是 H 的射影空间，用于参数化秩一投影。对于每个 $x \in \mathbb{P}(H)$，它对应一个秩一投影 p_x；与纯态 $\omega_x(T) = \mathrm{Tr}(p_x T)$ 关联的 *GNS* 表示 π_x 是 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的不可约表示，其作用于一个与 H 酉等价的希尔伯特空间。直积分 $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{P}}^{\oplus}{}_{(H)}\, H\, d\mu(x)$ 同构于 $L^2(\mathbb{P}(H)) \otimes H$。表示 Π 将 $T \in \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 映为算子 $1 \otimes T$。群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 同构于作用群胚 $\mathcal{U}(H) \ltimes \mathbb{P}(H)$，其中 $\mathcal{U}(H)$ 通过共轭作用于射影空间。$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的左正则表示 Λ 是该群胚的正则表示。映射 ι 将 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 嵌入 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，作为乘子代数中的常值函数。此嵌入是单射；直观而言，它通过对 $\mathbb{P}(H)$ 作分解来捕捉正规算子的谱数据，同时也通过酉群中的卷积来编码非正规算子的非交换结构。

这三个例子阐明了该构造的统一主题：对于交换代数，它归结为经典的盖尔范德变换；对于矩阵代数，它给出到紧群作用下的交叉积中的嵌入；对于紧算子，它则产生到变换群胚C^*代数中的嵌入，同时编码谱数据和酉数据。

注82 （构造的意义）。 对角嵌入 ι 是本文的核心构造。它表明，配备适当 *Cartan* 子代数和不变态的非交换 *C**-代数 $\mathcal{A}$，可以忠实地表示在其自身酉共轭群胚的群胚 *C**-代数中。此表示并非只是形式上的技巧；它揭示了 $\mathcal{A}$的算子代数结构与其交换语境的几何结构之间的关系。嵌入ι 将成为连接 $\mathcal{A}$ 中 *Fredholm* 算子的解析指标理论与群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的几何指标理论的关键纽带。

我们概述了对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的构造，该构造利用 GNS 表示的直积分以及 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的左正则表示。此构造不依赖余乘法映射，预计适用于广泛的 C*-代数，包括在适当选择 Cartan 子代数和不变态的条件下所有含幺可分 I 型代数。尽管技术细节相当繁复，概念框架却很清晰： ι 通过将每个 $a \in \mathcal{A}$ 实现为一个算子，使其在直积分希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} H_x \, d\mu(x)$上经由纤维上的 GNS 表示作用，从而将 $\mathcal{A}$ 嵌入 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$
表示：在与单位 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 对应的纤维 H_x 上，元素 a 通过与交换子代数 B 上的特征 χ 相关联的 GNS 表示 π_x 作用。重要的是，这并非简单地通过 $\chi(a)$ 进行逐点乘法（正如备注 80 所指出的，这种做法无法保持乘法性），而是通过 GNS构造产生的完整算子论作用。该嵌入是忠实的、含幺的，并保持 * 运算；在文中所述的假设下，它满足命题33提出的所有要求。本文余下部分将假定 ι 存在，并探讨其对指标理论和非交换几何的影响。

4.10 验证 ι 是含幺单射 *-同态

现在，我们验证在第 4.9 小节中构造的对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 满足 *-同态应具备的基本代数性质。这项验证并非易事，需要仔细分析直积分表示、 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的左正则表示，以及 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的泛性质。在本小节中，我们假设 $\mathcal{A}$ 是含单位可分 I 型 C*-代数，并且已按照第 4.9 小节所述，严谨地完成了 ι 的构造。

命题 38 (ι是一个 *-同态)。 由直积分构造定义的映射 $\iota\colon \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是一个含单位 * 同态。也就是说，对于所有的 a、$b \in \mathcal{A}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$,
2. $\iota(a + \lambda b) = \iota(a) + \lambda\iota(b)$,
3. $\iota(a^*) = \iota(a)^*$,
4. $\iota(1_{\mathcal{A}}) = 1_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})}$.

证明。 我们根据交换图的定义验证 ι 的每个性质

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota} & C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \\ {\scriptstyle \Pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda} \\ B(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & B(\mathcal{H}) \end{array}$$

其中，$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} H_x \, d\mu(x)$ 是直积分希尔伯特空间，$\Pi\colon \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ 是直积分表示 $\Pi(a) = \int^{\oplus} \pi_x(a) \, d\mu(x)$，而 $\Lambda\colon C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to B(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的左正则表示，并将其积分为全群胚 C^* 代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的一个 *-表示。

(1) 乘法性。对于 $a,\ b \in \mathcal{A}$，我们有 $\Pi(ab) = \Pi(a)\Pi(b)$，因为每个 π_x 都是 $\mathcal{A}$的表示:

$$\Pi(ab) = \int^{\oplus} \pi_x(ab) \, d\mu(x) = \int^{\oplus} \pi_x(a)\pi_x(b) \, d\mu(x) = \Pi(a)\Pi(b).$$

根据构造，$\iota(a)$ 是 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$中的唯一元素，使得 $\Lambda(\iota(a)) = \Pi(a)$。于是

$$\Lambda(\iota(ab)) = \Pi(ab) = \Pi(a)\Pi(b) = \Lambda(\iota(a))\Lambda(\iota(b)) = \Lambda(\iota(a)\iota(b)),$$

因为 Λ 是一个 *-同态。因此 $\Lambda(\iota(ab) - \iota(a)\iota(b)) = 0$。

此时，我们无法直接得出 $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$，因为 Λ可能不忠实；其核对应于完整群胚 C^*代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 与约化群胚 C^* 代数 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 之间的差异。

为了解决这个问题，我们利用 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的泛性质。考虑泛表示$\rho_u$：$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to B(\mathcal{H}_u)$，它定义为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的所有循环表示的直和。这个表示是忠实的。此外，根据 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的泛性质，$\rho_u$ 对 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的连续酉表示进行积分，因此复合 $\rho_u \circ \iota$：$\mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_u)$ 由直积分表示 $\Pi_u(a) = \int^{\oplus} \pi_{x,\ u}(a) \, d\mu_u(x)$ 给出，其中每个 $\pi_{x,\ u}$ 都与 π_x 酉等价（因为二者都来自相同的 GNS 数据）。对 Π_u 应用与上面相同的计算，可得

$$\rho_u(\iota(ab)) = \Pi_u(ab) = \Pi_u(a)\Pi_u(b) = \rho_u(\iota(a))\rho_u(\iota(b)) = \rho_u(\iota(a)\iota(b)).$$

由于 ρ_u 是忠实的，我们得到 $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$。关于群胚 C^*-代数的泛性质及其与直积分分解的关系，详细论述请参见 [Renault，1980年，命题 3.1] 以及 [Dixmier，1977年，第 8] 章。

(2) 线性。线性直接源于每个 GNS 表示 π_x 的线性以及直积分构造的线性。对于 $a,\ b \in \mathcal{A}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们有

$$\Pi(a + \lambda b) = \int^{\oplus} \pi_x(a + \lambda b) \, d\mu(x) = \int^{\oplus} (\pi_x(a) + \lambda\pi_x(b)) \, d\mu(x) = \Pi(a) + \lambda\Pi(b).$$

于是 $\Lambda(\iota(a + \lambda b)) = \Pi(a + \lambda b) = \Pi(a) + \lambda\Pi(b) = \Lambda(\iota(a)) + \lambda\Lambda(\iota(b)) = \Lambda(\iota(a) + \lambda\iota(b))$。按照第 (1) 部分的方法应用泛表示 ρ_u，得到 $\rho_u(\iota(a + \lambda b)) = \rho_u(\iota(a) + \lambda\iota(b))$，而 ρ_u的忠实性推出 $\iota(a + \lambda b) = \iota(a) + \lambda\iota(b)$。

(3) 对合保持。对于每个 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，GNS 表示 π_x 保持 * 运算：$\pi_x(a^*) = \pi_x(a)^*$。因此

$$\Pi(a^*) = \int^{\oplus} \pi_x(a^*) \, d\mu(x) = \int^{\oplus} \pi_x(a)^* \, d\mu(x) = \left(\int^{\oplus} \pi_x(a) \, d\mu(x) \right)^* = \Pi(a)^*.$$

于是 $\Lambda(\iota(a^*)) = \Pi(a^*) = \Pi(a)^* = \Lambda(\iota(a))^* = \Lambda(\iota(a)^*)$，因为 Λ保持 * 运算。应用 ρ_u 并利用其忠实性，得到 $\iota(a^*) = \iota(a)^*$。

(4) 含幺性。对于恒等算子 $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$，每个 GNS 表示都满足 $\pi_x(1_{\mathcal{A}}) = I_{H_x}$，即 H_x 上的恒等算子。因此，$\Pi(1_{\mathcal{A}}) = \int^{\oplus} I_{H_x} \, d\mu(x) = I_{\mathcal{H}}$，即直积分希尔伯特空间上的恒等算子。根据构造，$\iota(1_{\mathcal{A}})$ 是 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中满足 $\Lambda(\iota(1_{\mathcal{A}})) = I_{\mathcal{H}}$ 的唯一元素。但 $\Lambda(1_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})}) = I_{\mathcal{H}}$ 也成立，因为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中的单位在任意表示中都作为恒等算子作用。因此 $\Lambda(\iota(1_{\mathcal{A}}) - 1_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})}) = 0$，由 ρ_u 的忠实性可得 $\iota(1_{\mathcal{A}}) = 1_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})}$。

□

命题 39 (ι 是单射。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位可分 I 型 C^*-代数。那么，对角嵌入 $\iota:\ \mathcal{A}\to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是单射。

证明。 回顾第 4.9 节中的 ι 构造。我们有一个直积分希尔伯特空间

$$\mathcal{H}=\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus}\mathcal{H}_x\,d\mu(x),$$

其中，对每个 $x=(B,\ \chi)\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，$\pi_x:\ \mathcal{A}\to B(\mathcal{H}_x)$ 是与交换子代数 B上的特征χ 相关联的 GNS 表示。表示 $\Pi:\ \mathcal{A}\to B(\mathcal{H})$ 定义为

$$\Pi(a)=\int^{\oplus}\pi_x(a)\,d\mu(x),$$

并且左正则表示 $\Lambda:\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\ \to B(\mathcal{H})$ 满足

$$\Lambda(\iota(a))=\Pi(a)\qquad\text{for all } a\in\mathcal{A}.$$

步骤 1： Π **是单射**。 根据引理 21，表示族 $\{\pi_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 能够分离 $\mathcal{A}$中的点：对任意非零的 $a\in\mathcal{A}$，都存在 $x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，使得 $\pi_x(a)\neq 0$。

假设 $a\in\mathcal{A}$ 满足 $\Pi(a)=0$。那么对 μ-几乎处处的 $x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，都有 $\pi_x(a)=0$。若 $a\neq 0$，引理 21 保证存在某个 $x_0\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，使得 $\pi_{x_0}(a)\neq 0$。根据表示场的连续性（引理 18），存在 x_0 的一个邻域 U，使得对所有 $x\in U$，都有 $\pi_x(a)\neq 0$。由于μ 具有全支撑，$\mu(U)>0$，这与对 μ-几乎处处的 x都有 $\pi_x(a)=0$ 相矛盾。因此，$\Pi(a)=0$ 蕴含$a=0$，所以 Π 是单射。

步骤 2：的单射性 ι。假设对于某个 $a\in\mathcal{A}$，$\iota(a)=0$。然后应用 Λ，我们得到 n

$$\Pi(a)=\Lambda(\iota(a))=\Lambda(0)=0.$$

由于 Π 由步骤 1 可知是单射的，我们得出 $a=0$。因此 ι 是单射的。 □

注 83。证明中的关键要素是引理 *21*，它证明 *GNS* 表示族 $\{\pi_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 能够分离 $\mathcal{A}$中的点。该引理依赖于 *I* 型假设，以及每个 *I* 型代数的不可约表示都与某个纯态的 *GNS* 表示酉等价，而该纯态在某个极大交换子代数上的限制是一个特征这一事实。对于非 *I* 型代数，这种分离结果不成立，且 ι 会有一个非平凡核（参见第 *5.4* 节）。

注 84。 Π 的单射性并不依赖于 Λ 是忠实的——事实上， Λ 可能有一个核，对应于完整群胚 *C**-代数与约化群胚 *C**-代数之间的差异。该论证只用到Λ 是一个*-同态； Π 的单射性会迫使 ι也是单射的。

注记 85 （I 型假设的作用）。 ι 的单射性关键依赖于$\mathcal{A}$ 为 *I*型这一假设。对于非 *I* 型代数，可能存在非零元素 $a\in\mathcal{A}$，使得对包含 a 的每个交换子代数 B 上的每个特征 χ，都有 $\chi(a)=0$。此类元素称为不可见或量子 元素；它们无法被任何经典语境检测到。在非 *I* 型代数中，对角嵌入 ι 将具有非平凡核，这反映出该代数无法由其交换子代数完全恢复。这是一个根本性的限制，并说明了本文将范围限制于 *I* 型 *C** 代数的合理性。

引理 22（像的刻画：ι）。设 $\mathcal{A}$ 为含单位可分 *I* 型 *C**-代数，带有 *Cartan* 子代数 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ 以及一个忠实不变态，由此在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上得到一个博雷尔哈尔系统。对任意$a \in \mathcal{A}$，元素 $\iota(a) \in C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 满足以下性质：

1. 在左正则表示 Λ： $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to B(\mathcal{H})$下，算子 $\Lambda(\iota(a))$ 相对于直积分分解 $\mathcal{H} = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} H_x \, d\mu(x)$是可分解的。具体而言，

$$\Lambda(\iota(a)) = \int^{\oplus} \pi_x(a) \, d\mu(x),$$

其中，π_x 是与单位 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 相关联的 *GNS* 表示。因此，$\iota(a)$ 不会在不同纤维之间产生非对角传播；其作用完全由纤维表示 $\pi_x(a)$决定。

2. 在直积分分解下，$x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 处的纤维由 $\pi_x(a)$给出。特别地，

$$(\Lambda(\iota(a)))_x = \pi_x(a) \in B(H_x),$$

并且当 $a \in B$ 时，这等于 $\chi(\mathbb{E}_B(a))I_{H_x}$，其中 $\mathbb{E}_B$： $\mathcal{A} \to B$ 是由 *Cartan* 结构产生的映到 B 上的条件期望。对于在 B中没有分量的 a，这个纤维算子为零。

3. $\iota(a)$ 与 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$（通过自然包含视为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的子代数）交换，当且仅当 a 属于 $\mathcal{A}$的中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$。

证明。(1) 这直接由 ι 的构造得出。根据定义，$\Lambda \circ \iota = \Pi$，其中 Π: $\mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ 是直积分表示 $\Pi(a) = \int^{\oplus} \pi_x(a) \, d\mu(x)$。可分解性是直积分希尔伯特空间上算子的一种性质：算子 $T \in B(\mathcal{H})$ 若保持直积分分解并逐纤维作用，则称为可分解的。表示 Π 的构造正是为了使其可分解，且其纤维为 $\pi_x(a)$。因此，$\Lambda(\iota(a)) = \Pi(a)$ 是可分解的，且具有上述纤维。

(2) 逐纤维描述可直接由直积分的定义得出。对于单位 $x = (B, \chi)$，GNS 表示 π_x 按构造满足：对所有 $b \in B$，$\pi_x(b) = \chi(b)I_{H_x}$。条件期望 $\mathbb{E}_B$: $\mathcal{A} \to B$ 是由 Cartan结构导出的唯一 B-双模投影；它在 $\mathcal{A}$ 上满足 $\chi \circ \mathbb{E}_B = \chi$。因此，对于任意 $a \in \mathcal{A}$，我们有 $\pi_x(a) = \pi_x(\mathbb{E}_B(a)) = \chi(\mathbb{E}_B(a))I_{H_x}$。当 $a \in B$ 时，$\mathbb{E}_B(a) = a$，这便化为 $\chi(a)I_{H_x}$。当 a 在 B 中没有分量时，$\mathbb{E}_B(a) = 0$，逐纤维算子为零。

(3) 假设 $a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$。那么对于每个 x，不可约表示 π_x 满足 $\pi_x(a) = \lambda_x I_{H_x}$ 对于某个标量 $\lambda_x \in \mathbb{C}$，这由舒尔引理得出，因为 $\pi_x(a)$ 与不可约表示 $\pi_x(\mathcal{A})$ 中的所有算子都可交换。函数 $x \mapsto \lambda_x$ 是连续的，并定义了 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 中的一个元素。因此，$\Lambda(\iota(a))$ 在每个纤维上都表现为乘以 λ_x，因而与嵌入 $\mathcal{H}$ 中的 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 上的所有乘法算子都可交换。因此，$\iota(a)$ 与 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 可交换。

反过来，假设 $\iota(a)$与 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$可交换。那么 $\Lambda(\iota(a))$与 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$上作用于 $\mathcal{H}$中 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$的嵌入副本上的所有乘法算子都可交换。一个标准论证表明，与所有乘法算子可交换的可分解算子必定具有标量纤维：对每个 x，$\pi_x(a)$都是 H_x上恒等算子的标量倍数。设 $\pi_x(a) = \lambda(x)I_{H_x}$。对于 $\mathcal{A}$的任意不可约表示π，存在 x使得 π 与 π_x酉等价，因此 $\pi(a)$是标量。由于 $\mathcal{A}$是 I 型，其不可约表示能够分离点。因此，a与 $\mathcal{A}$的所有元素可交换，也就是说，$a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$。

□

定理 7 (ι是含幺单射 *-同态。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位可分 I 型 C^*-代数，并且可以对其实施第 *4.9* 小节中的构造。那么，对角嵌入 $\iota:\ \mathcal{A}\to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$是一个含幺单射 *-同态。因此， $\mathcal{A}$ 与其像 $\iota(\mathcal{A})\subseteq C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$等距同构，我们可以将 $\mathcal{A}$ 视为这个子代数。

证明。 本定理总结了命题 38 和命题 39 的结果。命题 38 证明了含幺性和乘法性，而命题 39 在所述假设下证明了单射性。因此， ι 忠实地嵌入 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中，成为一个含幺 *-子代数；由于 C*-代数之间的单射 *-同态到其像上是等距的，该嵌入也是等距的。 □

推论 29（K 理论上的诱导映射）。 含单位 * 同态 $\iota:\ \mathcal{A}\to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 诱导出一个群同态

$$\iota_*:K_0(\mathcal{A})\longrightarrow K_0(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$$

作用于算子 K-理论。

证明。 由于 ι 是一个含单位 * 同态，算子 K-理论的函子性给出诱导映射 $\iota_*:K_0(\mathcal{A})\to K_0(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$。 □

注记 86。 尽管 ι 在 C^*-代数层面是单射的（定理 7），但其在 K 理论上的诱导映射 ι_* 未必是单射的，即使在交换情形下也是如此。例如，若 $\mathcal{A}=C(X)$连通，则$K_0(\mathcal{A})\cong\mathbb{Z}$，且 ι_* 是一个同构，但一般而言可能出现非平凡核。尽管如此， ι_* 在联系 $\mathcal{A}$ 中的解析指标理论与群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的几何指标理论方面发挥着基础性作用。

例 41（交换情形）。 设 $\mathcal{A}=C$（X）对应一个紧致可度量空间 X。在这种情形下， $\mathcal{A}$ 就是其自身的极大阿贝尔子代数，因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\cong X$。在 X 上选取一个具有全支撑的博雷尔测度 μ。对角嵌入 ι自然化简为恒等映射 C（X）$\to C$（X），并由 L^2（X，μ）上的乘法算子实现。因此， $\iota:\ C$（X）$\to C$（X）是一个含幺单射 *-同态，从而验证了定理 7 在此情形下成立。

例 42（矩阵代数情形）。 设 $\mathcal{A}=M_n$（$\mathbb{C}$），其 *Cartan* 子代数 $\mathcal{C}$ 由对角矩阵构成。于是， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\cong\mathbb{CP}^{n-1}$以模相位的方式参数化秩一投影，而

$C^*\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}\ \cong$（）（）（），其中 $C\ \mathbb{CP}^{n-1}\ \rtimes U\ n$ $U\ n$ ι $A\in M_n\ \mathbb{C}$（）通过共轭作用。对角嵌入将（）映射为该交叉积的乘子代数中的常值乘子 $A\otimes 1$。由于 U（n）是可和的，该交叉积的正则表示是忠实的，因此 ι 是单射。含幺性和乘法性可直接由构造得出。因此，定理 7 在此情形下成立。

例 *43*（紧算子情形）。对于 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$，即定义在可分无限维希尔伯特空间 H 上的紧算子的单位化，固定一个标准正交基，并令 $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ 为在此基下对角的算子所构成的极大交换子代数。于是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\cong\mathbb{P}(H)$ 是 H 的射影空间，而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}\cong\mathcal{U}(H)\ltimes\mathbb{P}(H)$，其中酉群 $\mathcal{U}(H)$ 通过共轭作用来作用。作为拓扑群，酉群 $\mathcal{U}(H)$ 不可和，因此无法通过可和性论证推出正则表示 Λ 的忠实性。尽管如此，定理 7 断言，在此情形下 ι 仍是单射；其单射性源于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的 I型结构，以及不可约表示 π_x 能够分离点这一事实，这保证了 $\Pi=\Lambda\circ\iota$ 是单射。完整的验证需要谨慎的测度论论证，超出了本文的讨论范围。

注释 87（验证总结）。 对 ι 是一个含幺单射 *-同态的验证，是对角嵌入构造的最终成果。它证明了一个 I 型 C^* 代数 $\mathcal{A}$可以忠实地表示在其自身酉共轭群胚的群胚 C^*-代数中。这一

表示在酉等价意义下是规范的，并且自然地与 $\mathcal{A}$的交换上下文相关联；此外，在 I 型情形下，它与*-同态相容。

证明依赖于三个关键要素：

1. $\mathcal{A}$在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的直积分分解，其中利用 I 型假设确保不可约表示（因而也包括交换语境上的相关 GNS 表示）能够分离 $\mathcal{A}$中的点。

2. C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）的左正则表示 Λ，它在群胚 C*-代数与直积分希尔伯特空间之间建立了具体联系。

3. C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）的泛性质，使我们能够根据泛表示中的等式推出 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）中的等式。

ι的单射性是最微妙的部分；它需要 I 型假设，以及 $\mathcal{A}$ 的不可约表示能够分离点这一事实。对于非 I 型代数，ι会有非平凡核，这反映出存在无法被任何交换语境检测到的元素——这是从交换子代数恢复非 I 型代数时遇到的根本障碍。

推论 30 ($\mathcal{A}$ 作为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的子代数。 在定理 7 的假设下，我们可以将 $\mathcal{A}$ 与其像 $\iota(\mathcal{A}) \subseteq C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$识别。令 $E\colon C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 为到单位空间上的条件期望；在关于哈尔系统的既定假设下，该条件期望存在。在识别$\mathcal{A} \cong \iota(\mathcal{A})$下，对于 μ-几乎处处的 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，此条件期望满足：

$$E(\iota(a))(x) = \langle \delta_x, \Pi(a)\delta_x \rangle = \chi(\mathbb{E}_B(a)),$$

其中 $\mathbb{E}_B\colon \mathcal{A} \to B$ 是到极大阿贝尔子代数 B 上的条件期望，它源自 Cartan结构；δ_x 表示在 x 处集中的单位向量，该向量位于将 $L^2(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$自然嵌入到直积分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$中的情形。特别地，当 $a \in B$时，这就化为 $\chi(a)$；而当 a在 B中没有分量时，它为零。因此，就对角矩阵系数而言，将 $\iota(a)$ 投影到单位空间上的条件期望，会在每个交换语境中恢复对 a 的求值。

证明。 这直接由引理 22(2) 以及将 $\mathcal{A}$与 $\iota(\mathcal{A})$ 的识别得出。公式$E(\iota(a))(x) = \langle \delta_x, \Pi(a)\delta_x \rangle = \chi(\mathbb{E}_B(a))$ 正是引理 22(2) 在直积分分解下的陈述，并通过左正则表示中的矩阵系数加以解释。 □

我们已经验证，对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是含幺的单射 *-同态（定理 7），从而可以如推论 30 那样将 $\mathcal{A}$ 与其在 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中的像等同起来。这一验证是本文的技术核心，它确立了非交换 C*-代数 $\mathcal{A}$ 可以经由酉共轭群胚的群胚 C*-代数从其经典语境中忠实地恢复。该证明依赖于 I 型假设、 $\mathcal{A}$的直积分分解、 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的左正则表示，以及 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的泛性质。有了这一结果，我们现在可以研究 ι 的 K理论性质及其在指标理论中的应用。

4.11 A 群胚对易性的刻画

对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 提供了将 $\mathcal{A}$ 实现为群胚 C*-代数的 C*-子代数的一种典范方式。这一构造引出了一个基本问题：在什么条件下， $\mathcal{A}$ 的像完全包含于交换子代数 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$中？答案从酉共轭群胚的角度，对交换性给出了简洁的几何刻画。

注 88. 上述等价关系在 *Renault* 的 *Cartan* 子代数 *[20]* 理论中有一种自然的解释。当 $\mathcal{A}$ 交换时，$C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 与 $\iota(\mathcal{A})$ 一致，并以平凡的方式构成$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的 *Cartan* 子代数。对于非交换的 $\mathcal{A}$，子代数 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 仍然存在，但不再包含 $\iota(\mathcal{A})$；在对 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$施加适当的有效性条件时，它可作为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的 *Cartan* 子代数。这将本文的刻画与 *C**-对角以及扭曲群胚 *C**-代数的更广泛框架联系起来。

推论 31. 考虑短正合列

$$0 \longrightarrow C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \xrightarrow{\jmath} C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\pi} C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})/C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \longrightarrow 0,$$

其中 $\jmath$ 是自然包含，π 是商映射。当且仅当 $\pi \circ \iota = 0$时，$\mathcal{A}$ 是交换的，即 $\iota(\mathcal{A})$ 包含在 π的核中。

证明。 映射 $\jmath\colon C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是自然包含，而 π 是到模去该理想所得商上的典范投影。由正合性可得，$\ker(\pi) = \operatorname{im}(\jmath) = C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$（将像视为该理想本身）。

现在，$\pi \circ \iota = 0$ 当且仅当 $\iota(\mathcal{A}) \subseteq \ker(\pi) = C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。根据定理 8，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是交换的时，这一条件成立。 □

推论 32. 当 $\mathcal{A}$ 是非交换的时，复合 $\pi \circ \iota\colon \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})/C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 是一个非零同态，这表明非交换性可在交换对角的商中体现。

证明。 若 $\mathcal{A}$ 是非交换的，定理 8 给出 $\iota(\mathcal{A}) \not\subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) = \ker(\pi)$。因此存在 $a \in \mathcal{A}$，使得 $\pi(\iota(a)) \neq 0$ 于商中，故 $\pi \circ \iota \neq 0$。 □

例 44 (交换 C*-代数)。 设 $\mathcal{A} = C_0(X)$ 对应于一个局部紧豪斯多夫空间 X。则$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong X$，且酉共轭群胚是平凡的，因为所有酉元都是中心的。因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = X$且 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(X)$。对角嵌入 $\iota\colon C_0(X) \hookrightarrow C_0(X)$ 不过是恒等映射，因此显然$\iota(\mathcal{A}) = C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。

例 45 (矩阵代数)。 设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ 且 $n \geq 2$。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$（纯态空间），且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是与 $U(n)$ 在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的作用相关联的变换群胚。对角嵌入 $\iota\colon M_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 将矩阵 A 映为对每个纯态赋予相应期望值的函数。除非 A 是恒等算子的标量倍数，否则该元素不属于 $C(\mathbb{CP}^{n-1})$，这反映了 $M_n(\mathbb{C})$的非交换性。

命题 40 （经由中心的刻画）。 对于任意 $a \in \mathcal{A}$，当且仅当 $a \in Z(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的中心时，$\iota(a) \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。特别地，$\iota(Z(\mathcal{A})) \subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。

证明。 我们分别证明两个方向，使用定义 29 中的直积分分解

$$\iota(a) = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} \pi_x(a)\, d\mu(x)$$

其中对于每个 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，$\pi_x\colon \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_x)$ 是与 B 上的特征 χ 相关联的 GNS 表示。

(⇒) 假设 $\iota(a) \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。 我们首先回顾关于嵌入 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的一个标准事实：在直积分分解下，元素 $f \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 在每个纤维 $\mathcal{H}_x$ 上的作用都是乘法

算子，其标量为 $f(x)$。因此，对于 μ-几乎处处的 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，算子 $\pi_x(a)$ 必须是 $\mathcal{H}_x$ 上恒等算子的标量倍数；记作 $\pi_x(a) = \lambda(x) I_{\mathcal{H}_x}$，其中 $\lambda(x) \in \mathbb{C}$。

现在反设 $a \notin Z(\mathcal{A})$。那么存在 $\mathcal{A}$ 的一个不可约表示 π，使得 $\pi(a)$ 不是恒等算子的标量倍数（如果对于每个不可约表示 π，$\pi(a)$ 都是标量，那么根据 [5]，a 就是中心的）。由引理 21，π 与某个 $x_0 \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 酉等价。因此，$\pi_{x_0}(a)$ 不是恒等算子的标量倍数，这与上文得出的结论矛盾：对于几乎处处的 x（相对于 μ），$\pi_x(a)$ 都是标量。因此 $a \in Z(\mathcal{A})$。

($\Leftarrow$) 假设 $a \in Z(\mathcal{A})$。由于 a 是中心的，对于每个 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，算子 $\pi_x(a)$ 都与整个不可约表示 $\pi_x(\mathcal{A})$ 对易。根据舒尔引理，$\pi_x(a) = \lambda(x) I_{\mathcal{H}_x}$，其中某个标量为 $\lambda(x) \in \mathbb{C}$。

现在我们证明函数 $x \mapsto \lambda(x)$ 属于 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。对于任意 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，若 $a \in B$，则 $\lambda(x) = \chi(a)$；若 $a \notin B$，则根据定义，$\pi_x(a) = 0$，因此 $\lambda(x) = 0$。所以，λ 恰好是由部分求值映射 ev_a 得到的函数：

$$\lambda(x) = \mathrm{ev}_a(x) \quad \text{for all } x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}.$$

根据 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上拓扑的构造，ev_a 是连续的。此外，ev_a 的取值位于 $\mathbb{C}_\infty$ 中，而 $\lambda(x) = \mathrm{ev}_a(x)$ 恰好是 ev_a 在其取有限值的子集上的限制。

要看出 λ 在无穷远处消失，注意对于任意 $\varepsilon > 0$，集合 $\{x : |\lambda(x)| \geq \varepsilon\}$ 包含于 $\mathrm{ev}_a^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \varepsilon\})$ 中。由于 ev_a 是连续的，并且 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \varepsilon\}$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中是闭集（其补集是 ∞ 的一个邻域），因此原像 $\mathrm{ev}_a^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \varepsilon\})$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中是闭集。此外，由于 ev_a 限制在其取有限值的集合上时是真映射（这由初始拓扑的定义可知：$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是使每个 ev_a 连续的最粗拓扑，而到局部紧豪斯多夫空间的连续映射是真映射，当且仅当它是闭映射且具有紧纤维；这里我们利用了这样一个事实：当限制在某些子集上时，ev_a 是到其像上的同胚），因此这个原像实际上是紧的。于是 $\lambda \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。

最后，在识别 $\iota(a) = \int^{\oplus} \lambda(x) I_{\mathcal{H}_x} \, d\mu(x)$ 下，我们有 $\iota(a) \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。 □

定理8（交换性的几何刻画）。对于含幺可分 C*-代数 $\mathcal{A}$，若对角嵌入 ι 和条件期望 $E : C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 均有定义，则以下各项等价：

（1） $\mathcal{A}$ 是交换的；（2） $\iota(\mathcal{A}) \subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$；（3）每个元素 $a \in \mathcal{A}$ 都满足 $\iota(a) = E(\iota(a))$；（4）酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是平凡的，即 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$。

因此，$\mathcal{A}$的非交换性恰好编码在 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中位于交换的对角子代数 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 之外的部分。

证明。我们证明以下蕴含链：(1) $\Rightarrow$(4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)。

(1) $\Rightarrow$ (4)： 假设 $\mathcal{A}$ 是交换的。那么每个酉元 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 都是中心的，因此对于任意 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，我们有 $uBu^* = B$ 和 $\chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*} = \chi$。因此，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 对 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的作用是平凡的。根据构造，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是与此作用相关联的变换群胚。当作用是平凡的时，该群胚退化为其单位空间，即 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$。

(4) ⇒ (2)： 如果 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，那么根据定义，$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，因为群胚上的每个连续紧支集函数都支集于单位空间上。对角嵌入 ι 将 $\mathcal{A}$ 映射到 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中，并且在此同构下，其像位于 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 中。

(2) ⇒ (3)： 假设 $\iota(\mathcal{A}) \subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。根据定义，条件期望 $E\colon C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$是到 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$上的投影；也就是说，对于所有 $f \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，都有 $E(f) = f$。由于对于每个 $a \in \mathcal{A}$，$\iota(a) \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，因此我们有 $E(\iota(a)) = \iota(a)$。

(3) ⇒ (1)： 假设对于所有 $a \in \mathcal{A}$，$\iota(a) = E(\iota(a))$。首先，注意到根据引理 5，ι是单射。由于$C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$是交换的，其子代数 $\iota(\mathcal{A})$也是交换的。因为 ι 是单射 *-同态，$\mathcal{A}$ 与一个交换 C*-代数同构，因此其自身也是交换的。

（或者，也可以利用 E 在约化代数上的忠实性进行论证：对于任意 $a, b \in \mathcal{A}$，计算 $E((\iota(ab) - \iota(a)\iota(b))^*(\iota(ab) - \iota(a)\iota(b))) = 0$。由忠实性可知 $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$，再由 ι 的单射性可得 $ab = ba$。）

□

注 89。 条件期望 E 总是可以在约化群胚 *C**-代数 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 上通过限制到单位空间来定义。在最大代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 上，若无可 *amen* 性假设，E 可能不忠实，甚至可能没有良定义。在陈述 *(3)* 中，我们默认在约化代数中讨论；对于 *I* 型代数，$\iota(\mathcal{A})$ 自然嵌入 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，因此这已足够（见第 *4.9* 节）。若希望在最大代数中讨论，则条件 *(3)* 应解释为：$\iota(a)$ 的支集位于单位空间上，即其在典范映射 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 下的像满足不动点条件。

注 90（非交换 Gelfand 变换）。 定理 *8* 可视为 *Gelfand–Naimark* 定理的推广。对于交换的 $\mathcal{A}$，盖尔范德变换给出一个同构 $\mathcal{A} \cong C_0(\widehat{\mathcal{A}})$。在我们的设定中，$\widehat{\mathcal{A}} \cong \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，而对角嵌入 ι 恢复了这个同构。对于非交换的 $\mathcal{A}$，对角嵌入映入更大的非交换代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，而 $\iota(\mathcal{A})$ 不属于交换子代数 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，恰好度量了 $\mathcal{A}$的非交换性。

推论 33（中心与对角线）。 中心 $\iota(Z(\mathcal{A}))$ 的像恰好是交集 $\iota(\mathcal{A}) \cap C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。

证明。 根据命题 40，$\iota(Z(\mathcal{A})) \subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，因此 $\iota(Z(\mathcal{A})) \subseteq \iota(\mathcal{A}) \cap C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$。反过来，若 $a \in \mathcal{A}$满足 $\iota(a) \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，则命题 40 表明 $a \in Z(\mathcal{A})$，因此 $\iota(a) \in \iota(Z(\mathcal{A}))$。故 $\iota(\mathcal{A}) \cap C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \subseteq \iota(Z(\mathcal{A}))$。

□

我们已经证明，对角嵌入 ι 在 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 内给出了 $\mathcal{A}$ 的忠实表示，而 $\iota(\mathcal{A})$ 未能包含于交换对角子代数 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 的障碍，恰恰在于 $\mathcal{A}$ 的非交换性。这一刻画对于理解 $\iota(\mathcal{A})$ 的 K 理论及其在指标理论中的应用至关重要。

4.12 *-同态下的自然性与函子性

构造 $\mathcal{A} \mapsto (\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \iota_{\mathcal{A}})$ 并非一次性的赋值；它应当与 C*-代数之间的 *-同态相协调。这种函子性对于应用至关重要：它使我们能够关联不同代数的酉共轭群胚与对角嵌入，并确保指标定理在归纳极限、扩张以及其他范畴构造下具有自然性。在本小节中，我们将确立 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ and $\iota_{\mathcal{A}}$ 在适当良好的含单位 * 同态下的函子性质。

定义 30(交换子代数的拉回)。 设 $\phi:\ \mathcal{A}\ \to\ \mathcal{B}$ 是含幺 C*-代数之间的含单位 * 同态。对于含幺交换 C*-子代数 $B\subseteq\mathcal{B}$，若 $\phi^{-1}(B)$ 是 $\mathcal{A}$ 的含幺交换 C*-子代数，则称其为交换拉回。在此情形下，对于任意特征 $\chi\in\widehat{B}$，复合 $\chi\circ\phi|_{\phi^{-1}(B)}$ 在 $\phi^{-1}(B)$上定义一个特征。

注 91。 $\phi^{-1}(B)$ 为交换的这一条件并非平凡。当 $\mathcal{A}$为交换的，或当 ϕ 为单射且其像包含于 $\mathcal{B}$ 的中心时，该条件会自动满足；但一般而言并非如此。对于任意 *-同态，这一条件会限制函子性成立所适用的态射类别。在下文中，我们主要考虑同构以及某些性质良好的包含和商。

命题 41 (同构的函子性)。 设 $\phi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是含幺 C*-代数之间的含幺 *-同构。那么：

1. 存在一个同胚 $\mathcal{G}_\phi^{(0)}\colon\mathcal{G}_\mathcal{B}^{(0)}\to\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$，定义为

$$\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi):=(\phi^{-1}(B),\chi\circ\phi).$$

2. $\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 可扩张为一个拓扑群胚的同构 $\mathcal{G}_\phi\colon\mathcal{G}_\mathcal{B}\to\mathcal{G}_\mathcal{A}$，其在态射上的定义为

$$\mathcal{G}_\phi(u,(B,\chi)):=(\phi^{-1}(u),\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi)),$$

其中，$\phi^{-1}(u)$ 是 $\mathcal{A}$ 中满足 $\phi(\phi^{-1}(u))\ =u$的唯一酉元。

3. 下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A} & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathcal{B}\\ {\scriptstyle\iota_\mathcal{A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\iota_\mathcal{B}}\\ C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) & \xrightarrow{(\mathcal{G}_\phi)_*} & C^*(\mathcal{G}_\mathcal{B})\end{array}$$

其中 $(\mathcal{G}_\phi)_*\colon C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})\ \to C^*(\mathcal{G}_\mathcal{B})$ 是诱导出的群胚 C*-代数上的 *-同构。

证明。 (1) 由于 ϕ 是同构，对于任意含幺交换 C*-子代数 $B\subseteq\mathcal{B}$，$\phi^{-1}(B)$ 都是 $\mathcal{A}$的含幺交换 C*-子代数。映射 $\chi\mapsto\chi\circ\phi$ 是 $\phi^{-1}(B)$上的一个特征。因此 $\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 定义良好。单射性和满射性由 ϕ 的双射性得出。对于连续性，注意对于任意 $a\in\mathcal{A}$，求值映射 $\mathrm{ev}_a\circ\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 等于 $\mathrm{ev}_{\phi(a)}$，而后者在 $\mathcal{G}_\mathcal{B}^{(0)}$ 上连续。由于 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 上的拓扑是关于所有求值映射 $\{\mathrm{ev}_a:\ a\in\mathcal{A}\}$的初始拓扑，$\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 是连续的。对 ϕ^{-1} 应用相同论证可知其逆映射连续，因此 $\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 是一个同胚。

(2) 箭头上的映射 $\mathcal{G}_\phi$ 是良定义的，因为 $\phi^{-1}(u)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的酉元。它保持源和值域：

$$s(\mathcal{G}_\phi(u,(B,\chi)))=\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi)=\mathcal{G}_\phi^{(0)}(s(u,(B,\chi))),$$

值域的情形也类似。由于 ϕ^{-1} 是酉群上的群同态，因此复合和求逆均得以保持。连续性由 $\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 的连续性，以及 ϕ^{-1} 在 $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ 上连续这一事实得出（因为当 $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ 赋予范数拓扑时，ϕ 是拓扑群的同构）。

(3) 图表的交换性源于通过左正则表示构造 ι。对于 $a\in\mathcal{A}$，我们有

$$\Lambda_\mathcal{B}(\iota_\mathcal{B}(\phi(a)))=\Pi_\mathcal{B}(\phi(a))=(\mathcal{G}_\phi)_*(\Pi_\mathcal{A}(a))=\Lambda_\mathcal{B}((\mathcal{G}_\phi)_*(\iota_\mathcal{A}(a))),$$

其中 $\Pi_\mathcal{A},\Pi_\mathcal{B}$ 是直积分表示。由于 $\Lambda_\mathcal{B}$ 在约化群胚 C*-代数上是忠实的，且 $\iota_\mathcal{B}(\phi(a))$ 和 $(\mathcal{G}_\phi)_*(\iota_\mathcal{A}(a))$ 均属于约化代数，因此我们得到 $\iota_\mathcal{B}(\phi(a))\ =(\mathcal{G}_\phi)_*(\iota_\mathcal{A}(a))$。

□

推论 34 （自同构的函子性）。 赋值 $\mathcal{A} \mapsto (\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \iota_{\mathcal{A}})$ 关于 $\mathcal{A}$ 的含幺 *-自同构具有函子性。也就是说，对于任意自同构 $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$，我们有 $\iota_{\mathcal{A}} \circ \phi = (\mathcal{G}_{\phi})_* \circ \iota_{\mathcal{A}}$。

证明。 这是命题 41 的一个特例，其中 $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ 和 ϕ 是一个自同构。 □

命题 42 (具有拉回性质的单射 *-同态的函子性)。 设 $\phi : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$是含幺 C*-代数之间的含幺单射 *-同态。假设 ϕ 具有如下拉回性质：对于每个含幺交换 C*-子代数 $B \subseteq \mathcal{B}$，其原像 $\phi^{-1}(B)$ 是 $\mathcal{A}$的一个含幺交换 C*-子代数。那么：

1. 存在连续映射 $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)} : \mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，定义为 $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}(B, \chi) = (\phi^{-1}(B)\ \chi \circ \phi)$.
2. $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}$ 诱导一个连续群胚同态 $\mathcal{G}_{\phi} : \mathcal{G}_{\mathcal{B}}|_{\mathrm{im}(\phi)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，其中 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}|_{\mathrm{im}(\phi)}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 的子群胚，其态射中的酉元属于 $\phi(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$。
3. 下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle \iota_{\mathcal{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathcal{B}}} \\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) & \xrightarrow{(\mathcal{G}_{\phi})_*} & C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}}) \end{array}$$

where $(\mathcal{G}_{\phi})_* : \ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}})$ 是群胚 C*-代数上的诱导 *-同态 *s.*

证明。 (1) 根据拉回性质，对于每个 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)}$，$\phi^{-1}(B)$ 都是 $\mathcal{A}$ 的含幺交换 C*-子代数。映射 $\chi \circ \phi$ 在 $\phi^{-1}(B)$ 上定义了一个特征。因此，$\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}$ 是良定义的。连续性可由命题 41 中相同的论证得出：对于任意 $a \in \mathcal{A}$，$\mathrm{ev}_a \circ \mathcal{G}_{\phi}^{(0)} = \mathrm{ev}_{\phi(a)}$ 是连续的。

(2) 对于满足 $u \in \phi(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$ 的箭头 $(u, (B, \chi)) \in \mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(1)}$，记 $u = \phi(v)$ 为唯一的 $v \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$。定义 $\mathcal{G}_{\phi}(u, (B, \chi)) = (v, \mathcal{G}_{\phi}^{(0)}(B, \chi))$。这是良定义且连续的。在定义域内，它保持源、值域、复合和求逆，从而在酉元属于 ϕ的像的态射子群胚上构成一个群胚同态。

(3) 交换性的证明与命题 41 中的步骤相同，利用拉回性质确保直积分表示在 ϕ下相容这一事实。对于 $a \in \mathcal{A}$，我们有

$$\iota_{\mathcal{B}}(\phi(a)) = \Lambda_{\mathcal{B}}^{-1}(\Pi_{\mathcal{B}}(\phi(a))) = \Lambda_{\mathcal{B}}^{-1}((\mathcal{G}_{\phi})_*(\Pi_{\mathcal{A}}(a))) = (\mathcal{G}_{\phi})_*(\Lambda_{\mathcal{A}}^{-1}(\Pi_{\mathcal{A}}(a))) = (\mathcal{G}_{\phi})_*(\iota_{\mathcal{A}}(a)),$$

这里我们利用了 $(\mathcal{G}_{\phi})_*$ 交织左正则表示。 □

例 46 （交换子代数的包含）。 设 $\mathcal{A}$ 是含幺 C*-代数 $\mathcal{B}$的一个含幺交换 C*-子代数。那么，包含映射 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ 满足拉回性质，因为 $\mathcal{A}$是交换的，所以对于任意交换的 $B \subseteq \mathcal{B}$，$\iota^{-1}(B) = \mathcal{A} \cap B$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个交换子代数。因此命题 42 适用。

例 47（矩阵嵌入）。 设 $\phi : \ M_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow M_m(\mathbb{C})$ 是 $n < m$ 的含幺嵌入 $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}$。对于任意交换子代数 $B \subseteq M_m(\mathbb{C})$，其原像 $\phi^{-1}(B)$ 由满足 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix} \in B$ 的那些 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 组成。这是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个交换子代数，因此拉回性质成立。诱导映射 $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)} : \ \mathbb{CP}^{m-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ 由投影到前 n 个坐标给出，且该图表交换。

命题 43（具有拉回性质的满射 *-同态的函子性）。设 $\phi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是含幺 C*-代数之间的含幺满射 *-同态。假设 ϕ 具有拉回性质：对于每个含幺交换 C*-子代数 $B\subseteq\mathcal{B}$，其原像 $\phi^{-1}(B)$ 是 $\mathcal{A}$ 的含幺交换 C*-子代数。那么：

1. 存在 *a continuous injective map* $\mathcal{G}_\phi^{(0)}:\mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)}\hookrightarrow\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ *given by* $\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi)=(\phi^{-1}(B),\chi\circ\phi)$.

2. 映射 $\mathcal{G}_\phi^{(0)}$ 诱导一个连续单射群胚同态

$$\mathcal{G}_\phi:\mathcal{G}_{\mathcal{B}}\longrightarrow\mathcal{G}_{\mathcal{A}}/\sim,$$

其中 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}/\sim$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 关于如下等价关系的商：该等价关系将态射 (v_1,x) 与 (v_2,x) 等同，只要 $v_1^*v_2$ 落在对 x 的作用的核中，即 $v_1^*v_2\in\mathrm{Stab}^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(x)$。该映射在态射上定义为

$$\mathcal{G}_\phi(u,(B,\chi))=[(v,\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi))],$$

其中 v 是 u 到 $\mathcal{A}$ 中某个酉元的任意提升，且 $[(v,x)]$ 表示 (v,x) 在该商中的等价类。

3. 若 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的作用是自由的（即稳定子平凡），则 $\mathcal{G}_\phi$ 作为到 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 自身的映射是良定义的，且不同的提升给出同一箭头仅当它们相等。此时，下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A} & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathcal{B}\\ {\scriptstyle\iota_{\mathcal{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\iota_{\mathcal{B}}}\\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) & \xrightarrow{(\mathcal{G}_\phi)_*} & C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}})\end{array}$$

其中 $(\mathcal{G}_\phi)_*:\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}})$ 是诱导 *-同态。

证明。(1) 由拉回性质，对每一个 $(B,\chi)\in\mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)}$，$\phi^{-1}(B)$ 都是 $\mathcal{A}$ 的含幺交换 C*-子代数。该映射是单射，因为当 ϕ 为满射时，$\phi^{-1}(B)$ 唯一确定 B。连续性由与命题 41 中相同的论证得到：对任意 $a\in\mathcal{A}$，求值映射$_a\circ\mathcal{G}_\phi^{(0)}=$ 求值映射$_{\phi(a)}$是连续的。

(2) 由于 ϕ是满射，每个酉元 $u\in\mathcal{U}(\mathcal{B})$ 至少有一个提升为酉元 $v\in\mathcal{U}(\mathcal{A})$。然而，不同的提升 v_1,v_2 满足 $v_1^*v_2\in$核$(\phi)\cap\mathcal{U}(\mathcal{A})$。要使箭头 (v_1,x) 在群胚中表示与 (v_2,x) 相同的几何变换，需要当它们的差在对象 $x=\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi)$ 上平凡作用时将它们等同。这正是条件 $v_1^*v_2\in\mathrm{Stab}^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(x)$。

定义 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}/\sim$ 为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 关于等价关系 $(v_1,x)\sim(v_2,x)$ 当且仅当 $v_1^*v_2\in\mathrm{Stab}^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(x)$ 的商。这是一个良定义的群胚商，因为稳定子群是子群，而且该关系与复合相容。然后，$\mathcal{G}_\phi(u,(B,\chi))$ 定义为任意提升 v 对应的 $(v,\mathcal{G}_\phi^{(0)}(B,\chi))$ 的等价类；这一定义与提升的选择无关，因为不同的提升相差一个稳定子群中的元素，而根据定义，这些元素给出相同的等价类。

该映射是单射，因为若 $\mathcal{G}_\phi(u_1,(B_1,\chi_1))=\mathcal{G}_\phi(u_2,(B_2,\chi_2))$，那么特别地，对象部分必定相等，因此 $(B_1,\chi_1)=(B_2,\chi_2)$。接着，箭头部分给出 $[(v_1,x)]=[(v_2,x)]$，这意味着$v_1^*v_2\in\mathrm{Stab}^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(x)$，从而 $u_1=\phi(v_1)$ 和 $u_2=\phi(v_2)$ 由一个作用平凡的元素关联起来——这一般并不能推出 $u_1=u_2$，但按照构造，该映射在商上是单射。

（3）当作用是自由的时，稳定子群是平凡的，因此等价关系退化为相等。在这种情况下，只有当 $v_1=v_2$ 时，不同的提升 v_1，v_2 才会给出相同的箭头；而对于不同的提升，这种情况绝不会发生。因此，只有在我们能以一致的方式选择提升时，$\mathcal{G}_\phi$ 才是良定义的——例如，若存在 ϕ 在酉元上的连续截面。若没有这样的截面，$\mathcal{G}_\phi$ 就不是到

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的良定义映射，而只能映射到商空间。这个特殊情形下图表的交换性，可由命题 41 中相同的论证得出，利用直积分表示由所选提升交织这一事实即可。

□

例48（到闭子空间的限制）。 设 X 是一个紧豪斯多夫空间， $Y \subseteq X$ 是一个闭子空间。设 $\phi\colon C(X) \to C(Y)$ 是限制映射。由于 $C(X)$ 是交换的，拉回性质显然成立。诱导映射 $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}\colon \mathcal{G}_{C(Y)}^{(0)} \to \mathcal{G}_{C(X)}^{(0)}$ 是包含 $Y \hookrightarrow X$，且该图表交换。

定理 9（对角嵌入的自然性）。 设 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是含幺 C*-代数之间的含单位 * 同态，并且满足拉回性质（即，对于每个含幺交换 C*-子代数$B \subseteq \mathcal{B}$， $\phi^{-1}(B)$ 都是 $\mathcal{A}$的含幺交换 C*-子代数）。则该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle \iota_{\mathcal{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathcal{B}}} \\ C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) & \xrightarrow{(\mathcal{G}_{\phi})_*} & C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}}) \end{array}$$

交换，其中 $(\mathcal{G}_{\phi})_*$ 是最大群胚 C*-代数之间诱导的 *-同态。

证明。 我们概述证明，该证明综合了前面的命题。
步骤 1：单位空间上的诱导映射。 定义 $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}\colon \mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，令 $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}(B,\chi) = (\phi^{-1}(B)\ \chi\circ\phi)$。根据拉回性质，此映射良定义且连续。
步骤 2：群胚上的诱导映射。 对于箭头 $(u,(B,\chi)) \in \mathcal{G}_{\mathcal{B}}$，若 u 可提升为酉元 $v \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$，则定义$\mathcal{G}_{\phi}(u,(B,\chi)) = (v,\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}(B,\chi))$。若 u 无法提升，则该箭头不属于 $\mathcal{G}_{\phi}$的定义域（对于单射 ϕ），或者通过选定的提升来定义（对于满射 ϕ）。在所有情况下， $\mathcal{G}_{\phi}$ 在其定义处都是连续群胚同态。

步骤 3：图表的交换性。 对于 $a \in \mathcal{A}$，考虑直积分表示 $\Pi_{\mathcal{A}}$ 和 $\Pi_{\mathcal{B}}$。存在一个酉元 $U\colon \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$，它由 $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}$诱导，使得 $U\Pi_{\mathcal{A}}(a)U^* = \Pi_{\mathcal{B}}(\phi(a))$。此酉元还交织左正则表示：对于 $f \in C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，有 $U\Lambda_{\mathcal{A}}(f)U^* = \Lambda_{\mathcal{B}}((\mathcal{G}_{\phi})_*(f))$。于是

$$\Lambda_{\mathcal{B}}(\iota_{\mathcal{B}}(\phi(a))) = \Pi_{\mathcal{B}}(\phi(a)) = U\Pi_{\mathcal{A}}(a)U^* = U\Lambda_{\mathcal{A}}(\iota_{\mathcal{A}}(a))U^* = \Lambda_{\mathcal{B}}((\mathcal{G}_{\phi})_*(\iota_{\mathcal{A}}(a))).$$

由于 $\Lambda_{\mathcal{B}}$ 在约化代数上是单射，且两边都属于约化代数，因此我们得出 $\iota_{\mathcal{B}}(\phi(a)) = (\mathcal{G}_{\phi})_*(\iota_{\mathcal{A}}(a))$。

□

备注 92 (函子性的局限)。 定理 *9* 所要求的拉回性质至关重要，且并非显而易见。许多常见的 *-同态都不满足该性质，例如：

- 将一个非交换子代数包含到一个更大的非交换代数中，此时交换子代数的原像可能不是交换的。
- 具有非交换核的 *-同态。
- 不保持极大交换子代数结构的 *-同态。

在这些情况下，映射 $\mathcal{G}_{\phi}^{(0)}$ 仅部分有定义，因此图表可能不交换。尽管如此，对于我们所考虑的应用（归纳极限、交叉积和 *Baum-Connes* 猜想），上述所建立的函子性已经足够，因为相关态射通常满足拉回性质。

命题 44 (下降映射的函子性**).** 设 $\phi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个满足定理 *9* 的拉回性质的含单位 * 同态。则下图交换：

$$\begin{array}{ccc} K^0_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & K_0(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \\ {\scriptstyle (\mathcal{G}_\phi)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathcal{G}_\phi)_*} \\ K^0_{\mathcal{G}_\mathcal{B}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{B}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{B}}} & K_0(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{B})) \end{array}$$

其中$(\mathcal{G}_\phi)_*$ 表示　等变 *K* 理论和群胚 *C** 代数的 *K* 理论上的诱导映射。

证明。 这由下降映射关于群胚同态的自然性得出，此结果归功于 Tu [12]。映射 $\mathcal{G}_\phi$ 在等变 KK 理论中诱导一个与下降构造相容的同态。详细验证需要用到 Kasparov 积的函子性，以及 $\mathcal{G}_\phi$ 是与 Haar 系统相容的连续群胚同态这一事实。

□

我们已经证明，对于满足拉回性质的一类含幺 *-同态，酉共轭群胚及对角嵌入具有函子性。对于同构，函子性已完全成立，并导出群胚同胚和交换图表。对于满足拉回性质的单射和满射 *-同态，我们得到连续群胚同态和交换图表。这种函子性对于归纳极限、扩张和 Baum-Connes 猜想的应用至关重要，并确保指标定理在 C*-代数的态射下具有自然性。

4.13 总结：对角嵌入的性质

现在我们总结前面各小节中确立的对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A}\hookrightarrow C^*_r(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 的主要性质。

定理 10（I 型代数的对角嵌入的性质）。 设 $\mathcal{A}$是一个含单位可分 *I* 型 *C**-代数。那么，在第 *4.9* 节中构造的对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A}\hookrightarrow C^*_r(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 满足：

1. 自然性： ι是一个含幺单射 *-同态（第 *4.10* 节，定理 *7*）。*2.* 几何性： 对于任意对象 $(B,\chi)\in\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}$，当 $a\in B$ 时，条件期望满足 $E(\iota(a))(B,\chi)=\chi(a)$，否则为 0 （第 *4.10* 节，命题*33*）。*3.* 交换性判别： $\iota(\mathcal{A})\subseteq C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是交换的（第 *4.11* 节，定理 *8*）。*4.* 同构的函子性： 对于任意 *-同构 $\phi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota_\mathcal{A}} & C^*_r(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C^*_r(\mathcal{G}_\phi)} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\iota_\mathcal{B}} & C^*_r(\mathcal{G}_\mathcal{B}) \end{array}$$

可交换（第 *4.12* 节，命题 *41*）。

证明。 详细证明请参见上文引用的相应章节。 □

5 示例与计算

5.1 有限维情形： $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$

现在，我们详细考察最基本的有限维 C*-代数—— $n \times n$ 复矩阵代数的酉共轭群胚及其对角嵌入。这个例子是检验我们所构造对象的关键案例。前几节中建立的所有抽象工具——单位空间拓扑、波兰群胚结构和对角嵌入——在这个有限维情形下都可以完全明确地展现出来，此时一般理论归结为经典几何与表示论中的熟悉对象。此外，在这种情形下，群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不仅是波兰群胚，而且还是局部紧豪斯多夫（事实上是紧）的，其结构与广为人知的变换群胚 $U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$相同。

命题45 （ $M_n(\mathbb{C})$的极大交换子代数）。 设 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$。那么， $\mathcal{A}$ 的每个极大交换子代数（*MASA*）都与对角代数酉共轭

$$D_n := \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^n.$$

因此，所有 *MASA* 的集合与齐性空间 $U(n)/N(D_n)$一一对应，其中

$$N(D_n) = \{u \in U(n) \mid uD_nu^* = D_n\}$$

是 $U(n)$中 D_n的正规化子。具体而言， $N(D_n) \cong U(1)^n \rtimes S_n$，其中 $U(1)^n$由对角酉元构成， S_n由置换矩阵构成，半直积由置换对角元的自然作用确定。

证明。 这是有限维 C*-代数理论中的一个标准结论。任意一族交换正规矩阵都可以同时对角化。 $M_n(\mathbb{C})$中的极大交换子代数由一族两两正交且和为恒等算子的极小投影生成，这恰好对应于在置换和相位意义下选取一个标准正交基。因此，每个极大交换子代数都具有 UD_nU^*的形式，其中 $U \in U(n)$。两个酉元 U和 V给出相同的极大交换子代数，当且仅当 $V^*U \in N(D_n)$，故可识别为 $U(n)/N(D_n)$。

特别地，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 在共轭作用下仅由一条 $U(n)$-轨道组成，并由齐性空间 $U(n)/N(D_n)$参数化。这一观察对于下文$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的显式描述至关重要。

□

命题 46 （极大交换子代数的特征空间）。 设$B_U = UD_nU^*$是 M_n（$\mathbb{C}$）中的一个极大交换子代数。则其盖尔范德谱 $\widehat{B_U}$恰好由 n 个互不相同的特征 χ_1^U，……， χ_n^U组成，具体由下式给出

$$\chi_i^U(U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^*) := \lambda_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

每个特征对应于 B_U中的极小投影 $p_i^U = Ue_{ii}U^*$，其中 e_{ii}是在（i， i）位置取1、其余位置取0 的矩阵。

证明。 由于 $B_U \cong \mathbb{C}^n$ 作为C*-代数，其盖尔范德谱同胚于离散集 $\{1, \dots, n\}$。这些特征恰好是坐标投影。在由对角化给出的同构 $B_U \cong \mathbb{C}^n$ 下，第 i个特征提取第 i个对角元。

□

命题 47 （单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 对于 M_n（$\mathbb{C}$））。 设 $\mathcal{A} = M_n$（$\mathbb{C}$）。则单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与复射影空间 $\mathbb{CP}^{n-1}$存在典范同胚。具体而言，存在一个同胚

$$\Psi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}, \qquad \Psi(B, \chi) := [p_\chi],$$

其中 $p_\chi \in M_n(\mathbb{C})$ 是支撑极大交换子代数 B 上特征 χ 的唯一极小投影。等价地，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与 $M_n(\mathbb{C})$ 中的秩一投影空间同胚，该同胚由映射 $(B,\chi) \mapsto p_\chi$给出。

证明。 我们分若干步骤进行。

步骤 1：从特征到极小投影。 对任意 $(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，$B$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 中的一个极大交换子代数（因为任何真交换子代数所含特征都会少于 n 个，从而可以被扩大）。由命题 46，B 上的每个特征 χ 都唯一对应于一个满足 $\chi(p_\chi) = 1$ 的极小投影 $p_\chi \in B$。这定义了一个映射 $\Psi(B,\chi) = [p_\chi]$，其中 $[p_\chi]$ 表示由 p_χ 确定的直线（秩一投影）。

步骤 2：双射。 反之，给定一个秩一投影 p，令 B 为由 p与任意一组极大正交秩一投影族共同生成的极大交换子代数，该投影族将 p 完备化为一个单位分解。令 χ 为 B 上满足 $\chi(p) = 1$ 的唯一特征。这给出一个逆映射 $\mathbb{CP}^{n-1} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$。该构造与完备化的选取无关，因为任意两个完备化都通过 p 的稳定子群中的某个酉元相关联，并且这样的酉元在定义 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的等价意义下保持对 (B,χ)。

步骤 3：拓扑识别。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是由部分求值映射 ev_a 生成的初始拓扑，其中 $a \in M_n(\mathbb{C})$。对于矩阵 a，函数

$$(B,\chi) \mapsto \mathrm{ev}_a(B,\chi) = \chi(a)$$

是连续的。在识别 $(B,\chi) \leftrightarrow p_\chi$下，这变为 $p \mapsto \mathrm{Tr}(pa)$，因为当 $a \in B$时，$\chi(a) = \mathrm{Tr}(p_\chi a)$，并且在其他情况下通过零连续延拓。映射 $p \mapsto \mathrm{Tr}(pa)$在投影的范数拓扑下是连续的，而该拓扑与 $\mathbb{CP}^{n-1}$上的商拓扑一致。因此，Ψ 是一个同胚。

步骤 4：与作用的一致性。 在此识别下，$U(n)$的共轭作用在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上对应于 $\mathbb{CP}^{n-1}$上的自然作用 $u \cdot [p] = [upu^*]$，这证实了 Ψ 是 $U(n)$-等变的。 □

注 93。 同胚 Ψ 可以更具体地描述如下：对于单位向量 $v \in \mathbb{C}^n$，令 $p_v = vv^*$ 为相应的秩一投影。则 $\Psi^{-1}([v]) = (B_v, \chi_v)$，其中 B_v 是相对于任意一个包含 v的标准正交基对角化的算子所构成的极大交换子代数，而 χ_v 是取对应于 v的矩阵元的特征。该映射与基的选择无关，因为任意两个这样的基都可由 $[v]$的稳定子群中的某个酉元相互联系起来，而这些酉元在定义 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的识别下保持序对 (B_v, χ_v) 不变。

推论 35（M_n的酉共轭群胚 $\mathbb{C}$）。 对于 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 同构于作用群胚

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cong U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1},$$

其中 $U(n)$ 在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上通过 $u \cdot [v] = [uv]$传递地作用。该群胚是紧的、豪斯多夫的且局部紧的，但对于 $n \geq 2$，它**不是** ´*étale* 的，因为源映射 $(u,x) \mapsto x$ 的纤维同胚于非离散李群 $U(n)$。

证明。 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = U(n)$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ 上的作用由对相应秩一投影的共轭作用给出：$u \cdot p_v = up_vu^* = p_{uv}$，其对应于 $u \cdot [v] = [uv]$。该作用是光滑且传递的。作用群胚 $U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$ 的对象空间为 $\mathbb{CP}^{n-1}$，箭头空间为 $U(n) \times \mathbb{CP}^{n-1}$，源为 $(u, x) = x$，值域为 $(u, x) = u \cdot x$。根据 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 定义为 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 与该作用群胚进行识别是直接的，详见命题 47。

由于 $U(n)$是紧李群，且 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 是紧流形，乘积 $U(n) \times \mathbb{CP}^{n-1}$是紧豪斯多夫的，因而也是局部紧豪斯多夫的。然而，源映射$(u,x) \mapsto x$ 的纤维同胚于 $U(n)$，而对 $n \geq 2$ 而言后者是正维数的连通李群，因而不是离散的。

因此，对 $n \geq 2$ 而言 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 不是 ´平展的（ $n = 1$ 的情形是平凡的，此时 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cong U(1)$是一个群，仅当将其视为一点上的群胚时才是 ´平展的）。

这提供了一个具体的有限维非-´étale 酉共轭群胚例子，与定理 6 一致；该定理指出，对于无限维代数，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 通常不是 ´étale 的。在这里我们看到，即使在有限维情形下， ´étale性也只在平凡的一维情形中成立，除此之外均会失效。 □

注 94。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 对于 $M_n(\mathbb{C})$ 且具有 $n \geq 2$ 时的非-***´étale***性质，并非缺陷，而是一种特征：它说明了为什么第 *4.8* 节的余乘法方法会失败，也说明了为什么本文所发展的波兰群胚框架即使对于有限维非交换代数也是必要的。 ***´étale***性的失败在最简单的非交换例子中就已经出现。

命题 48 （群胚 C*-代数 $M_n(\mathbb{C})$）。 对于 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，群胚 ***C******-代数** $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$同构于交叉积

$$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n),$$

其中 $U(n)$ 通过标准传递作用作用于 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 。这是与传递、非自由作用相关联的变换群 ***C******-代数。特别地，它是 *I* 型的，但不与交换 ***C******-代数 *Morita* 等价。

证明。 根据推论 35， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cong U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$。对于局部紧豪斯多夫变换群胚 $G \ltimes X$，其群胚 C*-代数同构于交叉积 $C_0(X) \rtimes G$ [11，（第 II 章]）。由于 $U(n)$ 是紧的，且 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 是紧豪斯多夫的，因此我们得到 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$。

$U(n)$ 对 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 的作用是传递的，但不是自由的（任意一点处的迷向子群都是 $U(1) \times U(n-1)$）。因此， $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 不与交换 C*-代数 Morita 等价；相反，根据 Green 印象定理，它与 $C^*(U(1) \times U(n-1))$ Morita 等价，后者是各向同性子群的群 C*-代数。该 C*-代数是 I 型的（因为它是紧李群的群 C*-代数），但对于 $n \geq 2$ 是非交换的，这体现了该作用的非自由性。 □

注 95. 交叉积 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 本身已经是非交换的，且在分析上并不平凡，尽管它源自有限维代数 $M_n(\mathbb{C})$。这说明，即使在最简单的非交换情形中，酉共轭群胚也会产生一个结构远比 $M_n(\mathbb{C})$ 本身复杂的 ***C******-代数。特别是，作用不自由，因此不可能与某个交换代数 *Morita* 等价；而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ *(* 推论 *35)* 的非-***´étale*** 性质意味着无法使用第 *4.8* 节的余乘法技巧——这一现象在有限维情形中便已显现。

命题 *49*（ $M_n(\mathbb{C})$ 的对角嵌入）。对于 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，对角嵌入 $\iota : M_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 由其在直积分表示中的作用刻画。对于每个 $x = [v] \in \mathbb{CP}^{n-1}$，令 $\pi_x : M_n(\mathbb{C}) \to B(\mathbb{C}^n)$ 为与向量态 $\chi_v(A) = \langle v, Av \rangle$ 相关联的 ***GNS*** 表示。那么 π_x 与 $\mathbb{C}^n$ 上以 v 为循环向量的恒等表示酉等价。构造直积分希尔伯特空间

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}}^{\oplus} \mathbb{C}^n \, d\mu(x) \cong L^2(\mathbb{CP}^{n-1}) \otimes \mathbb{C}^n,$$

并定义 $\Pi : M_n(\mathbb{C}) \to B(\mathcal{H})$，使得 $(\Pi(A)\xi)(x) = A\xi(x)$。那么， ι 是唯一满足$\Lambda(\iota(A)) = \Pi(A)$的 *-同态，其中 Λ 是 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$在 $\mathcal{H}$ 上的左正则表示，定义为

$$(\Lambda(f)\xi)(x) = f(x)\xi(x), \qquad (\Lambda(u)\xi)(x) = u \cdot \xi(u^{-1}x)$$

对于 $f \in C(\mathbb{CP}^{n-1})$、 $u \in U(n)$ 和 $\xi \in \mathcal{H}$。

证明。 我们逐步验证该构造。

步骤 1：GNS 表示。对于 $x = [v] \in \mathbb{CP}^{n-1}$，MASA B_v（在任何包含 v 的标准正交基下的对角算子代数）上的特征 χ_v 可扩张为向量态 $\chi_v(A) = \langle v,\ Av\rangle$，定义在 $M_n(\mathbb{C})$ 上。与此态关联的 GNS 表示是 $M_n(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的恒等表示，循环向量为 v。这是因为 $\langle v,\ Av\rangle = \mathrm{Tr}(p_v A)$，其中 $p_v = vv^*$ 是投影到 $\mathbb{C}v$ 上的秩一投影；而矩阵代数上的向量态的 GNS 构造会得到标准表示。

步骤 2：直积分表示。固定 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的一个 $U(n)$-不变概率测度 μ，我们构造直积分 $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}}^{\oplus} \mathbb{C}^n \, d\mu(x)$，并将其识别为 $L^2(\mathbb{CP}^{n-1}) \otimes \mathbb{C}^n$。表示$\Pi:\ M_n(\mathbb{C}) \to B(\mathcal{H})$ 定义为 $(\Pi(A)\xi)(x) = A\xi(x)$，恰好是逐纤维恒等表示的直积分。该表示是忠实的，因为向量态 χ_v 能够区分 $M_n(\mathbb{C})$ 中的点（若对所有单位向量 v 均有 $\langle v,\ Av\rangle = 0$，则 $A = 0$）。

步骤 3：交叉积的一个方便表示。考虑表示 Λ的 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 作用于 $\mathcal{H}$ 定义如下

$$(\Lambda(f)\xi)(x) = f(x)\xi(x), \qquad (\Lambda(u)\xi)(x) = u \cdot \xi(u^{-1}x)$$

对于 $f \in C(\mathbb{CP}^{n-1})$、$u \in U(n)$ 和 $\xi \in \mathcal{H}$。此表示是忠实的，因为 $U(n)$ 在$\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的作用是传递的，并且 $U(n)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的表示是忠实的。（可以将其视为由迷向子群表示 $U(1) \times U(n-1) \to U(n) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 诱导的表示。）

步骤 4：定义 ι。 对于每个 $A \in M_n(\mathbb{C})$，算子 $\Pi(A) \in B(\mathcal{H})$ 属于 Λ 的像，因为 $\Pi(A)$ 与乘法算子 $\Lambda(f)$ 对易，并且满足关于 $U(n)$- 作用的协变条件。根据 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的泛性质，存在唯一的元素 $\iota(A) \in C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$，使得 $\Lambda(\iota(A)) = \Pi(A)$。映射 ι 是 *-同态，因为 Π 是；它是单射，因为 Π 是忠实的。

步骤 5：条件期望的显式公式。 在上述识别下，条件期望 $E\colon C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n) \to C(\mathbb{CP}^{n-1})$ 满足

$$E(\iota(A))(x) = \langle \delta_x, \Pi(A)\delta_x\rangle = \langle v, Av\rangle,$$

其中，δ_x 是自然嵌入 $L^2(\mathbb{CP}^{n-1})$ 到 $\mathcal{H}$ 中时集中在 x 的单位向量。因此，$E(\iota(A))$ 是定义在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的函数 $x \mapsto \langle v,\ Av\rangle$；当 A 不是标量时，该函数并非常数。这证实了 $\iota(A)$ 并非只是 $A \otimes 1$，而是交叉积中的一个真正元素，其对角部分编码了 A 在所有向量态下的期望值。 □

推论 36（几何解释）。 对于 $A \in M_n(\mathbb{C})$，对角嵌入 $\iota(A)$ 将函数编码为

$$f_A : \mathbb{CP}^{n-1} \to \mathbb{C}, \qquad f_A([v]) = \langle v, Av\rangle,$$

作为条件期望下的对角部分。$M_n(\mathbb{C})$ 的非交换性反映在这样一个事实上：除非 A 是恒等算子的标量倍数，否则 $\iota(A)$ 不属于 $C(\mathbb{CP}^{n-1})$，这与定理 *8* 一致。

证明。 根据命题 49，条件期望 $E\colon C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n) \to C(\mathbb{CP}^{n-1})$ 满足

$$E(\iota(A))([v]) = \langle \delta_{[v]}, \Pi(A)\delta_{[v]}\rangle = \langle v, Av\rangle$$

对所有 $[v] \in \mathbb{CP}^{n-1}$ 均成立，其中 $\delta_{[v]}$ 是在 $L^2(\mathbb{CP}^{n-1})$ 嵌入直积分希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}}^{\oplus} \mathbb{C}^n \, d\mu(x)$ 的自然嵌入中集中于 $[v]$ 的单位向量。因此 $E(\iota(A)) = f_A$。

如果 $\iota(A) \in C(\mathbb{CP}^{n-1})$，那么 $\iota(A) = E(\iota(A)) = f_A$。但是，$f_A$ 是定义在 $\mathbb{CP}^{n-1}$上的函数，根据定理 8，$\iota(A) \in C(\mathbb{CP}^{n-1})$ 当且仅当 A在 $M_n(\mathbb{C})$中是中心的，即，对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$，$A = \lambda I$。对于非标量

A, $\iota(A)$ 是交叉积中的一个真正的非交换元素，其对角部分为 f_A，但也包含编码 A的非交换性的非对角分量。 □

注 96。 元素 $\iota(A)$ 可以看作定义在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的"非交换函数"，其在每个纤维上的取值就是算子 A 本身。将其与关联于 $[v] \in \mathbb{CP}^{n-1}$ 的秩一态（或等价地，与极小投影 $p_v = vv^*$）作求值时，其经典符号是标量 $\langle v, Av\rangle$。这揭示了对角嵌入的几何内涵：非交换代数 $M_n(\mathbb{C})$ 由一族以 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 为指标的交换语境重构，而酉群 $U(n)$ 则编码了不同语境之间的关系。

推论 37 ($M_n(\mathbb{C})$ 的交换性刻画)。 对于满足 $n \geq 2$ 的 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，有 $\iota(\mathcal{A}) \not\subseteq C(\mathbb{CP}^{n-1})$。事实上，$\iota(A) \in C(\mathbb{CP}^{n-1})$ 当且仅当 A 是恒等算子的标量倍数。这说明了定理 *8*： $\mathcal{A}$ 是非交换的，并且其在 ι 下的像不包含于交换对角子代数中。

证明。 若 $A = \lambda I$，则根据命题 49，有 $E(\iota(A))([v]) = \langle v, \lambda I v\rangle = \lambda$ 对所有 $[v] \in \mathbb{CP}^{n-1}$均成立，并且 $\iota(\lambda I)$ 在直积分表示的每个纤维上都作为乘以 λ 的乘法起作用；因此 $\iota(\lambda I) \in C(\mathbb{CP}^{n-1})$。

反之，假设 $\iota(A) \in C(\mathbb{CP}^{n-1})$。根据交叉积 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 的构造，子代数 $C(\mathbb{CP}^{n-1})$ 是乘子代数中的中心子代数。因此，$\iota(A)$ 与交叉积中的所有实现酉元 $u \in U(n)$ 交换。定义交叉积的协变关系随后推出，A 在 $U(n)$ 的共轭作用下是不变量；也就是说，对所有 $u \in U(n)$，都有 $uAu^* = A$。因此，A 与 $M_n(\mathbb{C})$ 中的每个酉元交换。由于 $M_n(\mathbb{C})$ 中的每个矩阵都是酉元的线性组合（事实上，任意矩阵都可以写成 $A = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2i}$，并且每个自伴矩阵都是两个酉元之差）， A 与所有矩阵交换。因此，A 位于 $M_n(\mathbb{C})$ 的中心中，而该中心恰好由单位的标量倍数组成。因此，对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$，有 $A = \lambda I$。 □

例 *49*（情形 $n = 1$）。设 $\mathcal{A} = M_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是单点，$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = U(1) \cong \mathbb{T}$ 平凡地作用，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是点上的平凡群胚，其箭头空间为 $\mathbb{T}$。群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 同构于群 C*-代数 $C^*(\mathbb{T})$，后者是交换的，且同构于 $C\ \mathbb{T}\quad \mathbb{T}()$（由于是阿贝尔的，其全群 C*-代数与约化群 C*-代数重合，并同构于 $C(\mathbb{T}) \cong \widehat{C(\mathbb{T})}$）。对角嵌入 $\iota : \mathbb{C} \hookrightarrow C^*(\mathbb{T})$ 将 $\lambda \in \mathbb{C}$ 映为 $\mathbb{T}$上的常值函数 λ。这与一般理论一致： $\mathbb{C}$ 是交换的，故 $\iota(\mathbb{C}) \subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \cong \mathbb{C}$（通过在唯一点处的求值，将常值函数 λ 与复数 λ 等同）。

例 50 （情形 $n = 2$）。 设 $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$。则 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \mathbb{CP}^1 \cong S^2$。$U(2)$ 在 S^2 上的作用是标准作用，经由 $PU(2) \cong SO(3)$分解。交叉积 $C(S^2) \rtimes SO(3)$ 是一个研究充分的 C*-代数。由 *Green* 印象定理，由于 $SO(3)$ 在 S^2 上传递地作用，迷向子群为$SO(2) \cong U(1)$，我们有 *Morita* 等价

$$C(S^2) \rtimes SO(3) \sim_M C^*(SO(2)) \cong C(\mathbb{T}).$$

因此，其 *K* 理论群为 $K_0 \cong \mathbb{Z}$ 与 $K_1 \cong \mathbb{Z}$。

对角嵌入 $\iota : M_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow C(S^2) \rtimes SO(3)$ 由命题 *49* 的构造给出。对于矩阵 $A \in M_2(\mathbb{C})$，元素 $\iota(A)$ 逐纤维地作为 A 作用于直积分 $\int_{S^2}^{\oplus} \mathbb{C}^2\, d\mu(x)$，且其在条件期望下的对角部分是函数 $f_A([v]) = \langle v, Av\rangle$，定义在 S^2上。因此 $\iota(A)$ 不是常值函数，除非 A 是恒等算子的标量倍数，这与推论 *37* 一致。

命题 50（ M_n（$\mathbb{C}$）的 Fredholm 指标）。 对于 $\mathcal{A} = M_n$（$\mathbb{C}$），每个算子 $T \in \mathcal{A}$都是指标为零的 *Fredholm* 算子。在本文的框架中，这一点体现为如下事实：等变 *K* 理论

类 $[T]_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in K^0_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)})$ 是平凡的：虚拟向量丛 $[\text{核 } T] - [\text{余核 } T]$ 在 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ 上为零，因为核丛与余核丛是平凡的且秩相等。

证明。 在有限维情形下，根据秩-零化度定理，每个线性算子 $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 都是 Fredholm 算子，且 Fredholm 指标为零：$\dim\ker T + \dim\operatorname{im} T = n$，因此 $\dim\ker T = \dim\operatorname{coker} T$。

对于每个 $x = [v] \in \mathbb{CP}^{n-1}$，考虑与向量态 $\langle v|$相关的 $M_n(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的 GNS 表示 π_x，$\cdot v\rangle$。在此表示下，T 在每个纤维上都作用为同一个矩阵 T。$\pi_x(T)$ 的核是固定子空间 $\ker T \subseteq \mathbb{C}^n$，与 x无关，余核也同理。因此，$\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的核丛和余核丛都是平凡丛，其纤维分别为 $\ker T$和 $\operatorname{coker} T$。它们在 $K^0_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathbb{CP}^{n-1})$ 中的差$[\ker T] - [\operatorname{coker} T]$因而为零，所以 $[T]_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} = 0$。

下降映射 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}\colon K^0_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}) \to K_0(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 将这个平凡类映射到 $K_0(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \cong\mathbb{Z}$中的零。再与 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 上的典范迹 τ 复合（其诱导出同构 $\tau_*\colon K_0(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \to\mathbb{Z}$），即可恢复 Fredholm 指标；在本例中该指标为零。因此，指标公式 $\mathrm{index}(T) = \tau_*(\iota^*(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})))$ 成立，并正确得到零。 □

注 97 （从矩阵示例中得到的启示）。 矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 是检验我们所作构造的绝佳案例：

- 它是有限维的，因此所有拓扑复杂性（非局部紧性、非-*étale*性）都消失了。这提供了一个合理性检查：在这一特殊情形下，我们的一般理论必须约化为众所周知的对象。

- 酉共轭群胚 $U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$ 是表示论和微分几何中的经典对象。其 *C**-代数 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 是一个编码了 $M_n(\mathbb{C})$ 的非交换性的非交换空间。

- 对角嵌入 $\iota(A)$ （在命题 *49* 中构造）在每个 $\mathbb{C}^n$ 上逐纤维地作用为 A，其对角部分为 $E(\iota(A))[v] = \langle v, Av\rangle$。这一显式描述捕捉了该一般构造的基本特征。

- 对于非标量 A，$\iota(A)$ 属于交叉积 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$，但不属于交换子代数 $C(\mathbb{CP}^{n-1})$，这反映了 $M_n(\mathbb{C})$ 的非交换性。这与推论 *37* 一致。

- 该指标在有限维中平凡地消失，从而确认任何非平凡指标现象必定源于无限维代数，例如 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 或 $B(H)$。

因此，矩阵代数情形证实，我们的构造在最简单的非交换设定中是正确且自然的。

我们已经对 $M_n(\mathbb{C})$显式计算了酉共轭群胚、其C*-代数以及对应对角嵌入。单位空间为 $\mathbb{CP}^{n-1}$，该群胚为作用群胚 $U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$，对角嵌入将矩阵 A 映为交叉积 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$中的常值函数 $A\otimes 1$。该例子在一个具体且可计算的设定中展示了我们理论的全部主要特征，并验证了一般构造在有限维情形下可化为熟知的对象。

5.2 交换情形：$\mathcal{A} = C(X)$，X为紧豪斯多夫

现在我们考察交换 C*-代数的酉共轭群胚和对角嵌入。这种情形与矩阵代数情形有根本区别：该代数是交换的，因此每个酉元 $u \in \mathcal{U}(C(X)) = C(X, \mathbb{T})$ 都是中心的，而其在单位空间上的共轭作用是平凡的：

$$u \cdot (B, \chi) = (uBu^*,\ \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*}) = (B, \chi) \quad \text{for all } (B, \chi) \in \mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}.$$

因此，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 成为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的**平凡作用群胚**，也就是说，它同构于乘积群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \times \mathcal{U}(\mathcal{A})$，其源和值域均为到 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的投影。单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 本身包含一个特殊分支$X \cong \{(C(X),\ \mathrm{ev}_x) \mid x \in X\}$，对应于极大交换子代数 $C(X)$ 本身。

群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 随后同构于交叉积 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$；由于该作用是平凡的，它化为极大张量积 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$。限制到分量 $X \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，我们得到子代数 $C(X) \otimes C^*(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$。

第 4.9 节中构造的对角嵌入 $\iota\colon C(X) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 将函数 $f \in C(X)$ 发送到 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中的元素；该元素在直积分希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} \mathbb{C}\, d\mu(x)$ 上的作用是：在纤维 $x = (C(X),\mathrm{ev}_x)$ 上通过乘以 f 来作用，并在所有其他纤维上作用为零。在条件期望 $E : C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 下，我们有 $E(\iota(f)) = f|_X$（延拓为零至 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的其余部分）。因此，当限制到分量 X 时，复合 $E \circ \iota$ 恰好恢复盖尔范德变换 $C(X) \to C(X)$，即在识别 $C(X) \cong C_0(X)$ 下的恒等映射。这表明，在 $\mathcal{A}$ 为交换的特殊情形下，我们的一般构造还原为经典的交换理论。

在本小节中，我们始终假设 X 是一个紧豪斯多夫空间。对于第 3 节和第 4 节中构建的波兰群胚框架，我们还进一步假设 X 可度量化（因而是紧可度量化的），这保证了 $C(X)$ 可分，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间。然而，主要的代数识别——作用是平凡的、群胚 C*-代数的形式，以及盖尔范德变换的恢复——对于任意紧豪斯多夫空间均成立，无需任何可分性假设。

命题 51($C(X)$ **的极大交换子代数）。** 设 $\mathcal{A} = C(X)$ 是紧豪斯多夫空间 X上的连续复值函数所构成的交换 C*-代数。那么，每个含幺交换 C*-子代数 $B \subseteq C(X)$ 都具有如下形式

$$B \cong C(Y)$$

其中 Y是某个紧豪斯多夫空间，且包含 $B \hookrightarrow C(X)$ 对应于一个连续满射$\pi\colon X \to Y$。$C(X)$ 唯一的极大交换子代数就是其本身 $C(X)$。

证明。 由于 $C(X)$ 是交换的，因此每个子代数都是交换的。含幺 C*-子代数 $B \subseteq C(X)$ 本身是交换 C*-代数，因此根据盖尔范德-奈马克定理，它同构于某个紧豪斯多夫空间 Y 上的 $C(Y)$。包含映射 $B \hookrightarrow C(X)$ 诱导出一个连续映射 $\pi\colon X \to Y$，其定义为：对于 $f \in B \cong C(Y)$，$\pi(x)(f) = f(x)$。由于包含映射是单射且两个代数都含幺，该映射是满射。若 B 是极大阿贝尔的，则 $B = C(X)$，因为任何更大的交换子代数都将是 $C(X)$ 本身。 □

命题 52 (交换子代数的特征空间)。 设 $B \cong C(Y)$ 是 $C(X)$ 的一个含幺交换 C*-子代数，对应于一个连续满射 $\pi\colon X \to Y$。那么，盖尔范德谱 $\frown$ $\frown B$ 与 Y 同胚。在此识别下，每个特征 $\chi_y \in B$ 对应于求值映射

$$\chi_y(f) = f(y), \qquad f \in C(Y).$$

证明。 这是盖尔范德对偶中的一个标准结果：$C(Y)$ 的盖尔范德谱与 Y 同胚，该同胚由 $y \mapsto$ 求值映射y 给出，其中 $\mathrm{ev}_y(f) = f(y)$，对 $f \in C(Y)$ 成立。由于 $B \cong C(Y)$，因此$\widehat{}$对 B也成立同样的识别。 □

$\widehat{}$**注释 98**。 值得注意的一个微妙之处是：特征 $\chi_y \in B$ 通常不能延拓为$C(X)$ 上的特征。延拓的自然候选是 $\chi_y \circ \pi^*$：$C(X) \to \mathbb{C}$，其中 $\pi^*\colon C(Y) \hookrightarrow C(X)$ 是由 π 诱导的包含。不过，对于 $g \in C(X)$，取值 $(\chi_y \circ \pi^*)(g) = g(x)$

取决于 $x \in \pi^{-1}(y)$ 的选取，除非 g 在纤维上为常数。由于 π^* 不是满射（除非 π 是同胚），复合 $\chi_y \circ \pi^*$ 在 $C(X)$ 上不是乘法的，因此不能定义一个特征。这反映了这样一个事实： B 是 $C(X)$ 的真子代数；只有当 $B = C(X)$ 成立时（即 π 是同胚）， B 上的特征才会延拓为 $C(X)$ 上的特征。

命题 53 （ $\mathcal{G}_{C(X)}$的单位空间）。设 $\mathcal{A} = C(X)$ 对应于紧豪斯多夫空间 X。那么单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 为

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} = \{(B, \chi) \mid B \subseteq C(X) \textit{ unital commutative C*-subalgebra}, \ \chi \in \widehat{B}\}.$$

等价地，它可以写成不交并

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \cong \bigsqcup_{B \subseteq C(X)} \widehat{B}.$$

这个空间通常是非豪斯多夫的，而且规模极大。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是由部分求值映射ev_a （ $a \in C(X)$ ）生成的初始拓扑，定义见定义 *17*。与极大交换子代数 $C(X)$ 对应的子空间，

$$\{(C(X), \chi) \mid \chi \in \widehat{C(X)} \cong X\} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)},$$

是闭的，并且通过映射 $X \ x \mapsto$ （$C(X)$， ev_x）与 X 同胚。

证明。不交并的描述直接由定义 15 得出。对固定的 B，包含$\iota_B : \widehat{B} \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 由命题 7(3)可知是到其像上的同胚。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑由部分求值映射 ev_a （定义 18）定义；这些映射能区分同一纤维内的点，但除非不同子代数之间存在包含关系，否则无法区分来自不同子代数的点。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 一般不是豪斯多夫的。

盖尔范德变换给出一个同胚 $C(X) \cong X$。映射 $x \mapsto (C(X), \mathrm{ev}_x)$ 是连续的，因为对于任意 $a \in C(X)$， $\mathrm{ev}_a(C(X), \mathrm{ev}_x) = a(x)$ 随 x 连续变化。其逆映射（限制到第二个坐标）根据 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的乘积拓扑定义是连续的。因此，该子空间与 X 同胚。为证明它是闭的，设网 $(B_\lambda, \chi_\lambda)$ 收敛到 $(C(X), \chi)$。如果有无穷多个 B_λ 是正规子代数，则存在 $a \in C(X)$ 不属于这些 B_λ，使得对于这些指标，$\mathrm{ev}_a(B_\lambda, \chi_\lambda) = \infty$，这与收敛到有限值 $\chi(a)$ 矛盾。因此最终有 $B_\lambda = C(X)$，所以该极限点属于此子空间。 □

命题 54 (对角嵌入 $C(X)$)。 令 $\mathcal{A} = C(X)$ 其中 X 为紧致可度量空间，并令

$$X \cong \{(C(X), \mathrm{ev}_x) \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}.$$

于是，对角嵌入 $\iota : C(X) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 定义为

$$\iota(f)(x) = f(x) \quad \textit{for } x \in X, \qquad \iota(f)|_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \setminus X} = 0.$$

换言之， $\iota(f)$ 是定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的函数，它由 f 延拓而来，并在对应于 $C(X)$的分支之外取零。在同构

$$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$$

from 推论 *38*，该函数位于 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 中，并且在 $\mathcal{U}(\mathcal{A}$ 的平凡作用下保持不变).

证明。回顾第 4.9 节中对角嵌入 ι 的一般构造。对每个 $x \in X$，与特征求值映射$_x$ 相关联的 GNS 表示 π_x 是 $C(X)$ 的一维表示，由在 x处的求值给出，因此 $\pi_x(f) = f(x)$。对任意满足 $B \neq C(X)$ 的 $(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，元素 $f \in C(X)$ 一般并不位于 B 中，因此根据直积分表示 Π的定义（见第 4.9 节），我们有 $\Pi(f)|_{(B,\chi)} = 0$。于是直积分 $\Pi(f)$ 在 X之外的所有纤维上为零，从而 $\iota(f)$ 的支集恰好为 X，对 $x \in X$ 满足 $\iota(f)(x) = f(x)$，并在其他地方为零。

映射 ι 是 *-同态，因为每个纤维表示$\pi_{(B,\chi)}$ 都是 *-同态，而直积分构造保持乘法、加法和伴随算子。具体而言，对于 f，$g \in C(X)$，有 $\Pi(fg) = \Pi(f)\Pi(g)$，因此 $\Lambda(\iota(fg)) = \Lambda(\iota(f)\iota(g))$；左正则表示Λ 在约化代数上的单射性给出 $\iota(fg) = \iota(f)\iota(g)$。线性性和保持 * 运算的性质也可由 Π 的相应性质类似地推出。

最后，在推论 38 给出的同构 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 下，元素 $\iota(f)$ 对应于 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 中的函数，该函数在 X 上等于 f，在其他地方为零。由于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 对 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的作用是平凡的（定理 11），该函数在此作用下保持不变，这证实了 $\iota(f)$ 属于对角子代数。

□

注 *99*（与盖尔范德变换的联系）。在识别 $X \cong C(X)$下，ι 在分量 X 上的限制与逆盖尔范德变换一致。事实上，经典盖尔范德变换 $\Gamma: C(X) \to C(C(X))$是一个同构，并且在同胚 $C(X) \cong X$下，它变为恒等映射 $C(X) \to C(X)$。对角嵌入 ι 将 f 映射为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的函数，该函数在X 上取值 f，在其他地方为零；因此，与到 X的投影复合后，我们恰好得到盖尔范德变换。因此，交换情形表明，当限制到极大阿贝尔子代数分量时，我们的一般构造归结为经典的盖尔范德对偶。

定理 11（酉共轭群胚的平凡性，适用于 $C(X)$）。设 $\mathcal{A} = C(X)$。则每个酉元$u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(X, \mathbb{T})$都是中心的，因此在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的共轭作用是平凡的。因此，酉共轭群胚同构于平凡（乘积）群胚：

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \times \mathcal{U}(\mathcal{A}),$$

其源映射与值域映射由投影到 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 给出。特别地，限制在对应于极大交换子代数 $C(X)$的分支 $X \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上，我们得到 X上的平凡群胚 $X \times \mathcal{U}(\mathcal{A})$。

证明。对于任意的$(B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$和 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$，我们有 $uBu^* = B$，因为 u是中心的。此外，对于所有$b \in B$，

$$\chi(\mathrm{Ad}_{u^*}(b)) = \chi(u^* b u) = \chi(u^*)\chi(b)\chi(u) = \chi(b),$$

利用 χ的乘法性以及 $\chi(u^*)\chi(u) = \chi(u^*u) = \chi(\mathbf{1}) = 1$这一事实。因此该作用是平凡的。于是，作用群胚$\mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$与带有平凡作用的乘积群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \times \mathcal{U}(\mathcal{A})$同构。

□

推论 38 ($C(X)$的群胚 C*-代数）。设 $\mathcal{A} = C(X)$，其中 X是一个紧致可度量空间。那么群胚 *C**-代数为

$$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{U}(\mathcal{A})),$$

其中 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(X, \mathbb{T})$ 取强算子拓扑，而 $C^*(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$ 表示其极大群 *C**-代数。限制到与极大阿贝尔子代数 $X \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 对应的分支 $C(X)$，得到

$$C(X) \otimes C^*(\mathcal{U}(\mathcal{A})).$$

证明。 根据定理 11， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 同构于平凡群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \times \mathcal{U}(\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$的作用是平凡的。对于这种形式的平凡群胚，其群胚 C*-代数为极大张量积：

$$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{U}(\mathcal{A})).$$

这由极大张量积的泛性质以及卷积代数是代数张量积 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \odot C_c(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$ 这一事实得出。通过考虑 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中与极大交换子代数 $C(X)$ 对应的闭子空间，可得到限制到分支 X，进而得到子代数 $C(X) \otimes C^*(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$。

□

注 100 （群 C*-代数 $C(X, \mathbb{T})$）。 群 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(X, \mathbb{T})$ 配备强算子拓扑后，是一个波兰阿贝尔群。对于一般的紧致可度量空间 X，其极大群 C*-代数 $C^*(C(X, \mathbb{T}))$ 的结构可能很复杂，我们在此不尝试对其进行显式描述。就我们而言，关键事实是存在一个典范嵌入

$$C(X) \hookrightarrow C(X) \otimes C^*(\mathcal{U}(\mathcal{A})), \qquad f \mapsto f \otimes 1,$$

它与限制到分支 X 上的对角嵌入 ι 一致，正如命题 *54* 所确立的那样。

定理 12 （盖尔范德变换的恢复）。 设 $\mathcal{A} = C(X)$ 为一个紧致可度量空间 X，并设

$$\iota : C(X) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$$

为对角嵌入。设

$$E : C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$$

为到单位空间上的典范条件期望（见第 *4.6* 节）。则存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \xrightarrow{\ \iota\ } & C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E} \\ C(X) & \xrightarrow{\ \cong\ } & C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})|_X \end{array}$$

其中底部的水平映射是盖尔范德变换。特别地，对角嵌入 ι 提供了将经典盖尔范德变换提升到（可能是非交换的）群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中的一个提升。

证明。 根据命题 54，对于任意 $f \in C(X)$，元素 $\iota(f) \in C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 支持在分量$X \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$上，并且满足 $\iota(f)(x) = f(x)$（对于 $x \in X$），而 $\iota(f)$ 在其他地方为零。

条件期望 E 通过投影到支集位于单位空间上的函数来作用。由于$\iota(f)$已经属于 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$（根据命题 54），因此有 $E(\iota(f)) = \iota(f)$。将 $E(\iota(f))$ 限制到分量 X 上，因而得到 f 上的函数 X。

——在盖尔范德变换下， $C(X)$ 与 $C(C(X))$ 同构，而自然同胚——$C(X) \cong X$ （由求值给出）将其与 $C(X)$ 本身等同。因此，底部箭头与限制到 X 的映射复合，恰好是 $C(X)$ 上的恒等映射，从而证明该图表交换。

□

备注 101。 定理 *12* 表明，对角嵌入 ι 并非仅仅是抽象构造，而是真正提升了盖尔范德变换。尽管 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 通常是非交换的（因为存在$\mathcal{U}(\mathcal{A})$），条件期望 E 能够恢复交换数据，而 ι 将 $C(X)$ 嵌入为一个交换子代数，该子代数投影到盖尔范德变换上。这体现了这样一种思想：可以通过群胚 C*-代数，从非交换 C*-代数的交换上下文中重构它们。

例 51 (圆周： $X = S^1$)。 设 $X = S^1$ 和 $\mathcal{A} = C(S^1)$。那么酉群为

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = C(S^1, \mathbb{T}),$$

圆周上的连续 $\mathbb{T}$ 值函数群，在赋予强算子拓扑后是一个可分阿贝尔波兰群。其极大群 **C*-**代数 C^*（C（S^1, $\mathbb{T}$））是无限维、可分且结构十分丰富的代数，编码了这个阿贝尔群的表示论。

单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 包含一个特殊分支，对应于极大阿贝尔子代数 C（S^1）本身；它通过映射 $x \mapsto$ （C（S^1），求值映射$_x$）与 S^1 同胚。其他分支对应于真含幺 **C*-**子代数 $B \subseteq C$（S^1），每个都同构于 C（Y），其中的商空间 Y 是通过连续满射 π： $S^1 \to Y$ 从 S^1 得到的。盖尔范德谱 $\widehat{B}$ 与 Y 同胚，并通过命题 *7* 中的包含映射 ι_B： $\widehat{B} \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，作为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的一个分支出现。

对角嵌入

$$\iota : C(S^1) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$$

由命题 *54* 给出：对于 $f \in C(S^1)$， $\iota(f)$ 是定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的函数，它在 S^1-分量上取值为 f，在所有其他分量上均为零。在条件期望 E： $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 下，有 $E(\iota(f)) = \iota(f)$；限制到 S^1 后即可恢复 f，这体现了定理 *12*。

这个例子表明，即使对于交换代数，酉共轭群胚及其 **C*-**代数也都是非平凡对象，它们编码了 $C(S^1)$ 的所有交换子代数的结构。

例 52 (有限离散空间： $X = \{1, \ldots, k\}$)。设 $X = \{1, \ldots, k\}$ 是一个有限离散空间，因此 $\mathcal{A} = \mathbb{C}^k$。那么，酉群是

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \mathbb{T}^k,$$

一个紧阿贝尔群。

单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 由形如 (B, χ) 的二元组构成，其中 $B \subseteq \mathbb{C}^k$ 是一个含幺交换子代数，且 $\chi \in \widehat{B}$。由于 $\mathbb{C}^k$ 是有限维的，每个子代数 B 都同构于某个 $m \leq k$ 对应的 $\mathbb{C}^m$，其盖尔范德谱 $\widehat{\ }$*Gelfand spectrum* B 是由 m 个点组成的离散集。

与极大阿贝尔子代数 $B = \mathbb{C}^k$ 对应的分支由 k 点求值 求值映射$_i$ 构成，并且同胚于离散集合 $\{1, \ldots, k\}$。其他分支对应于真子代数；例如，如果 B 由仅依赖于前 m 个坐标的函数组成，那么$\sim B$ 是一个由 m 个点组成的离散集合，其中每个点对应于在这些坐标之一处的求值。

对角嵌入

$$\iota : \mathbb{C}^k \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$$

将 $(a_1$、…、$a_k) \in \mathbb{C}^k$ 映射为定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的函数：该函数在 $(\mathbb{C}^k$、求值映射$_i)$ 处取值 a_i，并在所有其他分支上为零。这与命题 *54* 一致： $\iota(f)$ 支集位于与极大子代数对应的分支上，并且在那里等于 f。

这个例子完全可计算，并作为一般理论的有限测试案例，说明对角嵌入如何通过对应于 $C(X)$ 的分支，编码函数在 X 的每个点处的值。

交换情形 $C(X)$ 揭示了我们构造的若干重要特征。首先，尽管 $\mathcal{A}$ 是交换的，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 却远非平凡：其单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 编码了 $C(X)$ 的整个交换子代数格，其中每个子代数 $B \cong C(Y)$ 都作为一个与 $\widehat{B} \cong Y$ 同胚的分支出现。对角嵌入 ι 落在 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 中，这证实了交换代数情形下的定理 8；将其限制在分支 $X \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$（对应于极大子代数 $C(X)$）上时，则恰好恢复了经典的盖尔范德变换，如定理 12 所示。

因此，交换情形并非一个平凡的特例，而是对我们理论的有益阐释：它表明，即使对于交换代数，酉共轭群胚及其 C*-代数也蕴含着关于子代数结构的丰富几何信息，而这些信息仅凭盖尔范德变换本身无法捕捉。这证实了我们的构造确实拓展了经典的盖尔范德对偶，为理解 C*-代数的内部结构提供了全新的几何视角。

5.3 紧算子：$\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 与强算子拓扑

现在我们考察可分无限维希尔伯特空间 H上紧算子之单位化的酉共轭群胚及其对角嵌入。这个例子之所以具有根本重要性，原因有几个。

首先， $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 是一个非有限维的 I 型 C* 代数，但它具有具体且易于处理的描述。其不可约表示很容易分类：在酉等价意义下，恰有一个无限维不可约表示（ H上的恒等表示）和一个一维表示（商映射 $\mathcal{K}(H)^{\sim} \to \mathcal{K}(H)^{\sim}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$）。

其次，这个例子说明了强算子拓扑和波兰群胚框架的必要性。酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{K}(H)^{\sim})$由所有满足 $u - 1_H \in \mathcal{K}(H)$的酉元 $u \in \mathcal{U}(H)$构成；等价地， u 是恒等算子的紧扰动。在范数拓扑下，这个群不是局部紧的（它是一个无限维巴拿赫李群）。然而，赋予它从 $\mathcal{U}(H)$继承的强算子拓扑（SOT）后，它就成为一个波兰群——也就是说，它是一个可分拓扑群，并且存在一个完备度量。这使得它可以应用 Tu（1999年）发展的波兰群交叉积理论。本小节中所有关于拓扑的表述，除非另有说明，均指强算子拓扑。

第三，这个例子是 Fredholm 算子指标理论的入口；该理论将在未来的工作中展开。考尔金代数 $\mathcal{Q}(H) = \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 与紧算子的扩张理论，与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ for $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的结构密切相关。事实上，存在一个波兰群的短正合列

$$1 \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{K}(H)^{\sim}) \longrightarrow \mathcal{U}(H) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow 1,$$

其中，映射 $\mathcal{U}(H) \to \mathcal{U}(\mathcal{Q}(H))$ 由商映射 $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{Q}(H)$ 诱导。该序列并不分裂，其非平凡性由 Fredholm 指标度量；该指标将自然地出现在群胚 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中。

在整个本小节中，我们使用 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 在其自身 H 上的忠实表示，并将 $\mathcal{U}(\mathcal{K}(H)^{\sim})$ 与其在该表示下于 $\mathcal{U}(H)$ 中的像相识别。

命题 55 （ $\mathcal{K}（H）^{\sim}$）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}（H）^{\sim} = \mathcal{K}（H） + \mathbb{C}I_H$ 是可分无限维希尔伯特空间 H 上紧算子的单位化。那么：

1. $\mathcal{A}$是一个含幺、可分的 *I* 型 *C** 代数。

2. 本原理想空间 $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ 由两个理想组成：

   $\{0\}$ （ $\mathcal{A}$ 在 H上的恒等表示的核），　　$\mathcal{K}(H)$ （商 $\mathcal{A}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$上的一维特征的核）。

   $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ 上的雅各布森拓扑是非豪斯多夫的：单点集 $\{\{0\}\}$ 不是闭集，其闭包是整个空间 $\{\{0\}, \mathcal{K}(H)\}$，这反映了紧算子可以由有限秩算子逼近这一事实。

3. $\mathcal{A}$ 是后极限（*I*型）但不是极限的，因为 H 上的恒等表示并不映射到紧算子之中（该单位不是紧的）。它不具有连续迹，因为其本原理想空间是非豪斯多夫的。

4. 酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 由所有满足 $u - I_H \in \mathcal{K}(H)$的酉元 $u \in \mathcal{U}(H)$ 组成。等价地，元素可以写成

$$u = \lambda I_H + K, \qquad \lambda \in \mathbb{T},\ K \in \mathcal{K}(H),$$

满足酉条件 $u^*u = uu^* = I_H$。展开此条件可得

$$\lambda K^* + \overline{\lambda} K + K^*K = 0,$$

这对每个固定的 $\lambda \in \mathbb{T}$ 都施加了非平凡的约束。对于 $\lambda = 1$，这简化为 $K + K^* + K^*K = 0$。

证明。 (1) 可分性源于 H 的可分性，以及 $\mathcal{K}(H)$ 是可分的这一事实（相对于可数基的有限秩算子构成一个可数稠密子集）。I 型性质是标准结论： $\mathcal{K}(H)^\sim$ 的每个不可约表示，要么是作用在 H 上的恒等表示（核为 $\{0\}$），要么是商 $\mathbb{C}$ 上的一维特征（核为 $\mathcal{K}(H)$）。因此，该 C*-代数是后极限的。

(2) 关于紧算子的理想结构，参见 [5]。对于雅各布森拓扑，回想一下，本原理想 J 的闭包由所有包含 J 的本原理想组成。因此：

- 对于 $J = \mathcal{K}(H)$，包含 $\mathcal{K}(H)$ 的唯一一个本原理想就是其自身 $\mathcal{K}(H)$，因此 $\{\mathcal{K}(H)\}$ 是闭集 .
- 对于 $J = \{0\}$， $\{0\}$ 和 $\mathcal{K}(H)$ 都包含 $\{0\}$，因此 $\{\{0\}\}$ 的闭包是 $\{\{0\}, \mathcal{K}(H)\}$。

因此 $\{0\}$ 不是闭集，其闭包是整个空间，从而 $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ 是非豪斯多夫的。

(3) 后极限性由 (1) 得出。极限性不成立，因为恒等表示 π_{id} 满足$\pi_{\mathrm{id}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{K}(H)$（因为 $I_H \notin \mathcal{K}(H)$）。连续迹代数必然具有豪斯多夫谱[5], 因此，非豪斯多夫的本原理想空间排除了连续迹。

(4) 刻画 $u - I_H \in \mathcal{K}(H)$ 是标准的：由于 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{K}(H)$ 的单位化，任意元素都可以唯一地写成 $\lambda I_H + K$，其中 $K \in \mathcal{K}(H)$。要使这样的元素成为酉元，我们需要 $(\lambda I_H + K)^*(\lambda I_H + K) = I_H$。展开得：

$$(|\lambda|^2) I_H + \overline{\lambda} K + \lambda K^* + K^*K = I_H.$$

由于 $\lambda \in \mathbb{T}, |\lambda|^2 = 1$，因此可简化为 $\lambda K \mp \lambda K^* + K^*K = 0$，或者等价地写作 $\lambda K^* + \lambda \overline{K} + K^*K = 0$（两边乘以 λ 并使用 $\lambda\lambda = 1\overline{)}$。这是关于 K 的二次方程；对于给定的 λ，并非每个紧K 都满足该方程，这反映了 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的非平凡结构。 □

命题56 （ $\mathcal{K}$（H）~）。设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}$（$H$）~。那么 $\mathcal{A}$ 的每个极大交换子代数（*MASA*）都可按如下方式得到：取 H 的一组标准正交基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，并定义

$$B_{\mathrm{diag}} = \Big\{ \lambda I + \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots) \;\Big|\; \lambda \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Big\}.$$

该代数同构于 c_0（$\mathbb{N}$）~，即在无穷远处消失的序列所成代数的单位化；它也同构于 C（$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$），即 $\mathbb{N}$ 的一点紧化上的连续函数代数。

每个 $\mathcal{K}$（H）~ 中的极大交换子代数都与 B_{diag}酉共轭。特别地， $\mathcal{K}$（H）~ 中的所有极大交换子代数都是原子的（离散的），也就是说，它们都由 H的一组标准正交基生成。

证明。 我们首先注意到，任意阿贝尔子代数 $B \subseteq \mathcal{K}(H)^\sim$ 都由形如 $\lambda I + K$ 且满足 $K \in \mathcal{K}(H)$ B 的算子构成。若它是极大阿贝尔的，则必定包含能够区分某组标准正交基中各基向量的算子。

设 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为一组标准正交基。相对于该基的对角算子与标量的集合构成一个阿贝尔子代数 B_{diag}，如上所述。我们声称它是极大阿贝尔的。

假设 $T = \lambda I + K \in \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 与 B_{diag} 中的每个元素都可交换。特别地，T 与每个秩一投影 $e_n e_n^* \in B_{\text{diag}}$ 都可交换（这些是紧对角算子，其中 $a_n = 1$、$a_m = 0$ 对于 $m \neq n$，且 $\lambda = 0$）。与 $e_n e_n^*$ 可交换意味着 T 保持 $\mathbb{C}e_n$ 不变，因此 T 在该基下是对角的。此外，K 必须是紧的，因此其对角元素在无穷远处趋于零。于是 $T \in B_{\text{diag}}$，从而证明了极大性。

现在令 B 为 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$中的任意极大交换子代数。我们证明 B 是原子的。考虑 B 中的极小投影集合（满足 $pBp = \mathbb{C}p$的投影 p）。在 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$中，任一投影要么是有限秩的（因此是紧的），要么是 I（如果它是恒等算子）。极大交换子代数中的有限秩投影必定是极小的，并且必定对应秩一投影；因为如果 p的秩大于 1，其交换子将在其值域上包含非标量算子，从而违反极大性。因此，B 包含一族两两正交的秩一投影 $\{p_n\}$，它们在强算子拓扑下的和为 I。通过在这些投影的值域中选取单位向量，这些投影确定了一个标准正交基（相差一个相位）。

令 U为将该基映射到标准基 $\{e_n\}$的酉元。于是，相对于 $\{e_n\}$，UBU^*由对角算子构成，并且包含所有紧对角算子以及标量。极大性迫使$UBU^* = B_{\text{diag}}$，从而确立了酉共轭关系。

最后，在单位化中，$B_{\text{diag}} \cong c_0(\mathbb{N})^{\sim}$ 通过将 $\lambda I + \operatorname{diag}(a_n)$ 映射到 $(\lambda, (a_n))$ 的映射给出，而$c_0(\mathbb{N})^{\sim} \cong C(\mathbb{N}\cup\{\infty\})$则通过盖尔范德变换给出，其中 ∞ 对应于“无穷远处的极限”点。 □

命题 57（对角极大交换子代数的特征空间）。设 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H 的一组标准正交基，并设

$$B_{diag} = \{\lambda I + D \mid \lambda \in \mathbb{C},\ D \in \mathcal{K}(H) \text{ diagonal in the basis } \{e_n\}\}$$

是 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$中的对角极大交换子代数。那么 $B_{diag} \cong c_0(\mathbb{N})^{\sim}$，其盖尔范德谱 B_{diag} 与一点紧化 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$同胚。特征由下式给出：

$$\chi_n(\lambda I + D) = \lambda + D_{nn}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \chi_\infty(\lambda I + D) = \lambda,$$

其中 D_{nn} 表示 D的第 n个对角元。特征 χ_∞ 对应于商映射$\mathcal{K}(H)^{\sim} \to \mathcal{K}(H)^{\sim}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$。

证明。令 $c_0(\mathbb{N})$ 表示在无穷远处消失的复数序列构成的 C*-代数，其运算按逐点方式定义。映射 $\Phi\colon c_0(\mathbb{N}) \to \mathcal{K}(H)$ 将序列 (a_n) 映射为对角算子 $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots)$，它是到其像上的等距 *-同构，而该像恰好是对角紧算子的集合。因此，对角紧算子同构于 $c_0(\mathbb{N})$。

代数 B_{diag} 是这个代数的单位化，即 $B_{\text{diag}} \cong c_0(\mathbb{N})^{\sim}$，其中单位化添加了一个标量 λI，它对应于无穷远处的常数序列 λ。具体而言，同构 $\Psi\colon C(\mathbb{N}\cup\{\infty\}) \to B_{\text{diag}}$ 定义为

$$\Psi(f) = f(\infty)I + \operatorname{diag}\big(f(1) - f(\infty), f(2) - f(\infty), \ldots\big).$$

直接验证可知，Ψ 是一个 *-同构：它显然是线性且单射的，而乘法性则可通过直接计算得出，利用如下事实：对于 $f, g \in C(\mathbb{N}\cup\{\infty\})$，

$$\big(f(\infty)I + D_f\big)\big(g(\infty)I + D_g\big) = f(\infty)g(\infty)I + \big(f(\infty)D_g + g(\infty)D_f + D_f D_g\big),$$

而 $D_f D_g$ 的对角元素为 $(f(n) - f(\infty))(g(n) - g(\infty))$，因此得到的算子对应于函数 fg。

$C(\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ 的盖尔范德谱就是 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 本身，其特征由各点处的求值给出。通过 Ψ^{-1} 将这些特征拉回，可得到 B_{diag} 的特征：

$$\chi_n(\lambda I + D) = (\mathrm{ev}_n \circ \Psi^{-1})(\lambda I + D) = \lambda + D_{nn}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$\chi_\infty(\lambda I + D) = (\mathrm{ev}_\infty \circ \Psi^{-1})(\lambda I + D) = \lambda.$$

最后，注意到 χ_∞ 在 $\mathcal{K}(H) \cap B_{\text{diag}}$ 上消失，并且经由商 $\mathcal{K}(H)^\sim/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$ 分解，从而证实了它可解释为“无穷远处求值”特征。 □

命题 58 （单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 对于 $\mathcal{K}(H)^\sim$）。设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$。那么，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 可以$\widehat{\ }$描述为由有序对 (B, χ) 构成的空间，其中 $B \subseteq \mathcal{A}$ 是极大交换子代数（*MASA*），而 $\chi \in B$是 B上的一个特征。

1. 每个原子极大阿贝尔自伴子代数（c_0的单位化）连同一个不等于“无穷远点”的特征，都对应于 H 中的一个秩一投影。这类有序对的集合与射影空间同胚

$$\mathbb{P}(H) = \mathcal{U}(H)/(\mathcal{U}(1) \times \mathcal{U}(H^\perp)),$$

其中 $\mathcal{U}(H)$ 赋予强算子拓扑，而 $\mathcal{U}(1) \times \mathcal{U}(H^\perp)$ 表示固定单位向量的稳定子群。这个空间是波兰空间，但不是局部紧的。

2. 存在一个自然的遗忘映射

$$\pi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{MASA}(\mathcal{A}), \quad (B, \chi) \mapsto B,$$

$\widehat{\ }$其在每个极大交换子代数 B上的纤维都与特征空间 $B \cong \mathbb{N} \cup \{\infty\}$（一个可数离散集的一点紧化）同胚。这赋予 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 一个丛结构，使其成为极大交换子代数空间上的丛，不过一般而言它并非局部平凡。

3. 每个纤维中的“无穷远点”对应于通过限制商映射 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$得到的特征 χ_∞；它不对应任何秩一投影。

证明概要。 我们概述识别的主要步骤。

步骤 1：秩一投影与原子最大阿贝尔自伴子代数。 每个秩一投影 $p = vv^*$ 都确定一个原子最大阿贝尔自伴子代数 B_p：取任意一个扩充 $\{v\}$的标准正交基 $\{v, v_2, v_3, \ldots\}$，并令 B_p为在该基下对角化的算子代数。对应于投影到 $\mathbb{C}v$ 上的投影的特征 χ_p 由 $\chi_p(\lambda I + D) = \lambda + \langle v, Dv\rangle$给出。反过来，对于一个原子最大阿贝尔自伴子代数 B 和一个特征 $\chi \neq \chi_\infty$，存在唯一的极小投影 $p_\chi \in B$，使得 $\chi(p_\chi) = 1$，且 p_χ 是秩一投影。这就建立了秩一投影与满足 B 为原子且 $\chi \neq \chi_\infty$的配对 (B, χ) 之间的双射。

步骤 2：原子分量上的拓扑。由部分求值映射在$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上诱导的拓扑，限制到原子分量后，就是 $\mathbb{P}(H)$ 上的商拓扑，其中商映射将秩一投影映到其值域。由于带有强算子拓扑的 $\mathcal{U}(H)$是一个波兰群，而稳定子群$\mathcal{U}(1) \times \mathcal{U}(H^\perp)$是闭子群，因此商 $\mathbb{P}(H)$是波兰空间。它不是局部紧的，因为 $\mathcal{U}(H)$不是局部紧的，并且商映射不允许局部截面。

步骤 3：极大交换子代数上的丛结构。令 $\mathrm{MASA}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$中所有极大交换子代数的空间，并赋予从 $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ 继承的 Fell 拓扑。遗忘映射 $\pi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathrm{MASA}(\mathcal{A})$ 由$\pi(B, \chi) = B$ 定义，它是连续且满射的。对于每个极大交换子代数 B，纤维 $\pi^{-1}(B)$与 $\widehat{B}$同胚。根据命题 57，对于原子最大阿贝尔自伴子代数，我们有 $B \cong \mathbb{N} \cup \{\infty\}$；对于连续最大阿贝尔自伴子代数（其与 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 的交集在单位化后产生相同的结构），其特征空间也为 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$，不过这种识别需要更加谨慎。因此，每个纤维都是紧空间，但由于 $\mathrm{MASA}(\mathcal{A})$ 的拓扑复杂，该丛并非局部平凡。

步骤 4：无穷远点。对于任意极大交换子代数 B，特征 χ_∞ 是商映射 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$ 的限制。对于所有 $D \in \mathcal{K}(H) \cap B$，它都满足 $\chi_\infty(\lambda I + D) = \lambda$，且不对应任何秩一投影。此点出现在每个纤维中，并构成一点紧化 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 中的额外点。

□

命题 59 (酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{K}(H)^{\sim})$ 在强算子拓扑中). 设 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$。则酉群

$$\mathcal{U}(\mathcal{A})=\{u=\lambda I+K\mid \lambda\in\mathbb{T},K\in\mathcal{K}(H),\ u^*u=uu^*=I\},$$

赋予强算子拓扑（*SOT*）后，它是一个波兰群。它不是局部紧的。

此外，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{U}(H)$ 中关于强算子拓扑稠密：H上的每个酉算子都可以在强算子拓扑下由恒等算子的有限秩扰动逼近，而这些扰动属于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$。

证明概要。</style}群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是可分拓扑群，因为它是波兰群 $\mathcal{U}(H)$ 的子空间（见命题 18）。要证明它是完全可度量化的，可以说明它是 $\mathcal{U}(H)$ 的一个 G_δ 子集。一个标准论证（例如参见 [10,第 9]章）利用了这样一个事实：$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是保持 C*-代数 $\mathcal{A}$ 不变的酉元集合。选取 $\mathcal{A}$的一个可数稠密子集 $\{a_n\}$，条件 $u\mathcal{A}u^*=\mathcal{A}$等价于对所有 n都有 $ua_nu^*\in\mathcal{A}$。对于每个 n，集合 $\{u\in\mathcal{U}(H):ua_nu^*\in\mathcal{A}\}$ 是一个 G_δ 集，因为 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 中关于强算子拓扑的一个 G_δ 子集（因为它是算子秩为 $\le n$ 等的闭集的可数并）。G_δ 集的可数交是 G_δ，因此 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{U}(H)$ 中的 G_δ。波兰群的任何 G_δ 子群都是波兰群 [10]。

非局部紧性源于如下事实：$\mathcal{U}(H)$ 不是局部紧的，且 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在其中稠密；非局部紧波兰群的稠密子群不可能是局部紧的（否则它将是开的，而事实并非如此）。

稠密性源于如下事实：有限秩酉元（即具有 $u-I$ 有限秩者）在强算子拓扑下于 $\mathcal{U}(H)$ 中稠密，且它们显然位于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中。 □

定理 13 （关于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的酉共轭群胚）。 设 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$，且 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 配备强算子拓扑。则酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 同构于作用群胚

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}\cong\mathcal{U}(\mathcal{A})\ltimes\mathbb{P}(H),$$

其中 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 通过共轭作用作用于秩一投影的射影空间 $\mathbb{P}(H)$：

$$u\cdot[v]=[uv],\qquad u\in\mathcal{U}(\mathcal{A}),\ [v]\in\mathbb{P}(H).$$

该群胚是波兰的、非局部紧的，且非 ´平展。它容许一个博雷尔哈尔系统以及一个良定义的极大 C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

证明概要。 **作为作用群胚的识别**。 根据命题 58，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 可以识别为秩一投影 $\mathbb{P}(H)$ 的集合，对应于单位空间的原子极大阿贝尔自伴代数分量。群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 通过对投影施加共轭作用于 $\mathbb{P}(H)$ 上：对于 $u\in\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 和 $[v]\in\mathbb{P}(H)$，

$$u\cdot p_{[v]}=up_{[v]}u^*=p_{[uv]}.$$

在识别 $[v]\leftrightarrow p_{[v]}$下，这变为

$$u\cdot[v]=[uv].$$

相应的作用群胚 $\mathcal{U}(\mathcal{A})\ltimes\mathbb{P}(H)$ 的态射为 $(u,[v])$，其源为 $[v]$，值域为 $[uv]$，复合为

$$(u,[uv])\circ(v,[v])=(uv,[v]),$$

以及求逆

$$(u,[v])^{-1}=(u^{-1},[uv]).$$

根据构造，该结构与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 重合，从而建立了同构。

波兰结构。 根据命题 59，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群；根据命题 58，$\mathbb{P}(H)$ 是一个波兰空间。因此，它们的乘积 $\mathcal{U}(\mathcal{A})\times\mathbb{P}(H)$ 配备积拓扑后是波兰空间。群胚的结构映射是连续的：

1. 源映射与值域映射： $s(u,[v]) = [v]$, $r(u,[v]) = [uv]$。
2. 复合：$((u,[uv]),(v,[v])) \mapsto (uv,[v])$。3. 求逆：$(u,[v])$ $\mapsto (u^{-1},[uv])$。

连续性源于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 对 $\mathbb{P}(H)$ 的作用、乘法和求逆均为连续。因此， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚。

非局部紧性和非´étale性。 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 和 $\mathbb{P}(H)$ 均非局部紧；因此乘积 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 也非局部紧。此外，源映射 $s(u,[v]) = [v]$ 的纤维 $s^{-1}([v]) \cong \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 不是离散的（它是无限维且连通的）。因此， s 不是局部同胚，且该群胚不是 étale 的。

博雷尔哈尔系统。群胚 G 上的博雷尔哈尔系统是一族定义在纤维 $G^x = s^{-1}(x)$ 上的 σ-有限博雷尔测度$\{\lambda^x\}_{x\in G^{(0)}}$， 满足：

1. 对每个 x， λ^x 在 G的右平移下准不变。

2. 这族测度 va 随 x可测地变化：对于任意博雷尔集 $A \subset G$，映射 $x \mapsto \lambda^x(A \cap G^x)$ 是博雷尔的。

尽管 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 不存在左不变哈尔测度（它不是局部紧的），但它是一个波兰群，因此存在一个 σ-有限准不变博雷尔测度 μ。对每个 $x = [v] \in \mathbb{P}(H)$，定义 λ^x在 $s^{-1}(x)$ 上的$\cong \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 为

$$\lambda^x = \mu,$$

通过识别 $u \mapsto (u,\ [v])$ 将其传输过去。这为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 定义了一个博雷尔哈尔系统。

极大 C*-代数。根据 Tu， [12], 具有博雷尔哈尔系统的波兰群胚有一个良定义的极大 C*-代数。因此， $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 存在。 □

设 H 为一个无限维可分希尔伯特空间，并令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 表示紧算子的单位化$\widehat{\ }$，即 $\mathcal{A} \cong \mathcal{K}(H) \oplus \mathbb{C}I_H$。这是一个含幺 C*-代数，其谱 $\mathcal{A}$ 由单个点（恒等表示）以及对应于商 $\mathcal{A}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$ 的特征组成。酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在范数拓扑下是一个波兰群，但不是局部紧的。

设 H 是一个无限维可分希尔伯特空间，并令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 表示紧算子的单位化$\widehat{\ }$，即 $\mathcal{A} \cong \mathcal{K}(H) \oplus \mathbb{C}I_H$。这是一个含幺 C*-代数，其谱 $\mathcal{A}$ 由单个点（恒等表示）以及与商$\mathcal{A}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$对应的特征组成。酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$配备强算子拓扑（SOT）后是一个波兰群，但不是局部紧的。

命题 60 （$\mathcal{K}(H)^{\sim}$）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$。考虑 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在射影空间 $\mathbb{P}(H)$ 上的作用，其中作用方式为对秩一投影施加共轭作用：

$$u \cdot [v] = [uv], \qquad u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}),\ [v] \in \mathbb{P}(H).$$

相应的变换群胚记为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} := \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathbb{P}(H)$。于是，群胚 C^*-代数$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$可实现为一个交叉积

$$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathbb{P}(H)) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A}),$$

其中作用是射影空间上的平移。

由于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 并非局部紧，该交叉积必须按 *Tu*（*1999*年）在非局部紧情形的群胚 C^*-代数语境中所发展的波兰群交叉积 意义来理解

群。C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 不属于 I 型；这反映了$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的表示论的复杂性，以及在 $\mathbb{P}(H)$ 上的作用并非真作用这一事实。

$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的结构与紧算子的扩张理论和考尔金代数密切相关。事实上， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$是 $\mathcal{U}(H)$的正规子群，而商 $\mathcal{U}(H)/\mathcal{U}(\mathcal{A})$同构于考尔金代数的酉群 $\mathcal{Q}(H) = \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$。用扩张来精确描述 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 仍是一个公开问题；诸如以下这类直观的短正合列

$$0 \to \mathcal{K}(L^2(\mathbb{P}(H))) \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C(\mathbb{P}(H)) \rtimes (\mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{A})_0) \to 0$$

有启发性，但若不进一步分析 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$的表示论，则并不严谨 .

命题 61 （关于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$的对角嵌入）。令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 为可分希尔伯特空间 H 上紧算子的单位化，并令 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathbb{P}(H)$ 为其酉共轭群胚。存在一个规范的含幺单射 $*$-同态

$$\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}),$$

称为对角嵌入，其特征如下：对于任意 $T \in \mathcal{A}$，像 $\iota(T)$在直积分希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{P}(H)}^{\oplus} H \, d\mu([v])$ 上（相对于 $\mathbb{P}(H)$ 上任意准不变博雷尔测度 μ）通过逐纤维乘法作用：

$$(\iota(T)\xi)([v]) = T\,\xi([v]), \qquad \xi \in \mathcal{H},\ [v] \in \mathbb{P}(H).$$

等价地，在同构 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathbb{P}(H)) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 下， $\iota(T)$ 对应于常值乘子 $T \otimes 1$。

证明。我们分几个步骤构造 ι，并利用全群胚 C*-代数的泛性质。

步骤 1： 的表示族。对于每个点 $[v] \in \mathbb{P}(H)$（其中 $v \in H$ 是单位向量），考虑由恒等表示给出的不可约表示 $\pi_{[v]}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$：

$$\pi_{[v]}(T) = T \in \mathcal{B}(H), \qquad T \in \mathcal{A}.$$

所有这些表示彼此等价（它们都是恒等表示），但用 $\mathbb{P}(H)$为它们编指标，便于进行接下来的直积分构造。

步骤 2：希尔伯特丛上的群胚表示。考虑 $\mathbb{P}(H)$上的平凡希尔伯特丛，其纤维为 H，即希尔伯特空间连续场 $\{H_{[v]}\}_{[v]\in\mathbb{P}(H)}$，其中对于所有$[v]$， $H_{[v]} = H$。群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathbb{P}(H)$ 按如下方式作用于此丛：对于箭头 u： $[v] \to [uv]$ （其中$u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$），纤维上的作用由酉算子 u： $H_{[v]} \to H_{[uv]}$ 给出（由于两个纤维都与 H相对应，这实际上就是算子 u）。

这些数据——一个希尔伯特空间连续场及其上的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 左作用——按照 Renault [21] 的定义，构成了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的一个表示。根据全群胚 C*-代数的泛性质，该表示积分为一个 $*$ 表示

$$\Pi : C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

其中， $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{P}(H)}^{\oplus} H \, d\mu([v])$ 是相对于 $\mathbb{P}(H)$ 上任意准不变博雷尔测度 μ 的直积分希尔伯特空间（这样的测度存在，因为 $\mathbb{P}(H)$ 是一个带有波兰群连续作用的波兰空间）。具体而言， $\mathcal{H} \cong L^2(\mathbb{P}(H),\ \mu) \otimes H$，而表示 Π 同时编码了 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的纤维逐点作用，以及由 $C_0(\mathbb{P}(H))$ 导出的乘法算子。

步骤 3：构造 $\iota(T)$，使其成为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的一个元素。对于每个 $T \in \mathcal{A}$，定义一个函数 $\tilde{T}$，其定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上，定义如下：

$$\tilde{T}(u,[v]) = \begin{cases} T & \text{if } u = e \text{ (the identity element)}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此函数的支集位于单位空间 $\mathbb{P}(H) \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$（与 $\{(e,[v]) : [v] \in \mathbb{P}(H)\}$ 同一）上，并且在该单位空间上取常值 T（视为作用于 H 上的算子）。函数 $\tilde{T}$ 有界，且在单位空间之外为零；在群胚 C*-代数的完备化中，它定义了一个元素 $\iota(T) := [\tilde{T}] \in C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

步骤 4：验证 $\Pi(\iota(T))$ 在每个纤维上均由 T 作用。对于在步骤 2 中构造的表示 Π，我们断言，对于任意 $\xi \in \mathcal{H}$，

$$(\Pi(\iota(T))\xi)([v]) = T\,\xi([v]) \quad \text{for } \mu\text{-almost every } [v] \in \mathbb{P}(H).$$

这可由 Π 的定义得出：由于 T 的支集位于单位空间上，它在积分表示中的作用就是在每个纤维上逐点乘以 T。更严格地说，在直积分分解 $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{P}(H)}^{\oplus} H\, d\mu([v])$ 中，算子 $\Pi(\iota(T))$ 分解为 $\int_{\mathbb{P}(H)}^{\oplus} T\, d\mu([v])$，即作用于每个纤维上的算子常值场 T。

步骤 5：代数性质。

- 线性：映射 $T \mapsto \tilde{T}$ 显然是线性的，因此 ι 也是线性的。
- 保持 * 运算：由于 $(\tilde{T})^* = \tilde{T^*}$（在单位空间上，对合对应于伴随），我们有 $\iota(T^*) = \iota(T)^*$。
- 含幺性：$1_{\mathcal{A}}$ 是在单位空间上取值为 1_H、在其他地方为零的函数；这恰好是 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的单位（单位空间的特征函数），因此 $\iota(1_{\mathcal{A}}) = 1_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})}$。
- 乘法性：对于 $T, S \in \mathcal{A}$，考虑卷积乘积 $T * S$。由于 $\tilde{T}$ 和 $\tilde{S}$ 的支集都包含在单位空间上，它们的卷积可化为逐点乘法：

$$(\tilde{T} * \tilde{S})(u,[v]) = \int_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} \tilde{T}(w,[v])\, \tilde{S}(w^{-1}u, [w^{-1}v])\, d\lambda(w),$$

但 $\tilde{T}(w,[v])$ 仅在 $w = e$ 时非零，因此得到

$$(\tilde{T} * \tilde{S})(u,[v]) = \tilde{T}(e,[v])\, \tilde{S}(u,[v]) = T \cdot \tilde{S}(u,[v]).$$

由于 $\tilde{S}(u,[v])$ 仅当 $u = e$ 时非零，此时它等于 S，我们得到 $(\tilde{T*S})(u,[v]) = \tilde{TS}(u,[v])$。因此 $\tilde{T} * \tilde{S} = \tilde{TS}$ 在 $C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中，从而 $\iota(T)\iota(S) = \iota(TS)$ 在 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中。

步骤 6：单射性。假设 $\iota(T) = 0$ 在 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 中。则 $\Pi(\iota(T)) = 0$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中。由步骤 4，这意味着对 μ-几乎每一个 $[v] \in \mathbb{P}(H)$ 以及每一个 $\xi \in \mathcal{H}$，我们有 $T\,\xi([v]) = 0$。由于 $\xi([v])$ 可以在 H 中任意选取（通过取在 $[v]$ 附近具有支集的截面），这迫使 $T = 0$ 作为 H 上的算子。因此 ι 是单射的。

步骤 7：验证刻画性质。上述构造直接给出了所述的逐纤维作用：对于任意 $\xi \in \mathcal{H}$ 和 $[v] \in \mathbb{P}$（H），

$$(\Pi(\iota(T))\xi)([v]) = T\xi([v]).$$

由于 Π 在 ι 的像上是忠实的（因为 ι 是单射，且 Π 是一个 $*$-同态），这一性质唯一地刻画了 $\iota(T)$。

关于乘子代数视角的注记。 在交叉积同构 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathbb{P}(H)) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 下，元素 $\iota(T)$ 对应于函数 $F_T\colon \mathcal{U}(\mathcal{A}) \to C_0(\mathbb{P}(H)\ \mathcal{A})$，其定义为

$$F_T(u)([v]) = \begin{cases} T & u = e, \\ 0 & u \neq e, \end{cases}$$

其中我们将 $C_0(\mathbb{P}(H)\ \mathcal{A})$ 等同于在无穷远处消失的 $\mathcal{A}$ 值函数。该函数的支集位于单位元 $e \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$，因而属于交叉积代数（而不仅仅是其乘子代数）。在乘子代数 $\mathcal{M}(C_0(\mathbb{P}(H)) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A}))$ 中，$\iota(T)$ 通过左乘作用：对交叉积中的任意 F，$(m_T F)(u, [v]) = T \cdot F(u, [v])$，这是良定义的，因为 T 与 F 的系数可交换（它们是 $\mathbb{P}(H)$ 上的标量值函数）。这一描述与直积分表示中的纤维逐点作用相一致。 □

推论 39（$\mathcal{K}(H)^{\sim}$）（交换性刻画）。 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，我们有 $\iota(\mathcal{A}) \not\subseteq C_0(\mathbb{P}(H)$，因为 $\mathcal{A}$ 是非交换的。事实上，当且仅当 $T = \lambda I$ 是恒等算子的标量倍数时，$\iota(T) \in C_0(\mathbb{P}(H)$。这证实了定理 8。

证明。若 $T = \lambda I$，则 $\iota(T) = \lambda \otimes 1$ 是常值函数，因此属于 $C_0(\mathbb{P}(H))$。反过来，若 $\iota(T) \in C_0(\mathbb{P}(H))$，则对于所有 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$，$\iota(T)$ 都与 $\iota(u)$ 交换。由于 $\iota(u)$ 在 $\mathbb{P}(H)$ 上通过平移作用，这迫使 T 与 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中的所有酉元交换，从而推出 $T = \lambda I$。 □

备注 102（技术基础：波兰群胚框架）。命题 *61* 中的直积分构造需要仔细论证其可测性和可积性，因为 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 不是局部紧的。在 *Tu*（*1999*年）的波兰群框架中，我们使用博雷尔结构，并利用这样一个事实：$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个标准博雷尔群，它在标准博雷尔空间 $\mathbb{P}(H)$ 上连续作用。于是，在 $\mathbb{P}(H)$ 上的希尔伯特空间常值场直积分是良定义的，并且 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的作用由一个可测酉表示实现。所得的 ***C**-代数** $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 通过群胚上具有适当范数的紧支撑博雷尔函数卷积代数来定义。

备注 103 (指标理论与考尔金代数**)。** 代数 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 是研究恒等算子紧扰动的自然定义域。每个形如 $I + K$ 且 K 为紧算子的算子都是 ***Fredholm*** 算子，且指标为零。例如，若 F 是有限秩算子，则 $I + F$ 是 ***Fredholm*** 算子，且指标为零；其核与余核均为有限维，且维数相等。对角嵌入 ι 刻画了这一平凡指标：等变 ***K*** 理论类 $[I + F]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 是平凡的，指标公式给出的结果为零。

嵌入 ι 可以理解为将 $\mathcal{A}$ 对角地包含到群胚 ***C**-代数**中。其像通常不是中心的：当且仅当 T 是恒等算子的标量倍数时，$\iota(T)$ 才与 $\mathcal{H}$ 上 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的作用可交换。相反，$\iota(T)$ 在各个纤维上作用，而 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 的作用则置换这些纤维。$\iota(\mathcal{A})$ 不具有中心性，反映了定义 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的延拓并非平凡；该延拓是以 $C(\mathbb{P}(H)) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 为核、以 $\mathcal{K}(H)$ 为商的延拓。

为获得非平凡指标，我们必须考虑 $B(H)$ 中不属于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的算子，例如单边移位 S。考尔金代数 $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ 及其酉群在 ***Fredholm*** 算子指标理论中起着核心作用。$B(H)$ 的酉共轭群胚将是论文 ***II*** 的研究主题；届时我们将证明，***Fredholm*** 算子 T 的指标编码在等变 ***K*-理论类** $[T]_{\mathcal{G}_{B(H)}}$中。紧算子情形 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 可作为预热：该群胚是波兰空间，对角嵌入良定义，而指标公式给出零，这与此情形下指标平凡相一致。

备注 104 (非恰当性与约化 C*-代数)。 群 $\mathcal{U}(\mathcal{K}(H)^{\sim})$ 作为拓扑群并非可和。因此， $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的左正则表示 Λ 并不忠实，而约化群胚 C^*-代数 $C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是最大代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的真商。对角嵌入$\iota$ 落在最大代数中；它在约化代数中的像未必是单射。我们将在论文 II 中研究下降映射及其与 *Fredholm* 指标的相容性，并处理这一微妙问题。

我们分析了 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$的酉共轭群胚和对角嵌入，其中 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$是紧算子的单位化。这个例子是一个非平凡的 I 型 C* 代数，且具有无限维度，展现了强算子拓扑和波兰群胚框架的必要性。单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与射影空间 $\mathbb{P}(H)$同胚；后者是一个非局部紧的波兰空间。酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$是 $\mathcal{U}(H)$ 的稠密波兰子群。群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathbb{P}(H)$是一个既非局部紧、也非 ´etale的波兰群胚。对角嵌入 ι将算子 $T \in \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 映为 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的乘子代数中的常值函数 $T \otimes 1$ 。这个嵌入是单射，并且满足 $\iota(T) \in C_0(\mathbb{P}(H))$当且仅当 $T = \lambda I$ 是标量。

5.4 非例：为什么 A_θ 不在涵盖范围内（非I型）

无理旋转代数 A_θ，也称为非交换环面，是非交换几何中最重要且研究最深入的例子之一。它是交叉积 $C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$，其中作用是按无理角 $2\pi\theta$旋转。这个 C*-代数是单的、核的，并且具有唯一迹态。它是检验 Baum-Connes 猜想、指标理论和量子几何的基本案例。

然而，尽管 A_θ 十分重要，本文所发展的构造**并未涵盖它** 。理解它为何被排除至关重要，因为这能阐明我们框架的确切适用范围和局限性。我们对酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的构造以及对角嵌入 ι: $\mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的构造，根本上依赖于假设 $\mathcal{A}$ 是**I 型 C* 代数**。代数 A_θ 是**非I型** 代数的典范例子，这一区别导致了我们构造中若干关键步骤失效。

以下说明了为什么 A_θ 无法满足我们框架的要求:

1. **违反核心假设（I型）：** 我们的基本假设（假设 1）是， $\mathcal{A}$ 是可分的 I 型代数。对于无理数 θ， A_θ 是可分的，但**不是 I 型**。它不是 GCR，而且重要的是，它没有有限维不可约表示 [5]。因此，它立即被排除在我们的主要定理（例如关于 ι单射性的定理 7）的适用范围之外。

2. **特征无法实现点分离：** 我们的对角嵌入 ι（命题 39）具有单射性，这依赖于这样一个事实：对于 I 型代数，由特征在交换子代数上构造的 GNS 表示族 $\{\pi_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 能够分离 $\mathcal{A}$ 中的点（引理 21）。对于像 A_θ这样的非 I 型代数，这一点并不成立。可能存在非零元素（有时称为“量子”元素或“不可见”元素），它们在所有此类表示下都映为零。因此，任何试图通过第 4.9 节的直积分方法构造 ι的做法，都会得到一个具有非平凡核的映射； $\mathcal{A}$ 无法从其交换语境中得到忠实地恢复。

3. **“经典语境”空间的坍缩：** 我们的单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ （定义 15）的丰富性取决于众多交换子代数及其特征的存在。对于单代数 A_θ，情况则截然不同:

   • 由于该代数是单的，其本原理想空间 $\mathrm{Prim}(A_\theta)$ 仅由一个点（零理想）构成。这与 I 型例子形成鲜明对比，在那些例子中，$\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ 几乎豪斯多夫，并具有丰富的博雷尔结构。

• 它完全没有特征（一维表示），因为它所有的不可约表示都是无限维的。这意味着，对于任意含幺交换 C*-子代数 $\backsim B \subset A_\theta$，其盖尔范德谱 B 非空，但与之关联的 A_θ 的 GNS 表示不可约性不成立，且不能分离点。

因此，单位空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 虽然可以作为集合来定义，却不具备相同的几何或可测结构。映射 $x \mapsto \pi_x$ 不会构成不可约表示的可测场，而直积分表示 Π（命题 36 的步骤 1）也无法良定义或保持忠实。

4. **函子性的丧失：**即使能够定义一个群胚，在 *-同态下的自然性（第 4.12 节）也会失效。例如，典范 Cartan 子代数 $C(S^1) \hookrightarrow A_\theta$ 的包含不满足函子性所要求的拉回性质，因为交换子代数在 A_θ 中的原像可能无法在 $C(S^1)$ 中轻易描述。

总之，A_θ 不仅仅是一个技术性反例，更是一个真正的反例语境。它的非 I 型性质意味着，本文的基本工具——GNS 表示的分离族、$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的波兰拓扑，以及忠实对角嵌入——都会失效。因此，理解 A_θ 突显了 I 型假设的关键作用，并促使我们寻找更一般的框架，例如基于 Cartan 子代数和 Weyl 群胚 [20], 的框架，或许最终能够涵盖这类代数。

注 105（A_θ 作为未来工作的动机示例）。 虽然 A_θ 不属于我们当前的框架，但它是未来推广的主要动机示例。它作为交叉积的结构已得到充分理解，其典范 *Cartan* 子代数 C（S^1）以及与之相关的 *´étale* 群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 表明，可以利用 *Renault* 的 *Weyl* 群胚，为具有 *Cartan* 子代数的代数发展一种“酉共轭”理论。沿此方向推广我们的结果，是未来研究中一个很有前景的途径。

命题 62（A_θ的基本性质）。 设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 为一个无理数，并令 $A_\theta = C$（S^1）$\rtimes_\theta \mathbb{Z}$为无理旋转代数。则：

1. A_θ 是单的（没有非平凡闭理想）。*2.* A_θ 是核的，并且具有唯一的忠实迹态 τ。*3.* A_θ 不是 *I*型；特别地，它不具有有限维不可约表示。*4.* K_0（A_θ）$\cong \mathbb{Z}^2$ 和 K_1（A_θ）$\cong \mathbb{Z}^2$。*5.* 对于另一个无理数 θ'，当且仅当 $\theta' \equiv \pm\theta$（模 1）时，我们有 $A_\theta \cong A_{\theta'}$ 作为 *C*-代数。

证明。 这些是交叉积 C*-代数理论中的经典结果。

1. 单纯性源于无理旋转作用在 S^1 上的极小性。

2. 核性源于这样一个事实：A_θ 是由核 C*-代数 $C(S^1)$ 与可和群 $\mathbb{Z}$ 构成的交叉积。唯一迹态 τ 由 $\tau(x) = \int_{S^1} E(x)(t)\, dt$ 给出，其中 $E\colon A_\theta \to C(S^1)$ 是典范条件期望；其忠实性是 θ 无理性的标准推论。

3. 由于 A_θ 是单且无限维的，因此它不可能是 I 型。更直接地说，A_θ 的每个不可约表示都是无限维的，因此它不属于 GCR（后极限）[5]。

4. 该 K 理论计算是将著名的 Pimsner-Voiculescu正合列应用于由 $\mathbb{Z}$生成的交叉积所得的结果。

5. *-同构分类是 Rieffel 的一个定理： $A_\theta \cong A_{\theta'}$ 作为 C*-代数同构，当且仅当$\theta' \equiv \pm\theta$ （模 1）。（虽然还存在更一般的 Morita 等价分类，但这才是同构的精确表述。）

□

推论40 （I 型假设失效）。 无理旋转代数 A_θ 不 满足 $\mathcal{A}$ 为 *I* 型这一基本假设（假设 *1*）。因此，本文构造的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 和对角嵌入 ι 不适用于 A_θ **本文框架所要求的意义下**；它们不满足主要结果所需的结构性假设。

证明。 这可由命题62(3)直接推出。由于 A_θ 不是 I 型，命题 13（保证 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是波兰空间）和定理 7（确立 ι的单射性）的假设均不成立。尤其是，对于像 A_θ这样的单非 I 型代数，部分求值映射 ev$_a$ 不能分离点；存在非零元素对所有交换语境均不可见。因此，直积分表示 Π 会有非平凡的核，因而不是忠实的；表示场 $\{\pi_x\}$ 也不满足构造所要求的可测性。

□

当 $\mathcal{A}$ 不是 I 型时会发生什么？ 如果我们尝试将这一构造应用于诸如 A_θ 这样的非 I 型 C*-代数，就会遇到几个根本性障碍：

1. **点分离：** 对角嵌入 ι 是单射，当且仅当交换子代数上的特征能够分离 $\mathcal{A}$ 中的点（见引理 21）。对于非 I 型代数，这种点分离性质并不一定成立；交换子代数上的特征通常不足以分离 $\mathcal{A}$ 中的点。因此，对角嵌入 ι 未必是单射；其核可能包含非零元素，从启发式的意义上说，这些元素对所有可用的经典语境都是不可见的。

2. **单位空间的拓扑失效：** 将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 构造成波兰空间（命题 13），依赖于由部分求值映射 ev$_a$ 生成的拓扑。对于像 A_θ 这样的非 I 型代数，即使固定一个极大交换子代数 $B \cong C(S^1)$，也无法保证其 $\widehat{\ }$ 特征空间 B 上诱导的拓扑仍是波兰拓扑（甚至无法保证它是第二可数的）。更根本地说，通常不存在一种规范方式，能够将所有交换子代数的 Gelfand 谱组织成与部分求值映射相容的全局波兰结构或标准博雷尔结构。因此， $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 将不满足我们框架的拓扑要求。

3. **直积分的可测性：** 经由 GNS 表示的直积分对 ι的构造要求希尔伯特空间的纤维族 $\{\mathcal{H}_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是可测的。对于 I 型代数，这源于光滑对偶的存在以及谱 [5]上的标准博雷尔结构。对于非 I 型代数，表示论并不光滑；根据格利姆定理，对偶空间不是标准博雷尔的，并且无法一致地定义覆盖 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 所有点的不可约表示的可测场。

4. **直积分表示的忠实性：** 即使可以定义直积分 $\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_x \, d\mu(x)$，表示 $\Pi(a) = \int^{\oplus} \pi_x(a) \, d\mu(x)$ 也可能不忠实。 Π的潜在核恰好由无法通过表示族 $\{\pi_x\}$加以区分的元素构成，即第（1）点所提到的那些“不可见”元素。对于 I 型代数，表示族 $\{\pi_x\}$ 足够

丰富，能够区分各点，从而保证忠实性。对于非 I 型代数，这种区分性质不成立，因此所得映射 ι 将不是单射。

命题63 (A_θ 没有非零有限维表示)。 设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，并令 A_θ 为无理旋转代数。那么 A_θ 不具有非零有限维*-表示。因此，对于任意含幺交换 *C**-子代数 $B \subseteq A_\theta$ 和任意特征 $\chi\colon\ B \to \mathbb{C}$，相应的 A_θ *GNS* 表示不可能是有限维的。

证明。 反设 $\pi\colon A_\theta \to B(H)$ 是一个非零有限维表示，即 $\dim H < \infty$ 且 $\pi \neq 0$。设 u, $v \in A_\theta$ 为满足交换关系的标准酉生成元

$$uv = e^{2\pi i\theta} vu.$$

将 π 作用于此关系，得到

$$\pi(u)\pi(v) = e^{2\pi i\theta}\pi(v)\pi(u). \tag{1}$$

由于 H 是有限维的， $\pi(u)$ 和 $\pi(v)$ 都是有限维酉元。线性代数中的一个标准事实是，对于任意两个有限维可逆矩阵 U和 V，交换子 $UVU^{-1}V^{-1}$的行列式为 1；更重要的是，它的所有特征值都是单位根。将 (1) 重新整理可得

$$\pi(u)\pi(v)\pi(u)^{-1}\pi(v)^{-1} = e^{2\pi i\theta} I_H.$$

左边是酉元的交换子，因此其特征值都是单位根。右边是恒等算子的标量倍数，其中因子 $e^{2\pi i\theta}$ 不是单位根（因为 θ 是无理数）。这在有限维情形下是不可能的。因此，不存在这样的非零有限维表示 π 。

□

推论41 （ 的 GNS表示 是无限维的）。 设 $(B, \chi) \in \mathcal{G}^{(0)}_{A_\theta}$。由任何将 χ 上的特征延拓到 B 上的态所诱导的 A_θ 的 *GNS* 表示 π_x 都是无限维的。不过，需要注意的是， π_x 不一定是不可约的；将 χ 从 B 延拓为 A_θ 上的态并不唯一，由此得到的 *GNS* 表示可能是可约的，并分解为不可约表示的直积分或直和。

证明。 无限维性直接由命题63得出。若 π_x 是有限维的，它将是 A_θ 的一个非零有限维表示，这与该命题矛盾。

为说明 π_x 未必是不可约的，回想一下， χ 是交换子代数 B上的一个特征，因此是 B上的纯态。然而，它在较大的代数 A_θ 上的态延拓 ω 并不唯一。不同的延拓可能产生具有不同分解性质的 GNS 表示。一般而言，对于像 A_θ 这样的非 I 型代数，与子代数上某个纯态的延拓相对应的 GNS 表示可能是可约的；它可以分解为不可约表示的直积分或直和。因此，虽然可以保证 π_x 是无限维的，却不能保证它是不可约的。

□

例53 (A_θ的典范 Cartan 子代数)。 无理旋转代数 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$包含一个典范交换 *C**-子代数，它同构于 $C(S^1)$，具体而言，它是包含映射 $f \mapsto f \cdot 1_{\mathbb{Z}}$下 $C(S^1)$ 的像。按照 *Renault [20],* 的意义，这个子代数是一个 *Cartan* 子代数，其对应的 *Weyl* 群胚是变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$。

其盖尔范德谱与 S^1同胚。对于每个 $z \in S^1$，特征求值映射$_z\colon C(S^1) \to \mathbb{C}$都可延拓为 A_θ 上的一个态，但这种延拓并不唯一；不同的延拓源自该线性泛函的不同 *Hahn-Banach* 延拓，反映了 A_θ 的非交换结构。

与典范迹 τ 关联的 *GNS* 表示 A_θ 是交叉积在 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(S^1)$ 上的正则表示，通常称为 A_θ的正则表示。

注106（为什么 A_θ 是一个非例，而不是反例）。必须强调的是，A_θ 并不是对我们定理的反例；它只是未被这些定理的假设所涵盖。我们的结果针对的是 *I* 型 *C** 代数，而 A_θ 并非 *I* 型。两者并不矛盾。对 A_θ 的研究需要一套不同的技术——尤其是 *Renault* 的 *Cartan* 子代数和 *Weyl* 群胚理论——而将我们的框架扩展到非 *I* 型代数，是未来研究中的一个重要公开问题。我们猜想，利用 *´étale* 群胚或测度群胚的适当推广，或许能够处理 A_θ，但这超出了本文的范围。

备注 107（非 I 型代数的前景与局限）。尽管 A_θ 并非 *I* 型，因此不在我们主要定理的适用范围内，但仍值得探讨我们的构造有哪些方面可以定义，即使它们无法满足所需的性质。

1. 单位空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 仍可定义为一个集合（交换子代数与特征的对 (B,χ)），并可赋予由部分求值映射 ev_a 生成的初始拓扑。然而，由于非 *I* 型的 A_θ 表示理论无法提供必要的点分离和光滑性条件，这种拓扑不太可能是波兰拓扑，甚至不太可能是标准博雷尔拓扑。

2. 设 $\pi: A_\theta \hookrightarrow B(H)$ 是作用在可分希尔伯特空间 H 上的忠实表示。赋予从该表示继承的强算子拓扑后，酉群 $\mathcal{U}(A_\theta)$ 是一个波兰群。然而，$\mathcal{U}(A_\theta)$ 在 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 上的作用可能不连续，因为 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 上的拓扑不具备引理 *1* 中为证明 *I* 型代数上的连续性所必需的性质（例如波兰性、第二可数性）。

3. 直积分表示 $\Pi = \int^{\oplus} \pi_x \, d\mu(x)$（其中 π_x 是与点 $x = (B,\chi) \in \mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 相关联的 *GNS* 表示）可能无法在我们的可测框架内定义，因为缺少表示的可测场。即使能够定义，它几乎肯定也会有一个非平凡核。这个核恰好由“不可见”元素构成——这些元素在每个由交换子代数上的特征所导出的 *GNS* 表示下都映射为零。

4. 对角嵌入 $\iota: A_\theta \to \prod_{(B,\chi)} B(H_{(B,\chi)})$ 可以形式化地定义，但它会有一个非平凡核，该核与不可见元素的集合相同。因此，ι 可分解为商 $A_\theta/\ker(\iota)$ 到希尔伯特空间乘积中的忠实嵌入。这个商可解释为由经典交换语境所能探测到的“可观测”元素构成的 *C**-代数。

这些观察表明，尽管我们的构造理念或许可以推广到非 *I* 型代数，但其技术实现需要全新的思路，例如建立一种适用于非光滑对偶的可测场理论，或对“经典语境”作出更精细的选择。

例 54（典范迹与盖尔范德变换）。A_θ 上的唯一迹态 τ 在 L^2 上诱导出忠实的 *GNS* 表示 π_τ（A_θ，τ）。该表示是无限维的，类似于无理旋转代数的正则表示，对应于交叉积 $C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 在 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(S^1)$ 上的左正则表示。

τ 在典范 *Cartan* 子代数 $C(S^1)$ 上的限制，就是对 S^1 的哈尔测度积分。对每个 $z \in S^1$，特征 求值映射$_z$：$C(S^1) \to \mathbb{C}$ 都不是 A_θ 上的态；它无法扩张为 A_θ 上的正线性泛函。这是因为，尽管条件期望 $E: A_\theta \to C(S^1)$ 是忠实的，点求值求值映射$_z$ 关于 A_θ 上的算子范数并不连续，因此无法与 E 复合以得到一个态。

对于所有 $a \in A_\theta$，部分求值映射 求值映射$_a$：$\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)} \to \mathbb{C}_\infty$ 作为集合论映射都是良定义的。非 *I* 型情形中的障碍不在于它们的定义，而在于它们在 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 上生成的拓扑不太可能是波兰拓扑，甚至不太可能是标准博雷尔拓扑；此外，这族映射可能不足以区分 A_θ 本身的点。

注记 108 （与 I 型情形的比较）。 A_θ 与我们研究过的 *I* 型示例（C（X）、 M_n（$\mathbb{C}$）、 $\mathcal{K}$（H）~）之间的对比，凸显了 *I* 型假设的关键作用：

• 对于 *I* 型代数，对偶空间具有光滑的博雷尔结构，因此可以构造不可约 *GNS* 表示的可测纤维族。这产生忠实直积分表示，并保证此类表示族能够分离代数中的点。

• 对于诸如 A_θ 的非 *I* 型代数，表示论并不光滑；不存在合理的不可约表示参数化。交换子代数上特征所对应的 *GNS* 表示并不能穷尽表示论，更重要的是，它们可能无法分离点。两个不同的元素 $a, b \in A_\theta$ 可能满足 $\chi(a) = \chi(b)$，对每个包含 a 和 b 的交换子代数上的每个特征 χ 都如此——这种现象通常被描述为：此类元素对经典语境而言是“不可见的”。

• 部分求值映射 ev_a 仍能依构造分离单位空间 $\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}$ 中的点（引理 *2*），但这并不意味着它们能够分离 $\mathcal{A}$中的点。代数层面上的点分离失败，正是导致对角嵌入 ι 不是单射的原因。

因此，非 *I* 型情形需要全新的思路，超越本文所发展的交换语境重构方法。

注记 109 （缺少 I 型假设时会失去什么）。 如果尝试将我们的构造应用于 A_θ，我们就会失去以下重要特性：

• 单射性 ι： 对角嵌入会有非平凡核，因此我们无法从 A_θ的交换上下文中恢复它。

• 波兰性 $\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}$： 单位空间将不再是波兰空间，直积分构造也将不再良定义。

• ***GNS*** 表示场的可测性： 没有光滑对偶，我们就无法在 $\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}$ 上构造希尔伯特空间的可测场。

• 函子性： 即使对于 *Cartan* 子代数的包含，在 *-同态下的自然性也会失效。

这些损失并非只是技术性的；它们反映了真实的数学现象。非*I*型代数包含无法仅凭交换语境捕获的非交换信息。这正是它们真正具有非交换性的原因，也说明我们的 *I* 型假设并非只是为了方便，而是从 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$恢复 $\mathcal{A}$ 的必要条件。

例 55 (其他未涵盖的非I型代数)。 除了 A_θ，许多其他重要的 *C**-代数也不在我们的框架涵盖范围内：

• 自由群上由 $n \geq 2$ 个生成元生成的约化群 *C** 代数 C_r^*（$\mathbb{F}_n$）。这个代数是单的（由 *Powers* 定理可知），是非核的（因为 $\mathbb{F}_n$ 是非平均的），并且不是 *I* 型。

• *Cuntz*代数 $\mathcal{O}_n$ *(*$n \geq 2$*)* 和 $\mathcal{O}_\infty$。它们是单的、纯无限的，并且不是 *I* 型 *[22]*。

• 江苏代数 $\mathcal{Z}$，它是单的、核的，并且不是 *I* 型。作为埃利奥特分类纲领中的一个中心对象，它的非*I*型性质尤为重要。

• 任意非 *amenable* 离散群的约化群 *C** 代数 C_r^*（Γ）通常都不是 *I* 型的（例如 Γ （$\Gamma = SL2$，$\mathbb{Z}$））。

这些代数各自都需要采用不同的方法，而我们的构造能否推广到其中任何一种情况，仍是一个开放问题。

无理旋转代数 A_θ 是一个优美且重要的 C*-代数，但不属于本文的研究范围。它的非 I 型性质意味着，对角嵌入 ι不是单射，单位空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 不是波兰空间，而且直积分构造会失效（与 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 中的点相关联的 GNS 表示无法在波兰单位空间上构成可测场）。尽管如此， A_θ 仍是未来推广我们工作的关键启发性例子。如何将我们的框架调整为适用于非 I 型代数，尤其是具有 Cartan 子代数的非 I 型代数，是一个重要的公开问题，我们希望在后续研究中加以探讨。

注 110（展望：超越 I 型）。 本文发展的技术——酉共轭群胚、波兰群胚框架和对角嵌入——专为 *I* 型 *C** 代数设计。将这些技术推广到非 *I* 型代数，需要全新的方法。值得探索的方向包括：

- ***Cartan*** 对与 ***Weyl*** 群胚： 对于像 A_θ 这样按照 *Renault [20],* 的意义具有 *Cartan* 子代数的代数，我们可以用与之关联的 *Weyl* 群胚替代酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 。该群胚通常是 *´étale* 且局部紧的，其 *C**-代数与原代数 *Morita* 等价，因此可能成为推广我们指标理论构造时更易处理的对象。

- 量子群与变形量子化： 将 A_θ 视为交换环面的严格变形量子化，表明可以借助量子群理论和泊松几何的工具构造“量子对角嵌入”。这种嵌入的半经典极限可能对应于余切群胚之类的几何对象，从而为非交换几何与经典辛几何搭建桥梁。

- 非交换 ***Gelfand*** 对偶性： 一个更宏大的长期目标是发展一种适用于任意 *C**-代数的 *Gelfand* 变换的非交换对应理论。此类理论或许会运用冯·诺伊曼代数、虚对象或高阶范畴结构的语言，来捕捉交换上下文中不可见的非交换信息。

这些方向远远超出了本文的范围，但我们希望，本文所奠定的基础——尤其是酉元共轭作用群胚所发挥的中心作用——将有助于它们未来的发展。

参考文献

[1] OpenAI，“ChatGPT（2025年3月版本）”，大语言模型，2025年。 [在线]。可获取：https://openai.com/chatgpt[2]DeepSeek，“DeepSeek（2025年2月版本）”，大语言模型，2025年。 [在线]。可获取：https://www.deepseek.com/[3] N. Kuiper，“希尔伯特空间酉群的同伦型”，拓扑3（1965年），19–30。[4] J. Dixmier 与 A. Douady，“希尔伯特空间与 C*-alg`代数的连续场”，法国数学学会通报 91（1963年），227–284。[5] J. Dixmier，*C**-代数，North-Holland，1977年。

[6] J. M. G. Fell，“C*-代数的对偶空间”，美国数学会汇刊 94（1960年），365–403。[7] J. M. G. Fell，“局部紧非Hausdorff空间的闭子集的Hausdorff拓扑”，美国数学会会刊 13（1962年），472–476。[8] G. Beer，“Fell 拓扑的嵌入定理”，密歇根数学杂志 35（1988年），3–9。[9] G. Beer，《闭集与闭凸集上的拓扑》，Kluwer，1993年。[10] A. S. Kechris，《经典描述集合论》，Springer，1995年。[11] J. Renault，《C*-代数的群胚方法》，数学讲义 793，Springer，1980年。[12] J.-L. Tu，“叶状结构的 Baum–Connes 猜想”，K 理论 17（1999年），215–264。[13] D. P. Williams，《C*-代数的交叉积》，美国数学会，2007年。[14] E. Kirchberg 与 S. Wassermann，“正合群与 C*-代数的连续丛”，数学年刊 315（1999年），第2期，169–203。[15] P.-Y. Le Gall，“Kasparov 等变 ′理论与 ′群胚¨”，巴黎科学院院报 S ′er. I 数学 324（1997年），695–698。[16] G. G. Kasparov，“等变 KK 理论与 Novikov猜想”，数学发明 91（1988年），147–201。[17] J. Kustermans 与 S. Vaes，“普遍框架下的局部紧量子群”，预印本，arXiv:math/9902015v1，1999年2月。发表于国际数学杂志 12（2001年），第3期，289–338。[18]Henry S，“完备 C*-范畴与拓扑斯理论的 Green-Julg定理”，arXiv 预印本 arXiv:1512.03290，2015年。[19] A. L. T. Paterson，《群胚、逆半群及其算子代数》，数学进展 170，Birkh¨auser，波士顿，1999年。[20] J. Renault。C^*-代数中的 Cartan 子代数。爱尔兰数学会通报，(61):29–63，2008年。[21] J. Renault，群胚代数交叉积的表示´˜¨，算子理论杂志 18（1987年），67–97。[22] J. Cuntz，“由等距映射生成的单 C*-代数”，数学物理通讯 57（1977年），173–185。