旋量表示中的李代数 so_{2r} 的分裂卡西米尔算子、色因子与杨–巴克斯特方程

arXiv:2603.04561v1 [math-ph] 4 Mar 2026

A. P. Isaev[a, b] 和 **A. A. Provorov**[a]

[a] 联合核研究所理论物理学 *Bogoliubov* 实验室，俄罗斯杜布纳 *141980*[b] 莫斯科国立罗蒙诺索夫大学物理系，俄罗斯
isaevap@theor.jinr.ru,
aleksanderprovorov@gmail.com

摘要

本文推导了李代数 so_{2r} 在同手征性和相反手征性的旋量表示张量积中的分裂卡西米尔算子的特征恒等式。利用这些恒等式，我们明确构造了该算子不变子空间上的投影算子，并计算了它们的迹。所得结果使我们能够导出规范群为 Spin($2r$) 的规范理论中梯形费曼图色因子的显式表达式。此外，我们还得到了杨–巴克斯特方程的一种新形式，该形式在旋量表示中关于李代数 so_{2r} 的作用保持不变。

关键词：不变子空间、投影算子、分裂卡西米尔算子、克利福德代数、旋量、色因子、费曼图、杨-巴克斯特方程、R矩阵

1 引言

分裂卡西米尔算子（更一般地说， n-分裂卡西米尔算子）在李代数和李超代数理论以及表示论中发挥着重要作用。特别是，已有多项研究 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]建立了适用于 2、3、4 和 5 分裂卡西米尔算子的普适特征恒等式。这些结果使得人们能够显式构造单李代数和超代数的伴随表示张量幂上的普适子表示投影算子。在 [8], 中，类似的计算也针对作用于张量积 $T \otimes Y_n$ 和 $T \otimes Y_n'$的 2 分裂卡西米尔算子进行了，其中 T 表示基本表示，而 Y_n、 Y_n' 表示单李代数的普适表示。此外，分裂卡西米尔算子还可通过非阿贝尔规范理论中费曼图的色因子 [9] 来解释（另见 [10]），因此是微扰理论中计算散射振幅的便捷工具。

色因子的计算问题在现代粒子物理学中占据着核心地位。标准模型目前为基本相互作用提供了最精确的理论描述，它是一种规范群为 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的非阿贝尔规范理论。因此，色因子的计算及其求值方法的开发，在计算散射振幅和其他物理量方面发挥着至关重要的作用。

除了标准模型之外，大统一理论（GUTs）也备受关注，因为它们能够在高能下统一描述强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用。首个此类理论于 [11], 提出，其中指出，标准模型的费米子场可以统一为 $SU(5)$ 的 5 和 10 多重态。随后的一项研究 [12], 探讨了构建规范群为 $SO(10)$（更准确地说，是 Spin(10)）的大统一理论的可能性。在这一框架下，单代的所有夸克和轻子都被纳入一个 16 维旋量多重态中。尽管要解释 $SO(10)$ 对称性破缺至标准模型对称性所涉及的能标层级颇具难度，但这一理论已相当成功。特别是， [13] 指出，旋量多重态中存在一种额外粒子——右手中微子，而它不包含在 $SU(5)$ 的 5 和 10 多重态中——这使得构建解释中微子质量起源及其数值为何如此之小的机制成为可能。此外， [14] 展示了最小 $SO(10)$ 模型在描述中微子谱方面的强大预测能力。其他广受关注的大统一理论则以规范群 E_6 和 E_8 [15, 16]为基础。

量子场论中色因子的另一个重要应用领域，是 't Hooft 在 [17] 中引入的所谓 $1/N$ 展开。他指出，在极限 $N \to \infty$ 下， $SU(N)$ 规范理论的结构会大幅简化，因为此时在计算各种振幅时，只有平面费曼图能够保留下来。这促使 't Hooft 提出了一种量子色动力学计算方法，即 $1/N$ 展开 [17]。这种方法对量子场论和弦理论的发展产生了重大影响（参见综述 [18]）；它被应用于分析禁闭 [19], 、重子的性质 [20], 以及矩阵模型 [21]。

分裂卡西米尔算子在量子可积系统领域也有应用。它用于构造量子杨–巴克斯特方程的解，这些解在李代数和李超代数的作用下保持不变 [1, 2, 22]。该方程最早出现在 McGuire [23] 和 Yang [24] 的著作中，并在量子可积性理论中发挥着至关重要的作用 [25, 26]（另见 [27] 及其中的参考文献）。特别是，在量子逆散射法 [28], 的框架内，出现了某些结构，这些结构最终促成了量子群理论的发展 [29,30, 31], 。量子群是李群和李代数的变形，用于描述量子可积系统的对称性 [32, 33]。

对于例外李代数，Westbury [34],在 Freudenthal–Tits 魔方的框架下研究了 R-矩阵，并探讨了其与 Vogel 参数化的联系。

本文结构如下。第 2 节介绍单李代数的分裂卡西米尔算子，并讨论其主要性质。第 3 节和第 4 节介绍两种不同的方法，用于推导旋量表示张量积中分裂卡西米尔算子的特征恒等式。第 5 节通过一个例子，说明如何计算规范群为 Spin($2r$) 的规范理论中费曼图的色因子；第 6 节则致力于构造旋量表示中在李代数 so_{2r} 作用下保持不变的杨–巴克斯特方程的解。结论部分简要总结了本文的主要结果。

2 基本定义

2.1 单李代数的分裂卡西米尔算子

本节回顾单李代数的二次卡西米尔算子和分裂卡西米尔算子的一些众所周知的事实（参见例如 [1, 3, 35]）。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个单复李代数，其基为 $\{X_A\}$，结构关系为

$$[X_A, X_B] = X^C{}_{AB} X_C, \tag{2.1}$$

其中 $X^C{}_{AB}$ 是结构常数。$\mathfrak{g}$ 的嘉当–基林度量 $\mathfrak{g}_{AB} := X^C{}_{AD} X^D{}_{BC}$ 及其逆度量 $\mathfrak{g}^{AB}$ 满足 $\mathfrak{g}^{AB}\mathfrak{g}_{BC} = \delta^A_C$，由此可定义二次卡西米尔算子

$$C_2 := \overline{\mathfrak{g}}^{AB} X_A X_B \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \tag{2.2}$$

它是泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的中心元素。因此，在 $\mathfrak{g}$ 的任意表示 T 中，它都作为不变算子作用：$[T(X_A)\ T(C_2)] = 0$，对任意 X_A 均成立。

设 V_λ 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示 T_λ 的空间，其最高权为 λ。那么算子 $T_\lambda(C_2)$ 与 V_λ 上的恒等算子 I_{V_λ} 成正比：

$$T_\lambda(C_2) = c_2^\lambda I_{V_\lambda}, \tag{2.3}$$

其中 $c_2^{T_\lambda} \equiv c_2^\lambda$ 是 $T_\lambda(C_2)$在 V_λ中的特征值。对于伴随表示 $T_\lambda = \mathsf{ad}$，由(2.2)立即得出 $c_2^{\mathsf{ad}} = 1$。在一般情形下，

$$c_2^\lambda = (\lambda, \lambda + 2\delta), \tag{2.4}$$

其中 δ 表示 $\mathfrak{g}$的Weyl向量，根空间中的标量积 $(,)$ 由上文所得条件 $c_2^{\mathsf{ad}} = 1$ 归一化。例如，对于本文的主要研究对象李代数 so_N，这意味着对其根空间的任意基元素 $e^{(i)}$ 和 $e^{(j)}$，有

$$(e^{(i)}, e^{(j)}) = \frac{1}{2(N-2)} \delta^{ij}. \tag{2.5}$$

我们现在将 $\mathfrak{g}$ 的分裂卡西米尔算子定义为

$$\widehat{C} = \overline{\mathfrak{g}}^{AB} X_A \otimes X_B \ \in\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}). \tag{2.6}$$

它与二次卡西米尔算子 C_2 的关系为

$$\Delta C_2 = C_2 \otimes I + I \otimes C_2 + 2\widehat{C} \iff \widehat{C} = \frac{1}{2}\big(\Delta C_2 - C_2 \otimes I - I \otimes C_2\big), \tag{2.7}$$

其中 $I \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$表示单位元，而 $\Delta:\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$是余乘法，

$$\Delta(I) = I \otimes I, \qquad \Delta(X_A) = X_A \otimes I + I \otimes X_A. \tag{2.8}$$

该$\widehat{\ }$算子具有伴随不变性。更确切地说，对于 $\mathfrak{g}$ 的任意表示 T 和 T'，有 as

$$[T(X_A) \otimes I_{T'} + I_T \otimes T'(X_A),\ \widehat{C}_{T\cdot T'}] = 0 \qquad \forall X_A, \tag{2.9}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中，I_T表示表示 T 中的恒等算子，而 $C_{T\cdot T'} := (T \otimes T')C$。

由(2.7)可知，分裂卡西米尔算子的特征值 $c^\lambda_{(2)}$ 和出现在分解 $T \otimes T' = \bigoplus_\lambda T_\lambda$ 中）之间满足关系

$$c^\lambda_{(2)} = \frac{1}{2}\big(c_2^\lambda - c_2^T - c_2^{T'}\big). \tag{2.10}$$

$\widehat{\ }$ $C_{T\cdot T'}$的伴随不变性与舒尔引理意味着，若 $T \otimes T'$可分解为不可约表示的直和 $T \otimes T' = \bigoplus_\lambda T_\lambda$，则每个子表示 T_λ 的空间 V_λ 都是 $\widehat{C}_{T\cdot T'}$的特征子空间，其特征值为 $c^\lambda_{(2)}$，并且有如下恒等式：

$$\prod_{c^\lambda_{(2)}} \big(\widehat{C}_{T\cdot T'} - c^\lambda_{(2)}\big) = 0, \tag{2.11}$$

$$(\widehat{C}_{T\cdot T})^{i_1 i_2}_{\ j_1 j_2} =$$

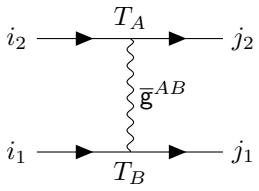

图 1：算子 $C_{T\cdot T}$ 的图示解释。在自对偶表示 T 的情况下，水平线应视为无向的。

其中，乘积遍历所有不同的特征值$c^{\lambda}_{(2)}$。这个恒等式称为$C_{T\cdot T'}$的特征恒等式。根据构造，式（2.11）的次数在所有满足该算子的多项式关系中为最小。

利用式 (2.11)，可以构造一组正交投影算子 $\mathrm{P}_{c^{\lambda}{}_{(2)}}$，投影到特征子空间 $\{V_{c^{\lambda}{}_{(2)}}\}$ 上，其中 $\widehat{C}_{T\cdot T'}$[1]：

$$\mathrm{P}_{c^{\lambda}_{(2)}} = \prod_{c^{\rho}_{(2)} \neq c^{\lambda}_{(2)}} \frac{\widehat{C}_{T\cdot T'} - c^{\rho}_{(2)}}{c^{\lambda}_{(2)} - c^{\rho}_{(2)}}. \tag{2.12}$$

这些投影算子还可用于计算相应特征子空间的维数 $\dim\, V_{c^{\lambda}{}_{(2)}} = \mathrm{tr}\mathrm{P}_{c^{\lambda}{}_{(2)}}\widehat{\ }$，并将算子 $C_{T\cdot T'}$ 表示为

$$\widehat{C}_{T\cdot T'} = \sum_{c^{\lambda}_{(2)}} c^{\lambda}_{(2)}\ \mathrm{P}_{c^{\lambda}_{(2)}}, \tag{2.13}$$

由此可得 $C_{T\cdot T'}$ 的任意幂 L 的一个简单公式：

$$\widehat{C}^{L}_{T\cdot T'} = \sum_{c^{\lambda}_{(2)}} \left(c^{\lambda}_{(2)}\right)^{L}\ \mathrm{P}_{c^{\lambda}_{(2)}}. \tag{2.14}$$

在式 (2.13) 和 (2.14) 中，求和遍历所有不同的特征值 $c^{\lambda}_{(2)}$。

分裂卡西米尔算子可以通过非阿贝尔规范理论中的费曼图来获得图示解释，该理论的李代数为 $\mathfrak{g}$。更确切地说，其分量 $(\widehat{C}_{T\cdot T})^{\ i_1 i_2}{}_{j_1 j_2}$ 在表示$T \otimes T$ 中的分量与图 1 所示图的色因子相一致。该图对应于两个粒子的相互作用：它们的场分别在 $\mathfrak{g}$ 的作用下以表示 T变换，并通过交换一个规范玻色子发生相互作用。对于规范群为 Spin(2r) 的理论，这一解释将在第 5 节中作更详细的讨论（另见 [9]）。

我们还注意到，分裂卡西米尔算子被用于构造量子杨–巴克斯特方程和准经典杨–巴克斯特方程的解（例如，见 [22, 27, 36]）。第 6 节将结合在旋量表示中于李代数 so_{2r} 作用下保持不变量的量子杨–巴克斯特方程的解，对这一主题进行详细讨论。

3 李代数 so_{2r} 的分裂卡西米尔算子在旋量表示张量积中的特征恒等式推导的第一种途径

关于李代数 so_N、克利福德代数 $\mathcal{C}l_N$及其表示的必要信息汇集于附录 A。为简洁起见，在本节公式中我们省略对 $\mathcal{C}l_{2r}$的不可约表示 ρ 的显式指称，并将 $\rho(\Gamma_i)$写作 Γ_i，将 $\rho(M_{ij})$写作 M_{ij}，依此类推。

[1]这些空间 $V_{c^{\lambda}_{(2)}}$ 称为表示 $T \otimes T'$ 的卡西米尔特征子空间，通常是不可约表示空间 T_λ、$T_{\lambda'}$、.....的直和，其中 $\widehat{C}_{T\cdot T'}$ 以相同的特征值 $c^{\lambda}_{(2)} = c^{\lambda}_{2}() = \ldots$作用。

3.1 李代数 so_{2r} 在表示 $\rho\otimes\rho$ 中的分裂卡西米尔算子的特征恒等式

我们引入代数 $\rho(\mathcal{C}l_{2r})\otimes\rho(\mathcal{C}l_{2r})$ 的元素 I_k， $k=0$，1，2，.....，其定义如下（见 [37]）

$$I_0:=I\otimes I,\qquad I_k:=\Gamma^{[i_1\ldots i_k]}\otimes\Gamma_{[i_1\ldots i_k]},\quad k>0. \tag{3.1}$$

这是显而易见的。验证它们在 so_N 的伴随作用下是不变量，也就是说，它们满足

$$[M_{ij}\otimes I+I\otimes M_{ij},I_k]=0. \tag{3.2}$$

特别是，

$$I_2=\Gamma^{[i_1i_2]}\otimes\Gamma_{[i_1i_2]}=-16(N-2)\widehat{C}_\rho, \tag{3.3}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中我们使用了 (A.7)，并记 $C_\rho:=(\rho\otimes\rho)C$。$I_2$ 与李代数 so_{2r} 在表示 $\rho\otimes\rho$ 中的分裂卡西米尔算子 $\widehat{\ }C_\rho$ 之间的正比关系，在下文中起着关键作用。

在 [37], 中，得到了元素 I_k 的一个递推关系：

$$I_kI_1=I_{k+1}-k\big((k-1)-2r\big)I_{k-1}. \tag{3.4}$$

通过反复应用该关系，每个不变量 I_k 都可以表示为 I_1 的一个次数为k的多项式，例如：

$$I_2=I_1^2-2rI_0,\qquad I_3=I_1^3-2(3r-1)I_1. \tag{3.5}$$

下文中，我们需要偶数不变量 I_{2k}的(3.4)的一个类似形式：

$$I_{2k}I_2=I_{2k+2}+8k(r-k)I_{2k}+4k(2k-1)(r+1-k)(2r+1-2k)I_{2k-2}. \tag{3.6}$$

将(3.4)乘以 I_1，代入 $k\mapsto 2k$，并利用(3.5)中的第一个等式消去 I_1，即可得到该关系。由(3.3)和(3.6)可知，每个不变量 I_{2k} 都可以表示为$\frown C_\rho$ 的一个次数为 k的多项式，例如：

$$\begin{aligned}
I_4(\widehat{C}_\rho)&=1024(r-1)^2\widehat{C}_\rho^2+256(r-1)^2\widehat{C}_\rho-4r(2r-1)I_0,\\
I_6(\widehat{C}_\rho)&=-32768(r-1)^3\widehat{C}_\rho^3-8192(r-1)^2(3r-5)\widehat{C}_\rho^2-128(r-1)(18r^2-65r+46)\widehat{C}_\rho\\
&\quad+64r(r-2)(2r-1)I_0,\\
I_8(\widehat{C}_\rho)&=2^{20}(r-1)^4\widehat{C}_\rho^4+2^{19}(r-1)^3(3r-7)\widehat{C}_\rho^3+2^{13}(r-1)^2(66r^2-301r+308)\widehat{C}_\rho^2\\
&\quad+2^{11}(r-1)(10r^3-91r^2+217r-132)\widehat{C}_\rho-48r(r-2)(2r-1)(22r-71)I_0,\\
I_{10}(\widehat{C}_\rho)&=-2^{25}(r-1)^5\widehat{C}_\rho^5-2^{24}\cdot5(r-1)^4(r-3)\widehat{C}_\rho^4-2^{18}(r-1)^3(230r^2-1335r+1806)\widehat{C}_\rho^3\\
&\quad-2^{16}(r-1)^2(190r^3-1665r^2+4473r-3590)\widehat{C}_\rho^2\\
&\quad-2^9(r-1)(140r^4-5820r^3+36351r^2-72610r+40536)\widehat{C}_\rho\\
&\quad+2^9(r-2)r(2r-9)(2r-1)(19r-62)I_0,\\
I_{12}(\widehat{C}_\rho)&=2^{30}(r-1)^6\widehat{C}_\rho^6+2^{28}\cdot5(r-1)^5(3r-11)\widehat{C}_\rho^5+2^{22}(r-1)^4(1170r^2-8305r+13992)\widehat{C}_\rho^4\\
&\quad+2^{21}(r-1)^3(1070r^3-11165r^2+36663r-37400)\widehat{C}_\rho^3\\
&\quad+2^{14}(r-1)^2(18660r^4-269060r^3+1354221r^2-2778930r+1914616)\widehat{C}_\rho^2\\
&\quad-2^{12}(r-1)(1404r^5-2200r^4-105897r^3+607695r^2-1108426r+585720)\widehat{C}_\rho\\
&\quad-320r(r-2)(2r-9)(2r-1)(622r^2-5755r+12172).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

由于 $\mathcal{C}l_{2r}$的基元素 $\Gamma_{[i_1\ldots i_k]}$在指标 i_1、...、 i_k的置换下具有反对称性，所有满足 $k>2r$ 的不变量 I_k都为零：$I_{2r+1}=I_{2r+2}=I_{2r+3}=\cdots=0$。这类$\widehat{\ }$偶数不变量中，第一个可以表示为 C_ρ 的多项式的是 I_{2r+2}。因此，有如下命题：

命题 1. ρ 表示中的 so_{2r} 分裂卡西米尔算子满足

$$I_{2r+2}(\widehat{C}_\rho)=0. \tag{3.8}$$

$\widehat{\ }$恒等式(3.8) 是 C_ρ 的特征恒等式。

注1。严格来说，以上论证并不能直接推出多项式 $I_{2r+2}(C_\rho)$ 的次数具有极小性。命题 1 的这一部分将在第 4 节通过另一种方法证明。

由于根据定义（3.1）可知，对于 $m \geq 1$，$\operatorname{tr} I_{2m} = 0$，因此对 $k = 1, 2, 3, \ldots$ 的恒等式（3.6）依次取迹，即可计算 $\operatorname{tr}(\widehat{C}_\rho^{k+1})$ 的值。特别是，

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \widehat{C}_\rho^2 &= \frac{r(2r-1)}{256(r-1)^2} \operatorname{tr} I_0, & \operatorname{tr} \widehat{C}_\rho^3 &= -\frac{r(2r-1)}{1024(r-1)^2} \operatorname{tr} I_0, \\ \operatorname{tr} \widehat{C}_\rho^4 &= \frac{r(2r-1)(30r^2-63r+34)}{2^{16}(r-1)^4} \operatorname{tr} I_0, & \operatorname{tr} \widehat{C}_\rho^5 &= -\frac{r(2r-1)(34r^2-89r+62)}{2^{17}(r-1)^4} \operatorname{tr} I_0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

由于投影算子（2.12）是 $\widehat{C}_\rho$ 的不变子空间上的投影算子，且它们是 $\widehat{C}_\rho$ 的多项式，因此计算 $\operatorname{tr}(\widehat{C}_\rho^k)$ 即可确定这些投影算子的迹 $\operatorname{tr} \mathrm{P}_{c^\lambda{}_{(2)}}$，它们等于相应子空间的维数。

作为示例，我们给出李代数 so_4、so_6、so_8 和 so_{10} 中算子 C_ρ 的特征恒等式（3.8），以及相应不变子空间的维数：

$$so_4: \quad \begin{gathered} I_6|_{r=2} \sim \widehat{C}_\rho\Big(\widehat{C}_\rho - \frac{1}{8}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{3}{8}\Big) = 0, \\ \dim V_0 = 8, \quad \dim V_{\frac{1}{8}} = 6, \quad \dim V_{-\frac{3}{8}} = 2, \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$so_6: \quad \begin{gathered} I_8|_{r=3} \sim \Big(\widehat{C}_\rho - \frac{1}{32}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho - \frac{3}{32}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{5}{32}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{15}{32}\Big) = 0, \\ \dim V_{\frac{1}{32}} = 30, \quad \dim V_{\frac{3}{32}} = 20, \quad \dim V_{-\frac{5}{32}} = 12, \quad \dim V_{-\frac{15}{32}} = 2. \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$so_8: \quad \begin{gathered} I_{10}|_{r=4} \sim \Big(\widehat{C}_\rho - \frac{1}{12}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho - \frac{1}{24}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{1}{12}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{7}{24}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{7}{12}\Big) = 0, \\ \text{维数 } V_{\frac{1}{12}} = 70, \quad \text{维数 } V_{\frac{1}{24}} = 112, \quad V \text{ 的维数}_{-\frac{1}{12}} = 56, \quad V \text{ 的维数}_{-\frac{7}{24}} = 16, \quad \text{维数 } V_{-\frac{7}{12}} = 2. \end{gathered} \tag{3.12}$$

$$so_{10}: \quad \begin{gathered} I_{12}|_{r=5} \sim \Big(\widehat{C}_\rho - \frac{5}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho - \frac{3}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{3}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{13}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{27}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_\rho + \frac{45}{64}\Big) = 0, \\ \dim V_{\frac{5}{64}} = 252, \quad \dim V_{\frac{3}{64}} = 420, \quad \dim V_{-\frac{3}{64}} = 240, \\ \dim V_{-\frac{13}{64}} = 90, \quad \dim V_{-\frac{27}{64}} = 20, \quad \dim V_{-\frac{45}{64}} = 2. \end{gathered} \tag{3.13}$$

3.2 李代数 so_{2r} 在表示 $\Delta_\pm \otimes \Delta_\pm$ 和 $\Delta_\pm \otimes \Delta_\mp$ 中的分裂卡西米尔算子的特征恒等式

为了推导李代数 so_{2r} 的两个旋量表示[2] 的张量积中分裂卡西米尔算子的特征恒等式，我们借助式 (A.10) 中引入的投影算子 P_ϵ，定义 $\widehat{C}_\rho$ 在表示 $\Delta_\epsilon \otimes \Delta_{\epsilon'}$ 上的限制，$\epsilon,\ \epsilon' = \pm$:

$$\widehat{C}_{\epsilon\epsilon'} := (\mathrm{P}_\epsilon \otimes \mathrm{P}_{\epsilon'}) \widehat{C}_\rho \equiv \mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'} \widehat{C}_\rho, \tag{3.14}$$

其中我们设 $\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'} := \mathrm{P}_\epsilon \otimes \mathrm{P}_{\epsilon'}$。

由于投影算子 P_+ 和 P_- 彼此正交，且在表示 ρ 中在 so_{2r} 的作用下保持不变，因此有 $\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'} \widehat{C}_\rho^k = (\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'} \widehat{C}_\rho)^k = \widehat{C}_{\epsilon\epsilon'}^k$，于是对任意多项式 $J(\widehat{C}_\rho)$，都有 $\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'} J(\widehat{C}_\rho) = J(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon'})$。因此，两边乘以 $\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'}$，得到

$$I_{2r+2}(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon'}) = 0. \tag{3.15}$$

然而，恒等式 (3.15) 并非 $C_{\epsilon\epsilon'}$ 的特征恒等式，因为它的次数不是最低的。事实上，与表示 ρ 的情形相比，多项式 $I_{2k}(C_{\epsilon\epsilon'})$ 满足额外的代数关系。为推导这些关系，我们需要以下引理。

引理1。不变量 I_k 满足

$$(I \otimes \Gamma_{2r+1}) \frac{I_k}{k!} = (-1)^r (\Gamma_{2r+1} \otimes I) \frac{I_{2r-k}}{(2r-k)!}. \tag{3.16}$$

[2] so_{2r} 的正手征性和负手征性的旋量表示分别记为 Δ_+ 和 Δ_-；参见附录 A。

证明。 $\mathcal{C}l_{2r}$ 的基元素 $\Gamma_{[i_1\ldots i_k]}$ 与 Γ_{2r+1} 相乘后满足以下恒等式（例如参见 [38]）：

$$\Gamma_{[i_1\ldots i_k]}\Gamma_{2r+1} = (-i)^r(-1)^{[\frac{k}{2}]}\frac{1}{(2r-k)!}\varepsilon_{i_1\ldots i_k i_{k+1}\ldots i_{2r}}\Gamma^{[i_{k+1}\ldots i_{2r}]}, \tag{3.17}$$

其中，$[\frac{k}{2}]$ 表示 $\frac{k}{2}$ 的整数部分，$\varepsilon_{i_1\ldots i_{2r}}$ 是具有 $\varepsilon_{1,\,2,\,\ldots\ldots,\,2r} = 1$ 的全反对称张量。利用（3.17），可将（3.16）左端改写为

$$\begin{aligned}
(I\otimes\Gamma_{2r+1})\frac{I_k}{k!} &= \frac{1}{k!}\Gamma^{[i_1\ldots i_k]}\otimes\Gamma_{2r+1}\Gamma_{[i_1\ldots i_k]} \\
&= \frac{1}{k!(2r-k)!}(-i)^r(-1)^{[\frac{k}{2}]+k}\varepsilon_{i_1\ldots i_{2r}}\Gamma^{[i_1\ldots i_k]}\otimes\Gamma^{[i_{k+1}\ldots i_{2r}]} \\
&= \frac{1}{k!(2r-k)!}(-i)^r(-1)^{[\frac{k}{2}]+k+k(2r-k)}\varepsilon_{i_{k+1}\ldots i_{2r}i_1\ldots i_k}\Gamma^{[i_1\ldots i_k]}\otimes\Gamma^{[i_{k+1}\ldots i_{2r}]} \\
&= \frac{1}{(2r-k)!}(-1)^{[\frac{k}{2}]+k+k(2r-k)+[\frac{2r-k}{2}]+2r-k}\Gamma_{2r+1}\Gamma_{[i_{k+1}\ldots i_{2r}]}\otimes\Gamma^{[i_{k+1}\ldots i_{2r}]}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

利用恒等式

$$(-1)^{[\frac{k}{2}]+[\frac{2r-k}{2}]} = (-1)^{r+k}, \tag{3.19}$$

即可得到（3.16）。■

由于投影算子 $\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'}$ 由算子 $I\otimes\Gamma_{2r+1}$ 和 $\Gamma_{2r+1}\otimes I$ 构造而成，因此利用引理1可以证明以下结论。

命题2。 多项式 $I_{2k}(C_{\epsilon\epsilon'})$ 满足

$$I_{2r-2k}(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon'}) - \epsilon\epsilon'\frac{(2r-2k)!}{(2k)!}I_{2k}(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon'}) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,2r. \tag{3.20}$$

证明。 对于任意 $k = 0$，1，……，$2r$，考虑以下等式链：

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'}\frac{I_k}{k!} &= \frac{1}{4}\big((I+\epsilon\Gamma_{2r+1})\otimes(I+\epsilon'\Gamma_{2r+1})\big)\frac{I_k}{k!} \\
&= \frac{1}{4k!}(I\otimes I)I_k + \frac{1}{4k!}\epsilon(\Gamma_{2r+1}\otimes I)I_k + \frac{1}{4k!}\epsilon'(I\otimes\Gamma_{2r+1})I_k + \frac{1}{4k!}\epsilon\epsilon'(\Gamma_{2r+1}\otimes\Gamma_{2r+1})I_k \\
&= \frac{(-1)^r}{4(2r-k)!}(\Gamma_{2r+1}\otimes\Gamma_{2r+1})I_{2r-k} + \frac{(-1)^r}{4(2r-k)!}\epsilon(I\otimes\Gamma_{2r+1})I_{2r-k} + \\
&+ \frac{(-1)^r}{4(2r-k)!}\epsilon'(\Gamma_{2r+1}\otimes I)I_{2r-k} + \frac{(-1)^r}{4(2r-k)!}\epsilon\epsilon'(I\otimes I)I_{2r-k} \\
&= (-1)^r\frac{1}{4}\big((\epsilon I+\Gamma_{2r+1})\otimes(\epsilon' I+\Gamma_{2r+1})\big)\frac{I_{2r-k}}{(2r-k)!} = \epsilon\epsilon'(-1)^r\,\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'}\frac{I_{2r-k}}{(2r-k)!}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

这里我们用到了 Γ_{2r+1} 的对合性质（A.9），以及（3.16）中（$I\otimes\Gamma_{2r+1}$）和（$\Gamma_{2r+1}\otimes I$）作用于 I_k 时的乘法规则。然后，在（3.21）中代入 $k\mapsto 2k$，并利用（3.3）和（3.6）将不变量 $\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'}I_{2k}$ 和 $\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'}I_{2r-2k}$ 表示为 $C_{\epsilon\epsilon'}$ 的多项式，即可得到（3.20）。 ■

显然，对于所有 $k = 0$、……、$[\frac{r}{2}]$，（3.20）左边的多项式次数都低于（3.15）中的多项式。因此，很自然地可以假设，$C_{\epsilon\epsilon'}$ 的特征恒等式由（3.20）形式的关系给出，且其次数尽可能低。

命题3。当 r 为偶数时，算子 $C_{\epsilon,\,-\epsilon}$ 和 $C_{\epsilon,\,\epsilon}$、$\epsilon = \pm$ 满足特征恒等式

$$I_r(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}) = 0, \qquad I_{r+2}(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}) - r(r^2-1)(r+2)I_{r-2}(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}) = 0 \tag{3.22}$$

其次数分别为 $\frac{r}{2}$ 和 $\frac{r}{2}+1$；当 r 为奇数时，恒等式为

$$I_{r+1}(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}) + r(r+1)I_{r-1}(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}) = 0, \qquad I_{r+1}(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}) - r(r+1)I_{r-1}(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}) = 0 \tag{3.23}$$

次数为 $\frac{r+1}{2}$。

证明。当 r 和 $\epsilon=-\epsilon'$ 为偶数时，(3.20) 左侧的多项式在 $k=\frac{r}{2}$ 处取得最小次数 $\frac{r}{2}$。将此值代入 (3.20)，得到 (3.22) 中的第一个恒等式。对于 $\epsilon=\epsilon'$，代入 $k=\frac{r}{2}$ 会使 (3.20) 左侧恒等于零。因此，此时的最低次数为 $\frac{r}{2}+1$，在 $k=\frac{r}{2}-1$ 处取得，由此得到 (3.22) 中的第二个恒等式。

对于奇数 r，(3.20) 左端的多项式具有最小次数 $\frac{r+1}{2}$，该次数在 $k=\frac{r-1}{2}$ 处取得，且与 ϵ 和 ϵ' 的取值无关。将 k 的这一取值代入 (3.20)，即得 (3.23)。 ■

注记 2. 与表示 ρ的情形一样，本节给出的论证并不能证明$\widehat{\ }$对于 $C_{\epsilon\epsilon'}$ 不存在次数低于 (3.22) 和 (3.23) 的恒等式。(3.22) 中多项式极小性的论证将在稍后的第 4 节给出。

$\widehat{\ }$作为示例，我们给出算子 $C_{\epsilon\epsilon'}$ 在李代数 so_4、so_6、so_8 和 so_{10} 情形下的特征恒等式 (3.22) 与 (3.23)，以及相应特征子空间的维数：

$$so_4:\quad \begin{array}{ll}\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}=0, & \Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}-\frac{1}{8}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}+\frac{3}{8}\Big)=0,\\ \dim V_0^{\epsilon,-\epsilon}=4, & \dim V_{\frac{1}{8}}^{\epsilon\epsilon}=3,\quad \dim V_{-\frac{3}{8}}^{\epsilon\epsilon}=1,\end{array} \tag{3.24}$$

$$so_6:\quad \begin{array}{ll}\Big(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}-\frac{3}{32}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}+\frac{5}{32}\Big)=0, & \Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}-\frac{1}{32}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}+\frac{15}{32}\Big)=0,\\ \dim V_{\frac{3}{32}}^{\epsilon,-\epsilon}=10,\quad \dim V_{-\frac{5}{32}}^{\epsilon,-\epsilon}=6, & \dim V_{\frac{1}{32}}^{\epsilon\epsilon}=15,\quad \dim V_{-\frac{15}{32}}^{\epsilon\epsilon}=1.\end{array} \tag{3.25}$$

$$so_8:\quad \begin{array}{ll}\Big(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}-\frac{1}{24}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}+\frac{7}{24}\Big)=0, & \Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}-\frac{1}{12}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}+\frac{1}{12}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}+\frac{7}{12}\Big)=0,\\ \dim V_{\frac{1}{24}}^{\epsilon,-\epsilon}=56,\quad \dim V_{-\frac{7}{24}}^{\epsilon,-\epsilon}=8, & \dim V_{\frac{1}{12}}^{\epsilon\epsilon}=35,\quad \dim V_{-\frac{1}{12}}^{\epsilon\epsilon}=28,\quad \dim V_{-\frac{7}{12}}^{\epsilon\epsilon}=1.\end{array} \tag{3.26}$$

$$so_{10}:\quad \begin{array}{ll}\Big(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}-\frac{5}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}+\frac{3}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}+\frac{27}{64}\Big)=0, & \Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}-\frac{3}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}+\frac{13}{64}\Big)\Big(\widehat{C}_{\epsilon\epsilon}+\frac{45}{64}\Big)=0,\\ \dim V_{\frac{5}{64}}^{\epsilon,-\epsilon}=126,\quad \dim V_{-\frac{3}{64}}^{\epsilon,-\epsilon}=120, & \dim V_{\frac{3}{64}}^{\epsilon\epsilon}=210,\quad \dim V_{-\frac{13}{64}}^{\epsilon\epsilon}=45,\\ \dim V_{-\frac{27}{64}}^{\epsilon,-\epsilon}=10, & \dim V_{-\frac{45}{64}}^{\epsilon\epsilon}=1.\end{array} \tag{3.27}$$

4 李代数 so_{2r} 在旋量表示张量积中分裂卡西米尔算子特征恒等式的推导：第二种方法

在本节中，我们使用李代数 so_N 及其表示的性质，相关内容总结于附录中 B.

4.1 李代数 so_{2r}在表示 $\Delta_\pm\otimes\Delta_\pm$ 和 $\Delta_\pm\otimes\Delta_\mp$中的分裂卡西米尔算子特征恒等式

为推导分裂卡西米尔算子的特征恒等式

$$\widehat{C}=\overline{\mathsf{g}}^{i_1i_2,j_1j_2}M_{i_1i_2}\otimes M_{j_1j_2}, \tag{4.1}$$

对于李代数 so_{2r}（其逆嘉当-基灵度量 $\mathsf{g}^{i_1i_2,j_1j_2}$ 见（A.3））在表示$\curvearrowright$ $\curvearrowright\Delta_\epsilon\otimes\Delta_{\epsilon'}\curvearrowright$，$\epsilon,\epsilon'=\pm$中的情形，即对于算子 $C_{\epsilon\epsilon'}:=(\Delta_\epsilon\otimes\Delta_{\epsilon'})C$，我们使用以下结果 [39]（另见 [38]）：

命题 4。对于偶数 r，以下分解成立：

$$\begin{aligned}\Delta_\epsilon\otimes\Delta_{-\epsilon}&=T_1\oplus T_3\oplus\cdots\oplus T_{r-1},\\ \Delta_\epsilon\otimes\Delta_\epsilon&=T_0\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_{r-2}+\begin{cases}T_r^\epsilon, & if\ \ \frac{r}{2}\in2\mathbb{Z},\\ T_r^{-\epsilon}, & if\ \ \frac{r}{2}\in2\mathbb{Z}+1,\end{cases}\end{aligned} \tag{4.2}$$

对于奇数 r:

$$\begin{aligned}\Delta_\epsilon\otimes\Delta_{-\epsilon}&=T_0\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_{r-1},\\ \Delta_\epsilon\otimes\Delta_\epsilon&=T_1\oplus T_3\oplus\cdots\oplus T_{r-2}+\begin{cases}T_r^\epsilon, & if\ \ \frac{r-1}{2}\in2\mathbb{Z},\\ T_r^{-\epsilon}, & if\ \ \frac{r-1}{2}\in2\mathbb{Z}+1,\end{cases}\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 T_0 表示单态表示。[3]

根据命题 4，可得如下结果。

命题 5. 对于偶数 r，算子 $C_{\epsilon,-\epsilon}$ 和 $C_{\epsilon,\epsilon}$，$\epsilon=\pm$ 满足特征恒等式

$$\prod_{m=1}^{\frac{r}{2}}\left(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}-c_{(2),2m-1}\right)=0,\qquad\qquad \prod_{m=0}^{\frac{r}{2}}\left(\widehat{C}_{\epsilon,\epsilon}-c_{(2),2m}\right)=0, \tag{4.4}$$

而对于奇数 r:

$$\prod_{m=0}^{\frac{r-1}{2}}\left(\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}-c_{(2),2m}\right)=0,\qquad\qquad \prod_{m=1}^{\frac{r+1}{2}}\left(\widehat{C}_{\epsilon,\epsilon}-c_{(2),2m-1}\right)=0, \tag{4.5}$$

其中

$$c_{(2),k}:=\frac{2k(2r-k)-r(2r-1)}{16(r-1)}. \tag{4.6}$$

证明. 考虑偶数 r 以及算子$C_{\epsilon,\epsilon}$ 的情形（其余情形的证明类似）。命题 4 表明，表示 $\Delta_\epsilon\otimes\Delta_\epsilon$，$\epsilon=\pm$ 的空间可分解为二次卡西米尔算子 C_2 在 so_{2r} 中的特征子空间，其特征值由式 (B.4) 给出，其中 k 取遍从 0 到 $r-2$的所有偶整数，此外还有一个由式 (B.7) 给出的额外特征值。

利用关系式 (2.10)（它联系了 C 和 C_2 在 so_{2r} 的不可约表示中的特征值），并考虑表示$\frown\Delta_\epsilon$中二次卡西米尔算子的特征值 (A.11)，可得表示 $\Delta_\epsilon\otimes\Delta_\epsilon$ 中 C 的谱表达式 (4.6)，其中 k 取遍从 0 到 $2r$的所有偶整数。由此得到式 (4.4) 中的第二个恒等式。

■

算子 $C_{\epsilon,\epsilon'}$, $\epsilon,\epsilon'=\pm$的特征恒等式 (4.4) 和 (4.5)，可借助公式 (2.12) 构造出投影算子 $\mathrm{P}_k^{\epsilon\epsilon'}\equiv\mathrm{P}^{\epsilon\epsilon'}_{c_{(2)},k}$ 的显式表达式。这些投影算子投向特征值为 $c_{(2),k}$ 的特征子空间，特征值如 (4.6) 所示。

应当强调，对于固定的 ϵ 和 ϵ'，并非 k 的所有取值都会出现在 $C_{\epsilon,\epsilon'}$的谱中，因为这些取值受到分解 (4.2) 和 (4.3) 的限制。对于未出现在这些分解中的 k 值，相应的投影算子 $\mathrm{P}_k^{\epsilon\,\epsilon'}$,恒等于零。

因此，对于偶数 r，非平凡投影算子为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^{\epsilon,-\epsilon}_{2m-1}&=\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq m}}^{\frac{r}{2}}\frac{\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}-c_{(2),2\ell-1}}{c_{(2),2m-1}-c_{(2),2\ell-1}}, &&\text{for } 1\le m\le\frac{r}{2},\\ \mathrm{P}^{\epsilon,\epsilon}_{2m}&=\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq m}}^{\frac{r}{2}}\frac{\widehat{C}_{\epsilon,\epsilon}-c_{(2),2\ell}}{c_{(2),2m}-c_{(2),2\ell}}, &&\text{for } 0\le m\le\frac{r}{2},\end{aligned} \tag{4.7}$$

对于奇数 r，则有:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^{\epsilon,-\epsilon}_{2m}&=\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq m}}^{\frac{r-1}{2}}\frac{\widehat{C}_{\epsilon,-\epsilon}-c_{(2),2\ell}}{c_{(2),2m}-c_{(2),2\ell}}, &&\text{for } 0\le m\le\frac{r-1}{2},\\ \mathrm{P}^{\epsilon,\epsilon}_{2m-1}&=\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq m}}^{\frac{r+1}{2}}\frac{\widehat{C}_{\epsilon,\epsilon}-c_{(2),2\ell-1}}{c_{(2),2m-1}-c_{(2),2\ell-1}}, &&\text{for } 1\le m\le\frac{r+1}{2}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

投影算子的迹（4.7）和（4.8）由以下命题给出。

[3]在 [38] 中，这些 分解给出了形如 $\Delta_\epsilon\otimes\Delta_{\epsilon'}$ 的表示。不过，它们可以改写为 (4.2) 和 (4.3) b y 利用 (A.12) 中给出的 Δ_ϵ 与 $\Delta_{\epsilon'}$ 之间的同构。

命题 6。对于偶数 r:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \mathrm{P}_{2m-1}^{\epsilon,-\epsilon} &= \frac{(2r)!}{(2m-1)!(2r-2m+1)!}, \qquad for\ 1 \le m \le \frac{r}{2}, \\
\operatorname{tr} \mathrm{P}_{2m}^{\epsilon,\epsilon} &= \frac{(2r)!}{(2m)!(2r-2m)!}, \qquad for\ 0 \le m \le \frac{r}{2}-1, \\
\operatorname{tr} \mathrm{P}_{r}^{\epsilon,\epsilon} &= \frac{(2r)!}{2(r!)^2},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

对于奇数 r:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \mathrm{P}_{2m}^{\epsilon,-\epsilon} &= \frac{(2r)!}{(2m)!(2r-2m)!}, \qquad for\ 0 \le m \le \frac{r-1}{2}, \\
\operatorname{tr} \mathrm{P}_{2m-1}^{\epsilon,\epsilon} &= \frac{(2r)!}{(2m-1)!(2r-2m+1)!}, \qquad for\ 1 \le m \le \frac{r-1}{2}, \\
\operatorname{tr} \mathrm{P}_{r}^{\epsilon,\epsilon} &= \frac{(2r)!}{2(r!)^2}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

证明。 与命题 5 的证明类似，我们只考虑 r 为偶数且投影算子为 $\mathrm{P}_{2m}^{\epsilon\,\epsilon}$ 的情形；其余情形可类似处理。

投影算子 $\mathrm{P}_{2m}^{\epsilon\,\epsilon}$ 为迹等于特征子空间的维数，该子空间对应于 T_{2m} 的表示空间重合，其维数由 (B.3) 在 $k = 2m$ 时给出。对于 $m = \frac{r}{2}$，它与 $T_r^{\pm}$ 的表示空间重合，其维数由 (B.6) 给出。 ∎

现在考虑算子 $C_\rho = \sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm} C_{\epsilon,\epsilon'}$。对于固定的特征值 $c_{(2),k}$，其特征子空间是算子 $C_{\epsilon,\epsilon'}$，$\epsilon, \epsilon' = \pm$ 对应同一特征值的特征子空间的直和。特征恒等式 (4.4) 和 (4.5) 表明，算子 C_{++} 与 C_{--} 以及 C_{+-} 与 C_{-+} 的谱分别相同。因此，它们对应给定特征值的特征子空间自然地合并，并由以下算子投影到

$$\mathrm{P}_k^S := \mathrm{P}_k^{++} + \mathrm{P}_k^{--}, \qquad \mathrm{P}_k^{AS} := \mathrm{P}_k^{+-} + \mathrm{P}_k^{-+}, \tag{4.11}$$

其中 $\mathrm{P}_k^{\epsilon\,\epsilon'}$，在（4.7）和（4.8）中定义。显然，这些投影算子的像属于表示空间

$$\Delta^S := (\Delta_+ \otimes \Delta_+) + (\Delta_- \otimes \Delta_-), \qquad \Delta^{AS} := (\Delta_+ \otimes \Delta_-) + (\Delta_- \otimes \Delta_+), \tag{4.12}$$

分别为。

结合命题 5 和命题 6，可得如下结论。

命题 7。 算子 C_ρ 满足特征恒等式

$$\prod_{k=0}^{r} \left(\widehat{C}_\rho - c_{(2),k}\right) = 0, \tag{4.13}$$

其中 $c_{(2),\,k}$ 定义于（4.6）中。

投影算子 $\mathrm{P}_k \equiv \mathrm{P}_{c_{(2),\,k}}$ 到 C_ρ 的特征子空间（其特征值为 $c_{(2),\,k}$）在偶数 r 时表示为

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{P}_k^S \quad for \quad k \in 2\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{P}_k = \mathrm{P}_k^{AS} \quad for \quad k \in 2\mathbb{Z}+1, \tag{4.14}$$

而对于奇数 r，则为

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{P}_k^{AS} \quad for \quad k \in 2\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{P}_k = \mathrm{P}_k^S \quad for \quad k \in 2\mathbb{Z}+1, \tag{4.15}$$

其中 P_k^S 和 P_k^{AS} 定义于 (4.11)。

这些投影算子的迹为

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \mathrm{P}_k &= 2\frac{(2r)!}{k!(2r-k)!} \qquad for \quad 0 \le k \le r-1, \\
\operatorname{tr} \mathrm{P}_r &= \frac{(2r)!}{(r!)^2}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

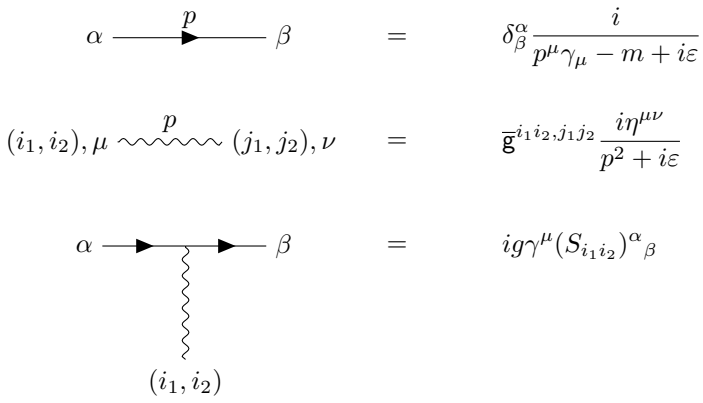

图 2：拉格朗日量 (5.1) 对应理论的费曼规则。若表示 Δ_+ 和 Δ_+ 等价，则应将费米子线视为无向线。

注 3. 由命题 7 和投影算子 P_k^S 及 P_k^{AS}的定义 (4.11) 可知，对于 $k = 0, \dots, r-1$，投影算子 P_k的像与 $T_k \oplus T_k$的表示空间重合，而投影算子 P_r的像则是 $T_r = T_r^+ \oplus T_r^-$的表示空间。

此外，当 r 为偶数时，P_{2m} 和 P_{2m-1} 的像分别属于 Δ^S 和 Δ^{AS}的表示空间；而当 r 为奇数时，它们分别属于 Δ^{AS} 和 Δ^S的表示空间。

注 4. 命题 5 和命题 7 使我们得以完成命题 1 和命题 3 的证明。由于关系式 (4.4)、(4.5) 和 (4.13) 是相应算子的特征恒等式，它们的次数是最小的。这些次数与恒等式 (3.22)、(3.23) 和 (3.8) 的次数相同，这意味着 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$后者也是算子 $C_{\epsilon\epsilon'}$ 和 C_ρ的特征恒等式。

5 规范群$\mathrm{Spin}(2r)$的旋量表示费米子规范理论中的梯形费曼图色因子

为说明分裂卡西米尔算子在计算非阿贝尔规范理论中费曼图色因子时的应用，我们考虑规范群为 Spin($2r$) 的杨–米尔斯理论，其中费米子场 ψ^α 和 ψ_α,[4] 变换于其旋量表示 Δ_+。该理论的拉格朗日量为（例如参见 [40]）

$$L = \frac{1}{4}\mathsf{g}_{i_1 i_2, j_1 j_2} F^{\mu\nu, i_1 i_2} F_{\mu\nu}^{j_1 j_2} + \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \tag{5.1}$$

其中，协变导数 D_μ 和场强张量 $F_{\mu\nu}$ 定义为

$$D_\mu = \partial_\mu + g A_\mu^{ij} \Delta_+(M_{ij}), \tag{5.2}$$

$$F_{\mu\nu}^{i_1 i_2} = \partial_\mu A_\nu^{i_1 i_2} - \partial_\nu A_\mu^{i_1 i_2} + X^{i_1 i_2}{}_{j_1 j_2, k_1 k_2} A_\mu^{j_1 j_2} A_\nu^{k_1 k_2}. \tag{5.3}$$

这里，g 为耦合常数，$X^{i_1 i_2}{}_{j_1 j_2, k_1 k_2}$ 和 $\mathsf{g}_{i_1 i_2, j_1 j_2}$ 分别表示李代数 so_{2r}的结构常数（A.2）和嘉当–基林度量（A.3），反厄米算子[5] $\Delta_+(M_{ij})$构成其在表示 Δ_+中的一组基。时空指标通过闵可夫斯基度量 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$升降。

下文中，我们将采用费曼规范。相应的费曼规则（不包括三胶子和四胶子顶点）如图 2 所示。

[4]下文中，旋量指标 $\alpha, \beta, \dots$ 指的是规范群 Spin($2r$)，而非时空对称性群。[5]值得注意的是，在物理学文献中，规范群李代数的基元素通常取为厄米的，而非反厄米的。在这种情况下，(5.2) 中的第二项要乘以虚数单位。

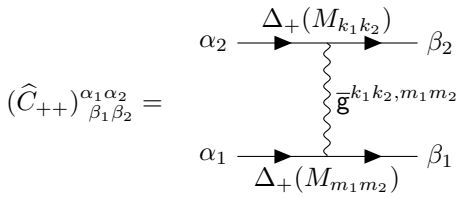

图 3：算子 $\widehat{C}_{++}$ 的图形解释。对于偶数 r，应将费米子线视为无向线（参见同构 (A.12)）。

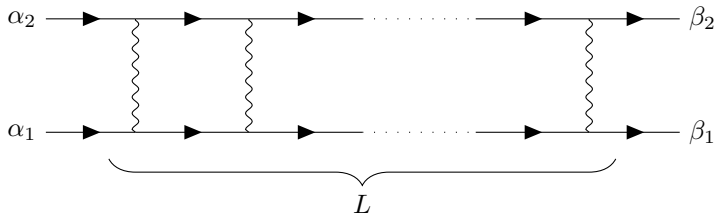

图 4：通过描述胶子交换介导的费米子相互作用的费曼图，对算子 $\widehat{C}^L_{++}$ 作图示解释。

注 5. 拉格朗日量 (5.1) 中规范场动能项前的正号，是因为我们采用了负定嘉当–基林度量 $\mathsf{g}_{i_1i_2,j_1j_2}$；这种度量便于说明分裂卡西米尔算子在计算色因子时所起的作用。

通常，拉格朗日量使用重标度度规 $\mathsf{g}'_{i_1i_2,j_1j_2} := T_F\mathsf{g}_{i_1i_2,j_1j_2}$来书写，其中 T_F 是一个常数。在费曼规则中将 $\mathsf{g}_{i_1i_2,j_1j_2} \mapsto$ 替换为 $\mathsf{g}'_{i_1i_2,j_1j_2}$ 后，胶子传播子的色因子除以 T_F，而三胶子和四胶子顶点的色因子则乘以 T_F。

因此，在度量为 $\mathsf{g}'_{i_1i_2,j_1j_2}$ 的理论中，任意费曼图总系数中正确的幂 k，可通过计数度量为 $\mathsf{g}_{i_1i_2,j_1j_2}$ 的理论中相应图的胶子传播子数目 $n_{\rm pr}$ 以及三胶子和四胶子顶点的数目 $n_{3,4}$ 来确定：$k = n_{3,4} - n_{\rm pr}$。

为说明如何将分裂卡西米尔算子 (2.6) 应用于色因子的计算，我们考虑正手征旋量表示张量积中算子 $C_{++} := (\Delta_+ \otimes \Delta_+)C$ 的分量 $(C_{++})^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\beta_1\beta_2}$：

$$\widehat{C}_{++} = \bar{\mathsf{g}}^{k_1k_2,m_1m_2}\Delta_+(M_{k_1k_2})^{\alpha_1}{}_{\beta_1} \otimes \Delta_+(M_{m_1m_2})^{\alpha_2}{}_{\beta_2}. \tag{5.4}$$

这些分量与图 3 所示图的色因子相同。因此，$\widehat{C}^L_{++}$ 的分量 $(\widehat{C}^L_{++})^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\beta_1\beta_2}$ 与图 4 所示梯图的色因子相同，该图描述了费米子通过交换 L 个胶子发生的相互作用。

为计算它们，我们使用算子的特征恒等式 (4.4) 和 (4.5) 的右端，并结合式 (2.14) 将 $\widehat{C}_{++}$ 的任意次幂 L 展开为投影算子 P^{++}_k（投影到其不变子空间上）之和。因此，我们得到：

$$(\widehat{C}^L_{++})^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\beta_1\beta_2} = \sum_{m=0}^{\frac{r}{2}} c^L_{(2),2m}(\mathrm{P}^{++}_{2m})^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\beta_1\beta_2} \qquad \text{for even } r, \tag{5.5}$$

$$(\widehat{C}^L_{++})^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\beta_1\beta_2} = \sum_{m=1}^{\frac{r+1}{2}} c^L_{(2),2m-1}(\mathrm{P}^{++}_{2m-1})^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\beta_1\beta_2} \qquad \text{for odd } r, \tag{5.6}$$

其中，数值 $c_{(2),\,k}$ 定义于式 (4.6) 中。

一种可能的方法是按图 5 所示闭合图 4 中的图，从而得到一个真空图。色因子该图与迹 $(\widehat{C}^L_{++})^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\alpha_1\alpha_2} \equiv \mathrm{tr}\,\widehat{C}^L_{++}$ 相同，其计算使用 ng

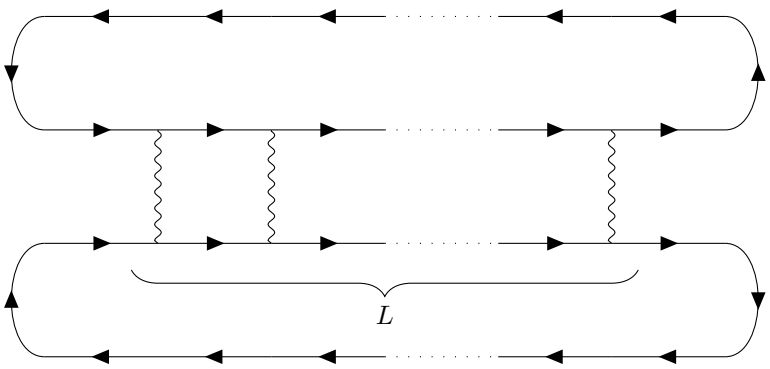

图 5：将图 4 中的图闭合后得到的真空费曼图。

投影算子 P_k^{++} 的迹的表达式 (4.9) 和 (4.10)：

$$\operatorname{tr}\widehat{C}^L_{++} = \sum_{m=0}^{\frac{r}{2}-1} c^L_{(2),2m}\frac{(2r)!}{(2m)!(2r-2m)!} + c^L_{(2),r}\frac{(2r)!}{2(r!)^2} \qquad \text{for even} \tag{5.7}$$

$$\operatorname{tr}\widehat{C}^L_{++} = \sum_{m=1}^{\frac{r-1}{2}} c^L_{(2),2m-1}\frac{(2r)!}{(2m-1)!(2r-2m+1)!} + c^L_{(2),r}\frac{(2r)!}{2(r!)^2} \qquad \text{for odd } r, \tag{5.8}$$

其中，与之前一样，系数 $c_{(2),k}$ 定义于 (4.6)。

图 4 所示的费曼图也可以通过连接两条上方的外部线（例如）进行部分闭合。所得图形如图 6 所示。其色因子由算子 $\widehat{C}^L_{++}$ 的偏迹 $(\widehat{C}^L_{++})^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\beta_1\alpha_2} \equiv (\mathrm{tr}_2\,\widehat{C}^L_{++})^{\alpha_1}{}_{\beta_1}$ 给出，其中 tr_2 表示对表示空间 $\Delta_+\otimes\Delta_+$ 的第二个张量分量取迹。

要计算这个色因子，只需确定辅助偏迹 $\mathrm{tr}_2\mathrm{P}_k^{++}$。由于这些偏迹是在不可约表示 Δ_+ 的空间上作用的不变算子，因此每个偏迹都与恒等算子 I_{Δ_+} 成正比：

$$\mathrm{tr}_2\,\mathrm{P}_k^{++} = a_k^{++} I_{\Delta_+}, \tag{5.9}$$

其中系数 a_k^{++} 有待确定。对等式两边取全迹，得到

$$\operatorname{tr}\mathrm{P}_k^{++} = a_k^{++}\operatorname{tr} I_{\Delta_+} \qquad \Longrightarrow \qquad a_k^{++} = \frac{\operatorname{tr}\mathrm{P}_k^{++}}{\operatorname{tr} I_{\Delta_+}}. \tag{5.10}$$

利用表达式 $\mathrm{tr}\mathrm{P}_k^{++}$ 的表达式 (4.7) 和 (4.8)，以及 $\mathrm{tr}\ I_{\Delta_+} = \dim\ \Delta_+ = 2^{r-1}$，最终得到 in

$$\mathrm{tr}_2\,\widehat{C}^L_{++} = \sum_{m=0}^{\frac{r}{2}-1} c^L_{(2),2m}\frac{(2r)!}{2^{r-1}(2m)!(2r-2m)!} I_{\Delta_+} + c^L_{(2),r}\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2} I_{\Delta_+} \qquad \text{对于偶数 } r, \tag{5.11}$$

$$\mathrm{tr}_2\,\widehat{C}^L_{++} = \sum_{m=1}^{\frac{r-1}{2}} c^L_{(2),2m-1}\frac{(2r)!}{2^{r-1}(2m-1)!(2r-2m+1)!} I_{\Delta_+} + c^L_{(2),r}\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2} I_{\Delta_+} \qquad \text{对于奇数 } r. \tag{5.12}$$

6 在旋量表示中关于 so_{2r} 作用保持不变的杨–巴克斯特方程的解

在 [41, 42, 43] 中证明了该算子

$$\hat{R}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\mathsf{R}}_k(u)}{k!} I_k, \tag{6.1}$$

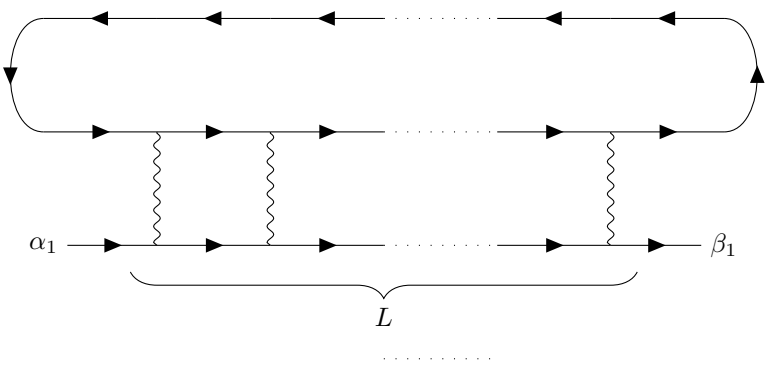

图 6：将图 4 所示的图闭合后得到的真空费曼图。

作用于 so_{2r} 的表示 $\rho\otimes\rho$空间 $V_\rho\otimes V_\rho$ 上，其中 $\rho=\Delta_+ + \Delta_-$ 是旋量表示，并满足编织形式的量子杨–巴克斯特方程

$$\hat{R}_{12}(u)\hat{R}_{23}(u+v)\hat{R}_{12}(v)=\hat{R}_{23}(v)\hat{R}_{12}(u+v)\hat{R}_{23}(u), \tag{6.2}$$

ˆ 若 (6.1) 中的系数 $\mathsf{R}_k(u)$ 满足

$$\hat{\mathsf{R}}_{k+2}(u)=\frac{k+u}{k+2-2r-u}\hat{\mathsf{R}}_k(u). \tag{6.3}$$

在 (6.2) 的算子 ˆ $R_{ab}(u)$ 中，指标 a 和 b 标记了 ˆ$R(u)$ 非平凡作用的张量因子；例如，ˆ ˆ -$R_{12}(u):=R(u)\otimes I$。

ˆ 显然，系数 $\mathsf{R}_k(u)$ 的关系式 (6.3) 分为两个相互独立的系列：一个对应偶数 k，另一个对应奇数 k。它们的一般解可写成如下形式 [41, 42, 43][6]

$$\hat{\mathsf{R}}_{2k}(u)=A(u)(-1)^k\frac{\Gamma(\frac{u}{2}+k)\Gamma(\frac{u}{2}+r-k)}{\Gamma(\frac{u}{2})\Gamma(\frac{u}{2})},\quad \hat{\mathsf{R}}_{2k+1}(u)=B(u)(-1)^k\frac{\Gamma(\frac{u+1}{2}+k)\Gamma(\frac{u-1}{2}+r-k)}{2\Gamma(\frac{u+1}{2})\Gamma(\frac{u+1}{2})}, \tag{6.4}$$

其中， $A(u)$ 和 $B(u)$ 是谱参数 u 的任意函数。因此，(6.1) 中 (6.2) 的解自然分解为偶部和奇部[7]:

$$\hat{R}(u)=\hat{R}^S(u)+\hat{R}^{AS}(u),\qquad \hat{R}^S(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathsf{R}}_{2k}(u)}{(2k)!}I_{2k},\qquad \hat{R}^{AS}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathsf{R}}_{2k+1}(u)}{(2k+1)!}I_{2k+1}. \tag{6.5}$$

为阐明算子 ˆ$R^S(u)$ 和 ˆ$R^{AS}(u)$ 的含义，我们引入投影算子

$$\mathrm{P}^S:=\mathrm{P}_{++}+\mathrm{P}_{--}=\frac{1}{2}(I\otimes I+\Gamma_{2r+1}\otimes\Gamma_{2r+1}), \tag{6.6}$$

$$\mathrm{P}^{AS}:=\mathrm{P}_{+-}+\mathrm{P}_{-+}=\frac{1}{2}(I\otimes I-\Gamma_{2r+1}\otimes\Gamma_{2r+1}) \tag{6.7}$$

从表示 $\rho\otimes\rho=(\Delta_+ + \Delta_-)\otimes(\Delta_+ + \Delta_-)$ 到其在 (4.12) 中定义的子表示 Δ^S和 Δ^{AS}。回忆一下，对于 ϵ, $\epsilon'=\pm$，$\mathrm{P}_{\epsilon\epsilon'}:=\mathrm{P}_\epsilon\otimes\mathrm{P}_{\epsilon'}$。其中 P_ϵ 和 $\mathrm{P}_{\epsilon'}$ 在 (A.10) 中定义。容易验证

$$\mathrm{P}^S\,\hat{R}(u)=\hat{R}^S(u)=\hat{R}(u)\,\mathrm{P}^S,\qquad \mathrm{P}^{AS}\,\hat{R}(u)=\hat{R}^{AS}(u)=\hat{R}(u)\,\mathrm{P}^{AS}. \tag{6.8}$$

因此，算子 ˆ$R(u)$ 的偶部 ˆ$R^S(u)$ 作用于 Δ^S 的表示空间，而奇部 ˆ$R^{AS}(u)$ 作用于 Δ^{AS} 的表示空间。

方程（6.2）的解（6.1）是在 [41] 通过依次求解一系列较简单的方程而得到的，这些方程称为 RLL 关系。我们构造了作用于空间 $V_f\otimes V_f$、 $V_\rho\otimes V_f$ 和 $V_\rho\otimes V_\rho$ 上的 R-算子，其中 V_f 表示 so_{2r}的定义表示空间。不过，这种求解方程（6.2）的方法相当繁琐，且涉及大量计算困难。本研究的最后一部分

[6]在 [43] 中得到的解与 (6.4) 相差一个整体因子。[7]在 [42], 中，(6.1) 中算子的偶部和奇部分别记为 $R^+(u)$ 和 $R^-(u)$。

致力于通过 [22]提出的另一种方法推导该解的偶部 $R^S(u)$（另见 [36], 第 3.13 节； [34], 中则运用该方法，为由 Freudenthal–Tits 魔方产生的例外李代数构造了 R-矩阵）。严格来说，这种方法仅适用于构造作用于不可约表示张量平方上的对称 R-矩阵。不过，将其推广到表示 Δ^S 的情形并不困难。表示 Δ^{AS} 的情形则更为复杂，因此本文不予讨论。

6.1 基于卡西米尔算子性质求解杨–巴克斯特方程的方法

在本小节中，我们考虑单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一般情形及其作用于空间 V_T上的不可约表示T 。为表述上述方法，我们使用杨–巴克斯特方程的一种不同于（6.2）的形式：

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u). \tag{6.9}$$

这里， R（u）： $V_T\otimes V_T \to V_T\otimes V_T$；与之前一样，算子 R_{ab}（u）的指标 a、 b标记了 R（u）在其上非平凡作用的张量因子。方程（6.2）和（6.9）通过代换 $\hat{R}$（u） $= PR$（u）相关联，其中 P： $V_T \otimes V_T \to V_T \otimes V_T$ 表示置换算子。

我们假设 $T\otimes T$分解为不可约分量的分解 $T\otimes T = \sum \lambda T_\lambda$ 具有重数自由。因此，任意 $\mathfrak{g}$-不变算子 $R(u)$： $V_T \otimes V_T \to V_T \otimes V_T$ 可以写成如下形式

$$R(u) = \sum_{T_\lambda \subseteq T\otimes T} \tau_\lambda(u)\, \mathrm{P}_\lambda, \tag{6.10}$$

其中，P_λ 是从 $V_T \otimes V_T$ 到子空间 V_λ 的两两正交投影算子，对应于表示 T_λ； $\tau_\lambda(u)$ 是标量函数。

命题 8 ([22, 36])。 令 $R(u)$ 为式 (6.10) 中给出的算子，它是酉的，

$$R_{12}(u)R_{21}(-u) = \mathbf{1} \equiv I \otimes I, \tag{6.11}$$

且是对称的，

$$R_{12}(u) = R_{21}(u), \tag{6.12}$$

其中 $R_{21}(\pm u) := PR_{12}(\pm u)P$，并设 $R(u)$ 是杨–巴克斯特方程 (6.9)的一个解。令λ 和 κ 为表示 $T_\lambda, T_\kappa \subseteq T\otimes T$ 的最高权，且存在 $X_A \in \mathfrak{g}$ 使得

$$P_\lambda(I \otimes T(X_A))P_\kappa \neq 0. \tag{6.13}$$

那么，函数 $\tau_\lambda(u)$ 和 $\tau_\kappa(u)$ 满足

$$\frac{\tau_\lambda(u)}{\tau_\kappa(u)} = \frac{u + \frac{1}{4}(c_2^\lambda - c_2^\kappa)}{u - \frac{1}{4}(c_2^\lambda - c_2^\kappa)}, \tag{6.14}$$

其中，c_2^λ 和 c_2^κ 分别表示二次卡西米尔算子 C_2 在表示 T_λ 和T_κ中的特征值。

注 6. 等式（6.14）右边分子和分母中的系数$1\ 4$ 源于这样一个事实：在此处所述的方法中，寻求（6.9）的解时采用如下形式：

$$R(u) = \mathbf{1} + \frac{\widehat{C}_{T\cdot T}}{u} + O\Big(\frac{1}{u^2}\Big), \tag{6.15}$$

其中 $\widehat{C}_{T\cdot T}$是 $\mathfrak{g}$在表示 $T\otimes T$中的分裂卡西米尔算子 (2.6)。这一选择固定了将谱参数乘以常数进行缩放的自由度。作出设定 (6.15) 的依据是，其首项在 $u \to \infty$ 时是准经典杨–巴克斯特方程的解 $r(u) := \frac{C}{u}$

$$[r_{12}(u), r_{13}(u+v)] + [r_{13}(u+v), r_{23}(v)] + [r_{12}(u), r_{23}(v)] = 0. \tag{6.16}$$

注 7。严格来说，关系式 (6.14) 是算子 (6.10) 满足杨–巴克斯特方程 (6.9) 的必要条件，但并非充分条件。尽管如此，在许多具体情形中，这些关系式的解确实能保证算子 (6.10) 满足 (6.9)（例如，参见 [36], 第 3.13 节）。

下面我们更详细地讨论条件 (6.13)。由于 $V_\lambda \subseteq V_T \otimes V_T$ 是一个不变子空间，因此对于任意 $X_A \in \mathfrak{g}$，都有 $(I \otimes T(X_A) + T(X_A) \otimes I) \cdot V_\lambda \subseteq V_\lambda$。因此，对于正交投影算子 P_κ 和 P_λ，我们得到

$$\mathrm{P}_\lambda (I \otimes T(X_A)) \, \mathrm{P}_\kappa = \frac{1}{2} \, \mathrm{P}_\lambda \big(I \otimes T(X_A) - T(X_A) \otimes I \big) \, \mathrm{P}_\kappa \,. \tag{6.17}$$

算子 $I \otimes T(X_A) - T(X_A) \otimes I$ 可解释为代数 $\mathfrak{g}$ 的一个张量算子，它按伴随表示变换。根据维格纳–埃卡特定理，矩阵 (6.17) 与连接 V_λ 的一组基和 $V_{\mathsf{ad}} \otimes V_\kappa$ 的一组基的克莱布施–戈尔丹系数成正比。因此，要使条件 (6.13) 成立，必须有

$$T_\lambda \subseteq \mathsf{ad} \otimes T_\kappa . \tag{6.18}$$

此外，请注意，不变投影算子 $\mathrm{P}_T^\pm := \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm P)$ 将表示 $T \otimes T$ 分解为对称部分和反对称部分。因此，分解 $T \otimes T = \sum_\lambda T_\lambda$ 中出现的每个不可约表示 T_λ 要么是对称的，即 $\mathrm{P}_T^+ \mathrm{P}_\lambda := \mathrm{P}_\lambda^+ \neq 0$；要么是反对称的，即 $\mathrm{P}_T^- \mathrm{P}_\lambda := \mathrm{P}_\lambda^- \neq 0$。由此立即可得，对于所有 λ 和 κ，$\mathrm{P}_\lambda^\pm \big(I \otimes T(X_A) - T(X_A) \otimes I \big) \mathrm{P}_\kappa^\pm = \mathrm{P}_\lambda^\pm (I \otimes T(X_A)) \, \mathrm{P}_\kappa^\pm = 0$。因此，要使条件 (6.13) 成立，表示 T_λ 和 T_κ 必须具有相反的对称性：

$$V_\lambda \subseteq \mathrm{P}_T^+ \, V_T^{\otimes 2} \quad \text{and} \quad V_\kappa \subseteq \mathrm{P}_T^- \, V_T^{\otimes 2} \qquad \text{or} \qquad V_\lambda \subseteq \mathrm{P}_T^- \, V_T^{\otimes 2} \quad \text{and} \quad V_\kappa \subseteq \mathrm{P}_T^+ \, V_T^{\otimes 2} . \tag{6.19}$$

现在我们着手将上述方法应用于构造杨–巴克斯特方程 (6.9) 的解，这些解在 $\epsilon = \pm$ 的表示 $\Delta_\epsilon \otimes \Delta_\epsilon$ 中在 so_{2r} 的作用下是不变的。

6.2 在表示 $\Delta_\pm \otimes \Delta_\pm$ 中在李代数 so_{2r} 作用下不变的杨–巴克斯特方程的解

根据命题 4 和 8，我们以如下形式寻求杨–巴克斯特方程 (6.9) 在 $\epsilon = \pm$ 的表示 $\Delta_\epsilon \otimes \Delta_\epsilon$ 中的解

$$\begin{aligned} R^{\epsilon\epsilon}(u) &= \tau_0(u) \, \mathrm{P}_0^{\epsilon\epsilon} + \tau_2(u) \, \mathrm{P}_2^{\epsilon\epsilon} + \cdots + \tau_r(u) \, \mathrm{P}_r^{\epsilon\epsilon} \qquad \text{for even } r, \\ R^{\epsilon\epsilon}(u) &= \tau_1(u) \, \mathrm{P}_1^{\epsilon\epsilon} + \tau_3(u) \, \mathrm{P}_3^{\epsilon\epsilon} + \cdots + \tau_r(u) \, \mathrm{P}_r^{\epsilon\epsilon} \qquad \text{for odd } r, \end{aligned} \tag{6.20}$$

其中投影算子 $\mathrm{P}_k^{\epsilon\epsilon}$ 由 (4.7) 和 (4.8) 定义。回想一下，对于 $m = 0, \dots, r-1$，投影算子 $\mathrm{P}_m^{\epsilon\epsilon}$ 的像是 T_m 的表示空间，而对于 $m = r$，它分别在 $[\frac{r}{2}]$ 为偶数和奇数时是自对偶表示 T_r^+ 或反自对偶表示 T_r^- 的表示空间（见命题 4）。下面将会清楚，对应于 $R^{++}(u)$ 和 $R^{--}(u)$ 的函数 $\tau_k(u)$ 是相同的；因此，我们不为它们引入单独的记号。

如命题 8 所指出的，为了写出关于 $\tau_k(u)$和 $\tau_m(u)$的方程（6.14），只需考虑满足条件（6.18）和（6.19）的配对 λ_k和 λ_m（此处 λ_r表示 λ_r^+或 λ_r^-，具体取决于$[\frac{r}{2}]$的奇偶性，见命题 4）。

更详细地考察其中的第一个。众所周知（例如，见 [38]），so_{2r} 的伴随表示由图 7 左侧所示的杨图描述，而表示 T_m 由图 7 右侧所示的杨图描述（在 $m = r$的情形下，该杨图对应于自对偶表示与反自对偶表示的直和 $T_r = T_r^+ \oplus T_r^-$）。张量积 $\mathsf{ad} \otimes T_m$ 分解为不可约分量后，以杨图表示且不计重数的结果见图 8。由此可知，T_k 只有在$k = m$，$m \pm 2$时才会出现在 $\mathsf{ad} \otimes T_m$ 中。因此，只需对满足 $m = k + 2$的比值 $\tau_m(u) / \tau_k(u)$写出方程（6.14），其中$k = 0, \dots, r-2$。

现在让我们更详细地考察条件 (6.19)。命题 4 表明，对于每个表示$T_k \subseteq \Delta_\epsilon \otimes \Delta_\epsilon$，恰好存在一个（相差一个整体常数因子）$\mathfrak{g}$-不变量映射 $V_{\Delta_\epsilon} \otimes V_{\Delta_\epsilon} \to V_k$。为构造此映射，我们引入旋量的狄拉克共轭[8]

$$\psi \mapsto \widetilde{\psi} := \psi^T \mathbf{C}^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi^\alpha \mapsto \widetilde{\psi}_\alpha = \psi^\beta (\mathbf{C}^{-1})_{\beta\alpha}, \tag{6.21}$$

[8]这里的指标 α 和 β 指的是表示 ρ，而不仅仅是它的子表示 Δ_+，如第 5 节所示。

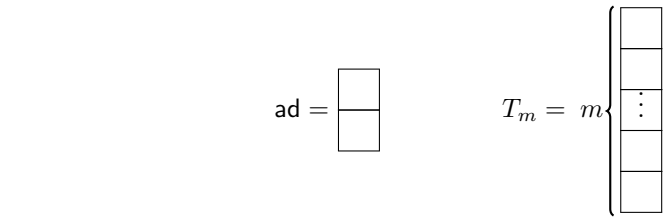

图 7：描述 so_{2r} 的表示 ad 和 T_m 的杨图。

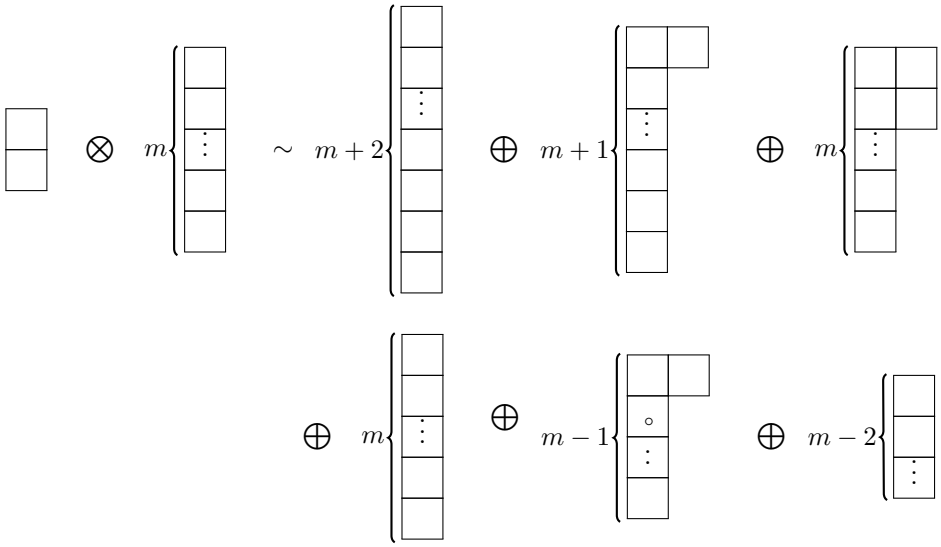

图8：用杨图表示表示 ad 和 T_m 的张量积，不含重数。

其中 $\psi \in V_\rho$ 和 $\mathbf{C}$ 是电荷共轭矩阵。将此运算限制到旋量 $\psi_\epsilon, \phi_\epsilon \in V_{\Delta_\epsilon} \subseteq V_\rho$上，我们可以将所需映射写成标准形式（例如参见 [38]）：

$$\psi_\epsilon^\alpha \otimes \phi_\epsilon^\beta \longmapsto (\widetilde{\psi}_\epsilon)_\alpha (\Gamma_{[i_1} \dots \Gamma_{i_k]})^\alpha{}_\beta \phi_\epsilon^\beta. \tag{6.22}$$

容易得到映射 (6.22) 在置换 $\psi \leftrightarrow \phi$ 下，对于表示 T_k 和 T_{k+2} 的以下变换性质：

$$\begin{aligned} (\widetilde{\psi}_\epsilon)_\alpha (\Gamma_{[i_1} \dots \Gamma_{i_k]})^\alpha{}_\beta \phi_\epsilon^\beta &= (-1)^{[\frac{r+1}{2}]+\frac{k(k+1)}{2}} (\widetilde{\phi}_\epsilon)_\alpha (\Gamma_{[i_1} \dots \Gamma_{i_k]})^\alpha{}_\beta \psi_\epsilon^\beta, \\ (\widetilde{\psi}_\epsilon)_\alpha (\Gamma_{[i_1} \dots \Gamma_{i_{k+2}]})^\alpha{}_\beta \phi_\epsilon^\beta &= -(-1)^{[\frac{r+1}{2}]+\frac{k(k+1)}{2}} (\widetilde{\phi}_\epsilon)_\alpha (\Gamma_{[i_1} \dots \Gamma_{i_{k+2}]})^\alpha{}_\beta \psi_\epsilon^\beta. \end{aligned} \tag{6.23}$$

因此，对于 $k = 0, \dots, r-2$，表示 T_k 和 T_{k+2} 总是具有相反的对称性。因此，条件 (6.19) 除了条件 (6.18) 已经隐含的约束外，不会对方程组 (6.14) 施加额外约束。

最后，利用 so_{2r} 的二次卡西米尔算子特征值的显式表达式 (B.4) 和 (B.7)，我们得到关系式 (6.14) 的以下形式：

$$\frac{\tau_{k+2}(u)}{\tau_k(u)} = \frac{4(r-1)u + (r-1-k)}{4(r-1)u - (r-1-k)} \tag{6.24}$$

当 r 为偶数时， $k = 0, 2, \dots\dots, r-2$；当 r 为奇数时， $k = 1, 3, \dots\dots, r-2$。利用对谱参数 $u \mapsto \frac{u}{4(r-1)}$进行重新缩放的自由度，我们可以将 (6.24) 改写为更简单的形式

$$\frac{\tau_{k+2}(u)}{\tau_k(u)} = \frac{u + (r-1-k)}{u - (r-1-k)}. \tag{6.25}$$

从 $k = r-2$ 开始依次求解方程（6.25），并将所得结果代入（6.20），可得到杨–巴克斯特方程（6.9）的以下解：

$$R^{\epsilon\epsilon}(u) = \mathrm{P}_r^{\epsilon\epsilon} + \frac{u-1}{u+1} \mathrm{P}_{r-2}^{\epsilon\epsilon} + \frac{(u-1)(u-3)}{(u+1)(u+3)} \mathrm{P}_{r-4}^{\epsilon\epsilon} + \dots + \frac{(u-1)(u-3)\dots(u-(r-1))}{(u+1)(u+3)\dots(u+(r-1))} \mathrm{P}_0^{\epsilon\epsilon} \tag{6.26}$$

当 r 为偶数时，以及

$$R^{\epsilon\epsilon}(u) = \mathrm{P}_r^{\epsilon\epsilon} + \frac{u-1}{u+1}\,\mathrm{P}_{r-2}^{\epsilon\epsilon} + \frac{(u-1)(u-3)}{(u+1)(u+3)}\,\mathrm{P}_{r-4}^{\epsilon\epsilon} + \cdots + \frac{(u-1)(u-3)\ldots(u-(r-2))}{(u+1)(u+3)\ldots(u+(r-2))}\,\mathrm{P}_1^{\epsilon\epsilon} \tag{6.27}$$

对于奇数 r。(6.26) 和 (6.27) 中的整体因子 $\tau_r(u)$ 已设为 1，以满足幺正性条件 (6.11)。(6.26) 和 (6.27) 可更简洁地写成

$$R^{\epsilon\epsilon}(u) = \sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]} \prod_{m=1}^{k} \frac{u-(2m-1)}{u+(2m-1)} \cdot \mathrm{P}_{r-2k}^{\epsilon\epsilon}\,. \tag{6.28}$$

如前所述，杨–巴克斯特方程的两种形式 (6.2) 和 (6.9) 的解 $\hat{}R(u)$ 与 $R(u)$ 之间满足关系 $R(u) = PR(u)$。表示 $T_k \subseteq \Delta_\epsilon \otimes \Delta_\epsilon$ 的对称性性质 (6.23) 意味着 $P\,\mathrm{P}_{r-2k}^{\epsilon\epsilon} = (-1)^k \mathrm{P}_{r-2k}^{\epsilon\epsilon}$。因此，算子

$$\hat{R}^{\epsilon\epsilon}(u) = \sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]} (-1)^k \prod_{m=1}^{k} \frac{u-(2m-1)}{u+(2m-1)} \cdot \mathrm{P}_{r-2k}^{\epsilon\epsilon} \tag{6.29}$$

是杨–巴克斯特方程编织形式 (6.2) 的一个解。

现在注意，$\epsilon = +$ 和 $\epsilon = -$ 对应的算子 (6.29) 之和作用于与 (6.5) 中定义的算子 $\hat{}R^S(u)$ 相同的空间。这一观察自然表明这些算子成正比，从而引出以下命题。

命题 9. 杨–巴克斯特方程 (6.2) 在表示 $\Delta^S = \Delta_+^{\otimes 2} \oplus \Delta_-^{\otimes 2}$中的解 $\hat{}R^S(u)$ 和 $\hat{}R^{++}(u) + \hat{}R^{--}(u)$ 满足

$$\hat{R}^S(u) = A(u) \prod_{k=0}^{r-1} (u+k) \cdot \big(\hat{R}^{++}(u) + \hat{R}^{--}(u)\big), \tag{6.30}$$

其中，$A(u)$是通过 (6.4) 和 (6.5)定义 $\hat{}R^S(u)$ 时出现的函数。

该命题的证明基于以下技术引理。

引理 2. 在 (3.1) 中定义的不变量 I_{2k} 和在 (4.11)中定义的投影算子 P_r^S 满足

$$\frac{I_{2k}}{(2k)!}\,\mathrm{P}_r^S = (-1)^k \binom{r}{k} \mathrm{P}_r^S, \qquad k = 0, 1, \ldots, r. \tag{6.31}$$

证明。 $k = 0$ 的情形显然。对于 $k = 1$，注意，不变量 I_2 可由拆分卡西米尔算子 C_ρ 表示，见式 (3.3)。因此，关系 (6.31) 化为

$$\widehat{C}_\rho\,\mathrm{P}_r^S = \frac{r}{16(r-1)}\,\mathrm{P}_r^S\,. \tag{6.32}$$

该关系成立，因为 (6.32) 右侧 P_r^S的系数与表示 T_r中算子 C_ρ的特征值$\widehat{}$(4.6)一致，正如所要求的。其余情形 $k = 2,\ldots,r$ 可利用关系 (3.6)，对 k 作归纳法得到。

■

命题 *9* 的证明。第 3 1 I_{2k} k 节已经证明，每个不变量都可以表示为代数 so_{2r} 在表示 $\rho \otimes \rho$ 中的分裂卡西米尔算子 C_ρ 的次数为.....的多项式（见式 (3.6)）。算子 $\widehat{}$算子 C_ρ 本身可按投影算子 P_k 分解为作用于其特征子空间的形式，具体见式 (4.14) 和 (4.15)（另见式 (2.13)）。因此，式 (6.5) 中定义为不变量 I_{2k} 的线性组合的算子 $\hat{}R^S(u)$，同样可以写成这些投影算子的线性组合。由于 $\hat{}R^S(u)$ 作用于 Δ^S 的表示空间，其分解中只能出现作用于同一空间的投影算子。这些恰好是式 (4.11) 中引入的投影算子 P_k^S，其奇偶性与 r 的奇偶性相同。因此，算子 $\hat{}R^S(u)$ 可写成式 (6.10) 的形式，其中以 $\mathrm{P}_k^{\epsilon\epsilon}$ 替换 P_k^S。显然，此时函数 $\tau_k(u)$ 也必须满足方程 (6.25)，其解除一个整体因子外是唯一的。因此，算子 $\hat{}R^S(u)$ 和 $\hat{}R^{++}(u) + \hat{}R^{--}(u)$ 成比例。

为确定比例系数，我们将 $\hat{R}^S(u)$ 乘以投影算子 P_r^S，并使用引理 2，得到

$$\hat{R}^S(u)\,\mathrm{P}_r^S = A(u)\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{\Gamma(\frac{u}{2}+k)\Gamma(\frac{u}{2}+r-k)}{\Gamma(\frac{u}{2})\Gamma(\frac{u}{2})}\,\mathrm{P}_r^S = A(u)\prod_{k=0}^{r-1}(u+k)\,\mathrm{P}_r^S, \tag{6.33}$$

其中，在第二个等式中，我们使用了上升阶乘的标准恒等式，$\Gamma(x+k)/\Gamma(x) = x(x+1)\cdots(x+k-1)$，即令 $x = \frac{u}{2}$，即

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{\Gamma(x+k)\Gamma(x+r-k)}{\Gamma(x)\Gamma(x)} = \prod_{k=0}^{r-1}(2x+k). \tag{6.34}$$

将解 $\hat{R}^{++}(u)+\hat{R}^{--}(u)$ 乘以 P_r^S，得到

$$\big(\hat{R}^{++}(u)+\hat{R}^{--}(u)\big)\,\mathrm{P}_r^S = \mathrm{P}_r^S\,. \tag{6.35}$$

比较式（6.33）与（6.35），得到（6.30）。■

因此，我们已经证明，[22] 提出的构造杨–巴克斯特方程（6.2）解的方法，确实能够以最少的计算量得到解（6.1）的偶部分。

结论

本文采用两种独立方法，得到了李代数 so_{2r} 的分裂卡西米尔算子在其同手征性和相反手征性的旋量表示张量积中的特征恒等式。基于这些恒等式，我们构造了相应表示的不变子空间上的投影算子，并计算了它们的迹。

所得表达式使得能够显式计算梯形费曼图的色因子，该图描述群 Spin($2r$) 正手征旋量表示中两个费米子经由胶子交换的相互作用。本工作的结果可用于规范群为 Spin(10) 的大统一理论中的计算。

此外，利用所构造的投影算子，得到了相同手征性的旋量表示之张量积中杨–巴克斯特方程的解。已证明这些解之和正比于先前已知的杨–巴克斯特方程解的偶部。

最后，我们简要评述将 so_N 的旋量表示纳入单李代数 $\mathfrak{g}$之表示的普适描述的可能性。回想一下，Vogel 普适性源于对 $\mathfrak{g}$伴随表示张量幂的研究。由于存在非退化的嘉当–基林度量 g_{AB}，伴随表示中的李代数 $\mathfrak{g}$ 自然嵌入 $\mathfrak{so}(\dim\mathfrak{g})$。然而，这一观察对于把普适描述推广到旋量表示似乎并不特别有用，因为这些表示并不出现在单李代数表示论的伴随部分之内。

将 $\mathfrak{so}_N$ 的旋量表示纳入李代数表示的统一框架，另一种可行途径基于这样一种观察：对于某些简单（超）代数，可以选择一个基，使结构常数用狄拉克伽马矩阵表示（例如参见 [45, 46]及其中的参考文献）。

致谢

作者感谢 A. Sleptsov 就将$\mathfrak{so}_N$ 的旋量表示纳入李代数统一描述框架的前景所进行的有益讨论。

李代数 so_N 与克利福德代数 $\mathcal{C}l_N$

在本附录中，我们简要回顾李代数 so_N、克利福德代数 $\mathcal{C}l_N$ 的基本性质，以及本文所用到的它们的一些表示（例如，参见 [35, 38]）。

so_N 的基元素 $M_{ij}=-M_{ji}$（其中 $i,\ j=1,\ \ldots,\ N$）满足对易关系

$$[M_{i_1i_2},M_{j_1j_2}]=X^{k_1k_2}{}_{i_1i_2,j_1j_2}M_{k_1k_2}=\delta_{i_2j_1}M_{i_1j_2}-\delta_{i_2j_2}M_{i_1j_1}-\delta_{i_1j_1}M_{i_2j_2}+\delta_{i_1j_2}M_{i_2j_1} \tag{A.1}$$

其结构常数

$$X^{k_1k_2}{}_{i_1i_2,j_1j_2}=\delta_{i_2j_1}\delta^{[k_1}_{i_1}\delta^{k_2]}_{j_2}-\delta_{i_2j_2}\delta^{[k_1}_{i_1}\delta^{k_2]}_{j_1}-\delta_{i_1j_1}\delta^{[k_1}_{i_2}\delta^{k_2]}_{j_2}+\delta_{i_1j_2}\delta^{[k_1}_{i_2}\delta^{k_2]}_{j_1}, \tag{A.2}$$

其中，方括号表示指标反对称化：$A^{[k_1k_2]}:=\frac{1}{2}\big(A^{k_1k_2}-A^{k_2k_1}\big)$。嘉当–基林度量的分量 $\mathsf{g}_{i_1i_2,j_1j_2}$ 及其逆的分量 $\mathsf{g}^{i_1i_2,j_1j_2}$（例如参见 [35]）为

$$\mathsf{g}_{i_1i_2,j_1j_2}=2(N-2)\big(\delta_{i_1j_2}\delta_{i_2j_1}-\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\big),\qquad \overline{\mathsf{g}}^{i_1i_2,j_1j_2}=\frac{1}{2(N-2)}\big(\delta^{i_1j_2}\delta^{i_2j_1}-\delta^{i_1j_1}\delta^{i_2j_2}\big). \tag{A.3}$$

本文所关注的主要对象是 so_N 的旋量表示。研究它们最便捷的工具之一是复克利福德代数 $\mathcal{C}l_N$，它被定义为具有单位元 I 和生成元 Γ_i、$i=1,\ldots,N$ 的结合代数，并满足

$$\Gamma_i\Gamma_j+\Gamma_j\Gamma_i=2\delta_{ij}I. \tag{A.4}$$

$\mathcal{C}l_N$ 的一组基由单位元 I 以及生成元 Γ_i 的所有完全反对称化乘积组成：

$$\Gamma_{[i_1\ldots i_k]}:=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{p(\sigma)}\Gamma_{i_{\sigma(1)}}\Gamma_{i_{\sigma(2)}}\ldots\Gamma_{i_{\sigma(k)}}, \tag{A.5}$$

其中 $k=1,\ldots,N$，而 $p(\sigma)$ 表示置换 $\sigma\in S_k$ 的奇偶性。为方便起见，对于 $k=0$，我们将元素 (A.5) 记为 I。此外，我们还注意到，对于所有 $k>N$，均有 $\Gamma_{[i_1\ldots i_k]}=0$。

满足 (A.1) 的 so_N 基元素关于 $\mathcal{C}l_N$ 的生成元 Γ_i 的标准实现为

$$M_{ij}:=\frac{1}{2}\Gamma_{[ij]}=\frac{1}{4}[\Gamma_i,\Gamma_j], \tag{A.6}$$

其中 $[A,B]:=AB-BA$。由此以及逆嘉当-基灵度量 $\mathsf{g}^{i_1i_2,\ j_1j_2}$ 的显式表达式 (A.3)，可得分裂卡西米尔算子关于伽马矩阵的如下实现：

$$\widehat{C}=\overline{\mathsf{g}}^{i_1i_2,j_1j_2}M_{i_1i_2}\otimes M_{j_1j_2}=-\frac{1}{16(N-2)}\Gamma^{[i_1i_2]}\otimes\Gamma_{[i_1i_2]}. \tag{A.7}$$

在偶数 $N=2r$ 的情形下（下文将限于此情形），代数 $\mathcal{C}l_N$ 有一个唯一的（在等价意义下）不可约表示 ρ，它作用于维数为 2^r 的空间 V_{2^r} 上。显然，此表示限制到通过 (A.6) 嵌入 $\mathcal{C}l_{2r}$ 的子代数 so_{2r} 上。

我们定义最长元

$$\Gamma_{2r+1}:=(-i)^r\Gamma_1\cdots\Gamma_{2r} \tag{A.8}$$

$\mathcal{C}l_{2r}$ 的最长元，它满足以下标准性质：

$$\Gamma_{2r+1}^2=I,\qquad \Gamma_{2r+1}\Gamma_i=-\Gamma_i\Gamma_{2r+1}\quad\text{for}\quad i=1,\ldots,2r. \tag{A.9}$$

利用此元素，构造不变互相正交投影算子

$$\mathrm{P}_\pm:=\frac{1}{2}\big(I_{2^r}\pm\rho(\Gamma_{2r+1})\big), \tag{A.10}$$

将 ρ 的表示空间映射到 $\mathcal{C}l_2$的 $_r$ 旋量表示 $\Delta_\pm$ 的空间上，其中 so_2 $_r$。表示 $\Delta_\pm$ 中二次卡西米尔算子 C_2 的特征值由式 (2.4) 计算，其中最高权的分量为 $\lambda_{\Delta_\pm}=\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$，根空间中的标量积按式 (2.5) 归一化。由此得到

$$c_2^{\Delta_\pm}=\frac{r(2r-1)}{16(r-1)}. \tag{A.11}$$

对于表示 $\Delta_\pm$，自然可以定义其对偶（逆变）表示 $\Delta_\pm$ by$\Delta_\pm(M_{ij})=-\Delta_\pm(M_{ij})^T$，其中 T 表示矩阵转置。已知（例如参见 [38]），下列同构成立：

$$\begin{aligned}&\text{for even } r:\quad \overline{\Delta}_\pm=\Delta_\pm,\\ &\text{for odd } r:\quad \overline{\Delta}_\pm=\Delta_\mp.\end{aligned} \tag{A.12}$$

B soN 的定义表示及其外幂

^为了介绍一种推导式 (3.14) 中引入的算子 $C_{\epsilon\epsilon'}$ 的特征恒等式的替代方法，我们将利用 so_N 的定义表示及其反对称化张量（外）幂的性质。下面简要列出这些性质。

T_f 的定义表示在基元素 M_{ij} 上的作用由下式给出：

$$T_f(M_{ij}) = e_{ij} - e_{ji} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_f(M_{ij})^a{}_b = \delta^a_i\delta_{jb} - \delta^a_j\delta_{ib}, \tag{B.1}$$

其中， e_{ij} 为矩阵单位，$(e_{ij})^a{}_b = \delta^a_i\delta_{jb}$。该表示中的二次卡西米尔算子 C_2 的特征值可直接由其定义（2.2）、逆Cartan-Killing度量的显式表达式（A.3）以及基（B.1）推出，结果为

$$c_2^{T_f} = \frac{N-1}{2(N-2)}. \tag{B.2}$$

考虑 k 个定义表示[9]、 T_k 的反对称张量积= $T_f^{\wedge k}$，其作用于空间 V_k：由反对称张量 $t^{[i_1,\dots,i_k]}$ 构成的 $= V_N^{\wedge k}$ 维空间 $= \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}(-1)^\sigma t^{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}}$。众所周知（例如参见 [38]），当 $N = 2r$ 时，这些表示在 $k < r$ 下不可约；而当 $N = 2r+1$ 时，它们在 $k \le r$ 下不可约。此外，对于所有 $k = 0,\dots,N$，表示 T_k 和 T_{N-k} 等价，因此下文仅考虑指标 $k = 0,\dots,r$。T_k 的维数很容易计算，结果为

$$\dim T_k = \binom{N}{k} \equiv \frac{N!}{k!(N-k)!}. \tag{B.3}$$

为计算 C_2 对应的特征值，我们使用 (2.4)，并注意到 T_k 在 so_N 的根空间正交基 $\{e^{(i)}\}$ 下的最高权 λ_k 的分量为 $\lambda_k = (\underbrace{1,\dots,1}_{k},0,\dots,0)$，且Weyl向量的分量为：对于 $N = 2r$，为 $\delta = (r-1,\ r-2,\ \dots,\ 1,\ 0)$；对于 $N = 2r+1$，为 $\delta = (r-\frac{1}{2},\ r-\frac{3}{2},\ \dots,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2})$（参见例如 [38]）。采用 so_N 根空间上标量积的归一化 (2.5)，我们得到

$$c_2^{T_k} = \frac{k(N-k)}{2(N-2)}. \tag{B.4}$$

对于 $N = 2r$， so_{2r} 的表示 T_r 是可约的，可分解为所谓的自对偶表示和反自对偶表示 $T_r^\pm$，它们作用于由反对称张量 $t_\pm^{[i_1,\dots,i_r]}$ 构成的空间 $V_{2r}^\pm$ 上，并满足附加条件（参见例如 [38]）

$$\frac{(-i)^r}{r!}\varepsilon_{i_1\dots i_r k_1\dots k_r}\, t_{(\pm)}^{k_1\dots k_r} = \pm\, t_{(\pm)i_1\dots i_r}, \tag{B.5}$$

其中， $\varepsilon_{i_1\dots i_r k_1\dots k_r}$ 是全反对称张量，指标为 $\varepsilon_{1,\ 2,\ \dots,\ 2r} = 1$，指标的升降使用度量 δ_{ij}。这些表示的维数为

$$\dim T_r^\pm = \frac{1}{2}\binom{2r}{r} \equiv \frac{(2r)!}{2(r!)^2}. \tag{B.6}$$

相应的二次卡西米尔算子的特征值可由（2.4）得到；这里利用了 $T_r^\pm$的最高权在 so_{2r} 下的分量为 $\lambda_r^\pm = (1,\dots,1,\ \pm1)$（参见例如 [44]），以及 so_{2r}根空间上标量积的归一化（2.5）：

$$c_2^{T_r^\pm} = \frac{r^2}{4(r-1)}. \tag{B.7}$$

参考文献

[1] A.P.Isaev, S.O. Krivonos, 单李代数的分裂卡西米尔算子、杨-巴克斯特方程的解及 *Vogel* 参数。《数学物理杂志》**62**,083503(2021年).

[9]请注意，采用此记号时， T_1 与定义表示 T_f重合。

[2] A.P. Isaev 与 A.A. Provorov， $osp(M|N)$ 和 $sl(M|N)$ 李超代数的分裂卡西米尔算子及杨–巴克斯特方程的解、高阶卡西米尔算子与 Vogel 参数，Theoret. and Math. Phys. 210(2), 259-301 (2022年), arXiv:2201.06148 [math-ph].[3] A.P. Isaev、S.O. Krivonos 与 A. A. Provorov，单李代数在伴随表示的三次张量幂中的分裂卡西米尔算子及 Vogel 参数，IJMPA 38, 2350037 (2023年).[4] A.P. Isaev 与 A.A. Provorov， $s\ell(M|N)$ 和 $osp(M|N)$ 单李超代数在表示 $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$ 中的三重分裂卡西米尔算子及 Vogel 参数化, Theoret. and Math. Phys. 221(1), 154-175 (2024年).[5] A.A. Provorov， $D(2,1;\alpha)$ 在表示 $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ 和 $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$ 中的分裂卡西米尔算子及 Vogel 参数化，《粒子与原子核物理快报》21(4), (2024年).[6] M. Avetisyan、A.P. Isaev、S.O. Krivonos、R. Mkrtchyan， $g^{\otimes 4}$的统一结构，《俄罗斯数学物理杂志》31, 379-388 (2024年), arXiv:2311.05358 [math-ph].[7] A.P. Isaev、S.K. Krivonos，分裂五阶卡西米尔算子与 $\wedge\mathrm{ad}^{\otimes 5}$的结构，Izvestiya: Mathematics 89, 15-25 (2024年), arXiv:2404.01038 [math-ph].[8] A.P. Isaev，Vogel 普适性及其延伸，arXiv:2601.01612 [math-ph].[9] A.P. Isaev 与 A.A. Provorov，非阿贝尔规范理论中普适色因子的计算，《粒子与原子核物理快报》22(3), 437-455 (2025年).[10] P.Cvitanovi´c，《鸟迹图、李群与例外群》，普林斯顿；牛津：普林斯顿大学出版社 (2008); http://cns.physics.gatech.edu/grouptheory/chapters/draft.pdf.[11] H. Georgi、S.L. Glashow，所有基本粒子力的统一，《物理评论快报》32(8), 438 (1974年).[12] H. Fritzsch、P. Minkowski，轻子与强子的统一相互作用，《物理年鉴》93(1-2), 193-266 (1975年).[13] M. Gell-Mann、P Ramond、R Slansky，复旋量与统一理论，Murray Gell-Mann: Se- lected Papers, 266-272 (2010年).[14] K.S. Babu 与 R. N. Mohapatra，最小SO(10)大统一中可预测的中微子谱，《物理评论快报》70(19), 2845 (1993年).[15] F. G¨ursey、P. Ramond、P. Sikivie，一种基于 E_6的普适规范理论模型，《物理快报B辑》60(2), 177-180 (1976年).[16] P. Candelas、G. Horowitz、A. Strominger、E. Witten，超弦的真空构型，《核物理B辑》258, 46-74 (1985年).[17] G. 't Hooft，强相互作用的平面图理论，Nuclear Physics B. 72(3), 80-92 (1993年).[18] O. Aharony、S.S. Gubser、J. Maldacena、H. Ooguri、Y. Oz，大N场论、弦理论与引力。《物理报告》323, 183 (2000年).[19] G. 't Hooft，介子的二维模型，Nuclear Physics B. 75(3), 461-470 (1994年).[20] E. Witten，1/N 展开中的重子，Nuclear Physics B. 160(1), 57-115 (1979年).[21] P.Di Francesco、P. Ginsparg、J. Zinn-Justin，二维引力与随机矩阵，《物理报告》253(1-2), 1-133 (1995年).[22] N.J. MacKay，不可约表示中的有理 R矩阵，《物理学杂志A：数学与一般物理》24(17), 4017 (1991年).[23] J. B. McGuire，可精确求解的一维N体问题研究，《数学物理杂志》5, 622–636 (1964年)

[24] C. N. Yang, 《一维排斥δ函数相互作用多体问题的一些精确结果》, 19(23), 1312–1315（1967年）[25] R. J. Baxter, 《统计力学中的精确可解模型》, Courier Corporation, （2013）[26] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, 《二维中的因子化S矩阵：某些相对论量子场论模型的精确解》, Annals of Physics 120(2), 253-291（1979年）[27] V. Chari 和 A. Pressley, 《量子群指南》, 剑桥大学出版社（1994年）。[28] E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, 《量子逆问题方法 I》, Theoretical and Mathematical Physics 40, 688–706（1979年）[29] V. G. Drinfel'd, 《量子群》, Journal of Soviet Mathematics 41, 898–915（1988）[30] M. Jimbo, 《 $U(gl(N+1))$的q类比、Hecke代数与杨-巴克斯特方程》, Letters in Mathematical Physics 11, 247–252（1986）[31] M. Jimbo, 《杨-巴克斯特方程引言》, 04(15), 3759-3777（1989）[32] V. Pasquier, H. Saleur, 《通过量子群连接有限系统与共形场论的共同结构》, Nuclear Physics B 330(2-3), 523-556（1990）[33]M. Karowski, A. Zapletal, 《具有周期边界条件的量子群不变可积n态顶点模型》, Nuclear Physics B 419(3), 567-588（1994年）[34] B. Westbury, R矩阵与魔方阵, J. Phys. A: Math. Gen. 36(7), 1947（2003）[35] A.P. Isaev, V.A. Rubakov, 《群与对称性理论 I：有限群、李群与李代数》, World Scientific, （2018）。[36] A. P. Isaev, 《量子群与杨-巴克斯特方程》, Natural Science Review 2, 100204（2025年）。[37] A.P. Isaev, D. Karakhanyan, R. Kirschner, 《osp超代数的杨-巴克斯特R算子》, Nuclear Physics B 965, 115355（2021）。[38] A.P. Isaev, V.A. Rubakov, 《群与对称性理论 II：群表示与李代数表示及其应用》, World Scientific, （2020）。[39] H. Weyl, 《通过线性变换表示连续半单群的理论》, Math. Ztschr., 第23卷（1925年）, 第271–309页; 第24卷（1925年）, 第328–395页（德文）; H. Weyl, 《通过线性变换表示连续半单群的表示论》, 载于 H. Weyl, 《论文选集：数学、理论物理》, Nauka, 莫斯科（1984）, 第100-197页（俄文）。[40] M. Peskin, D. Schroeder, 《量子场论引言》, Westview Press, （1995）。[41] R.Shankar, E.Witten, 《$(\psi\psi)^2$ 模型中孤子的 S 矩阵》, Nucl.Phys. B 141, 349-363（1978）。[42] D. Chicherin, S. Derkachov, A.P. Isaev, 《旋量R矩阵》, J. Phys. A: Math. Theor. 46(48), 485201（2013）。[43] A.P. Isaev, D. Karakhanyan, R. Kirschner, 《正交与辛杨子及杨-巴克斯特R算子》, Nuclear Physics B 904, 124-147（2016）; 电子预印本：1511.06152 [math-ph[44] W. Fulton, J. Harris, 《表示论：第一课程》, Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, 第129卷。纽约：Springer-Verlag。[45] A.P. Isaev, E.A. Ivanov, 《Green-Schwarz超弦作为非对称手征场σ模型》, Theoret. and Math. Phys. 81(3), 1304–1313（1989）。[46] K. Stepanyantz, 《翻转 E_8 GUT中的规范耦合统一》, Theoret. and Math. Phys. 218(2), 341-388（2024年）; 电子预印本：2305.01295 [高能物理现象学]

—