arXiv:2603.04570v1 [math.AT] 4 Mar 2026

基于三间隙定理的持久图估计*

LuisSuarez Salas JoseA.Perea

摘要

时间延迟（或滑动窗口）嵌入是一种来自动力系统的技术，用于根据时间序列数据重构吸引子。近来，来自拓扑数据分析（TDA）的描述子——具体而言是持久图——已被用于度量上述重构吸引子的形状，其应用包括周期性与准周期性的量化。尽管它们颇为有用，滑动窗口嵌入的持久图的快速计算仍未得到充分理解。在本工作中，我们提出理论与计算方案，用以近似准周期函数的滑动窗口嵌入的持久图。我们通过将数论中的三间隙定理与拓扑数据分析中的持久K¨unneth公式相结合来实现这一点，并推导出快速且可证明正确的持久同调近似。该过程的输入是信号的谱，我们同时提供数值与理论证据，以说明其在刻画环面吸引子形状方面的效用。

1 引言

滑动窗口嵌入是一种强大的技术，可根据观测到的时间序列数据重构动力系统的吸引子。当与拓扑数据分析（TDA）中的工具（如持久图）结合使用时，可以测量状态空间的拓扑性质，从而检测原始信号中的模式。通常，将滑动窗口与持久同调相结合，可以探查非平凡重复行为的存在。例如，图 1 描绘了一个行为比周期性更为复杂的系统。

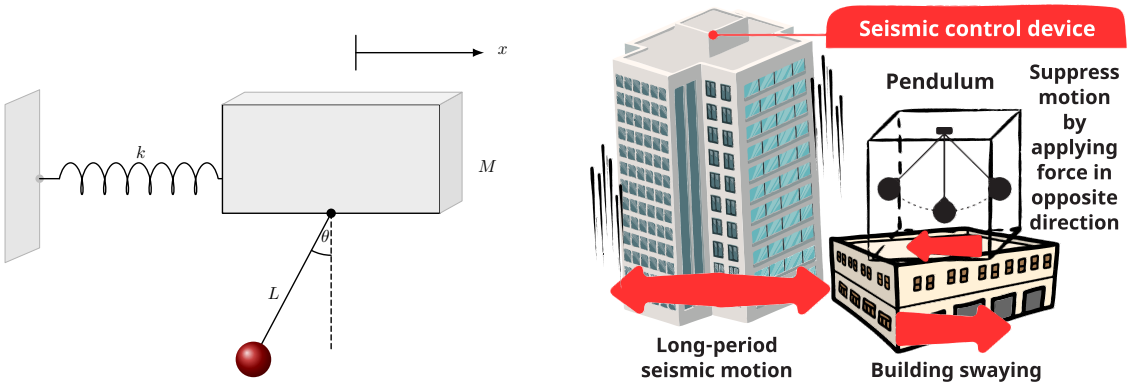


图 1：左：滑块上摆的示意模型。右：抗震技术示意图（另见 [35]），其动力学由左侧模型刻画。

事实上，利用对系统的测量，例如滑块的水平位置 $x(t)$或摆的角位置 $\theta(t)$，可以确定（如下文所述）该系统表现出一种称为 准周期性 的重复行为（图 3 和第2.2节）。在动力系统中，当振荡器叠加时会出现这种行为，也会出现在稳定动力学与混沌动力学之间的过渡过程中 [43]，；例如，人们已在从小鼠获得的功能性磁共振成像扫描中观察到这种行为 [4]，在准晶体的形成过程中 [25]，，以及在对哺乳动物发声中的双声源发声进行研究时 [45]。

从数学上说，我们称 $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是准周期的（参见定义2.29），其频率向量为$\omega=(\omega_1,\ \ldots\ldots,\ \omega_N)$，如果$\{\omega_i\}_{i=1}^N$是实数集上的线性无关正实数 $\mathbb{Q}$（即不可公度），并且

$$f(t)=F(\omega_1 t,\ldots,\omega_N t),$$

*此 本工作部分由美国国家科学基金会通过 CAREER奖 # DMS-24154 资助。

45.

其中 $F\colon\ \mathbb{T}^N \to \mathbb{C}$ 是定义在 N-环面 $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ 上的复值连续函数，称为 f [13]的母函数。请注意，在单频情形下，f 它只是一个周期函数。

频率向量长度为 N 的信号，其周期性或准周期性分别对应于在底层动力系统的相空间中观测到一个（拓扑）圆或一个 N-环面吸引子的遍历过程 [39]。另一方面，Takens 嵌入定理 [40], 在满足适当条件时 [47], 保证信号的滑动窗口嵌入（第2.2节及图2中间两幅图）能够对上述吸引子进行拓扑重构。最后，可以利用拓扑数据分析（TDA）中的形状描述符来量化周期性/准周期性：通过滑动窗口嵌入重构的吸引子的 Rips 持久图（定义见第2.1 节，展示于图2最右侧两幅图）能够衡量点云中孔洞的显著程度和维数，从而简洁地概括其多尺度几何与拓扑特征。

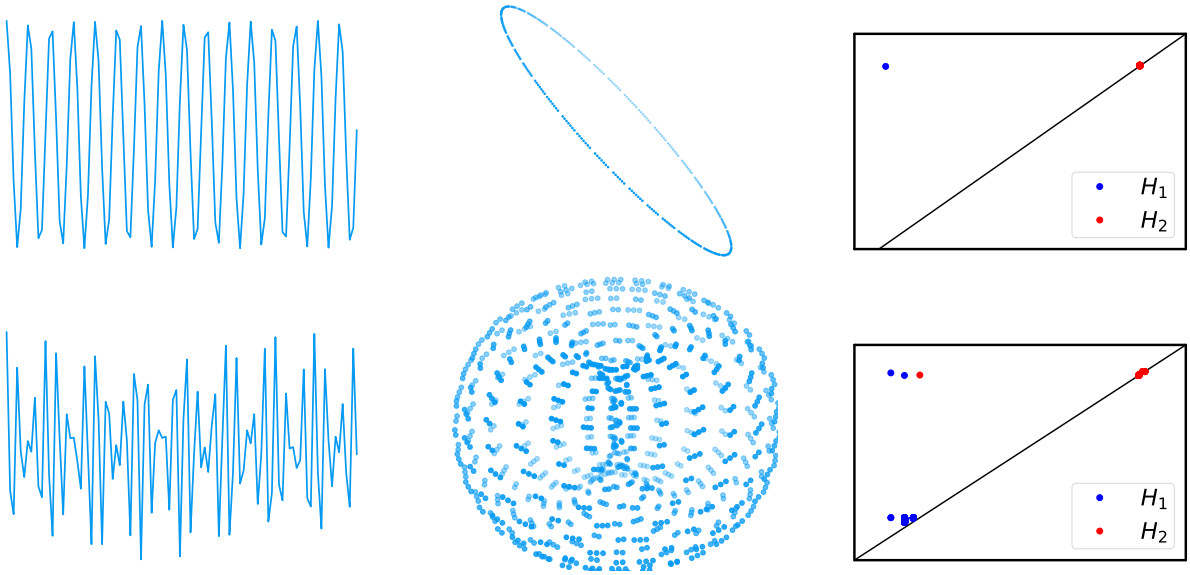


图 2：给定一个时间序列（左列），我们通过其滑动窗口嵌入重构底层吸引子（中列），然后计算其持久同调（右列）。上排：理想摆周期运动产生的信号（左）。滑动窗口点云以圆为参数化对象（中），因此其持久图恰好显示一个非平凡的一维同调类（右）。下排：具有两个不可通约频率的准周期函数（左）；其滑动窗口嵌入（中）重构出一个 2-环面。相应的持久图（右）通过显示两个彼此独立的一维同调类和一个二维同调类，证实了这一拓扑结构。

大量研究已证明滑动窗口与持久同调的实用价值，其应用包括估计阻尼机制中的参数 [30], 评估随机时滞方程的稳定性[20], 量化振动声带中双声源发声的存在 [41]以及检测基因表达数据的周期性 [34]。此外，已有明确的方法可优化滑动窗口嵌入的嵌入参数，从而最大限度地放大持久图中的拓扑特征 [13]。然而，在实际应用中，计算Rips过滤的持久同调仍面临算法复杂度方面的挑战。即使使用高度优化的程序库（如 Ripser） [3], 也是如此；该程序库利用上同调对偶、表观对和清除优化，显著提升了计算速度。主要困难在于，用于计算 $j = 0$、.....、J维持久同调的矩阵约化算法 [50] ，其最坏情况下的复杂度与 0、.....、$J + 1$ [27] 维单形的数量呈三次关系；本文关注的情形是 $J = N$，即信号中 f线性无关频率的数量 $\mathbb{Q}$。此外，对于 Ripser， j维单形的数量随 n_{SW} 增长为$\binom{n_{SW}}{j+1}$，其中 n_{SW} 是滑动窗口嵌入中的点数。实践中，即使 $N = 2$、$n_{SW} = 1000$，计算开销仍然很大，这促使我们致力于开发具有已知误差界的近似方法（见图 3），以提供一种更快速、计算上更易实现的替代方案（见图 11 和表 2）。我们的方法依赖于三间隙定理。该定理运用数论中的连分数展开，描述以无理旋转角采样的点如何分布在圆周上。我们还使用持久同调中的 K¨unneth 公式。得益于第 2.3 节的结果，我们的处理流程适用于一般的准周期函数 f。只需计算其谱

即可 f ——例如，通过快速傅里叶变换（FFT）——获得算法的输入（第 2.5 节）。具体而言，我们用下文所示的两部分替代方案（3b）取代标准的、基于 Ripser 的步骤 3（为便于比较，我们将原有流程保留为步骤 3a）。

> 1. 从时间序列 f 开始。2. 通过计算$\{SW_{d,\tau}f(t)\}_{t=0}^{T}$重构相空间。3a. 使用 Ripser 计算持久图$Dgm_j^R(\{SW_{d,\tau}f(t)\}_{t=0}^{T}, d_2)$。
> 3b. (i) 使用快速傅里叶变换获取 f 的频率，然后计算其连分数展开（CFE）。(ii) 按照第 3 节所示使用连分数展开，然后应用第 4 节的结果，对 $j = 1, 2$ 近似计算持久图$Dgm_j^R(\{SW_{d,\tau}f(t)\}_{t=0}^{T}, d_2)$。

在步骤 3b (ii) 中，连分数展开使我们能够通过三间隙定理（第3节）精确计算每个频率圆上的持久图，然后按照第 4节中的详细说明，使用 K¨unneth 公式将这些持久图组合起来，从而近似我们所关注的持久图。

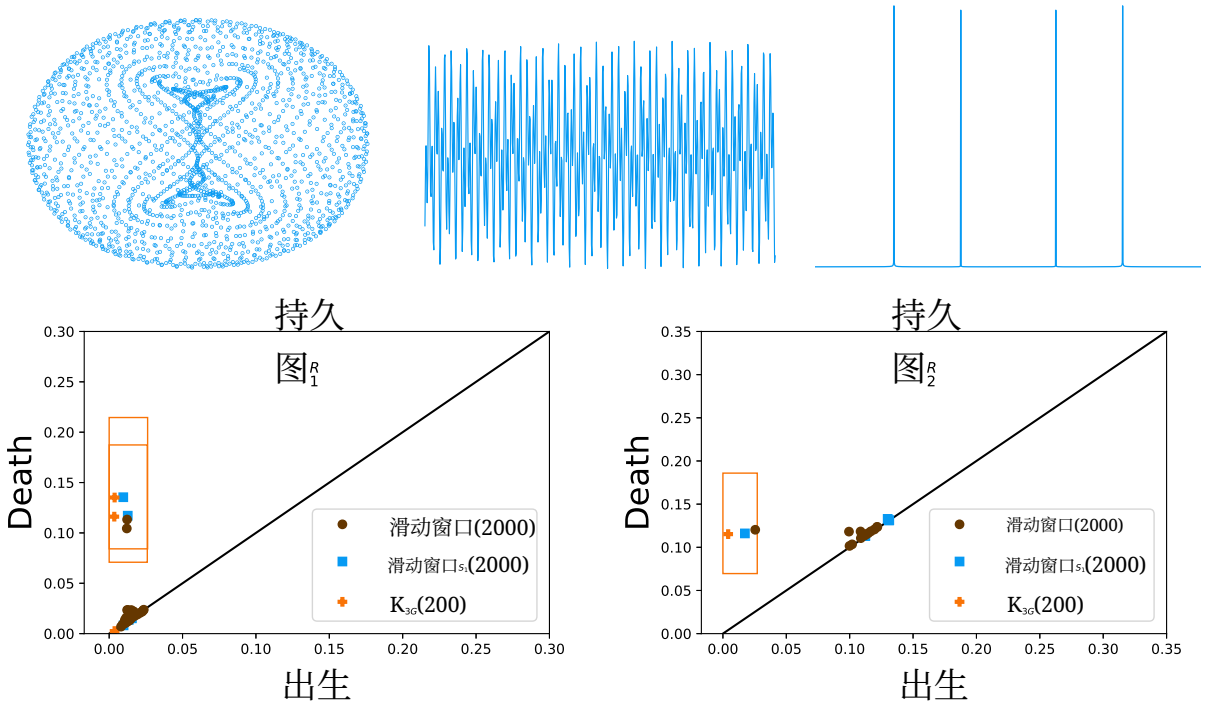


图3：顶行：左侧图是相空间（x， $\dot{x}$），来自图1所示的连接在滑块上的摆。我们用于滑动窗口嵌入的解 $x(t)$ 绘制在中间，随后是其离散傅里叶变换的模（右侧）。底行： $x(t)$ 的滑动窗口嵌入的持久图（棕色圆），以及截断傅里叶级数 $x(t)$ 的持久图（蓝色方块），以及我们提出的近似 K_{3G} （橙色叉号）。橙色矩形表示理论近似界。

注记1。将傅里叶分析与K¨unneth公式结合以计算持久同调的想法并非我们的工作所独有。事实上，在 [21]，中，这些工具被结合起来构造一个多参数滤过，其持久同调可以被精确计算。正如作者所述：

> “我们的主要想法是，通过刘维尔环面将时间序列数据转化为条形码，而不使用滑动窗口嵌入。”

因此，他们的方法依赖于重构完整的刘维尔环面。

相比之下，我们的工作通过单参数滑动窗口 Rips 过滤来近似持久图：

$$f \longrightarrow R_\epsilon(SW_{d,\tau}f) \longrightarrow \mathrm{dgm}_j^R(SW_{d,\tau}f).$$

（时间序列数据）　（滑动窗口嵌入的 Rips 复形）　（持久图）

与此同时，[21] 给出了刘维尔环面持久图的精确公式 Ψ_f，该公式由多参数滤过得到

$$f \longrightarrow R_{\epsilon_1}(\pi_1\Psi_f) \times \cdots \times R_{\epsilon_N}(\pi_N\Psi_f) \longrightarrow \mathrm{dgm}_j^{R,\ell}(\Psi_f).$$

（时间序列数据）（刘维尔环面的多 –参数滤过）（持久图）

我们在表1中总结了这两种方法的区别特征。

表 1：我们的 3G 流程与 [21] 提出的精确多参数方法的简要比较。

特征	我们的 3G 方法	[21] 的方法
基于 FFT 的分解	Yes	Yes
K¨unneth 型乘积公式	Yes	Yes
Takens 定理	Yes	Yes
滑动窗口嵌入	Yes	No
刘维尔环面	No	Yes
连分数展开	Yes	No
过滤类型	单参数	多参数
信号类型	准周期	周期
精确性与近似	近似（误差界）	精确

致谢

作者谨向 Facundo Memoli 和匿名审稿人致谢，感谢他们提出的详细意见；这些意见对于修正原稿中的多处不准确之处至关重要。

2 背景与定义

本节介绍我们所提出的三间隙（3G）方法所需的数学概念。首先，我们定义持久模、其条形码及稳定性理论，并介绍过滤单纯复形持久同调这一特殊情形。接下来，我们引入动力系统，并重点介绍 Takens 重构定理，该定理是滑动窗口嵌入的理论基础。随后，我们说明傅里叶变换如何恢复一般准周期信号的频率向量。然后，我们回顾连分数展开及其基本性质，进而引出三间隙定理——我们工作的数论基础。最后，我们概述 3G 方法（因其运用了三间隙定理而得名），并着重说明这些组成部分如何相互结合。

2.1 持久同调

我们对持久模及其交错距离的介绍遵循 [7, 第 1、3 章和 4]。这些概念从代数角度描述稳定性，而我们在本文中将用到这一点。

2.1.1 持久模

定义 2.1。 实数集 $\mathbb{R}$ 上的持久模 $\mathbb{V}$ 是一个由向量空间组成的指标族

$$\{V_t \mid t \in \mathbb{R}\},$$

以及一族由两个指标索引的线性映射

$$\left\{v_s^t \colon V_s \to V_t \mid s \le t\right\}$$

它们满足复合律

$$v_s^t \circ v_r^s = v_r^t$$

当 $r \le s \le t$ 时成立，其中 v_t^t 对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都是 V_t 上的恒等映射。

定义 2.2。 两个持久模 $\mathbb{U}$、$\mathbb{V}$ 之间的态射 Φ 是一族线性映射

$$\varphi_t : U_t \to V_t$$

使得图表

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_s^t} & U_t \\ {\scriptstyle\varphi_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_t} \\ V_s & \xrightarrow{v_s^t} & V_t \end{array}$$

对所有 $s \le t$ 均交换。复合按显然的方式定义，恒等态射也如此。这使持久模的全体构成一个范畴。从 $\mathbb{U}$ 到 $\mathbb{V}$ 的所有态射的集合记作

$$\mathrm{Hom}\big(\mathbb{U}, \mathbb{V}\big).$$

当 $\mathbb{U} = \mathbb{V}$ 时，这些称为 自同态，记作

$$\mathrm{End}\big(\mathbb{V}\big) = \mathrm{Hom}\big(\mathbb{V}, \mathbb{V}\big).$$

我们对态射作如下推广：

定义 2.3. 设 $\mathbb{U} = \{U_t, u_s^t\}$ 和 $\mathbb{V} = \{V_t, v_s^t\}$ 是以 $t \in \mathbb{R}$ 为指标的持久模。一个度为.....的态射 $\delta \ge 0$ 是由一族线性映射组成的

$$\varphi_t \colon U_t \longrightarrow V_{t+\delta}, \quad t \in \mathbb{R},$$

使得对所有 $s \le t$，下图

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_s^t} & U_t \\ {\scriptstyle\varphi_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_t} \\ V_{s+\delta} & \xrightarrow{v_{s+\delta}^{t+\delta}} & V_{t+\delta} \end{array}$$

均交换。记作

$$\mathrm{Hom}^{\delta}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \{\varphi \ \textit{of degree}\ \delta\}.$$

当 $\mathbb{U} = \mathbb{V}$ 时，这样的映射称为 次数 δ 自同态，我们记作

$$\mathrm{End}^{\delta}(\mathbb{V}) = \mathrm{Hom}^{\delta}(\mathbb{V}, \mathbb{V}).$$

定义 2.4. 对于任意持久模 $\mathbb{V} = \{V_t, v_s^t\}$ 与 $\delta \ge 0$，移位映射

$$1_{\mathbb{V}}^{\delta} = \{\, v_t^{t+\delta} \colon V_t \to V_{t+\delta}\}_{t \in \mathbb{R}}$$

是 $\mathrm{End}^{\delta}(\mathbb{V})$ 中的一个次数 δ 自同态。

Definition 2.5. 设 $\mathbb{U}$ 与 $\mathbb{V}$ 为持久模，并固定 $\delta \ge 0$。一个 δ–交错 由 f

$$\Phi \in \mathrm{Hom}^{\delta}(\mathbb{U}, \mathbb{V}), \quad \Psi \in \mathrm{Hom}^{\delta}(\mathbb{V}, \mathbb{U}),$$

使得

$$\Psi\Phi = 1_{\mathbb{U}}^{2\delta} \quad \textit{and} \quad \Phi\Psi = 1_{\mathbb{V}}^{2\delta}.$$

定义 2.6. 两个持久模 $\mathbb{U}$ 和 $\mathbb{V}$ 之间的交错距离为

$$d_I(\mathbb{U},\mathbb{V}) = \inf\{\delta \geq 0 \mid \mathbb{U} \text{ and } \mathbb{V} \text{ admit a } \delta\text{-interleaving}\}.$$

若不存在有限的 δ，则令 $d_I(\mathbb{U},\mathbb{V}) = \infty$。

在下文所述的适当有限性条件下，持久模在同构意义下可由一个称为条形码的不变量唯一确定。事实上，首先注意，持久模的直和可以按分量定义；也就是说，$\mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$ 具有向量空间 $U_t \oplus V_t$（向量空间的直和）以及线性映射 $v_s^t \oplus u_s^t$。

定义 2.7. 设 $\mathbb{V}$ 为一个持久模，使得 V_t 对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都是有限维的（即 $\mathbb{V}$是逐点有限的）。由 *[10]*, 存在唯一的多重集 $\mathrm{bcd}(\mathbb{V})$ 由区间 $I \subseteq \mathbb{R}$构成，称为$\mathbb{V}$的条形码，使得

$$\mathbb{V} \cong \bigoplus_{I \in \mathrm{bcd}(\mathbb{V})} \mathbb{I}_I,$$

其中 $\mathbb{I}_I$ 是具有如下向量空间的持久模：对每个 $t \in I$取域 $\mathbb{F}$，否则取零向量空间；以及如下线性映射：在可能时取恒等映射，否则取零映射。所谓多重集，是指区间可以以有限重复（重数）出现。$\mathbb{V}$ 的持久图是扩展平面 $\mathbb{R}^2 = [-\infty,\infty] \times [-\infty,\infty]$中如下点的多重集，

$$\mathrm{dgm}(\mathbb{V}) = \left\{\left(\inf(I), \sup(I)\right) \mid I \in \mathrm{bcd}(\mathbb{V})\right\}.$$

持久图空间可以赋予一种称为瓶颈距离 d_B [8, 7]的扩展伪度量。在以下定义中，我们将对角线 $y = x$ 上的点也视为持久图的一部分；此外，每个点 $(x,\ x)$ 都具有可数无限重数。

定义 2.8。 设 持久图、持久图$' \subseteq \mathbb{R}^2$ 是两个持久图。它们的瓶颈距离 *is*

$$d_B\left(\mathrm{dgm}, \mathrm{dgm}'\right) = \inf_{\phi:\mathrm{dgm}\to\mathrm{dgm}'} \sup_{y \in \mathrm{dgm}} \{\|y - \phi(y)\|_\infty\},$$

where ϕ 是多重集之间的一个双射，且 $\|(a,b)\|_\infty = \max\{|a|,|b|\}$ 是 $\mathbb{R}$上的扩展上确界范数 $^{-2}$.

从概念上说，给定两个持久图，我们考虑所有将两者中的点配对的多重集双射。给定配对的畸变可以用所有配对点之间的最大无穷范数来衡量。瓶颈距离则是所有双射配对中可能达到的最小畸变。从本质上说，这刻画了平面上两个持久图之间的相似程度。我们注意到，纳入对角线上的所有点 $(x,\ x)$ 可确保任意两个图都存在双射匹配（因此，未匹配的非对角线点可以与对角线上的点配对）。

持久模之间的交错距离与其持久同调图表之间的瓶颈距离满足著名的等距定理 [24],

定理 2.9. 设 $\mathbb{U},\mathbb{V}$ 是逐点有限持久模。那么

$$d_I(\mathbb{U},\mathbb{V}) = d_B(\mathrm{dgm}(\mathbb{U}), \mathrm{dgm}(\mathbb{V})).$$

2.1.2 过滤单纯复形的持久同调

本节将介绍一种针对离散数据集的形式化“形状”概念。除非另有说明，定义均遵循 [15, 13]。

定义 2.10. 给定集合 X，顶点属于 X 的抽象单纯复形（简称单纯复形）是幂集 X 的一个子集 $K \subseteq \mathcal{P}(X)$，满足

1. 每个 $\sigma \in K$ 都是有限且非空的，
2. 对于任意 $\sigma \in K$，如果 $\tau \neq \varnothing$ 且 $\tau \subseteq \sigma$，那么 $\tau \in K$。

K 的元素称为单形，单形的维数比其基数小一：$\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$. 我们还定义 $\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$. σ 的面是它的任意非空真子集。 K的第 n 骨架记作 $K^{(n)} := \{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) \leq n\}$，其中 $n \in \mathbb{N} = \{0,1,\ldots\}$；在

特别地， $K^{(0)}$ 称为 K 的顶点集， $K^{(1)} \setminus K^{(0)}$ 是其边集。 K的子复形是一个子集 $L \subseteq K$ ，它本身也是抽象单纯复形。

我们可以从度量空间中的任意点集构造一个抽象单纯复形。具体来说，这可以通过 ***Rips*** 复形 实现：它将度量空间中的每个点（X， d），例如 $x \in X$，视为一个顶点；如果两个顶点之间的距离不超过某个固定的 $\epsilon \geq 0$，就会在它们之间创建边 $\{x_0, x_1\}$ ，即 $d(x_0, x_1) \leq \epsilon$；连接三个顶点便构成一个三角形 $\{x_0, x_1, x_2\}$，连接四个顶点则构成一个四面体 $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$，依此类推。形式化地说，

定义 2.11. 给定一个度量空间(X, d) 和一个实数 ϵ，***Rips*** 复形 $R_\epsilon(X, d)$ 是如下单纯复形

$$R_\epsilon(X, d) = \big\{ \{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq X \mid d(x_i, x_j) \leq \epsilon, \, \forall \, 0 \leq i, j \leq n \big\}.$$

通过这一构造，我们可以利用代数拓扑中的一个强大形状描述符：单纯同调。它以变形不变的方式将代数对象赋予抽象单纯复形。特别地，0 维同调测量连通分支的数量，1 维同调检测环，而 2 维同调检测空腔。一般而言， n 维同调检测 n 维孔洞。相关定义如下。

定义 2.12. 设 K 是一个单纯复形， $\mathbb{F}$ 是一个域。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $C_n(K; \mathbb{F})$ 表示以 K 的 n 单形集合为基的 $\mathbb{F}$-向量空间：

$$C_n(K; \mathbb{F}) = \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(n)} \setminus K^{(n-1)}} a_\sigma \, \sigma \;\middle|\; a_\sigma \in \mathbb{F}, \; a_\sigma \neq 0 \text{ for only finitely many } \sigma \right\}.$$

对于 $n < 0$，令 $C_n(K; \mathbb{F})$ 为零向量空间。

我们称元素 $\tau \in C_n(K; \mathbb{F})$ 为一个 n-链。如果

$$\tau = \sum_{\sigma \in K^{(n)} \setminus K^{(n-1)}} a_\sigma \, \sigma$$

且 σ_0 是和式中的一个单形（即 $a_{\sigma_0} \neq 0$），我们记作 $\sigma_0 \in \tau$。

定义 2.13. 在 K 的顶点上固定一个偏序（例如全序） $\preceq$，使得每个单形 $\sigma \in K$ 都有全序。第 n 个边界映射 $\partial_n : C_n(K; \mathbb{F}) \longrightarrow C_{n-1}(K; \mathbb{F})$ 是如下定义的线性变换，对任意 $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\} \in K^{(n)} \setminus K^{(n-1)}$ 均有

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \{v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n\},$$

其中 $v_i \preceq v_{i+1}$ 适用于 $i = 0$、...、$n-1$，而 $\{v_0, \ldots, \hat{} v_i$、...、$v_n\}$ 表示从全序集合 $\{v_0, \ldots, v_n\}$.中移除第 i 个顶点 v_i 后得到的 $n-1(n-1)$面

可以证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ 。

定义 2.14。 对于 $n \in \mathbb{N}$、域 $\mathbb{F}$ 和单纯复形 K，令

$$\ker(\partial_n) = \{\tau \in C_n(K; \mathbb{F}) \mid \partial_n(\tau) = 0\} \qquad \textit{and} \qquad \operatorname{im}(\partial_{n+1}) = \{\partial_{n+1}(\beta) \mid \beta \in C_{n+1}(K; \mathbb{F})\} \subseteq \ker(\partial_n).$$

K 的 n阶同调（系数取自 $\mathbb{F}$ ）是商向量空间

$$H_n(K; \mathbb{F}) = \frac{\ker(\partial_n)}{\operatorname{im}(\partial_{n+1})}.$$

我们注意到， $H_n(K; \mathbb{F})$ 的同构类型与 K的顶点上的偏序无关。此外，当 $K = R_\epsilon(X, d)$ 且 $\epsilon \geq 0$ 时， $H_n\big(R_\epsilon(X, d); \mathbb{F}\big)$ 的非零元素对应于非平凡的 n-循环（即 $\ker(\partial_n)$ 中的元素），这些循环不界定 Rips 复形$R_\epsilon(X, d)$ 中的任何 $(n+1)$-链，因此度量了尺度 ϵ下 (X, d) 中的 n维孔洞。我们注意到

$$R_\epsilon(X, d) \subseteq R_{\epsilon'}(X, d) \quad \text{whenever } \epsilon \leq \epsilon',$$

这是以下定义的一个特例。

定义 2.15. 滤过单纯复形 $\mathcal{K}=\{K_\epsilon\}_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ 是由单纯复形 K_ϵ构成的集合，满足

$$K_\epsilon \subseteq K_{\epsilon'}$$

每当 $\epsilon \le \epsilon'$。我们将 $\mathcal{K}$ 称为一个滤过。

注意到该族

$$\mathcal{R}(X,d)=\{R_\epsilon(X,d)\}_{\epsilon\in\mathbb{R}}$$

按照定义 2.15，这是一个滤过复形，称为度量空间 ***Rips***滤过 (X,d)。持久同调的核心思想是，随着 ϵ 的变化，追踪滤过中同调类的演化。例如，随着 ϵ 增大，可能会看到多个连通分支（0-循环）合并为一个，或者一个空的球形空腔（2-循环）被填充。由此得到的多尺度概括记录在以下持久模的持久图中。

定义 2.16。设 $\mathcal{K}=\{K_\epsilon\}_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ 为一个滤过。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，定义 n阶持久模 e

$$H_n(\mathcal{K};\mathbb{F})=\left\{H_n(K_\epsilon;\mathbb{F}),\ T_{\epsilon,\epsilon'}:H_n(K_\epsilon;\mathbb{F})\longrightarrow H_n(K_{\epsilon'};\mathbb{F}),\ \epsilon\le\epsilon'\right\}$$

为由 $\mathbb{F}$-向量空间 $H_n(K_\epsilon;\ \mathbb{F})$ 以及由包含映射 $K_\epsilon \hookrightarrow K_{\epsilon'}$诱导的线性变换 $T_{\epsilon,\epsilon'}$ 组成的族，其中 $\epsilon\le\epsilon'$。n 阶持久同调群为

$$H_n^{\epsilon,\epsilon'}(\mathcal{K};\mathbb{F})=\mathrm{im}(T_{\epsilon,\epsilon'})$$

且它们在 $\mathbb{F}$ 上的维数就是持久贝蒂数

$$\beta_n^{\epsilon,\epsilon'}(\mathcal{K};\mathbb{F}):=\mathrm{rank}(T_{\epsilon,\epsilon'})=\dim_{\mathbb{F}}\left(H_n^{\epsilon,\epsilon'}(\mathcal{K};\mathbb{F})\right).$$

若 $\mathcal{K}=\{K_\epsilon\}_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $H_n(\mathcal{K};\mathbb{F})$ 是逐点有限维的，则定义2.7保证了条形码的存在

$$\mathrm{bcd}_n(\mathcal{K})=\mathrm{bcd}(H_n(\mathcal{K};\mathbb{F}))$$

以及持久图 $\mathrm{dgm}_n(\mathcal{K})=\mathrm{dgm}(H_n(\mathcal{K};\mathbb{F}))$。

注2。当 n阶同调在有限多个滤过值处发生变化时，所得的持久图可以用持久贝蒂数作特别简单的描述（见 [8, 第 106]页）。事实上，设 $\mathcal{K}=\{K_\epsilon\}_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ 是一个滤过，其 n阶持久模逐点有限，且仅在有限多个 ϵ值处发生变化，即 $\epsilon_1<\epsilon_2<\cdots<\epsilon_J$（也就是说，只有有限多个同调临界值）。那么，给定满足 $\epsilon_j<r_j<\epsilon_{j+1}$ 且 $r_0=\epsilon_{-1}=-\infty$和$r_{J+1}=\epsilon_{J+1}=\infty$的交错值，持久图 $\mathrm{dgm}_n(\mathcal{K})$ 是由具有正重数的点（ϵ_i，ϵ_j）构成的集合

$$\beta_n^{r_{i-1},r_j}(\mathcal{K};\mathbb{F})\ -\ \beta_n^{r_i,r_j}(\mathcal{K};\mathbb{F})\ +\ \beta_n^{r_i,r_{j-1}}(\mathcal{K};\mathbb{F})\ -\ \beta_n^{r_{i-1},r_{j-1}}(\mathcal{K};\mathbb{F}). \tag{1}$$

在本文中，除非另有说明，我们假设每个度量空间 (X,d) 都是有限的。因此，对于每个 $\epsilon\in\mathbb{R}$，Rips 复形 $R_\epsilon(X,d)$ 都是有限单纯复形，且持久模

$$H_n\left(\mathcal{R}(X,d);\mathbb{F}\right)$$

是逐点有限的。相应的条形码和持久图分别记作 $\mathrm{bcd}_n^R(X,d)$ 和 $\mathrm{dgm}_n^R(X,d)$，其中区间 $I\in\mathrm{bcd}_n^R(X,d)$ 左闭右开。区间 $[a,b)\in\mathrm{bcd}_n^R(X,d)$ 表示一个 n-环在 $\epsilon=a$ 处诞生，并在 $\epsilon=b$处变为平凡；其持久性（生命周期）$b-a$ 为这一同调特征的鲁棒性提供了度量。在扩展平面 $\mathbb{R}^2$ 中绘制 $\mathrm{dgm}_n^R(X,d)$，即可将 Rips 滤过 $\mathcal{R}(X,d)$ 的持久同调可视化。根据稳定性定理 2.19，远离对角线 $y=x$ 的点 $(a,b)\in\mathrm{dgm}_n^R(X,d)$ 表示 (X,d) 中鲁棒性较强的拓扑特征。接下来我们将介绍这一定理。

在研究度量空间和 Rips 滤过时，我们可以将相应持久图的瓶颈距离与 Gromov-Hausdorff距离联系起来。后者用于衡量有界度量空间之间的相似性，定义如下。

定义 2.17。 给定度量空间 (X,d)中的两个非空有界子集 A 和 B，豪斯多夫距离 $d_H(A,B)$ 定义为：

$$d_H(A,B)=\max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}d(a,b),\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}d(b,a)\right\},$$

其中， $d(a,b)$ 表示点 a 与 b 在 X中的距离。

定义 2.18. 对于两个有界度量空间 (X_1,d_1) 和 (X_2,d_2)，格罗莫夫–豪斯多夫距离

$$d_{GH}(X_1,X_2)$$

定义如下。任取一个公共度量空间 Z 以及一对等距嵌入 $\phi_1\colon X_1\to Z$和 $\phi_2\colon X_2\to Z$；计算 $\phi_1(X_1)$与 $\phi_2(X_2)$在 Z 中的豪斯多夫距离。于是， $d_{GH}(X_1,X_2)$ 是所有此类豪斯多夫距离的下确界：

$$d_{GH}(X_1,X_2)=\inf_{Z,\phi_1,\phi_2}d_H(\phi_1(X_1),\phi_2(X_2)).$$

上述联系正是著名的 Rips稳定性定理 [8, 7]。

定理 2.19. 设 X_1 和 X_2 是有限度量空间。则

$$d_B(\mathrm{dgm}_n^R(X_1,d_1),\mathrm{dgm}_n^R(X_2,d_2))\le 2d_{GH}(X_1,X_2).$$

除了稳定性之外，还可以描述度量积的 Rips持久性。

定义 2.20。 设(X,d_X)和(Y,d_Y)为度量空间。最大度量 d_∞定义为

$$d_\infty\big((x,y),(x',y')\big)=\max\{d_X(x,x'),d_Y(y,y')\},$$

其中(x,y)、$(x',y')\in X\times Y$.

注意到 $(X\times Y,d_\infty)$是一个度量空间。此外，它的条形码由 [12]给出：

定理2.21 (持久 K¨unneth 公式)。设 (X,d_X)和 (Y,d_Y)为有限度量空间。那么，

$$\mathrm{bcd}_n^R(X\times Y,d_\infty)=\bigcup_{i+j=n}\big\{I\cap J\mid I\in\mathrm{bcd}_i^R(X,d_X),\ J\in\mathrm{bcd}_j^R(Y,d_Y)\big\},$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$.

最后，我们给出一个在本文中反复使用的观察结果。

命题 2.22。 设 (X,d_X)和 (Y,d_Y)是两个有限度量空间。假设存在一个双射$f:X\to Y$，使得对于某个 $\lambda>0$

$$d_X(t_1,t_2)=\lambda d_Y(f(t_1),f(t_2)).$$

那么，

$$\mathrm{dgm}_n^R(X,d_X)=\left\{(\lambda a,\lambda b)\,:\,(a,b)\in\mathrm{dgm}_n^R(Y,d_Y)\right\}.$$

证明。 定义度量 $d_Y^\lambda=\lambda d_Y$于 Y上。根据假设， f是 (X,d_X)与 (Y,d_Y^λ)之间的等距变换。这意味着 f在所有$\epsilon\ge 0$上诱导出 $R_\epsilon(X,d_X)$与 $R_\epsilon(Y,d_Y^\lambda)$之间的单纯同构。进而，这会在相应的持久模之间诱导出同构，这意味着它们具有相同的持久图。 □

2.2 动力系统

在将持久同调作为度量离散数据形状的工具加以介绍之后，我们现在引入用于刻画上述数据来源的框架。事实上，若干现实世界中的科学测量源于潜在的确定性机制。尽管该机制可能未知或高度复杂，动力系统理论仍能对其进行数学描述。该框架由相空间 M 和函数 Φ 组成：前者表示系统的全部相关状态，后者记录系统的演化。以下定义取自 [33]。

定义 2.23. 全局连续时间动力系统是二元组(M, Φ)，其中 M 为拓扑空间， $\Phi\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ 为连续映射，使得对所有 $p \in M$ 以及所有 $t, s \in \mathbb{R}$，有 $\Phi(0, p) = p$，且 $\Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(s + t, p)$。

注意，任何自治常微分方程系统

$$\dot{x}(t) \;=\; \Lambda\big(x(t)\big), \quad x(t) \in M,$$

在光滑流形 M 上都定义了一个动力系统。其流 $\Phi_t\colon M \to M$ 由从每个初始条件出发的常微分方程积分曲线（解）给出。因此，系统的演化完全由向量场 Λ 和所选的初始状态决定。

以这种方式表示模型，有助于从拓扑角度理解系统。具体做法是考察相空间中的轨迹 M；事实上，尽管大多数系统只能通过数值方法求解，但给定方程后，对 M 中轨迹形状的一般认识能够提供关于系统的定性信息 [39]。尤其是，了解吸引子的拓扑——即 M 中能够吸引附近轨迹的子集——意义重大。形式化地说，

定义 2.24。如果集合 $A \subseteq M$ 满足以下条件，则称其为吸引子：

1. 它是紧的；*2.* 它是不变集，即若 $a \in A$，则对所有 $t \geq 0$， $\Phi(t, a) \in A$；*3.* 存在 A的一个不变开邻域 U，使得 $A = \bigcap \{\ \Phi(t, p)\ \mid p \in U\ \}_{t \geq 0}$

例 **例 2.25**。考虑由以下径向方程（在极坐标中）给出的动力系统

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \qquad \dot{\theta} = 1$$

其中 $r \geq 0$. 该系统在 xy平面上有一个圆作为吸引子，如图 4 （左侧）红色所示。**例 2.26.** 考虑范德波尔方程

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

其中 $\mu \geq 0$ 是一个参数。该系统在 $x\dot{x}$平面上也有一个吸引子，如图 4（右侧）所示。在这种情况下，它不是一个圆形的单位圆，但与单位圆拓扑等价。

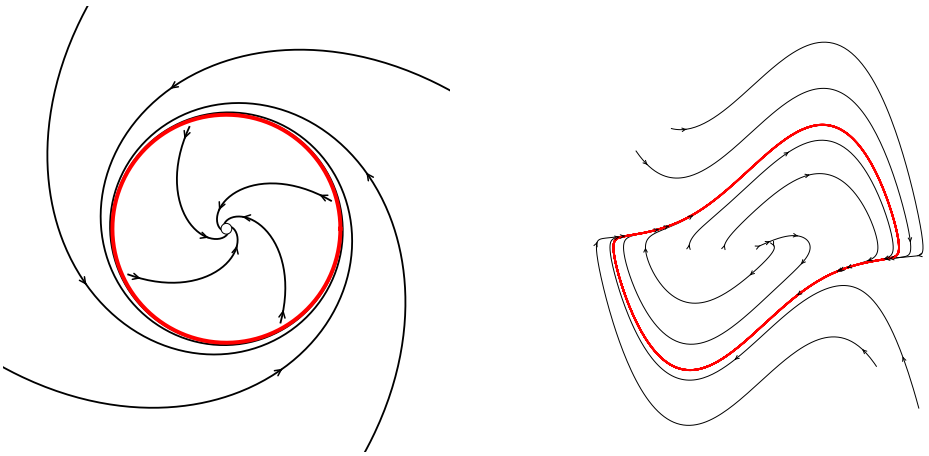


图 4：例 2.25 中系统的轨迹，绘制于 xy平面（左侧）；以及例2.26 中系统的轨迹，绘制于 $x\dot{x}$ 平面（右侧）。两种情况下，吸引子都是以红色突出显示的拓扑圆。

与圆同胚的吸引子对应于表现出周期性的系统。一般而言，与 N维环面同胚的吸引子，即环面吸引子，来自一个拟周期系统 [13]。在实践中，我们通常只能以时间序列数据的形式获得对动力系统的测量结果。支配系统的潜在方程是未知的——即既没有给出M ，也没有给出 Φ 。尽管如此，仍有一种方法可以重构这个未知系统的吸引子，同时保留定性信息。具体而言，Takens 1981年里程碑定理 [40] 表明，单个时间序列测量——从一般观测函数中采样得到——足以重构潜在吸引子的拓扑。

定理 2.27 (**Takens 嵌入**)。 设 M 是一个 m维紧黎曼流形。对于满足 $(\phi, \bar{f})$ 的有序对，其中 $\phi \in C^2(M, M)$ 以及 $\bar{f} \in C^2(M, \mathbb{R})$，映射 $\Psi_{\phi,\ \bar{f}}$: $M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ 定义如下，具有通有性质:

$$\Psi_{\phi,\bar{f}}(p) = \big(\bar{f}(p), \bar{f}(\phi(p)), \bar{f}(\phi^2(p)), \ldots, \bar{f}(\phi^{2m}(p))\big)$$

是一个嵌入。

$\Psi_{\phi,\ \bar{f}}$的像所给出的重构可能与原始状态空间 M看起来不同，但我们可以确信它们拓扑等价。这一有力保证验证了滑动窗口嵌入 （定义如下）可用于从时间序列数据重构观测动力学。

定义 2.28。 对于函数 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$、称为嵌入维数的整数 $d > 0$ 以及称为时间延迟的实数 $\tau > 0$， f 在 t 处的滑动窗口嵌入定义为:

$$SW_{d,\tau} f(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ f(t+\tau) \\ \vdots \\ f(t+d\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{d+1}.$$

对于 $T \subseteq \mathbb{R}$ 一组时间点， f 在 T 处采样得到的滑动窗口点云是 et

$$\mathbb{SW}_{d,\tau}(T) = \{\, SW_{d,\tau} f(t) \mid t \in T\}.$$

¯在动力系统 Φ: $\mathbb{R} \times M \longrightarrow M$、观测函数 f: $M \longrightarrow \mathbb{R}$以及初始条件 $p_0 \in M$的情形下，若轨迹 $t \mapsto \Phi(t,\ p_0)$稠密采样吸引子 $A \subseteq M$，则¯Takens 定理表明，对时间序列 $t \mapsto f \circ \Phi(t,\ p_0)$进行滑动窗口嵌入（使用适当的参数 $\tau > 0$ 和 $d \geq \dim(M)$），可生成一个点云，其 Rips 持久图可用于推断 A的同调。

特别是，对于环面吸引子，并根据 d、 τ选择 [13],，我们检测到一个 N 维环面的同调特征，如图 3 和 5 所示。总之，给定时间序列数据，检测环面吸引子是否存在的步骤如下:

1. 从与系统测量相关的时间序列开始,
2. 据此构建滑动窗口点云,
3. 计算其持久图，以确定该点云是否采样自一个 N 环面。

尽管滑动窗口和持久同调已得到充分研究，并已应用于多个领域[41, 34, 12], ，计算持久图仍然十分耗费计算资源。接下来我们将介绍相关工具，以便快速近似由准周期函数生成的滑动窗口点云的 Rips持久图。

2.3 准周期信号的傅里叶分析

定义2.29. 我们称 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 以频率向量 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$为准周期的，如果$\{\omega_i\}_{i=1}^N$ 是在 $\mathbb{Q}$上线性无关（即不可公度）的正实数，并且

$$f(t) = F(\omega_1 t, \ldots, \omega_N t),$$

其中 F: $\mathbb{T}^N \to \mathbb{C}$ 是 N-环面 $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$上的复值连续函数，称为 f的母函数。

如下文将看到的，可以利用准周期函数的谱来推断其底层频率向量，并近似滑动窗口点云的Rips持久图。这一点由以下结果 [13, 定理1.7和推论1.13]所实现。

定理 2.30。 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是频率向量为 ω 、母函数为F的准周期函数。对于每个$\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N$， F的$\mathbf{k}$阶傅里叶系数可计算为

$$\hat{F}(\mathbf{k}) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) e^{-2\pi i \langle \mathbf{k}, t\omega \rangle} dt,$$

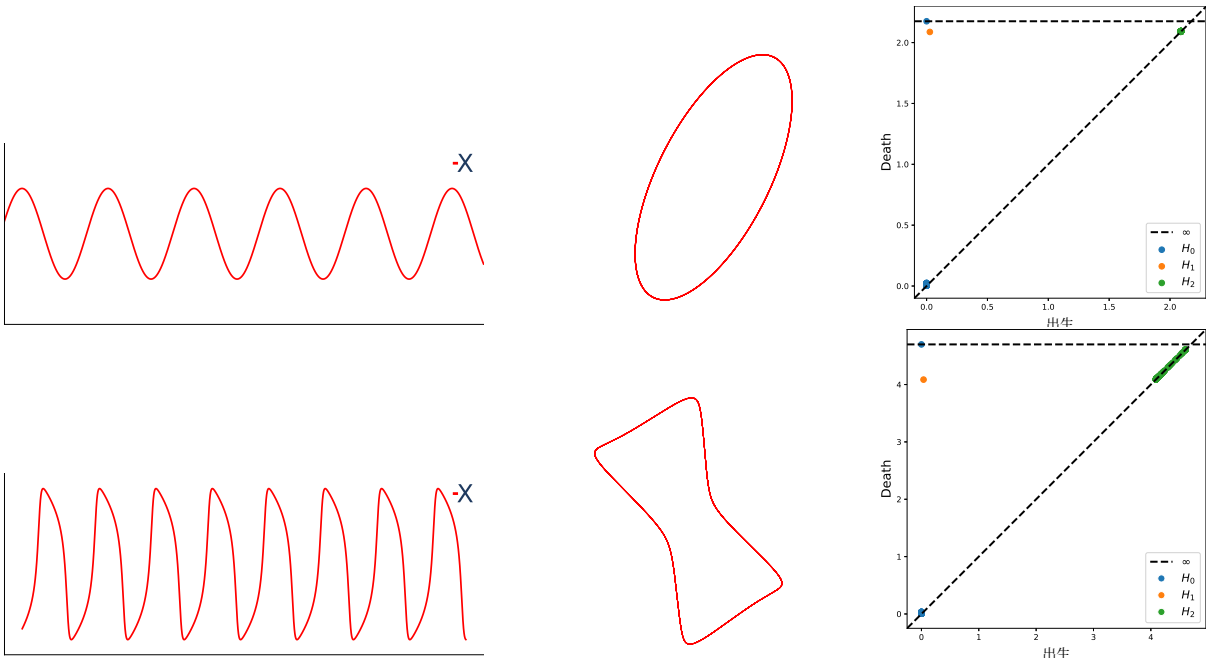


图5：左列：示例 $x(t)$中径向系统的解的坐标，以及示例2.25 （上排）和示例2.26 （下排）中范德波尔系统的解。中列：采用合适的参数 $x(t)$和 d 以及 τ得到的滑动窗口嵌入。右列：滑动窗口点云在维数0、1和2上的Rips持久图。

其中 $i=\sqrt{-1}$。此外，如果

$$S_K f(t)=\sum_{\|\mathbf{k}\|_\infty \le K} \hat{F}(\mathbf{k}) e^{2\pi i\langle \mathbf{k}, t\omega\rangle} \quad , \quad K\in\mathbb{N}$$

那么，对于每个 j、$T\in\mathbb{N}$，持久图$\mathrm{dgm}_j^R(\mathbb{SW}_{d,\ \tau} f(T))$都可以通过瓶颈距离近似为

$$\mathrm{dgm}_j^R(\mathbb{SW}_{d,\tau} S_K f(T))$$

当 $K\to\infty$时。若 $|\hat{}F(\mathbf{k})|=O(\|\mathbf{k}\|_2^{-r})$ 且 $r>N/2$.，该近似的阶为$O\big(K^{\frac{N}{2}-r}\big)$

定理2.30 表明，在瓶颈距离意义下，准周期信号 f的Rips持久图可以由其截断傅里叶级数 $S_K f(t)$的Rips持久图任意精确地近似。此外， $S_K f$ 的系数由 f的谱决定，该谱可通过离散傅里叶变换（由快速傅里叶变换算法实现）进行估计。

这一结果说明，可以将一般的准周期函数归约为如下形式的有限指数和

$$f(t)=\sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{2\pi i\,\omega_j t}, \quad M\in\mathbb{N},\ c_j\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ \omega_j\in\mathbb{R},$$

其中 ω_1、.....、ω_M不一定是 $\mathbb{Q}$线性无关的。设 $\tilde{c}_j=\sqrt{d+1}\,c_j$，选取嵌入维数 $d\in\mathbb{N}$ 和延迟 $\tau>0$，并令

$$A=\frac{1}{\sqrt{d+1}}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{2\pi i\,\omega_1\tau} & \cdots & e^{2\pi i\,\omega_M\tau} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{2\pi i\,\omega_1 d\tau} & \cdots & e^{2\pi i\,\omega_M d\tau}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{(d+1)\times M}, \quad v_t=\begin{pmatrix}\tilde{c}_1\, e^{2\pi i\,\omega_1 t}\\ \vdots \\ \tilde{c}_M\, e^{2\pi i\,\omega_M t}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^M.$$

在此设定下，滑动窗口嵌入可以简洁地写为

$$SW_{d,\tau} f(t)=A\,v_t,$$

并且根据 [13, 推论 1。3], 集合 $\{v_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个与N维环面同胚的空间中的稠密子集，其中 $N \leq M$等于 $\text{span}_{\mathbb{Q}}\{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$作为一个 $\mathbb{Q}$-向量空间时的维数。克罗内克逼近定理的多维版本，如 [16, 第 2 章定理 2],所述，允许取 $t \in \mathbb{N}$ 并保持稠密性。此外， d 和 τ 可以选择为使同样的结论对 $\{SW_{d,\tau}f(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ [13, 定理 1。15]。

考虑到这一点，笛卡尔积

$$G_T = \prod_{j=1}^{M} \{\tilde{c}_j e^{2\pi i \omega_j t} \mid t = 0, 1, \ldots, T\}, \tag{2}$$

提供了一种逼近 $\{v_t\}_{t=0}^{T}$ 的途径，使其在豪斯多夫距离意义下被逼近，从而所得Rips持久图在瓶颈距离意义下亦被逼近，由定理2.19，当 $T \to \infty$时。另见图10。这很有用，因为 G_T 的持久图可利用持久K¨unneth公式（定理2.21）直接计算。我们将在定理4.3 中证明，该方法可用于逼近 f的滑动窗口嵌入的Rips持久图。

2.4 连分数展开

实数的连分数展开是我们工作的核心。本节中的所有定义、命题和定理都是经典的，可在标准参考文献中找到——尤其是[31, 第 3], 章；关于定理2.38 ，参见例如 [36, 第 22]页。我们将证明，一旦信号的频率被估计出来——例如借助快速傅里叶变换——连分数数据便使我们能够推断滑动窗口点云的持续同调信息。

定义 2.31. 设 ω 为实数。 ω 的连分数展开为

$$\omega = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}} := [a_1, a_2, a_3, \cdots],$$

其中 $a_1 \in \mathbb{Z}$ 和 $a_k \in \mathbb{N}$，对于 $k > 1$.

注意，通过反复应用带余除法得到的展开，当且仅当 ω 是无理数时才是无限的。从此处开始，我们用 ω 表示一个正无理数。

定义 2.32. 设 $k \in \mathbb{N}$. 。 ω 的第 k 个渐近分数为

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_1, a_2, \cdots, a_k] \in \mathbb{Q}.$$

The 项 p_k 和 q_k 在理论中起着特殊作用，并可通过以下递归方式得到 s.

命题 2.33. ω 的第 k 个渐近分数的分子 p_k 和分母 q_k 满足以下方程

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}$$

对于 $k \geq 1$，其中

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \qquad & p_{-1} &= 0, \\ q_0 &= 0, \qquad & q_{-1} &= 1. \end{aligned}$$

命题 2.33 提供了一种方便的计算方法，用于求得第 k个属于ω的渐近分数，并蕴含如下结果。

命题 2.34. p_k 与 q_k 互素。

我们可以通过考察绝对误差，量化渐近分数 p_k/q_k 作为 ω 的近似的质量

$$\left|\omega - \tfrac{p_k}{q_k}\right|.$$

命题 2.35。设 $k \geq 1$。那么

$$\frac{1}{2q_k q_{k+1}} < \left|\omega - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}.$$

此外，这一结果使我们能够证明无限连分数展开的存在性与唯一性。事实上，注意到 $q_k < q_{k+1}$ 对所有 $k \geq 1$ 都成立，即可得出这一结论，也为定义2.31中的等号提供了依据。下一个结果将进一步刻画它们的收敛行为。

命题 2.36. 设 $k \geq 1$ 为奇数，则

$$\frac{p_k}{q_k} < \omega < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

例 2.37. 这里给出的结果可用于论证，黄金比例 φ 是“最”无理的数。事实上，通过计算

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}} = [1, 1, 1, \cdots],$$

可以证明，这一表达式对应于可能的最慢收敛速度。图*6* 所示的克莱因图为这一观察提供了几何图像。

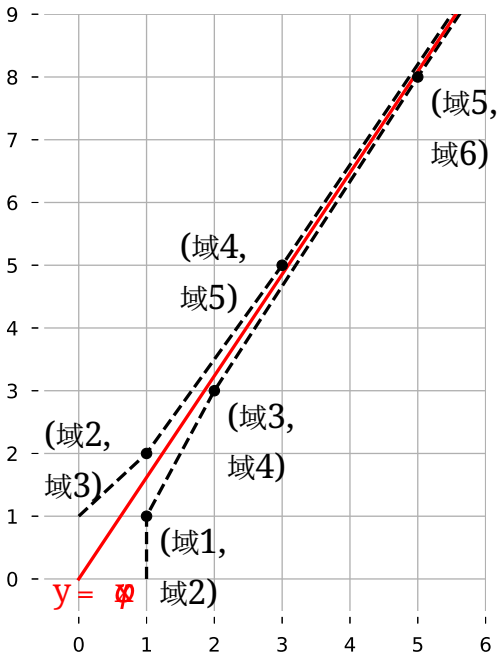


图 6：黄金比例 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的克莱因图。这里，F_k 表示第 k 个斐波那契数，可用于计算 φ 的第 k 个渐近分数 $\frac{p_k}{q_k}$；具体而言，$\frac{p_k}{q_k} = \frac{F_k}{F_{k-1}}$。

我们在本节末尾陈述一个关键性质，即第 k 个关于 ω 的渐近分数的性质，该性质归功于拉格朗日。也就是说，第 k 个渐近分数给出了对 ω 的具有有界分母的最佳有理逼近（参见 [36, 第 22]页）。

定理 2.38. 设 a/b 不同于 p_{k+1}/q_{k+1}，且 $0 < b \leq q_{k+1}.$，则

$$|b\omega - a| \geq |q_k\omega - p_k| > |q_{k+1}\omega - p_{k+1}|.$$

2.5 三间隙定理方法

至此，我们已经证明，指数函数是研究准周期信号的基础，其频率可以用其 k 阶渐近分数进行最佳逼近。如果令

$$f(t) = e^{2\pi i \omega t},$$

那么将其视为映射 $f\colon \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $f(t)$，即可参数化单位圆。取一个自然数 $T \in \mathbb{N}$，并考虑时刻 $t = 0, 1, \ldots, T$。由此得到样本

$$\{ f(t) \mid t = 0, 1, \ldots, T\} = \left\{ e^{2\pi i \omega t} \mid t = 0, 1, \ldots, T\right\}$$

在平坦坐标（即模 1）下，对应于

$$\{ t\omega \bmod 1 \mid t = 0, 1, \ldots, T\} \subseteq [0, 1].$$

定义 2.39. 对于任意实数 $x \in \mathbb{R}$，记

$$[x] = x \bmod 1$$

表示其在平坦圆 $[0, 1]/0 \sim 1$ 上的等价类。对于 $T \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，令

$$S_{\omega,T} := \left\{[0], [\omega], [2\omega], \ldots, [T\omega]\right\}.$$

通过将 $[0, 1]$, 的端点识别起来，我们将 $S_{\omega,\ T}$ 视为圆上的有限点列（见图 7）。为度量此空间中的距离，我们使用商度量

$$\bar{d}([x], [y]) = \min\left\{|x - y|,\ |1 - (y - x)|,\ |1 - (x - y)|\right\},$$

它使 $\left(S_{\omega,\ T},\ \bar{d}\right)$ 成为一个度量空间。书写 $S_{\omega,\ T}$时，除非另有说明，我们要求 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。关于该集合的渐近采样性质已有详尽论述 [49]，且在很大程度上源于三间隙定理（Steinhaus猜想） [42],，该定理陈述如下。

定理 2.40 (**三间隙定理**)。 设 $T \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。$S_{\omega,\ T}$ 中的点将$[0, 1]/0 \sim 1$ 划分为 $T + 1$ 个区间，其长度至少取两种、至多取三种不同的值。若出现三种不同的长度，按递增顺序记为 δ_A、 δ_B和 δ_C，则

$$\delta_C = \delta_A + \delta_B.$$

重要的是，三间隙定理的结论——不同区间长度至多有三种——对每个无理数 ω 以及每个样本量 T都成立。我们在图 7 中展示三间隙定理的内容，其中 $\omega = \pi - 1$ _(左侧）、$\omega = \sqrt{5}$ （右侧）以及 $T = 17$。

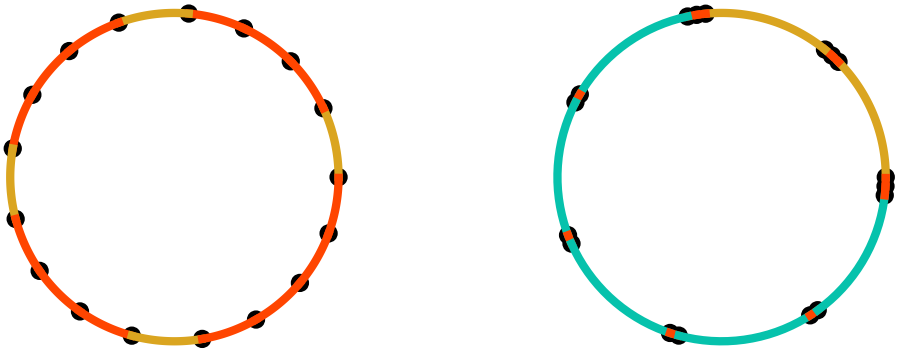


图 7：左侧以黑色显示 $S_{\pi-1,\ 17}$。每种间隙大小以不同颜色表示；在此情形下，只有两种不同间隙（红色和黄色）。右侧以黑色显示 $S_{\sqrt{5},\ 17}$，其中有三种不同的间隙大小（绿色、红色和黄色）。

三间隙定理中的长度 δ_A、 δ_B 和 δ_C 实际上由ω [23]的渐近分数决定；有关间隙及其重数的显式公式，请参见命题 3.2 。这一观察完整描述了 $S_{\omega,\ T}$中相邻点之间的成对距离。下一节将展示如何利用这些距离计算 Rips 滤过_$\mathcal{R}$（S_{ω}、 d）的持久图；示例见图 9。由此，我们提出了一种近似方案，用于计算准周期函数的滑动窗口点云的持久图：三间隙定理方法（3G），其示意图见图 8。

简而言之，我们首先提取输入准周期信号的独立频率 ω_j；然后，对于每个频率 ω_j，计算其连分数展开，并利用其渐近分数求出长度

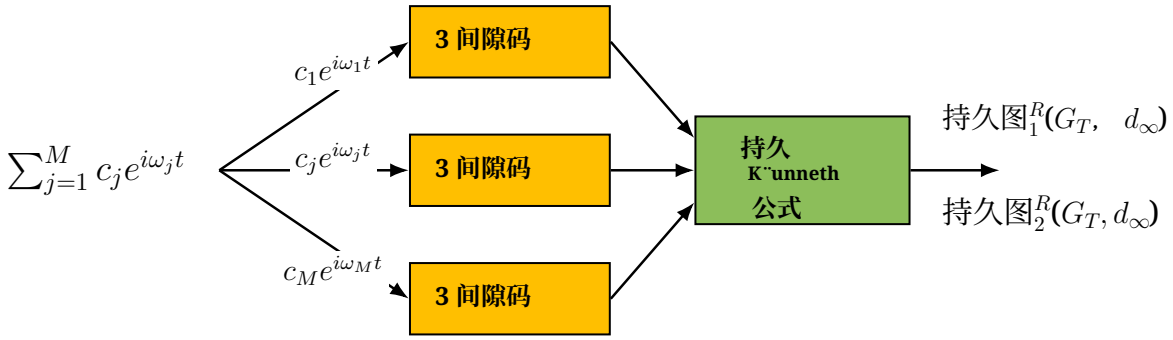


图 8：3G 方法的示意图。从近似准周期函数的指数和出发，我们通过快速傅里叶变换提取其频率参数。然后，对每个频率圆分别应用三间隙构造，并计算所得的持久图。最后，我们使用持久 K¨unneth 公式组合这些单独的图，从而近似原始信号的滑动窗口点云的 Rips持久性。

δ_A、δ_B（以及适用时的 $\delta_C = \delta_A + \delta_B$）在（$S_{\omega_j}$、$T$、$d$）中的长度及其重数（见命题 3.2）；这些间隙的长度和重数用于推导条形码 $\mathrm{bcd}_n^R(S_{\omega_j,T}, \bar{d})$ 和持久图 $\mathrm{dgm}_n^R(S_{\omega_j,T}, \bar{d})$——这正是推论 3.4、推论 3.8 以及下文算法 1 的输出所阐述的内容；最后，我们使用持久 K¨ünneth 定理计算 $\mathrm{dgm}_n^R(G_T, d_\infty)$——$G_T$的定义见公式 (2)，相关结果见定理 4.5。通过 $\mathrm{dgm}_n^R(G_T, d_\infty)$ 对 $\mathrm{dgm}_n^R(\mathbb{SW}_{d,\tau} f(T)\ d_2)$ 进行近似的质量，将在第 4 节中详细讨论，其中 d_2 表示 $\mathbb{C}^{d+1}$中的标准欧几里得距离。相关近似结果见定理 4.3，备注 3 对此作了进一步阐释。

算法 1 3 间隙码

1：输入频率 ω_j2：尺度频率 $\omega_j = \omega_j/(2\pi)$3：获取 ω_j的连分数展开（C.F.E.）4：如命题3.2 所示，利用连分数展开获取间隙及其重数5：按照定理4.5 中所述对间隙进行缩放，以获得 $\mathcal{R}(S_{\omega_j,\ T},\ d)$的条形码

3 主要结果

现在我们将详细阐述三间隙定理与持久图之间的联系。借助该定理，我们可以利用通过对准周期信号进行快速傅里叶变换所估计出的底层频率的连分数展开信息，计算持久图。在此基础上，我们将说明如何利用持久 K¨unneth 公式，为准周期函数的滑动窗口嵌入建立一种持久图的逼近方法。最后，我们将说明如何为该方法推导误差界。

3.1 持久图

计算持久图$_0^R$（$S_{\omega,\ T},\ \bar{d}$）借助三间隙定理可归结为将间隙的长度与 ω的渐近分数联系起来。尽管间隙大小与渐近分数之间的联系是经典结果（见 [42, 5]），我们仍给出三间隙定理的另一种证明，以突出每个连分数系数如何对 0 阶持久图作出贡献。在全文中，令 $\{0, 1, \ldots, T\} \subseteq \mathbb{N}$ 表示时间值的（离散）集合，并令 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 为一个无理频率。我们首先求出 $S_{\omega\text{中的一个点到其最近邻的距离：}\ T}$

$$Cl(j) = \min\left\{\bar{d}([j\omega], x) \mid x \in S_{\omega,T} \setminus \{[j\omega]\}\right\} \quad , \quad 0 \le j \le T.$$

引理 3.1。令 $T \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，其 i 阶渐近分数为 $\frac{p_i}{q_i}$。固定 $0 \le j_0 \le T$ 并令

$$\bar{k}(j_0) = \max\{j \mid q_j \le \max\{j_0, T - j_0\}\}.$$

如果 $0 \le j_1 \le T$ 满足

$$|j_0 - j_1| = q_{\bar{k}(j_0)}$$

then

$$Cl(j_0) = \bar{d}([j_0\omega], [j_1\omega]).$$

证明。令 $\bar{}$ 我们首先证明 $j_0 = 0$. 情形下的结果。在此情形下，$Cl(j_0) = d([j_0\omega], [j_1\omega])$ 当且仅当 if

$$[j_1\omega] = \min\{[j\omega], 1 - [j\omega] \mid 1 \le j \le T\}.$$

后者等价于寻找 $p \in \mathbb{N}$，使得对于所有 p_0，$q_0 \in \mathbb{N}$，其中 $q_0 \le T$

$$|j_1\omega - p| \le |q_0\omega - p_0|.$$

根据定理 2.38，这由 ω 的渐近分数满足，即由 $j_1 = q_{\bar{k}(0)}$ 和 $p = p_{\bar{k}(0)}$. 满足。这证明了 $j_0 = 0$. 情形下的结果。对于一般情形，注意到由于

$$\bar{d}([j_0\omega], [j_1\omega]) = \bar{d}(0, [|j_0 - j_1|\omega])$$

我们可以应用之前的论证，但现在将 $p_0 \le$ 限制为 $\max\{j_0, T - j_0\}$，因为 $|j_0 - j_1| \le \max\{j_0, T - j_0\}$. 类似地，当 $|j_0 - j_1| = q_{\bar{k}_j(j_0)}$ 时取得最小值，结论得证。

□

命题 3.2。设 $T \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 的连分数展开为 $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$，其 i 阶渐近分数为 $\frac{p_i}{q_i}$，并将 $S_{\omega,\ T} = \{[0], [\omega], \ldots, [T\omega]\}$ 的元素按升序排列为

$$[n_i\omega] < [n_{i+1}\omega] \quad for\ 0 \le i < T.$$

设 k、r、s 为满足以下条件的唯一整数

$$q_k + q_{k-1} \le T < q_k + q_{k+1}$$

$$T = rq_k + q_{k-1} + s, \qquad 1 \le r \le a_{k+1}, \qquad 0 \le s \le q_k - 1$$

并对每个 i 令 $D_i = q_i\,\omega - p_i$。若

$$\delta_A = |D_k|, \qquad \delta_B = |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r)|D_k|, \qquad \delta_C = \delta_A + \delta_B,$$

且 $\oplus$ 表示模 $T + 1$ 加法，则对于 $0 \le i \le T$

$$\{\bar{d}([n_i\omega], [n_{i\oplus 1}\omega])\} \subseteq \{\delta_A, \delta_B, \delta_C\}.$$

$\bar{}$ 此外，记间隙的重数为 $N_I = \#\{i \mid d([n_i\omega], [n_{i\oplus 1}\omega]) = \delta_I\}$，则有

$$N_A = T + 1 - q_k, \qquad N_B = s + 1, \qquad N_C = q_k - s - 1.$$

证明。我们首先证明 k、r、和 s. 的存在性与唯一性。对于所有 $i \ge 0$

$$q_i + q_{i-1} < q_i + q_{i+1}.$$

因此，对某个 k，由 $\{q_i + q_{i-1}\}_i$. 的单调性可知，该 k 是唯一的。我们还注意到，根据假设 $T - q_{k-1} \ge q_k$，由带余除法可知，存在唯一的 r，s，使得

$$T - q_{k-1} = rq_k + s,$$

其中 $1 \le r$ 且 $0 \le s \le q_k$. 另一方面，由于 $T - q_{k-1} < q_k + q_{k+1} - q_{k-1} = (a_{k+1} + 1)q_k$，根据命题 2.33，我们得出 $r \le a_{k+1}$. 这证明了 k、r、以及 s 的存在性与唯一性，如结果所述。

为便于下文表述，我们定义点的“右侧”和“左侧”$\bar{}$ 的概念。对于 x，$y \in S_{\omega,\ T}$，若在此表示中从 x 顺时针移动到 y 即可得到 $d(x,\ y)$，则称 y 位于 x 的右侧。同理，若逆时针移动即可得到该距离

¯用于定义左侧。由于平移在 d 下是等距变换，我们注意到，当且仅当对所有 $j \geq 0$， [， $i_1 + j($ $\omega]$)分别位于[$(i_2 + j)$的右侧或左侧时， $[i_1\omega]$ 才位于 $[i_2\omega]$ 的右侧或左侧。我们会反复用到这一事实。

现在我们来证明

$$\{\bar{d}(0, [n_1\omega]), \bar{d}(0, [n_T\omega])\} = \{\delta_A, \delta_B\}.$$

根据平移映射的等距性质，这个等式适用于$S_{\omega,T}$ 中的一般点。特别地，它将使我们能够计算 N_A, N_B，并找出达到相应间隙的显式点对。不失一般性，我们假设

$$[q_k\omega] \leq 1/2,$$

即， $[q_k\omega]$ 位于 0 的右侧。根据命题2.36 $[q_{k-1}\omega]$ 和 $[q_{k+1}\omega]$ 位于 0 的左侧，即， $[q_k\omega] \lhd [q_{k-1}\omega]$， $[q_{k+1}\omega]$. 因此，根据引理3.1 $n_1 = q_k$ 从而

$$\bar{d}(0, [n_1\omega]) = [q_k\omega] = \delta_A.$$

事实上，引理3.1 还表明

$$[q_k\omega] < [q_{k-1}\omega] < [q_{k+1}\omega].$$

此外，由于

$$\bar{d}([q_{k-1}\omega], [(q_{k-1} + q_k)\omega]) = \bar{d}([q_k\omega], 0) = [q_k\omega]$$

并且，根据定理2.38，

$$\bar{d}([q_k\omega], 0) < \bar{d}([q_{k-1}\omega], 0)$$

我们得出结论

$$[q_{k-1}\omega] < [(q_{k-1} + q_k)\omega].$$

重复这一论证，并注意到 $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$ ，我们可以说，对于 $0 \leq i \leq a$ $_{k+1}$

$$[q_{k-1}\omega] \leq [(q_{k-1} + iq_k)\omega] \leq [(q_{k-1} + (i+1)q_k)\omega] \leq [q_{k+1}\omega].$$

因此，

$$\bar{d}([(q_{k-1} + iq_k)\omega], 0) = \bar{d}([q_{k+1}\omega], 0) + \sum_{j=0}^{a_{k+1}-i-1} \bar{d}([(q_{k-1} + jq_k)\omega], [(q_{k-1} + (j+1)q_k)\omega])$$

$$= |D_{k+1}| + (a_{k+1} - i)|D_k|.$$

由引理 3.1 我们可以得出结论 $n_T = q_{k-1} + rq_k$ 上述计算表明

$$\bar{d}([(q_{k-1} + rq_k)\omega], 0) = |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r)|D_k| = \delta_B.$$

因此，我们已经证明

$$\{\bar{d}(0, [n_1\omega]), \bar{d}(0, [n_T\omega])\} = \{\delta_A, \delta_B\}.$$

现在考虑 $n_j \in [0,(r-1)q_k + q_{k-1} + s]$. 由于 $n_j + q_k \leq T$ 且

$$\bar{d}([n_j\omega], [(n_j + q_k)\omega]) = \bar{d}([q_k\omega], 0) = [q_k\omega] = \delta_A$$

根据与 $n_j = 0$ 相同的推理，我们得出 $[(n_j + q_k)\omega]$ 是 $[n_j\omega]$，右侧的最近点，即 $n_{j\oplus 1} = n_j + q_k$. 。这表明存在

$$(r-1)q_k + q_{k-1} + s + 1 = (rq_k + q_{k-1} + s) + 1 - q_k = T + 1 - q_k$$

个长度为 δ_A 的不同间隙，即 $N_A = T + 1 - q_k$.

类似地，对于 $n_j \in [rq_k + q_{k-1}, T]$，我们注意到

$$n_j - (rq_k + q_{k-1}) \in [0, s]$$

因此

$$\bar{d}([n_j\omega], [(n_j - (rq_k + q_{k-1}))\omega]) = \bar{d}([(rq_k + q_{k-1})\omega], 0) = |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r)|D_k| = \delta_B.$$

沿用情形 $n_j = rq_k + q_{k-1}$ 的论证，我们得出 $[(n_j - (rq_k + q_{k-1}))\omega]$ 是 $[n_j\omega]$ 左侧的最近点，即 $n_{j-1} = n_j - (rq_k + q_{k-1})$。因此，存在 $s+1$ 个不同的间隙，长度为 δ_B，即 $N_B = s+1$.

接下来需要考虑的是情形 $n_j \in ((r-1)q_k + q_{k-1} + s,\ rq_k + q_{k-1})$。若 $r > 1$，我们注意到

$$\bar{d}([n_j\omega], [(n_j - q_k)\omega]) = \bar{d}([q_k\omega], 0) = [q_k\omega] = \delta_A.$$

因此，$n_{j-1} = n_j - q_k$。由于 $n_j - q_k < (r-1)q_k + q_{k-1} + s$，我们已经将这个间隙计入。另一方面，我们注意到

$$\bar{d}([n_j\omega], [n_{j\oplus 1}\omega]) \neq \delta_A, \delta_B$$

由于 $n_j + q_k,\ n_j + (rq_k + q_{k-1}) > T$. 根据前面给出的不等式

$$[q_{k-1}\omega] \leq [(q_{k-1} + iq_k)\omega] \leq [(q_{k-1} + (i+1)q_k)\omega] \leq [q_{k+1}\omega],$$

我们得出下一个最小间隙长度为

$$|D_{k+1}| + (a_{k+1} - (r-1))|D_k| = |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r + 1)|D_k| = \delta_A + \delta_B = \delta_C.$$

当 $n_{j+1} = n_j - ((r-1)q_k + q_{k-1})$时，这个间隙可以取到。因此，长度为 δ_C的不同间隙有 $q_k - s - 1$ 个，即 $N_C = q_k - s - 1$.

我们已我们已经证明存在长度为 δ_A、δ_B和 δ_C 的不同间隙，即相邻点之间的距离 . 此外 ，由于

$$N_A + N_B + N_C = T + 1$$

我们可以得出结论，所有间隙均已计入，即

$$\{\bar{d}([n_i\omega], [n_{i\oplus 1}\omega])\} \subseteq \{\delta_A, \delta_B, \delta_C\}.$$

结果得证。 □

显然，三间隙定理由命题3.2推出。此外，命题3.2详细说明了间隙长度与 k 阶渐近分数 ω 之间的关系。下一个定理将其在 $S_{\omega,\ T}$ 的零维持久图中的含义表述出来。为使论述简洁，我们假设$r < a_{k+1}$ 和 $s + 1 < p_k$ ；其他参数范围将导出类似结论:

- **情形** $r \geq a_{k+1}$。在这一范围内，可以证明 $\delta_A > \delta_B$。接下来，在定理 3.3 中，交换标签 δ_A 和 δ_B，从而使间隙长度的组合模式保持不变。
- **情形** $s + 1 \geq p_k$。这里 $N_C = 0$，也就是说不会出现第三个间隙。等价地，相邻点的最终合并发生在 $\epsilon = \max\{\delta_A, \delta_B\}$，此时它在定理的描述中起到 δ_C 的作用。

在每种情形中，重新标记或省略相应的间隙长度，即可看出定理 3.3的证明无需改动即可沿用。

定理 3.3。设 $T \in \mathbb{N}$和 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$的连分数展开为 $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$，其第 i个收敛分数为 $\frac{p_i}{q_i}$，并设 k、r、s是满足下式的唯一整数

$$q_k + q_{k-1} \leq T < q_k + q_{k+1}$$

and

$$T = rq_k + q_{k-1} + s, \qquad 1 \leq r \leq a_{k+1}, \qquad 0 \leq s \leq q_k - 1.$$

Let

$$D_i = q_i\,\omega - p_i,$$

并假设

$$r < a_{k+1} \quad and \quad s + 1 < p_k.$$

Then

$$H_0(R_\epsilon(S_{\omega,T}, \bar{d}); \mathbb{F}) = \begin{cases} \mathbb{F}^{T+1} & 0 \leq \epsilon < |D_k| \\ \mathbb{F}^{q_k} & |D_k| \leq \epsilon < |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r)|D_k| \\ \mathbb{F}^{q_k - s - 1} & |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r)|D_k| \leq \epsilon \\ & < |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r + 1)|D_k| \\ \mathbb{F} & |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r + 1)|D_k| \leq \epsilon \end{cases}$$

证明。设 δ_I，N_I，其中 $I \in \{A, B, C\}$，如命题 3.2 中所定义。由于 $r < a_{k+1}$ 我们注意到 $k(T) = k$ 因此由引理 3.1

$$\delta_A < \delta_B.$$

此外，由于 $s+1 < q_k$，间隙有三种可能的长度，即 $N_C > 0$.在
$\epsilon = 0$

$$H_0(R_0(S_{\omega,T}, \bar{d}); \mathbb{F}) = \mathbb{F}^{T+1}$$

根据定义。我们可以将其解释为由间隙分隔的连通分支，即其中有 $N_A + N_B + N_C = T + 1$ 个。由于当 ϵ 大于或等于两点之间的距离时，Rips 复形会连接这两个点，点首次被连接的时刻是在 $\epsilon = \delta_A$. 。现在，新形成的连通分支彼此之间仅在长度为 δ_B 和 δ_C 的间隙处分隔，即

$$H_0(R_{\delta_A}(S_{\omega,T}, \bar{d}); \mathbb{F}) = \mathbb{F}^{N_B+N_C} = \mathbb{F}^{q_k}.$$

类似地，我们下一次连接点发生在 $\epsilon = \delta_B$，此时剩余的连通分支将仅由 N_C 个间隙分隔，因此

$$H_0(R_{\delta_B}(S_{\omega,T}, \bar{d}); \mathbb{F}) = \mathbb{F}^{N_C} = \mathbb{F}^{q_k - s - 1}.$$

我们最后一次连接点发生在 δ_C，由于这意味着所有相邻点均已连接，我们得出只存在一个连通分支，即

$$H_0(R_{\delta_C}(S_{\omega,T}, \bar{d}); \mathbb{F}) = \mathbb{F}.$$

结论随之成立。 □

推论 3.4. 设 $T \in \mathbb{N}$ 与 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 的连分数展开为 $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$，第 i个渐近分数为 $\frac{p_i}{q_i}$，并设 k、r、s 为满足以下条件的唯一整数

$$q_k + q_{k-1} \le T < q_k + q_{k+1}$$

and

$$T = rq_k + q_{k-1} + s, \qquad 1 \le r \le a_{k+1}, \qquad 0 \le s \le q_k - 1.$$

Let

$$D_i = q_i\,\omega - p_i,$$

并假设

$$r < a_{k+1} \quad \textit{and} \quad s + 1 < p_k.$$

If

$$\delta_A = |D_k|, \qquad \delta_B = |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r)|D_k|, \qquad \delta_C = \delta_A + \delta_B,$$

then

$$\mathrm{dgm}_0^R(S_{\omega,T}, \bar{d}) = \left\{(0, \delta_A)^{T+1-q_k}, (0, \delta_B)^{s+1}, (0, \delta_C)^{q_k-s-2}, (0, \infty)\right\}$$

其中，上标表示图表中每个点的重数。

证明。对于 $\epsilon \le \epsilon'$ 令

$$T_{\epsilon,\epsilon'} : H_0(R_\epsilon(S_{\omega,T}, \bar{d}); \mathbb{F}) \longrightarrow H_0(R_{\epsilon'}(S_{\omega,T}, \bar{d}); \mathbb{F})$$

表示由 Rips 复形的包含映射诱导的线性变换，并令 $\beta^{\epsilon}_{0}{}^{\epsilon'}$ 为其秩。¯由于对所有 $\epsilon \ge 0$，$S_{\omega,T}$ 都是 R_ϵ $(S_{\omega,T}, d)$ 的顶点集，且 $H_0(K; \mathbb{F})$ 的一组基可通过在单纯复形 K 的每个路径连通分支中选取一个顶点得到，因此当 $0 \le \epsilon \le \epsilon'$ 时，$T_{\epsilon,\epsilon'}$ 为满射；当 $\epsilon < 0$ 时，则为零映射。因此，当 $\epsilon < 0$ 时，$\beta^{\epsilon}_{0}{}^{\epsilon'}$ 等于 0；当 $0 \le \epsilon \le \epsilon'$ 时，则等于 $\bar{}\dim_{\mathbb{F}}(H_0(R_{\epsilon'}(S_{\omega,T}, d); \mathbb{F}))$。将定理3.4应用于计算 $\bar{}\dim_{\mathbb{F}}(H_0(R_{\epsilon'}(S_{\omega,T}, d); \mathbb{F}))$，并结合公式1（注2）中的公式，即得所求结果。 □

例3.5。考虑参数值 $\sqrt{5}$，如图 *9*（上排，左列）所示。¯为计算 $S_{\sqrt{5},\ 16}$中的间隙长度，我们依据命题 *3.2*。注意到

$$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, 4, \ldots]$$

因此，利用定理 2.33 可得 $q_1 = 1$、 $q_2 = 4$、 $q_3 = 17$，以及 $q_4 = 72$. 由于

$$q_1 + q_2 \leq 16 < q_2 + q_3$$

我们得出 $k = 2$. 不难验证，

$$16 = 3q_2 + q_1 + 3$$

是所需分解，即 $r = 3$ 和 $s = 3$。因此我们有 $N_A = 16 + 1 - 4 = 13$ 长度为$\delta_A = |4\sqrt{5} - 9| \approx 0.05573$、$N_B = 3 + 1 = 4$长度为 $\delta_B = |17\sqrt{5} - 38| + (4 - 3)\,|4\sqrt{5} - 9| \approx 0.06888$，以及 $N_C = 4 - 3 - 1 = 0$ 长度为 $\delta_C = |17\sqrt{5} - 38| + (4 - 3 + 1)\,|4\sqrt{5} - 9| \approx 0.12461$. 因此，利用推论3.4 在有两个间隙的情形下，我们得到

$$\mathrm{dgm}_0^R(S_{\sqrt{5},16}, \bar{d}) = \{(0, 0.05573)^{13}, (0, 0.06888)^3, (0, \infty)\}.$$

例 3.6。 同样地，我们考虑集合$S_{\pi-1,\ 16}$ 如图 9 （下排，左列）所示。在这种情形下

$$\pi - 1 = [2, 7, 15, 292, 1, 1, \dots]$$

$p_1 = 1$、 $p_2 = 7$ $p_3 = 106$和 $p_4 = 113$. 因此， $k = 2$ 因为

$$p_1 + p_2 \leq 16 < p_2 + p_3.$$

此外，我们注意到，所需分解为

$$16 = 2p_2 + p_1 + 1,$$

即 $r = 2$ 且 $s = 1$. 因此，我们有 $N_A = 16 + 1 - 7 = 10$ 个长度为 $\delta_A = |7(\pi - 1) - 15| \approx 0.00885$的间隙，$N_B = 2$ 个长度为 $\delta_B = |106(\pi - 1) - 227| + (15 - 2)|7(\pi - 1) - 15| \approx 0.12389$的间隙，以及 $N_C = 7 - 1 - 1 = 5$ 个长度为 $\delta_C = |106(\pi - 1) - 227| + (15 - 2 + 1)|7(\pi - 1) - 15| \approx 0.13274$. 的间隙。此外，根据推论 3.4

$$\mathrm{dgm}_0^R(S_{\pi-1,16}, \bar{d}) = \{(0, 0.00885)^{10}, (0, 0.12389)^2, (0, 0.13274)^4, (0, \infty)\}.$$

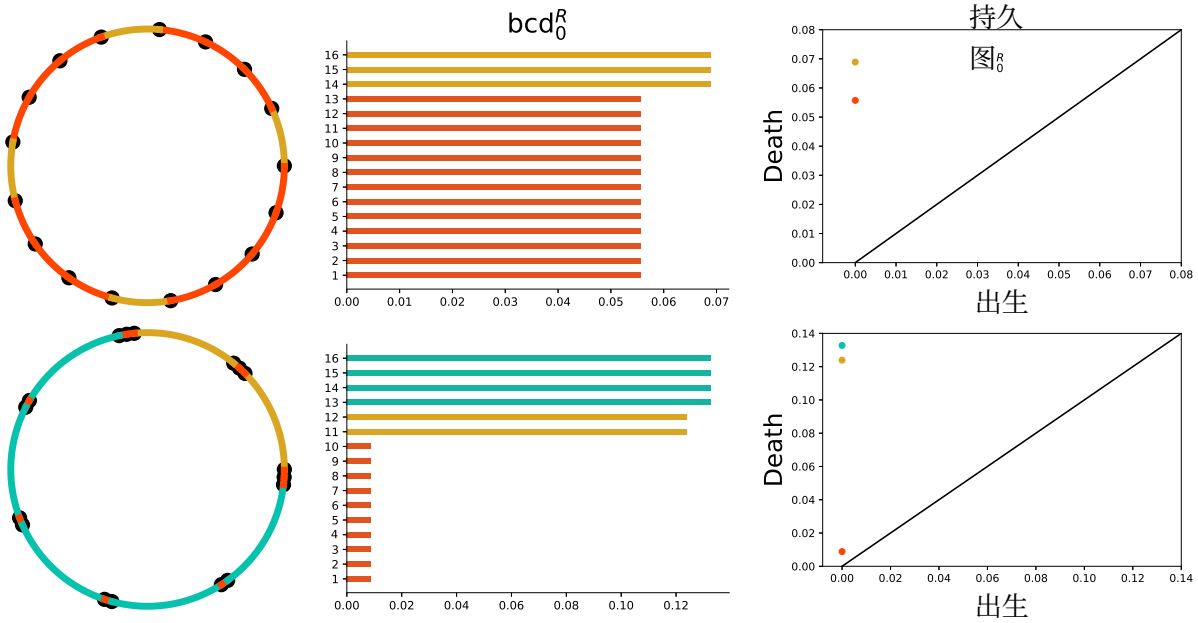


图 9：上图展示了如何利用 三间隙定理计算 0 维持久同调。在 $\epsilon = 0$ 时，$(S_{\omega,\ T},\ d)$中的所有点都构成 $H_0(R_\epsilon(S_{\omega,\ T},\ d);\ \mathbb{F})$中的一个基（出生时间）。在 $\epsilon = \delta_A$时，点首次连通。仅当出现三种可能的间隙时，连通分支才会连通（死亡时间）。上排：图示集合$S_{\sqrt{5},\ 16}$ 及其产生的两个间隙。这些间隙可以在条形码和持久图表中追踪，如图所示。下排：集合$S_{\pi-1,\ 16}$ 会产生三个间隙。

我们还计算持久图$1^{R}(S_{\omega,\ T},\ \bar{d})$。在定理 3.7 中，我们假设

$$s+1<q_k,$$
$$\delta_C<\tfrac{1}{3}$$

为简化表述。若反之 $s+1\geq q_k$，则 $N_C=0$ 且仅有两个间隙长度 δ_A，δ_B 出现——因此只需将 max $\{\delta_A,\delta_B\}$ 替换为 δ_C。同样，若最大间隙 δ_M 满足 $\delta_M\geq\frac{1}{3}$，则由引理 A.5 可得 $\lambda\leq\delta_M$，这迫使每个⁻可能的1-闭链在 H_1中都为0，即为平凡情形。我们将模 $T+1$ 加法记为 $\oplus$。

定理3.7。 设 $T\in\mathbb{N}$和 $\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 的连分数展开为 $[a_1,a_2,a_3,\cdots]$，其第 i个渐近分数为 $\frac{p_i}{q_i}$，并设 k、r、 s是满足下式的唯一整数

$$q_k+q_{k-1}\leq T<q_k+q_{k+1}$$

and

$$T=rq_k+q_{k-1}+s,\qquad 1\leq r\leq a_{k+1},\qquad 0\leq s\leq q_k-1.$$

Let

$$D_i=q_i\,\omega-p_i,$$

并假设

$$s+1<q_k,\quad \textit{and}\quad |D_{k+1}|+(a_{k+1}-r+1)\,|D_k|<\tfrac{1}{3}.$$

令 Γ 为包含这些对的集合：(x,y) $x,y\in S_{\omega,T}$和 $x<y$，其中存在一个 $z\in$ ⁻ ⁻ ⁻ $([0,x)\cup(y,1))\cap S_{\omega,T}$，使得 $1-d(x,y)\leq 2\max\{d(y,z)\ d(x,z)\}\leq 2d(x,y)$。若

$$\lambda=\min\{\bar{d}(x,y)|\ (x,y)\in\Gamma\},$$

then

$$H_1(R_\epsilon(S_{\omega,T},\bar{d});\mathbb{F})=\begin{cases}\mathbb{F} & |D_{k+1}|+(a_{k+1}-r+1)|D_k|\leq\epsilon<\lambda\\ 0 & else\end{cases}.$$

证明。 令 $\{x_i\}_{i=0}^{T}$ 为 $S_{\omega,T}$ 中的点，并按升序排列，然后考虑 1-链

$$\sigma\ =\ \sum_{i=0}^{T}\{x_i,\ x_{i\oplus1}\},$$

其中 $i\oplus1$ 表示 $(i+1)\bmod(T+1)$。由命题 3.2，相邻点之间的最大距离为

$$\delta_C\ =\ |D_{k+1}|\ +\ (a_{k+1}-r+1)\,|D_k|.$$

因此

$$\sigma\ \in\ C_1\big(R_\epsilon(S_{\omega,T},\bar{d})\big)\quad\text{iff}\quad\epsilon\ \geq\ \delta_C.$$

立即可验证 $\partial\sigma=0$。引理 A.4 由此表明，任意非边界1-闭链 in

$$C_1(R_{\delta_C}(S_{\omega,T},\bar{d}))$$

⁻与 σ同调等价。因此 $[\sigma]$生成 $H_1(R_{\delta_C}(S_{\omega,T},d);\mathbb{F})$。

要证明 σ不是边界，只需证明不存在满足 $\partial\tau=\sigma$的 2-单形 $\tau\in C_2\big(R_{\delta_C}(S_{\omega,T},\bar{d})\big)$。我们用反证法。假设存在 $\tau\in C_2\big(R_{\delta_C}(S_{\omega,T},\bar{d})\big)$，使得 $\partial\tau=\sigma$。首先证明不失一般性地，我们可以假设

$$\bar{d}(0,x_1)=\delta_C.$$

⁻为了看出这一点，我们在 $(S_{\omega,T},d)$ 上构造一个显式的等距变换，从而相应地重新索引这些点。根据假设，存在一个指标 i_0，使得

$$\bar{d}\big(x_{i_0},x_{\,i_0\oplus1}\big)=\delta_C.$$

定义

$$\phi(x_i)=\begin{cases} x_i - x_{i_0}, & i \geq i_0, \\ 1-\big(x_{i_0}-x_i\big), & i < i_0. \end{cases}$$

直接检验可得

$$\bar{d}\big(\phi(x_i),\phi(x_j)\big)=\bar{d}(x_i,x_j) \quad \text{for all } i,j,$$

因此 ϕ 是一个等距变换。根据定理 2.22，它诱导出相同的持久图。最后，set

$$y_j=\phi\big(x_{\,i_0\oplus j}\big), \quad j=0,1,\ldots,T,$$

从而

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_T<1 \quad \text{and} \quad \bar{d}(y_0,y_1)=\delta_C.$$

因此，这个重新标记的序列 $\{y_j\}$ 具有所需的性质；此后对于所有 j，我们记 $x_j:=y_j$。现在，由于 $\partial\tau=\sigma$、τ 必须包含某个形如 $\{0,x_1,x_{i_0}\}$ 的 2-单形，其中 $i_0>1$。若 $x_{i_0}\leq\frac{1}{2}$，则

$$\bar{d}(0,x_{i_0})=\bar{d}(0,x_1)+\bar{d}(x_1,x_{i_0})>\delta_C.$$

如果 $x_{i_0}>\frac{1}{2}$ 和 $\bar{d}(x_1,x_{i_0})\leq\delta_C$，则

$$\bar{d}(0,x_{i_0})=\min\big\{\bar{d}(0,x_1)+\bar{d}(x_1,x_{i_0}),\,1-[\bar{d}(0,x_1)+\bar{d}(x_1,x_{i_0})]\big\}>\delta_C,$$

由于 $\delta_C<\frac{1}{3}$。无论哪种情形 $\{0,x_1,x_{i_0}\}\notin\tau$，都与 $\partial\tau=\sigma$ 矛盾。因此不存在这样的 τ，且 σ 不是边界。

为完成证明，只需证明：对于任意满足 $\delta_C<\epsilon\leq\lambda$ 的 ϵ，一个 2-单形

$$\tau\in C_2\big(R_\epsilon(S_{\omega,T},\bar{d})\big)$$

满足条件 $\partial\tau=\sigma$ 的情形恰好在 $\epsilon=\lambda$ 出现。特别地，当 $\epsilon<\lambda$ 时不存在这样的 τ，但在 $\epsilon=\lambda$ 时存在一个。因此，对于所有 $\epsilon\geq\lambda$，类 $[\sigma]$ 在 $H_1(R_\epsilon(S_{\omega,T},\bar{d})$ 中是平凡的；$\mathbb{F}$).

现在我们通过显式构造证明，在 $\epsilon=\lambda$ 2 $\tau\in C_2\big(R_\lambda\ S_{\omega\,T}\ \bar{d}\,\big)$ 处存在一个 -链 $(.\ ,\ )$，满足 $\partial\tau=\sigma$。选择 $(x_{n_1},\ x_{n_2})\in\Gamma$，使得 $\lambda=d(x_{n_1},\ x_{n_2})$，并令 x_{n_3} 为与 $(x_{n_1},\ x_{n_2})$ 成对的第三个点。根据假设

$$\max\big\{\bar{d}(x_{n_2},x_{n_3}),\,\bar{d}(x_{n_1},x_{n_3})\big\}\leq\bar{d}(x_{n_2},x_{n_3})=\lambda.$$

因此，$\{x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3}\}$ 属于 $R_\lambda(S_{\omega,\ T},\ d)$。

接下来定义 2-链

$$\tau_1=\sum_{i=n_1}^{n_2-1}\{x_i,\ x_{i+1},\ x_{n_2}\}.$$

因为对于 $n_1\leq i<n_2$,

$$\bar{d}(x_i,x_{i+1})<\bar{d}(x_{n_1},x_{n_2})$$

$\tau_1\in C_2(R_\lambda(S_{\omega,T},d))$。

为了定义类似的链 τ_2 和 τ_3，我们利用如下事实：$S_{\omega,\ T}$ 可以与圆对应。令 $\{x_i^2\}_{i=1}^{A_2}$ 为从 x_{n_2} 开始顺时针移动直到 x_{n_3}（含 x_{n_3}）所得到的点序列——因此 $x_1^2=x_{n_2}$ 和 $x_{A_2}^2=x_{n_3}$。然后我们定义

$$\tau_2=\sum_{i=1}^{A_2-1}\{x_i^2,\ x_{i+1}^2,\ x_{n_3}\},$$

当 $A_2=2$时，将 $\tau_2=0$ 解释为.....。

类似地，令 $\{x_i^3\}_{i=1}^{A_3}$ 为从 x_{n_3} 开始顺时针移动直到 x_{n_1}所得到的点序列，其中$x_1^3=x_{n_3}$ 和 $x_{A_3}^3=x_{n_1}$。我们定义

$$\tau_3=\sum_{i=1}^{A_3-1}\{x_i^3,\ x_{i+1}^3,\ x_{n_1}\},$$

若 $A_3=2$，则再次取 $\tau_3=0$。在所有情形下，每个 τ_j 都属于 $C_2\big(R_\lambda(S_{\omega,\ T},\ \bar{d})\big)$。

最后设

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}\}.$$

根据构造，$\tau \in C_2\big(R_\lambda(S_{\omega,\ T},\ \bar{d})\big)$，并且可以直接验证 $\partial\tau = \sigma$。这就完成了 $\epsilon = \lambda$ 处的存在性论证。

为完成证明，令 $\epsilon \in (\delta_C,\ \lambda)$。若假设存在一个 2-单形 $\tau_0 \in C_2\big(R_\epsilon(S_{\omega,\ T},\ \bar{d})\big)$，满足 $\partial\tau_0 = \sigma$，那么通过考察

$$\max\big\{\bar{d}(x,y),\, \bar{d}(y,z),\, \bar{d}(z,x) \,\big|\, \{x,y,z\} \in \tau_0\big\}$$

便会与 λ的极小性矛盾；参见引理A.5。

□

推论 3.8. 设 $T \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 的连分数展开为 $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$，第 i 个渐近分数为 $\frac{p_i}{q_i}$，并设 k、r、s 是满足下式的唯一整数：

$$q_k + q_{k-1} \le T < q_k + q_{k+1}$$

and

$$T = rq_k + q_{k-1} + s, \qquad 1 \le r \le a_{k+1}, \qquad 0 \le s \le q_k - 1.$$

Let

$$D_i = q_i\,\omega - p_i,$$

并假设

$$s + 1 < q_k, \quad \textit{and} \quad |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r + 1)\,|D_k| < \tfrac{1}{3}.$$

令 Γ 为包含以下各对的集合：(x, y) x、$y \in S_{\omega,\ T}$ 和 $x < y$；对于这些元素，存在一个 $z \in [0, x) \cup (y, 1)) \cap S_{\omega,T}$，使得 $1 - d(x, y) \le 2\max\{d(y, z)\ d(x, z)\} \le 2d(x, y)$。如果

$$\lambda = \min\{\bar{d}(x,y)|\ (x,y) \in \Gamma\},$$

then

$$\mathrm{dgm}_1^R(S_{\omega,T}, \bar{d}) = \{(|D_{k+1}| + (a_{k+1} - r + 1)\,|D_k|, \lambda)\}.$$

证明。 该 1-闭链 σ 在定理3.7 的证明中构造，为

$$H_1(R_\epsilon(S_{\omega,T}, \bar{d}); \mathbb{F})$$

当 $|D_{k+1}| + (a_{k+1} - r + 1)\,|D_k| = \delta_C \le \epsilon < \lambda$时成立。这表明，持久贝蒂数 $\beta_1^{\epsilon,\ \epsilon'}$ 在 $\epsilon < \delta_C$ 或 $\lambda \le \epsilon'$ 时为零，在 $\delta_C \le \epsilon \le \epsilon' < \lambda$时等于一。根据备注2即可得出结果。

□

4 逼近方法

现在，我们详细介绍准周期函数的滑动窗口嵌入的近似方法。正如第 2.3 节所述，要处理一般的准周期函数，只需考虑指数和形式的函数。当 f 具有这种形式时，其滑动窗口嵌入可表示为如下矩阵表示

$$SW_{d,\tau}f(t) \;=\; A\,v_t.$$

回顾一下，

$$\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T) = \{\, SW_{d,\tau}f(t) \mid t = 0, \ldots, T\},$$

表示相应的滑动窗口点云，并令 ϕ_T为轨迹 $\{v_t \mid t = 0, \ldots, T\}$；我们假设 $T' \le T$，并令 G_T如方程2中所定义。在本节中，令 l_0，M，$N \in \mathbb{N}$，我们用 j 和 l 作为哑变量，并令 $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$。我们的近似方法关联以下度量空间及其对应的持久图：

$$(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T), d_2) \sim (\phi_T, d_\infty) \sim (G_{T'}, d_\infty).$$

第一个关系是通过特征值论证得到的。设 σ_{min} 和 σ_{max} 分别为 A 的最小和最大奇异值。

引理 4.1。设

$$f(t)=\sum_{j=1}^{M} c_j e^{2\pi i\omega_j t}, \qquad c_j\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ \omega_j\in\mathbb{R}.$$

定义 $k=$最大值$\{\sigma_{min}^{-1},\sigma_{max}\sqrt{M}\}$。假设 $(a_1,b_1)\in$持久图$^R_{l_0}(\phi_T,d_\infty)$。如果

$$\frac{b_1}{a_1}>k^2,$$

则存在唯一的 $(a_0,b_0)\in$持久图$^R_{l_0}(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\ d_2)$ 使得

$$\frac{1}{k}<\frac{\max\{b_0,b_1\}}{\min\{b_0,b_1\}},\frac{\max\{a_0,a_1\}}{\min\{a_0,a_1\}}<k.$$

证明。 注意到

$$\sigma_{min}d_2(v_{t_1},v_{t_2})\le d_2(Av_{t_1},Av_{t_2})\le\sigma_{max}d_2(v_{t_1},v_{t_2}),$$

and

$$d_\infty(v_{t_1},v_{t_2})\le d_2(v_{t_1},v_{t_2})\le\sqrt{M}d_\infty(v_{t_1},v_{t_2}).$$

我们得出

$$d_\infty(v_{t_1},v_{t_2})\le d_2(v_{t_1},v_{t_2})\le\frac{1}{\sigma_{min}}d_2(Av_{t_1},Av_{t_2})\le\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}d_2(Av_{t_1},Av_{t_2})\le\sqrt{M}d_\infty(v_{t_1},v_{t_2}).$$

由于 $SW_{d,\tau}f(t)=Av_t$ 且 A 是满秩的（前提是 d 与 τ 按照 [13]选取），则

$$R_\epsilon(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T),d_2)\hookrightarrow R_{\epsilon/\sigma_{min}}(\phi_T,d_\infty)\hookrightarrow R_{\epsilon\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}}(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T),d_2)$$

在由 μ 得到的诱导单纯映射下：$\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\longrightarrow\phi_T$，$\mu(Av_t)=v_t$，以及 ν：$\phi_T\longrightarrow\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)$，$\nu(v_t)=Av_t$。我们有如下图表：

$$\begin{array}{ccc} R_\epsilon(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\ d_2) & \xrightarrow{\quad\iota\quad} & R_{k^2\epsilon}(\mathbb{SW}_{d,\ \tau}f(T)\ d_2) \\ & {\scriptstyle\mu}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\nu} & \\ & R_{k\epsilon}(\phi_T,\ d_\infty) & \end{array}$$

其中 ι 是包含映射 $R_\epsilon(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\ d_2)\hookrightarrow R_{k^2\epsilon}(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\ d_2)$。此外，$\iota$ 与 $\nu\circ\mu$ 相邻；也就是说，对于 $\sigma\in R_\epsilon(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\ d_2)$，我们有 $\iota(\sigma)\cup\nu\circ\mu(\sigma)\in R_{k^2\epsilon}(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\ d_2)$。因此，我们在同调层面得到一个交换图，并将其在对数尺度下重新参数化为

$$\begin{array}{ccc} H_n(R_{\ln(\epsilon)}(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T),d_2);\mathbb{F}) & \xrightarrow{\quad\iota_*\quad} & H_n(R_{2\ln(k)+\ln(\epsilon)}(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T),d_2);\mathbb{F}) \\ & {\scriptstyle\mu_*}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\nu_*} & \\ & H_n(R_{\ln(k)+\ln(\epsilon)}(\phi_T,d_\infty);\mathbb{F}) & \end{array}$$

这给出了一个 $\ln(k)$ 交错，由定理 2.9 可知，若对于 $(a_1,b_1)\in$持久图$^R_{l_0}(\phi_T,d_\infty)$，

$$\ln(b_1)-\ln(a_1)>2\ln(k),$$

即 $\frac{b_1}{a_1}>k^2$，存在唯一的 $(a_0,\ b_0)\in$持久图$^R_{l_0}(\mathbb{SW}_{d,\ \tau}f(T)\ d_2)$，使得

$$|\ln(b_1)-\ln(b_0)|<\ln(k)\quad\text{ and }\quad|\ln(a_1)-\ln(a_0)|<\ln(k).$$

这意味着

$$-\ln(k)<\ln\left(\frac{\max\{b_0,b_1\}}{\min\{b_0,b_1\}}\right),\ln\left(\frac{\max\{a_0,a_1\}}{\min\{a_0,a_1\}}\right)<\ln(k),$$

由此即可得出该结果。 □

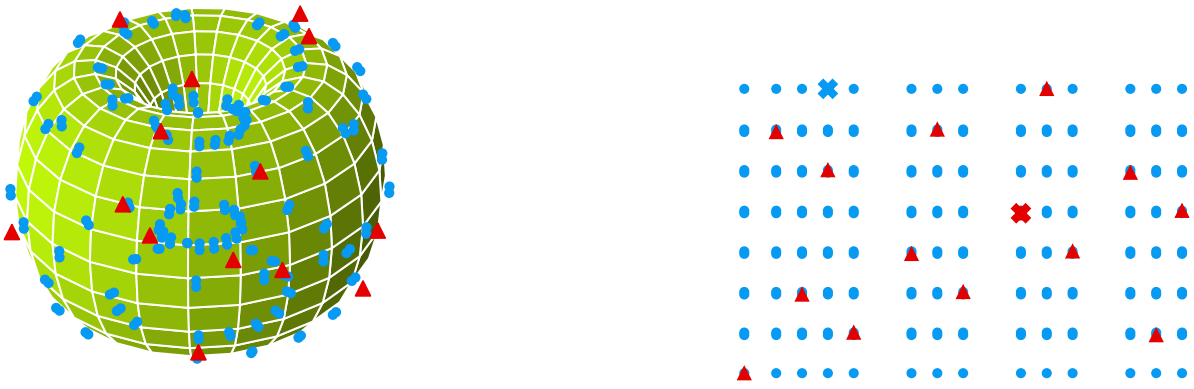


图10：具有不可公度 ω_1, ω_2的双频环面上 ϕ_{13} （红色三角形）与 G_{13} （蓝色点）的比较。左侧：点绘制在环面 $T^2 \subset \mathbb{C}^2$上。右侧：相同的点位于矩形基本域 $[0,1)^2$中。标记为 $\times$ 的点对实现了 ϕ_{13} 与 G_{13}之间的豪斯多夫距离。

为了关联这两个度量空间

$$\big(\phi_T,\, d_\infty\big) \quad \text{and} \quad \big(G_{T'},\, d_\infty\big),$$

我们应用命题 2.19 以及瓶颈距离的定义。

引理 4.2. 令 $\lambda = d_{GH}(\phi_T, G_{T'})$和 $(a_2, b_2) \in$持久图$_{l_0}^R(G_{T'}, d_\infty)$。若

$$b_2 - a_2 > 4\lambda,$$

则存在唯一的$(a_1, b_1) \in$持久图$_{l_0}^R(\phi_T, d_\infty)$ 使得

$$|b_1 - b_2| < 2\lambda \quad and \quad |a_1 - a_2| < 2\lambda.$$

证明。 令 $B = d_B$(持久图$_{l_0}^R(G_{T'}, d_\infty)$, 持久图$_{l_0}^R(\phi_T, d_\infty)$)。 根据定理 2.19， $B < 2\lambda$。因此，

$$b_2 - a_2 > 4\lambda > 2B$$

因此，根据瓶颈距离的定义（定义 2.8），存在唯一的 $(a_1, b_1) \in$持久图$_{l_0}^R(\phi_T, d_\infty)$ 使得

$$|b_1 - b_2| < B < 2\lambda \quad \text{and} \quad |a_1 - a_2| < B < 2\lambda,$$

正如所期望的。 □

现在结合这两个结果，得到 dgm$_{l_0}^R$($\mathbb{SW}_{d,\ \tau} f(T)$ d_2) 与 dgm$_{l_0}^R$($G_{T'}$, d_∞) 之间的直接关系。我们沿用前面的记号。

定理 4.3。若 $(a_2,\ b_2) \in$持久图$_{l_0}^R(G_{T'},\ d_\infty)$ 满足

$$\frac{b_2 - 2\lambda}{a_2 + 2\lambda} > \max\{k^2, 1\},$$

则存在唯一的 $(a_0, b_0) \in$持久图$_{l_0}^R(\{SW_{d,\tau} f(t)\}_{t=0}^T, d_2)$ 满足

$$\max\left\{0, \frac{b_2 - 2\lambda}{k}\right\} \leq\ b_0\ \leq k\ (b_2 + 2\lambda),$$

$$\max\left\{0, \frac{a_2 - 2\lambda}{k}\right\} \leq\ a_0\ \leq k\ (a_2 + 2\lambda).$$

证明。 注意到，该假设意味着

$$b_2 - a_2 > b_2 - a_2 \max\{k^2, 1\} > 2\lambda + 2\lambda \max\{k^2, 1\} > 4\lambda,$$

因此由引理4.2 可知，存在唯一的$(a_1, b_1) \in$持久图$_{l_0}^R(\phi_T, d_\infty)$使得

$$b_2 - 2\lambda < b_1 < b_2 + 2\lambda$$

and

$$a_2 - 2\lambda < a_1 < a_2 + 2\lambda.$$

我们得出结论

$$\frac{b1}{a_1} > \frac{b_2 - 2\lambda}{a_2 + 2\lambda} > k^2$$

因此，根据引理 4.1，存在唯一的 $(a_0,\ b_0) \in$持久图$_{l_0}^{R}(\mathbb{SW}_{d,\ \tau}f(T)\ d_2)$，使得

$$\frac{1}{k} < \frac{\max\{b_0, b_1\}}{\min\{b_0, b_1\}}, \frac{\max\{a_0, a_1\}}{\min\{a_0, a_1\}} < k.$$

不失一般性，我们假设 $b_0 = \max\{b_0, b_1\}$。结合这些不等式，得到

$$\frac{b_2 - 2\lambda}{k} < \frac{b_1}{k} < b_0 < kb_1 < k(b_2 + 2\lambda).$$

可以得到一个类似的不等式 a_0，从而完成证明。 □

对于“对称”信号，也可以得到类似的结果。以下结果表明，只需对系数进行缩放，并考虑一半的频率即可。

推论 4.4. 设

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j(e^{2\pi i\omega_j t} + e^{-2\pi i\omega_j t}), \qquad c_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \omega_j \in \mathbb{R}.$$

令 ϕ_T 表示轨迹

$$\phi_T = \left\{ (\tilde{c}_1 e^{2\pi i\omega_1 t}, \ldots, \tilde{c}_N e^{2\pi i\omega_N t})^\top \,\middle|\, t = 0, 1, \ldots, T \right\},$$

并令 $G_{T'}$ 表示网格

$$G_{T'} = \left\{ (\tilde{c}_1 e^{2\pi i\omega_1 t_1}, \ldots, \tilde{c}_N e^{2\pi i\omega_N t_N})^\top \,\middle|\, t_n = 0, 1, \ldots, T',\ n = 1, \ldots, N \right\}.$$

令 $k =$最大值$\{\sigma_{min}^{-1}, \sigma_{max}\sqrt{2N}\}$，且 $\lambda = d_{GH}(\phi_T, G_{T'})$。若 $(a_2, b_2) \in$持久图$_{l_0}^{R}(G_{T'}, d_\infty)$满足

$$\frac{b_2 - 2\lambda}{a_2 + 2\lambda} > \max\{k^2, 1\},$$

那么存在唯一的 $(a_0, b_0) \in$持久图$_{l_0}^{R}(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\ d_2)$满足

$$\max\left\{0, \frac{b_2 - 2\lambda}{k}\right\} \leq\ b_0\ \leq k\ (b_2 + 2\lambda),$$

$$\max\left\{0, \frac{a_2 - 2\lambda}{k}\right\} \leq\ a_0\ \leq k\ (a_2 + 2\lambda).$$

证明。令

$$\bar{\phi}_T = \{2^{-\frac{1}{2}}(\tilde{c}_1 e^{2\pi i\omega_1 t}, \ldots, \tilde{c}_N e^{2\pi i\omega_N t}, \tilde{c}_1 e^{-2\pi i\omega_1 t}, \ldots, \tilde{c}_N e^{-2\pi i\omega_N t})^\intercal\}_{0 \leq t \leq T}.$$

根据引理 4.1，若 $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in$持久图$_{l_0}^{R}(\bar{\phi}_T, d_\infty)$ 且

$$\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_1} > k^2,$$

那么存在唯一的 $(a_0, b_0) \in$持久图$_{l_0}^{R}(\mathbb{SW}_{d,\tau}f(T)\ d_2)$，使得

$$\frac{1}{k} < \frac{\max\{b_0, \bar{b}_1\}}{\min\{b_0, \bar{b}_1\}}, \frac{\max\{a_0, \bar{a}_1\}}{\min\{a_0, \bar{a}_1\}} < k.$$

另一方面，由于

$$d_2(c_l e^{i\omega_l t_1}, c_l e^{i\omega_l t_2}) = d_2(c_l e^{-i\omega_l t_1}, c_l e^{-i\omega_l t_2})$$

映射 $\mu\colon \bar{\phi}_T \longrightarrow \phi_T$，$\mu(v_t) = \sqrt{2}v_t$和 $\nu\colon \phi_T \longrightarrow \bar{\phi}_T, \nu(v_t) = 2^{-\frac{1}{2}}v_t$都是等距映射。因此，根据命题 2.22，$(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in$ 持久图 $\mathrm{dgm}_{l_0}^R(\bar{\phi}_T, d_\infty)$ 当且仅当存在唯一的 $(a_1, b_1) \in$ 持久图 $\mathrm{dgm}_{l_0}^R(\phi_T, d_\infty)$，使得

$$a_1 = \bar{a}_1 \quad \text{and} \quad b_1 = \bar{b}_1.$$

结合这一事实与引理4.2，我们可以得出：若 $(a_2, b_2) \in$持久图$\mathrm{dgm}_{l_0}^R(G_{T'}, d_\infty)$ 且

$$b_2 - a_2 > 4\lambda$$

则存在唯一的 $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in$持久图$\mathrm{dgm}_{l_0}^R(\bar{\phi}_T, d_\infty)$，使得

$$|\bar{b}_1 - b_2| < 2\lambda \quad \text{and} \quad |\bar{a}_1 - a_2| < 2\lambda.$$

根据目前已证明的等价关系，我们可以仿照定理 4.3 中的论证，得出该结果。

□

注记 3（误差界置信区域）。设

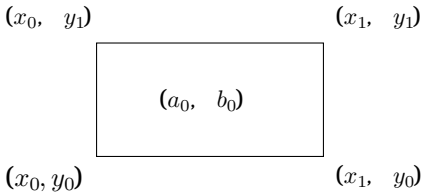
$$(a_2, b_2) \in \mathrm{dgm}_{l_0}^R(G_{T'}, d_\infty).$$

在定理 4.3 的假设下，存在相应的 $(a_0, b_0) \in$持久图$\mathrm{dgm}_{l_0}^R(\mathbb{SW}_{d,\tau} f(T)\, d_2)$，满足

$$\max\left\{0, \frac{b_2 - 2\lambda}{k}\right\} \leq b_0 \leq k\,(b_2 + 2\lambda),$$

$$\max\left\{0, \frac{a_2 - 2\lambda}{k}\right\} \leq a_0 \leq k\,(a_2 + 2\lambda).$$

由此可知，(a_0, b_0) 位于矩形



其中 $x_0 = \max\left\{0, \frac{a_2-2\lambda}{k}\right\}$, $x_1 = k(a_2 + 2\lambda)$、$y_0 = \max\left\{0, \frac{b_2-2\lambda}{k}\right\}$，以及 $y_1 = k(b_2 + 2\lambda)$。这个矩形是该近似的置信区域。

我们已明确展示了 $\mathrm{dgm}_{l_0}^R(G_T, d_\infty)$ 如何逼近 $\mathrm{dgm}_{l_0}^R(\mathbb{SW}_{d,\tau} f(T)\ d_2)$。为了利用第 3 节中的结果，我们使用 K¨unneth 公式，见定理2.21。它使我们能够应用定理 3.3 和定理3.7 来计算 $l_0 = 1$、2 的 $\mathrm{dgm}_{l_0}^R(G_T, d_\infty)$。该方法在下一个结果中详述。为便于表述，在以下结果中我们将使用条形码记法 bcd_i^R 来表示持续信息；这些条形码与第2节中详述的持久图 dgm_i^R精确对应。

定理 4.5. 设 $c_j \in \mathbb{C}$与 $\omega_j \in \mathbb{R}$。对于 a、b、$s \in \mathbb{R}$，令 $\bar{a} = 2\sin(\pi a)$，$\omega_l' = \frac{\omega_l}{2\pi}$，并且对于 $I = [a, b)$ 我们令 $\bar{I} = [\bar{a}, b)$ 并记 sI 表示 $[sa, sb)$。设

$$G_T = \{(c_1 e^{i\omega_1 t_1}, \ldots, c_N e^{i\omega_N t_N})^\intercal\}_{0 \leq t_i \leq T}.$$

那么，

$$\mathrm{bcd}_{l_0}^R(G_T, d_\infty) = \bigcup_{\sum_l r_l = l_0} \left\{|c_1|\bar{I}_1 \cap \cdots \cap |c_N|\bar{I}_N \;\middle|\; I_l \in \mathrm{bcd}_{r_l}^R(S_{\omega_l', T}, \bar{d})\right\},$$

证明。对于 $0 \leq l \leq N$ 令

$$X_l = \{c_l e^{i\omega_l t}\}_{t=0}^T.$$

由定理 2.21

$$\mathrm{bcd}_{l_0}^R(G_T, d_\infty) = \bigcup_{\sum_l r_l = l_0} \left\{J_1 \cap \cdots \cap J_N \mid J_l \in bcd_{r_l}^R(X_l, d_2)\right\}.$$

因此，只需证明 $J_l \in \mathrm{bcd}_{r_l}^{R}(X_l, d_2)$ 当且仅当存在唯一的 $I_l \in \mathrm{bcd}_{r_l}^{R}(S_{\omega_l', T'}, \bar{d})$ 使得

$$J_l = |c_l| \bar{I}_l.$$

为此，记 $x_j = \omega_l t_j \bmod 2\pi$，并考虑 X_l 上由下式给出的度量 d_l

$$d_l(c_l e^{i\omega_l t_1}, c_l e^{i\omega_l t_2}) = |c_l| \min\{|x_1 - x_2|, |2\pi - x_2 + x_1|, |2\pi - x_1 + x_2|\}.$$

它刻画了以 (0，0) 为圆心、半径为 $|c_l|$ 的圆上两点之间的测地距离。根据三角恒等式

$$d_2(c_l e^{i\omega_l t_1}, c_l e^{i\omega_l t_2}) = \frac{|c_l| \sin(|c_l|^{-1} d_l(c_l e^{i\omega_l t_1}, c_l e^{i\omega_l t_2}))}{\sin\left(\frac{\pi - |c_l|^{-1} d_l(c_l e^{i\omega_l t_1}, c_l e^{i\omega_l t_2})}{2}\right)} = 2|c_l| \sin\left(\frac{|c_l|^{-1} d_l(c_l e^{i\omega_l t_1}, c_l e^{i\omega_l t_2})}{2}\right).$$

因此，作为定理 2 9 $J_l \in$ $_{r_l}^{R}$ X_l d_2 $[a, b \in$ 的推论，bcd (,) 当且仅当 $bcd_{r_l}^{R}$ X_l d_l 存在唯一的) (,) 使得

$$J_l = \left[2|c_l| \sin\left(\frac{|c_l|^{-1} a}{2}\right), 2|c_l| \sin\left(\frac{|c_l|^{-1} b}{2}\right)\right).$$

此外，注意到

$$d_l(c_l e^{i\omega_l t_1}, c_l e^{i\omega_l t_2}) = 2\pi |c_l| \bar{d}([\omega_l' t_1], [\omega_l' t_2])$$

我们可以简 单地类似地说 $[a, b) \in \mathrm{bcd}_{r_l}^{R}(X_l,$ $d_l)$ 当且仅当存在唯一的 $[a_0, b_0) \in \mathrm{bcd}_{r_l}^{R}(S_{\omega_l',}$ $_{T},$ $\bar{d})$ 使得

$$[a, b) = [2\pi |c_l| a_0, 2\pi |c_l| b_0).$$

结合这些等价关系即可得到所需结果。 □

4.1 示例

在本例中，我们执行图 8 所示的工作流程，该流程以准周期函数为输入，并生成图表 $T' \le T$,

$$\mathrm{dgm}_{\ell}^{R}\big(G_{T'}, d_{\infty}\big), \qquad \ell = 1, 2.$$

具体而言，我们设

$$f(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{3}\, t} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{5}\, t}.$$

接下来，我们分三个阶段进行：

1. **算法 1（3 间隙码）**。对于每个不可公度频率 $\omega_j \in \{\sqrt{3}, \sqrt{5}\}$，我们使用第1 节的结果运行算法3 ，以获得精确的图表

$$\mathrm{dgm}_{\ell}^{R}\big(S_{\omega_j', T'}, \bar{d}\big), \quad \ell = 1, 2, \quad \omega_j' = \frac{\omega_j}{2\pi}.$$

2. **持久同调 K¨unneth 公式**。我们通过定理4.5汇总这些单频输出，以获得图表

$$\mathrm{dgm}_{\ell}^{R}\big(G_{T'}, d_{\infty}\big), \quad \ell = 1, 2.$$

3. **误差界**。最后，定理 4.3 给出了一个明确的瓶颈距离界，表明 $\mathrm{dgm}_{\ell}^{R}(G_{T'}, d_{\infty})$ 在所声称的误差范围内近似于真实的滑动窗口图 $\mathrm{dgm}_{\ell}^{R}\big(SW_{d,\tau} f(T)$ $d_2\big)$。

注4。 在真实世界数据的实际应用中，频率 ω_j 首先通过 th 估算 e th 的快速傅里叶变换 观察到的时间序列（参见第5节）。

路线图既定后，我们首先构造滑动窗口嵌入矩阵，具体如第2.3节末尾所述。在本例中，可以得到

$$SW_{d,\tau} f(t) = \frac{1}{\sqrt{d+1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\sqrt{3}\,\tau} & e^{i\sqrt{5}\,\tau} \\ \vdots & \vdots \\ e^{i\sqrt{3}\, d\tau} & e^{i\sqrt{5}\, d\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1\, e^{i\sqrt{3}\, t} \\ \tilde{c}_2\, e^{i\sqrt{5}\, t} \end{pmatrix},$$

其中 $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = \sqrt{d+1}/\sqrt{2}$。

我们取

$$d = 1, \qquad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}.$$

在这些参数下 A是标准正交的。因此

$$k = \max\{\, \sigma_{min}^{-1},\, \sigma_{max}\sqrt{M}\} = \max\{\, 1,\, \sqrt{2}\} = \sqrt{2} \quad (M = 2).$$

最后，我们近似滑动窗口点云

$$\mathbb{SW}_{d,\tau} f(2000)$$

使用 $T' = 500$。这为进一步完善我们的 3G 近似方法奠定了基础。接下来，我们依次将算法 1 应用于每个频率分量。

首先，缩放频率可以展开为连分数展开

$$\omega_1' = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = [0; 3, 1, 1, 1, 2, \dots], \qquad \omega_2' = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} = [0; 2, 1, 4, 3, 1, \dots].$$

根据推论 3.4和3.8，所得的持久图为

$$\text{持久图}_0^R\big(S_{\omega_1',500}, \bar{d}\big) = \big\{(0, 1.577 \times 10^{-3})^{160}, (0, 2.077 \times 10^{-3})^{316}, (0, 3.654 \times 10^{-3})^{24}, (0, \infty)\big\},$$

$$\mathrm{dgm}_1^R\big(S_{\omega_1',500}, \bar{d}\big) = \big\{(3.654 \times 10^{-3},\, 334.551 \times 10^{-3})\big\},$$

$$\text{持久图}_0^R\big(S_{\omega_2',500}, \bar{d}\big) = \big\{(0, 0.368 \times 10^{-3})^{161}, (0, 2.637 \times 10^{-3})^{220}, (0, 3.005 \times 10^{-3})^{119}, (0, \infty)\big\},$$

$$\mathrm{dgm}_1^R\big(S_{\omega_2',500}, \bar{d}\big) = \big\{(3.005 \times 10^{-3},\, 334.846 \times 10^{-3})\big\}.$$

有了单频持久图后，我们现在应用持久 K¨unneth 公式（定理4.5）。回顾

$$G_{500} = \big\{(e^{i\omega_1 t_1},\, e^{i\omega_2 t_2})\big\}_{0 \le t_1, t_2 \le 500}.$$

为验证定理 4.3 的假设，我们确定最大持久度图。从持久图$\mathrm{dgm}_1^R(S_{\omega_1',500}, \bar{d})$中，区间 $(a_1', b_1') = (3.654 \times 10^{-3},\, 334.551 \times 10^{-3})$ 在持久图$\mathrm{dgm}_1^R(G_{500}, d_\infty)$中诱导出区间

$$(a_1'', b_1'') = \big(2\sin(a_1'\pi),\, 2\sin(b_1'\pi)\big) = (0.02296,\, 1.73586).$$

同样，由 $\mathrm{dgm}_1^R(S_{\omega_2',\ 500},\ \bar{d})$ 和 $(a_2',\ b_2') = (3.005 \times 10^{-3},\ \ 334.846 \times 10^{-3})$ 可得

$$(a_2'', b_2'') = \big(2\sin(a_2'\pi),\, 2\sin(b_2'\pi)\big) = (0.01888,\, 1.73678).$$

在 $\mathrm{dgm}_2^R(G_{500},\ d_\infty)$ 中，最持久区间为 $(a_3'',\ b_3'') = (0.02296,\ 1.73586)$。

由于 $\lambda \le d_H\big(\phi_{2000},\ G_{500}\big) = 0.20975$ 和 $\max\{k^2, 1\} = 2$，我们计算

$$\frac{b_1'' - 2\lambda}{a_1'' + 2\lambda} = \frac{1.73586 - 2 \cdot 0.20975}{0.02296 + 2 \cdot 0.20975} = 2.9751 > 2, \qquad \frac{b_2'' - 2\lambda}{a_2'' + 2\lambda} = \frac{1.73678 - 2 \cdot 0.20975}{0.01888 + 2 \cdot 0.20975} = 3.0049 > 2.$$

因此，定理 4.3 的条件均已满足。对任意 x 定义

$$X(x) = \max\Big\{0, \frac{x - 2\lambda}{k}\Big\}, \quad Y(x) = k\,(x + 2\lambda).$$

我们将误差界计算为

$$\begin{aligned}
&(X(a_1''), Y(a_1'')) = (0,\ 0.6257), \quad (X(b_1''), Y(b_1'')) = (0.9308,\ 3.0481),\\
&(X(a_2''), Y(a_2'')) = (0,\ 0.6200), \quad (X(b_2''), Y(b_2'')) = (0.9315,\ 3.0494),\\
&(X(a_3''), Y(a_3'')) = (0,\ 0.6257), \quad (X(b_3''), Y(b_3'')) = (0.9308,\ 3.0481).
\end{aligned}$$

因此，定理 4.3保证了唯一的图 rams

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathrm{dgm}_1^R\big(\mathbb{SW}_{d,\tau} f(2000), d_2\big), \quad (a_3, b_3) \in \mathrm{dgm}_2^R\big(\mathbb{SW}_{d,\tau} f(2000), d_2\big)$$

满足

$$\begin{aligned} 0 \le a_1 \le 0.6257, \quad & 0.9308 \le b_1 \le 3.0481, \\ 0 \le a_2 \le 0.6200, \quad & 0.9315 \le b_2 \le 3.0494, \\ 0 \le a_3 \le 0.6257, \quad & 0.9308 \le b_3 \le 3.0481. \end{aligned}$$

最后，我们计算滑动窗口嵌入的实际持久图以进行验证。通过求值

$$\mathrm{dgm}_i^R\big(\mathbb{SW}_{d,\tau} f(2000), d_2\big), \quad i = 1, 2,$$

可以发现，我们的 3G 方法预测的图表

$$(a_1, b_1) = (0.193,\ 1.771), \quad (a_2, b_2) = (0.194,\ 1.753), \quad (a_3, b_3) = (0.296,\ 1.753).$$

每个（a_i，b_i）均落在各自的误差界矩形内，如图 11所示。作为比较，我们还纳入了两种替代近似方法——滑动窗口地标法 SW_L（n）和基于地标的 K¨unneth 方法 K_L（n） [12]，并展示了它们对应的误差界矩形，以及不同样本量 n下测得的计算时间。

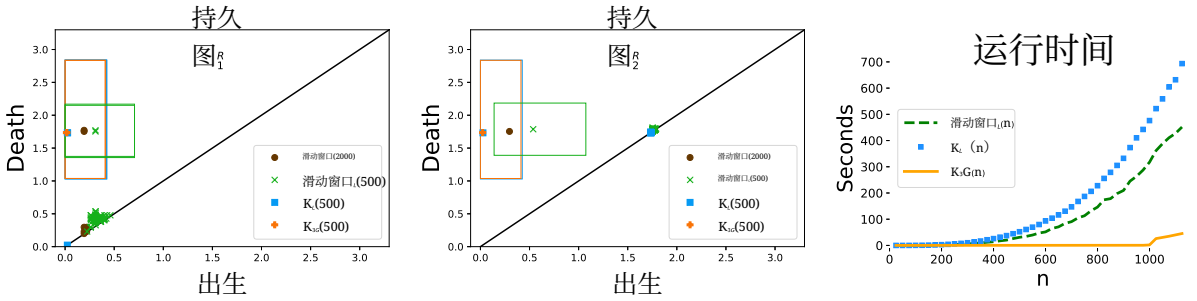


图 11：第 4.1 节中的持久图。我们还报告了 Ripser [2]在滑动窗口嵌入（SW）和方法（K_L）上的计算时间。我们的实现（K_{3G}）在任何阶段都不会调用 Ripser。

5 应用

本节将把我们的处理流程 3G 应用于以下示例：非线性调谐吸振器中的合成震颤信号，可作为安全或不安全运行的指标 [11]；神经科学，其中准周期性与某些脑区的特定任务功能相关 [19]；以及天体力学，其中准周期性可转化为有利的任务轨迹 [14]。我们为这些领域提供了一种更快的替代方案（见图 11 和表 2），用于分析潜在准周期系统的重构信号。

5.1 方法论

我们关注流 Φ 源自已知常微分方程组的动力系统。为了生成相应的时间序列“观测”，我们从选定的初始条件出发求解这些常微分方程，并将得到的解值记录为信号 $f(t)$。我们通过计算滑动窗口点云 $\{SW_{d,\tau} f(\epsilon t)\}_{t=0}^T$来重建系统，其中 ϵ根据 Nyquist-Shannon 采样定理 [38]进行选择。 [13]中详述的框架提供了一种选择 d和 τ，并用持久图 $\mathrm{dgm}_j^R(\{SW_{d,\tau} f(\epsilon t)\}_{t=0}^T, d_2)$ 近似持久图 $\mathrm{dgm}_j^R(\{SW_{d,\tau} S_1 f(\epsilon t)\}_{t=0}^T, d_2)$ 的方法。由于 $S_1 f$是定理 4.4 所示形式的和，我们可以应用本文的结果来近似后者，从而紧密近似前者。事实上，在我们考虑的例子中

$$S_1 f(\epsilon t) = \sum_{j=1}^{2} c_j (e^{i\epsilon\omega_j t} + e^{-i\epsilon\omega_j t}).$$

因此，3G 可用于近似持久图 $\mathrm{dgm}_j^R(\{SW_{d,\tau} S_1 f(\epsilon t)\}_{t=0}^T, d_2)$，其误差界已知，详见注释 3。

5.2 结果

我们考虑具有已知准周期行为的系统，具体而言，是具有两个不可公度频率的系统。因此，滑动窗口点云 $\{SW_{d,\tau}f(\epsilon t)\}_{t=0}^{T}$ 对 2-环面进行采样。我们将相应的持久图标记为 $SW(T)$（以棕色圆点表示）。用 $SW_{S_1}(T)$ 表示滑动窗口嵌入 $S_1(f)$ 的持久图（以蓝色方块表示）。通过 3G 得到的近似标记为 $K_{3G}(T)$（以橙色叉号表示）。

5.2.1 双环流

受驱动的双环流系统为地球物理流中出现的模式提供了一个模型 [37]。拓扑方法在研究该系统方面取得了显著成效。事实上，如 [6], 所示，系统中可以观察到多种拓扑分类，它们代表了流体粒子的运动。在这项工作中，作者指出，流体的运动可能是稀疏的，这意味着某些初始条件会使粒子局限在一个很小的区域内。不同的初始条件对应着具有不同拓扑结构的轨迹，包括标准带、带扭转的五柄结构、环面以及莫¨比乌斯带。这一结果是通过在分支流形中计算同调，同时追踪定向链而得出的，从而能够识别分支并确定扭结或扭转的位置。这种方法称为基于同调的分支流形分析（BraMAH）。其核心遵循从时间序列重构动力系统的原理。然而，每个步骤的具体细节都与滑动窗口（SW）完全不同。尽管如此，对于相应的初始条件，我们独立证实了环面的存在，即流体粒子运动呈现准周期性，见图12。这凸显了拓扑方法应用于动力系统时所具有的鲁棒性。

具体而言，受驱动的双环流由方程 $\dot{x} = (-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1})$ 给出，其中

$$\psi(x_1, x_2, t) = A\,\sin(\pi g(x_1, t))\,\sin(\pi x_2)$$

with

$$g(x_1, t) = \eta\,\sin(\lambda t)(x_1^2 - 2x_1) + x_1,$$

以及参数值 A， $\mu = 0.1$ 和 $\lambda = \pi/5$. 对于初始条件$x_0 = (0.5,0.625)$ [6]，系统具有一个环面吸引子。我们使用 $dt = 0.1$ 最多 $t = 800$进行系统求解。此外，SW 使用$f = x_1$， $d = 4$， $\tau = 119.03$，和 $\epsilon = 0.1$.

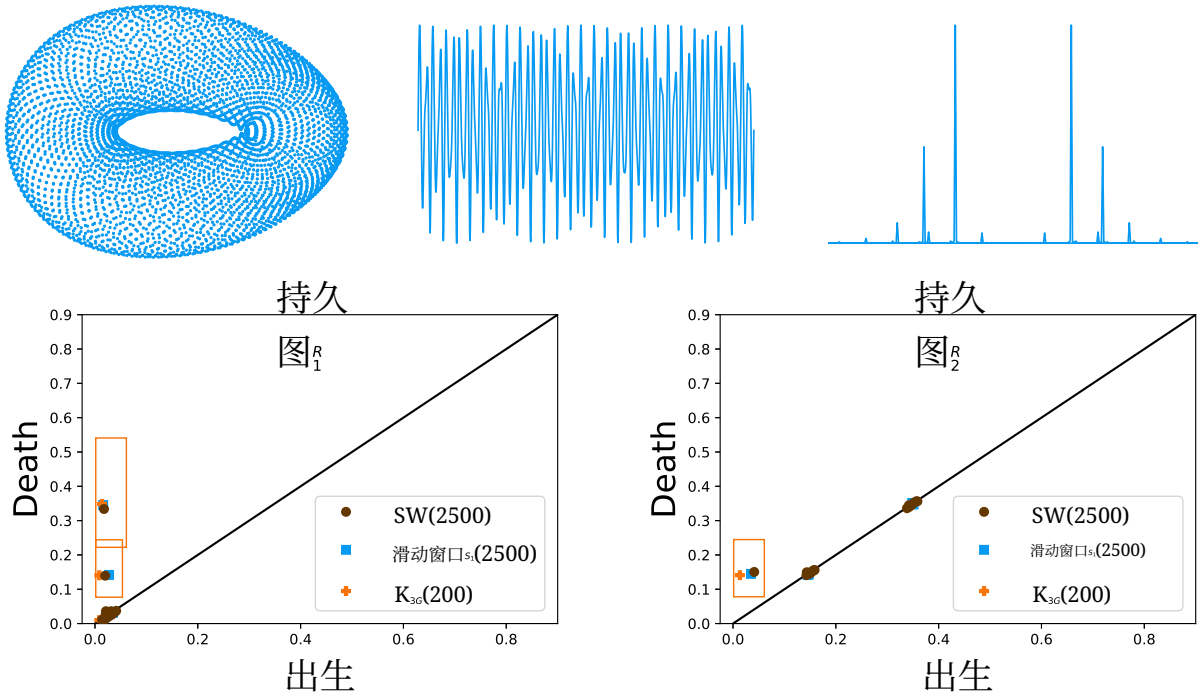


图 12：上排：初始条件为 x_0 （左侧）的受驱动双环流系统的相图、用于滑动窗口嵌入的相应轨迹 $x_1(t)$（中间），以及通过快速傅里叶变换得到的傅里叶功率谱（右侧）。下排：由此得到的 Rips 滤过的持久图，适用于$x_1(t)$。

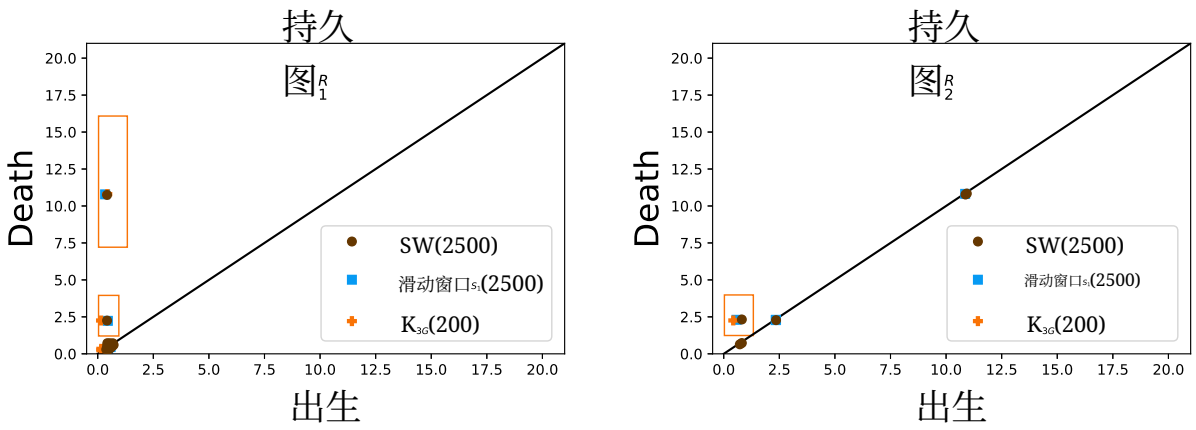


图13： $\mathbb{R}^4$中环面所得到的持久图。

5.2.2 环面

现在，我们考虑 $\mathbb{R}^4$ 中一个环面吸引子，其坐标为（x， y， z， r）。该动力系统由以下方程组给出：

$$\dot{x} = -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), \quad \dot{y} = x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}),$$
$$\dot{z} = -kr + z(4 - \sqrt{z^2 + r^2}), \quad \dot{r} = kz + r(4 - \sqrt{z^2 + r^2}).$$

当 k 为无理数时，解张成一个环面 [32]。我们考虑情形 $k = \sqrt{2}$ ，其初始条件为（x_0， y_0， z_0， r_0） = （1，0，4，0）。我们求解带有 $dt = 0.1$ 的系统，直到 $t = 800$。滑动窗口使用 $f = x + z$、 $d = 4$、 $\tau = 87.56$和 $\epsilon = 0.1$ 完成，见图 13。

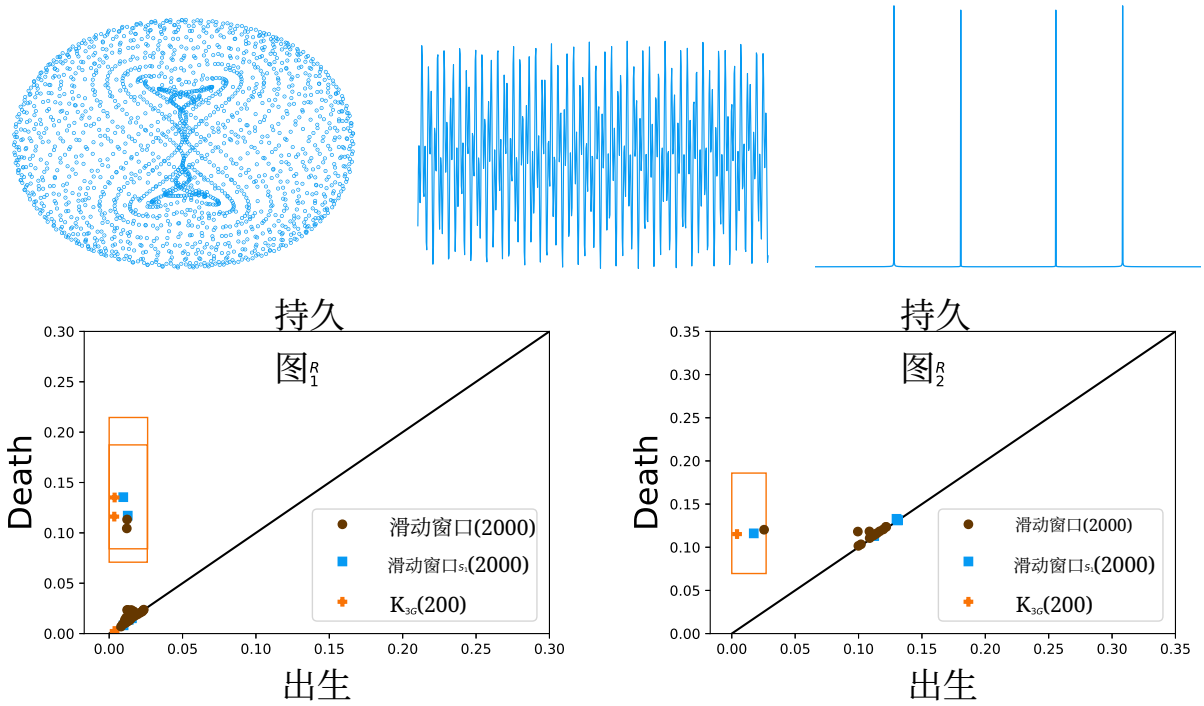


图14：上排：滑块系统上摆的相图（x， $\dot{x}$）（左侧）、用于滑动窗口嵌入的标量轨迹 $x(t)$（中间），以及通过快速傅里叶变换得到的其傅里叶频谱（右侧）。下排：从$x(t)$得到的滑动窗口点云上的Rips滤过的持久图。

5.2.3 摆连接滑块 lock

现在考虑一种特殊类型的调谐质量阻尼器（TMD）。TMD 是一种通过弹簧和阻尼器使连接在主体结构上的质量块发生运动，从而抑制振动的装置 [44]。该模型已成功用于减弱长持时地震地面运动的影响 [29]。事实上，可以将主体结构视为摩天大楼，将入射波视为由地震产生的波。因此，更深入地理解这一系统有助于推动抗震技术的发展。

我们考虑摆连接滑块的情形，见图 14。研究表明，该系统呈现准周期性 [44]。控制方程为：

$$\ddot{x} + \alpha^2 x - \bar{\epsilon} g\theta - \bar{\epsilon} L\dot{\theta}^2\theta = 0,$$
$$\ddot{\theta} + (1+\bar{\epsilon})\beta^2\theta - \bar{\epsilon} h\alpha^2 x + \bar{\epsilon}\dot{\theta}^2\theta = 0,$$

其中

$$\bar{\epsilon} = \frac{m}{M}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad h = \frac{1}{\bar{\epsilon}L},$$

且 g 为重力加速度。参数取值为 $m = 0.5$、 $M = 1$、 $L = 1$ 和 $k = 5$。我们在初始条件 $(x_0,\ \dot{x}_0,\ \theta_0,\ \dot{\theta}_0) = (0.1,\ 0,\ -0.1,\ 0)$ 下求解该系统，并将 $dt = 0.27$ 求解至 $t = 540$。滑动窗口使用 $f = x$、 $d = 4$、 $\tau = 108.05$ 和 $\epsilon = 0.027$完成。

5.2.4 广义Wilson-Cowan方程

我们考虑 Wilson-Cowan方程的一个广义版本。传统上，这些方程通过一种对响应取平均的时间粗粒化技术推导而来。此外，它们将时间延迟限制为弱Gamma分布。扩展模型已在 [19], 中得到研究，其形式为

$$\dot{u}(t) = -u(t) + f_1\left(\theta_u + \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(au(s) + bv(s))\,ds\right),$$
$$\dot{v}(t) = -v(t) + f_2\left(\theta_v + \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(cu(s) + dv(s))\,ds\right),$$

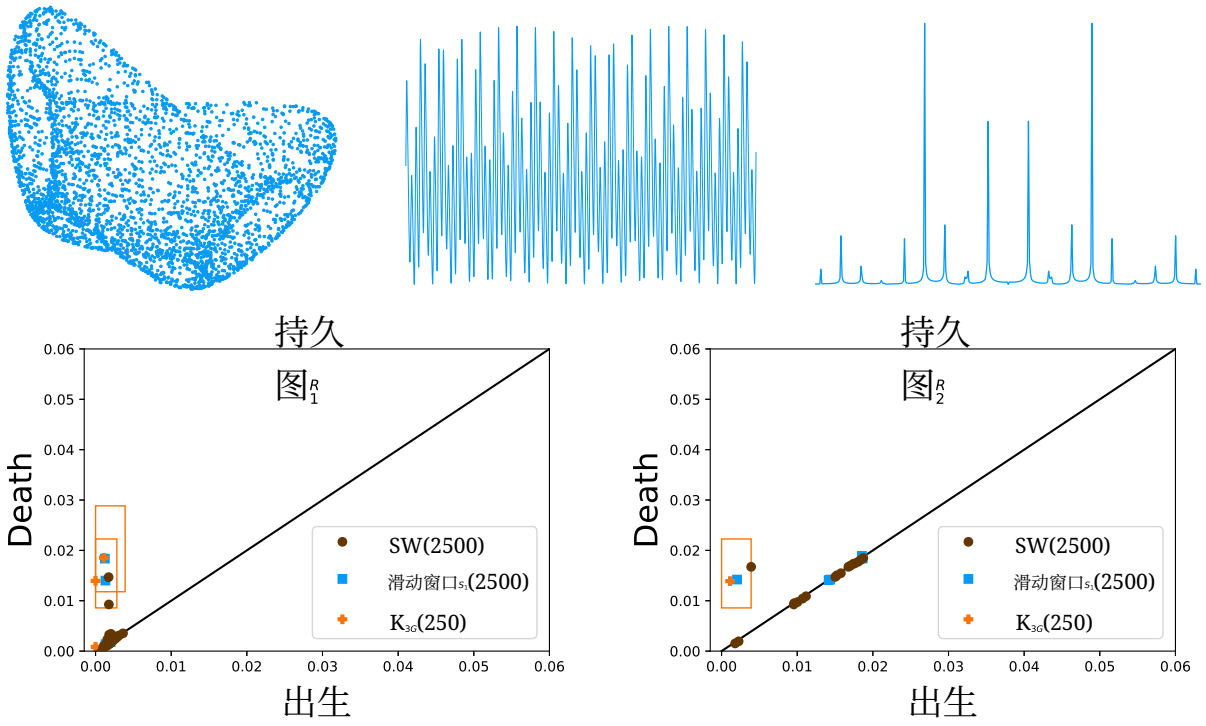


图 15：上排：广义 Wilson–Cowan 方程的相图 $(u,\ v)$（左侧）、用于滑动窗口嵌入的标量轨迹 $u(t)$（中间），以及通过快速傅里叶变换得到的其傅里叶功率谱（右侧）。下排：由 $u(t)$ 导出的滑动窗口点云上的 Rips滤过的持久图。

其中， $u(t)$ 和 $v(t)$ 描述两个神经元群体的放电活动， a， b， c，以及 d 是连接权重， θ_u 和 θ_v 是背景驱动。激活函数 f_1 和 f_2 在实数轴上光滑且单调递增。作者考察了三种类型的延迟核 h： $[0,\infty)$ $\to$ $[0,\infty)$，分别为弱 Gamma 分布、强 Gamma 分布和狄拉克核。他们的分析表明，核的选择取决于模型中各群体的功能。

容易验证，对于弱伽马核，该系统会还原 Wilson-Cowan方程。我们考虑狄拉克核的情形，见图 15。已有研究表明，该系统呈现准周期性 [19, 9]。此外，该系统还可应用于与帕金森病相关的丘脑底核-苍白球网络（研究依据来自解剖学和电生理学研究） [17]。所关注的系统变为

$$\dot{u}(t) = -u(t) + f_1\left(\theta_u + au(t-\tau_1) + bv(t-\tau_2)\right),$$
$$\dot{v}(t) = -v(t) + f_2\left(\theta_v + cu(t-\tau_2) + dv(t-\tau_1)\right),$$

其中

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{1+e^{-\delta x}}.$$

参数值为 $\theta_u = 0.1$、 $\theta_v = 0.2$、 $\tau_1 = \tau_2 = 0.152$、 $a = d = -19$、 $b = c = 10$ 和 $\delta = 10$。我们使用初始条件（u_0, v_0） =(0。05，0。05) 求解该系统， $dt = 0.001$ 直到 $t = 50$。滑动窗口使用 $f = u$、 $d = 4$、 $\tau = 1.712$ 和 $\epsilon = 0.01$。

5.2.5 Wilson 神经元模型中的电磁辐射

Wilson 基于对 Hodgkin-Huxley 模型的假设，引入了一个新皮层神经元的简化模型 [46]。这些神经元的生物物理学由大约十二种离子电流的相互作用所支配。他的模型表明，只需四种离子电流，就能准确复现已知的放电行为。我们分析了该模型的一个扩展版本，其中纳入了电磁辐射（EMR）的存在。

电子设备的普遍存在使神经元暴露于电磁辐射之下。通过在 [18]中引入磁通控制忆阻器，模拟了电磁辐射的影响。他们提出的模型

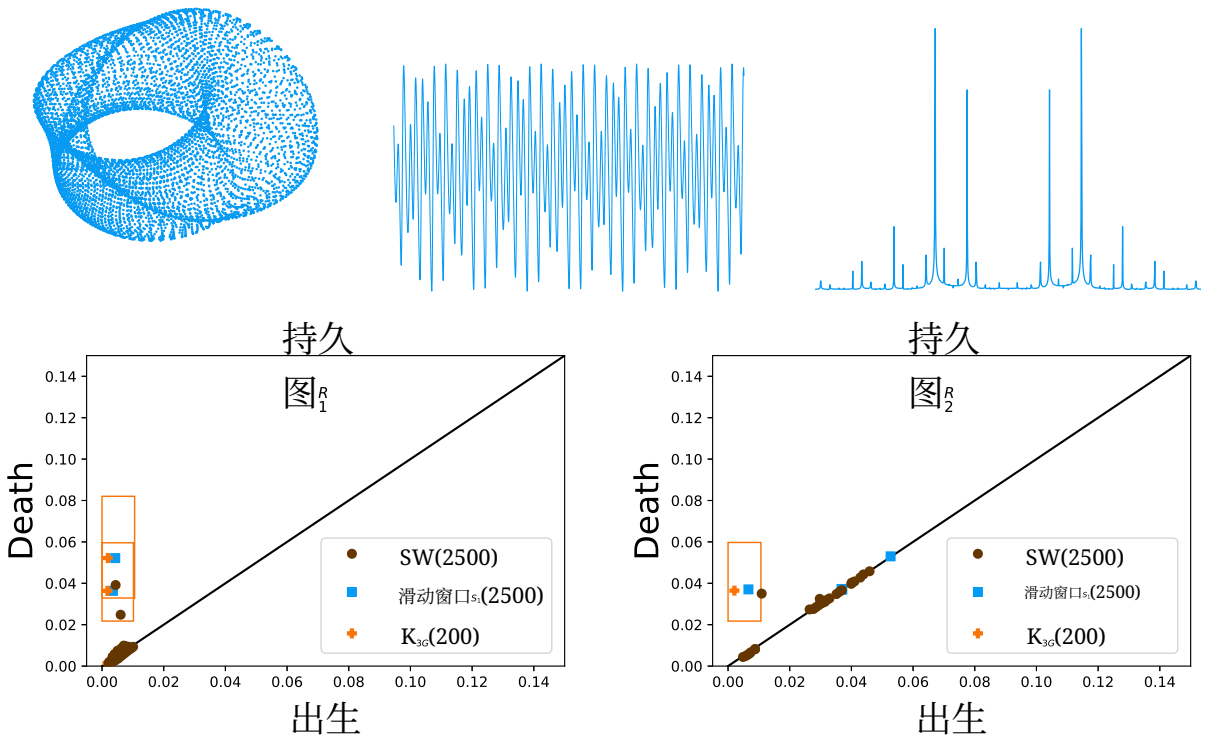


图16：上排：系统的相图（v、 r、 ϕ）（左侧）、用于滑动窗口嵌入的径向坐标轨迹 $r(t)$（中间），以及其通过快速傅里叶变换得到的傅里叶功率谱（右侧）。下排：由 $r(t)$ 得到的滑动窗口点云上的 Rips 滤过持久图。

被证明表现出准周期性，并且其结果通过基于微控制器单元的硬件平台成功复现。他们的数学模型描述了膜电位 v、恢复变量 r以及忆阻器的内部状态 ϕ

$$C_m \frac{dv}{dt} = -m_\infty(v)(v - E_{Na}) - g_K r(v - E_K) + I_{ext} - k_1 W(\phi)v,$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\tau_r}(-r + r_\infty(v)), \quad \frac{d\phi}{dt} = v - k_2\phi + \phi_{ext},$$

其中

$$m_\infty(v) = 17.8 + 47.6v + 33.8v^2,$$

and

$$r_\infty(v) = 1.24 + 3.7v + 3.2v^2.$$

我们采用膜电容的典型模型参数 $C_m = 1$，钠和钾的反转电位分别为 $E_{Na} = 0.5$ 和 $E_K = -0.95$，钾的最大电导为 $g_K = 26$，钾离子通道激活时间常数为 $\tau_r = 5$，以及外部刺激电流 $I_{ext} = 1$ [48]。电磁辐射的外部贡献由 $\phi_{ext} = A\sin(2\pi Ft)$给出，项 $k_1 W(\phi)v$和 $k_2\phi$表示由磁通量变化引起的感应电流以及磁通量的泄漏。忆阻器的忆导由 $W(\phi) = a - b\tanh(\phi)$ [1]给出。其余参数值为 $a = 1$、 $b = 3$、 $k_1 = 1.2$、 $k_2 = 0.5$、 $A = 0.35$和 $F = 0.22$。我们使用初始条件$(v_0, r_0, \phi_0) = (0, 0, 0)$和 $dt = 0.01$ 求解该系统，直至 $t = 500$。滑动窗口采用 $f = r$、$d = 4$、 $\tau = 72.21$和 $\epsilon = 0.07$完成，见图16。

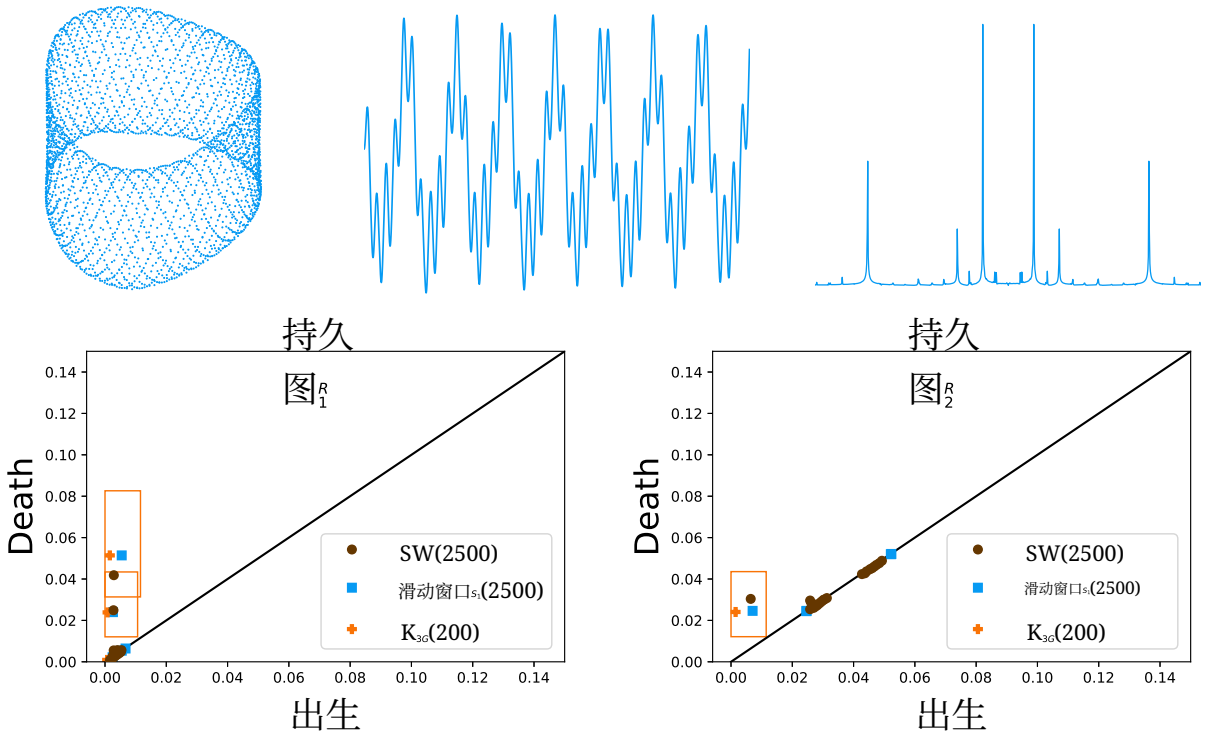


图17：上排：竞争性TLN模型轨迹的三维主成分分析投影（左侧）、用于滑动窗口嵌入的标量轨迹 $x_4(t)$（中间），以及通过快速傅里叶变换得到的其傅里叶功率谱（右侧）。下排：由 $x_4(t)$ 得到的滑动窗口点云上的 Rips 滤过的持久图。

5.2.6 竞争性阈值线性网络 ork

阈值线性网络（TLNs）提供了一个包含阈值非线性的易于理解的模型[28]。TLNs对网络的线性近似进行了改进。TLN模型可由下列方程描述：

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_j + b_i\right]_+$$

其中 $i = 1, \ldots, n$ 和 x_i 表示节点 i的活动水平。术语 W_{ij} 是有向连接 n 强度， b_i 是外部驱动，而 $[y]_+ = \max\{y, 0\}$ 是阈值非线性。

我们考虑竞争性阈值线性网络，其中 $W_{ij} \leq 0$、 $W_{ii} = 0$和 $b_i \geq 1$。此外，我们考虑连接强度：

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j, \\ -1 + \lambda & \text{if node } j \text{ is connected to node } i, \\ -1 - \delta & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该模型表现出复杂行为，包括准周期性。我们复现图 2 中的准周期行为，见 [28]。初始条件和连接矩阵参见该图。其余参数值为 $n = 25$， $b_i = 1$， $\lambda = 0.25$，以及 $\delta = 0.5$。我们求解至 $t = 600$ ，并使用 $f = x_4$， $d = 4$， $\tau = 27.53$和 $\epsilon = 0.07$进行滑动窗口计算，参见图17。

5.2.7 受限三体问题

在天体力学中，限制性三体问题（RTBP）提供了一个易于理解且具有已知平衡点的模型 [22]。这些方程描述了三个天体的运动，其中一个被视为无质量粒子。另两个天体称为主天体，假定它们绕质心沿圆轨道运动。采用一个随主天体旋转的坐标系，并进行适当的缩放后，可以假设主天体的质量分别为 $1 - \mu$ 和 μ， $\mu \in [0, 1/2]$，它们分别固定在（μ， 0， 0）和（$\mu - 1$， 0， 0），并在 2π [14]内完成一周运动。

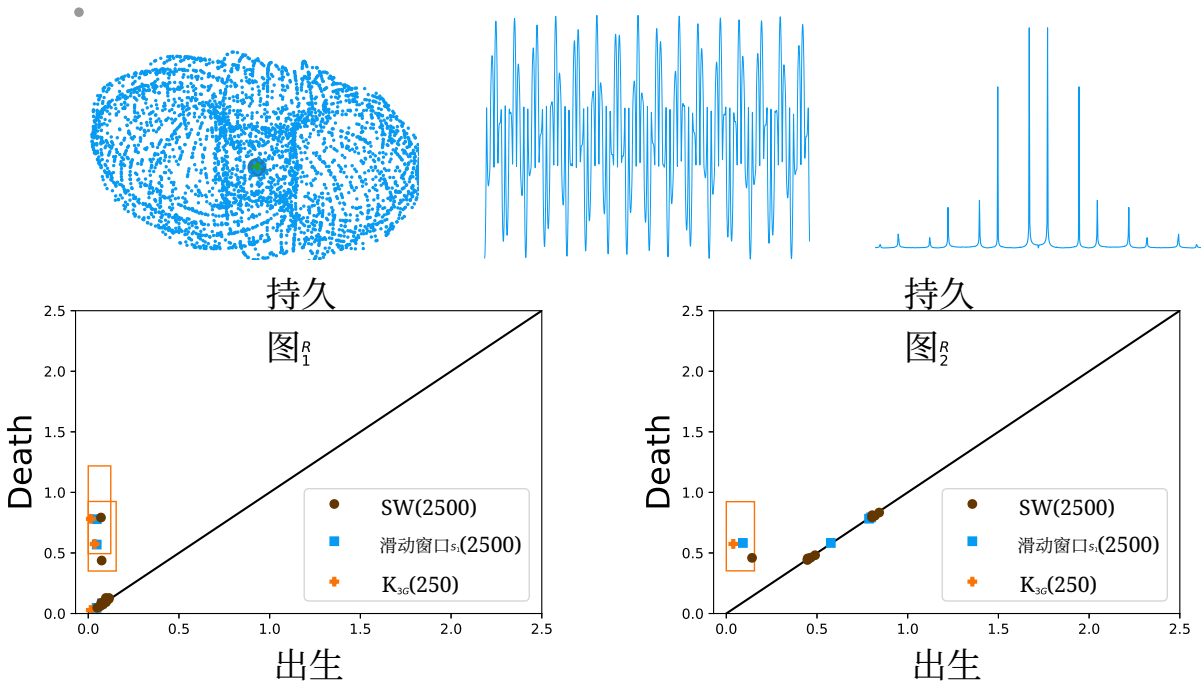


图 18：上排：受限三体问题在 (x, y, z) 空间中的相图，展示地球（蓝色/绿色）和月球（灰色）作为固定主天体（左侧）、用于滑动窗口嵌入的标量轨迹 $x(t)$（中间），以及通过快速傅里叶变换得到的傅里叶功率谱（右侧）。下排：由 $x(t)$ 导出的滑动窗口点云上的 Rips过滤的持久图。

该框架使我们能够用以下方程表示无质量粒子的运动：

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x,\\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y,\\ \ddot{z} &= \Omega_z,\end{aligned}$$

其中

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

and

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2+y^2+z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2+y^2+z^2}$$

是粒子到主天体的距离。

地月系统的情形尤其值得关注，因为它能够帮助执行与太阳和地球磁层相关的航天器任务 [14]。事实上，在该系统的平衡点附近存在准周期性，这会为任务转化出良好的轨迹。我们复现了地月系统中的这一行为，见图 18。在此情形下，$\mu = 0.0121506$。我们使用初始条件 $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (-0.5, 0, 0, 0, 0, 0.73)$ 求解该系统，直到 $t = 100$。滑动窗口采用了 $f = x$、$d = 4$、$\tau = 4.37$ 和 $\epsilon = 0.03$。

5.2.8 双圆限制性四体问题

在限制性三体问题（RTBP）模型中考虑太阳的影响，便得到双圆限制性四体问题（BCR4BP）。该模型对于在月球任务的轨迹设计中利用太阳的力十分重要，并已应用于通往月球区域的月球弹道转移 [26]。新模型采用与 RTBP 相同的坐标轴，并沿用地球和月球做圆周运动的相同假设，但现在还纳入了与太阳影响有关的项。假设太阳位于 x-y 平面内，与原点保持固定距离 a_4，并以恒定角速度运动

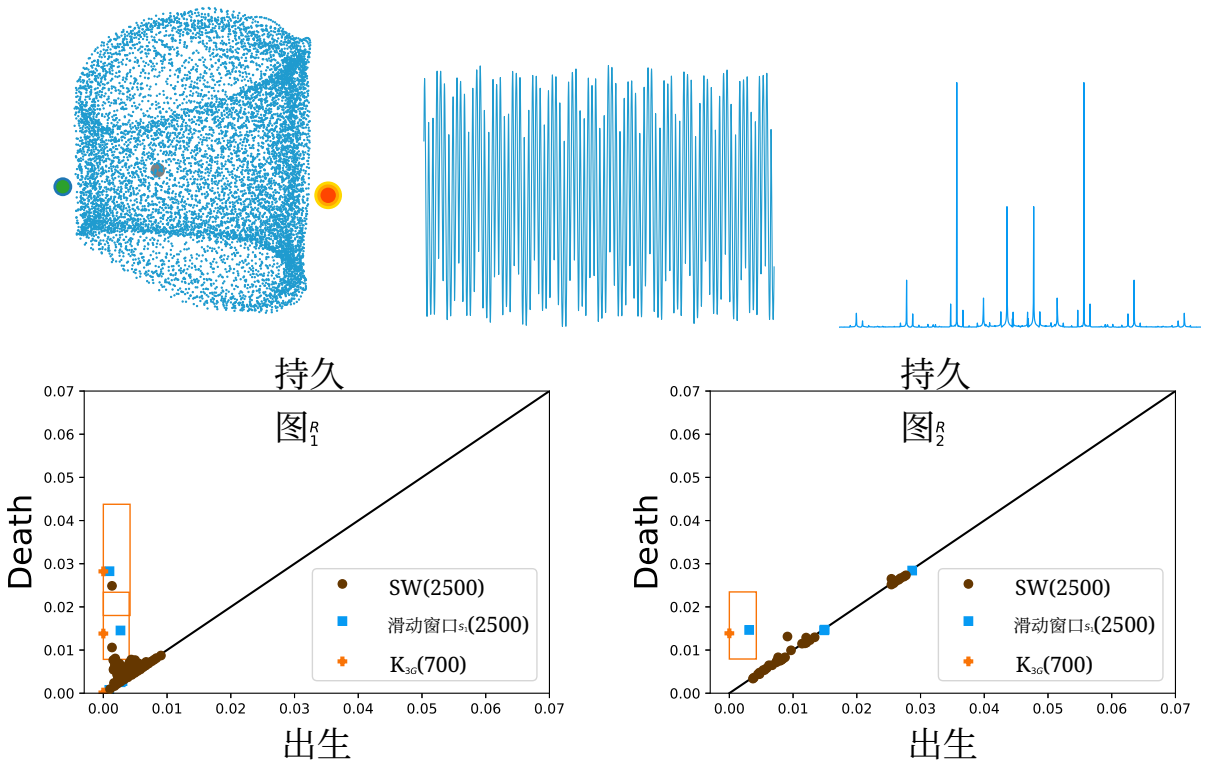


图 19：顶行：双圆限制性四体问题在 (x, y, z) 空间中的相图，展示了作为固定主天体的地球（蓝色/绿色）、月球（灰色）和太阳（红色/黄色）（位置未按比例绘制）。中间：用于滑动窗口嵌入的标量轨迹 $z(t)$。右侧：通过快速傅里叶变换得到的其傅里叶功率谱。底行：由 $z(t)$ 导出的滑动窗口点云上的 Rips 滤过的持久图。

速度 θ_S 做圆周运动。此外，模型假设地球和月球不受太阳引力扰动。在这些假设下，方程为 [26]

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial x},\\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial y},\\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Upsilon}{\partial z},\end{aligned}$$

其中

$$\Upsilon = \frac{1-\mu}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}} + \frac{x^2+y^2}{2} + \lambda\left(\frac{m_4}{r_{43}} - \frac{m_4}{a_4^3}(x_4 x + y_4 y + z_4 z)\right).$$

且 (x_4, y_4, z_4) 表示太阳的位置， r_{13}, r_{23}, r_{43} 分别表示地球、月球和太阳到无质量物体的距离， m_4 是太阳的无量纲质量。我们注意到，情形 $\lambda = 0$ 会简化为限制性三体问题。当 λ 增大至 1 时对该系统的研究见 [26], ，其中他们证明了该模型呈现准周期性。我们复现了准周期行为（见图 19），参数取值为 $\lambda = 1$, $\mu = 0.012155$,$a_4 = 388.84$, $m_4 = 328950.69$ 和 $\theta_S = -0.9251986$。该系统采用初始条件 $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \theta_S)$ =(1.09, 0, 0, 0,0.19, 0.05, 2) 求解至 $t = 200$。滑动窗口采用$f = z$, $d = 4$, $\tau = 39.99$ 和 $\epsilon = 0.009$。

5.3 总结

表 2：运行时间

示例	SW	SW(S1)	K(3G)
5.2.1	7008.66 秒	7672.85 秒	0.87 秒
5.2.2	4351.15 秒	5351.15 秒	0.42 秒
5.2.3	3126.81 秒	3218.73 秒	0.50 秒
5.2.4	5556.86 秒	7628.48 秒	0.98 秒
5.2.5	5137.54 秒	6505.54 秒	0.66 秒
5.2.6	5805.28 秒	7193.97 秒	0.22 秒
5.2.7	6900.29 秒	7937.03 秒	2.09 秒
5.2.8	6615.33 秒	8231.25 秒	0.59 秒

本节详细介绍了如何将 3G 应用于一般的准周期函数。我们将这种近似方法用于已知具有准周期性的动力系统。正如图中所示，我们成功近似了通过滑动窗口嵌入得到的图表。我们的方法还可以计算误差界，图中以矩形表示。此外，如表2所示，我们的方法显著缩短了计算时间。我们希望这项工作有助于将滑动窗口嵌入技术应用于大型数据集。

6 结论与未来工作

我们详细介绍了滑动窗口嵌入（SW）如何成为深入理解准周期信号的重要方法。具有 N 个不可通约频率的准周期函数与 N维环面之间的对应关系，使持久同调成为理想的工具。然而，后者的指数级计算成本限制了滑动窗口嵌入（SW）能够处理的数据集规模。我们的贡献是为所关注的持久图提供一种近似方法（第4节）。我们的方法 3G 能够在已知误差界内实现这一目标。对于第5节所示的示例，我们的计算平均耗时不到 1 秒。相比之下，使用标准库 Ripser [2], 计算所关注的持久图时，平均耗时为 5,563 秒（表2）。

我们项目的后续工作包括通过收紧误差界来改进近似。一种更细致的方法是检查具体的变换矩阵，而不是依赖奇异值论证。另一个方向是将我们的工作应用于真实世界数据，例如心电图数据集。

参考文献

[1] Bao, B., Qian, H., Xu, Q., Chen, M., Wang, J., and Yu, Y. 基于双曲型忆阻器的Hopfield神经网络中非对称吸引子的共存行为。《计算神经科学前沿》11 (2017), 81.[2] Bauer, U. Ripser，第514卷。网址：https://github.com/Ripser/ripser，2016.[3] Bauer, U. Ripser：用于计算Vietoris–Rips持久条形码的精简C++ 代码。《应用与计算拓扑学杂志》5, 3 (2021), 391–423.

[4] Belloy, M., Naeyaert, M., Keliris, G., Abbas, A., Keilholz, S., Van Der Linden, A., and Verhoye, M. 小鼠静息态功能磁共振成像的动态变化：准周期模式检测。国际磁共振医学学会会议论文集 961 (2017).[5] Beresnevich, V., and Leong, N. 倒数和与三距离定理。arXiv预印本 arXiv:1712.03758 (2017).[6] Charó, G. D., Artana, G., and Sciamarella, D. 拉格朗日数据动力学重构的拓扑。Physica D：非线性现象 405 (2020), 132371.[7] Chazal, F., De Silva, V., Glisse, M., and Oudot, S. 持久模的结构与稳定性，第10卷。Springer，2016.[8] Cohen-Steiner, D., Edelsbrunner, H., and Harer, J. 持久图的稳定性。《离散与计算几何》37, 1 (2007), 103.

[9] Coombes, S., and Laing, C. 基于活动的神经网络中的时滞。《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》367, 1891 (2009), 1117–1129.[10] Crawley-Boevey, W. 逐点有限维持久模的分解。《代数及其应用杂志》14, 05 (2015), 1550066.[11] Detroux, T., Habib, G., Masset, L., and Kerschen, G. 非线性调谐吸振器的性能、鲁棒性与灵敏度分析。《机械系统与信号处理》60 (2015), 799–809.[12] Gakhar, H., and Perea, J. A. 持久同调中的K¨unneth公式。arXiv预印本 arXiv:1910.05656 (2019).[13] Gakhar, H., and Perea, J. A. 准周期函数的滑动窗口持久性。《应用与计算拓扑学杂志》8, 1 (2024), 55–92.[14] Gómez, G., and Mondelo, J. M. 限制性三体问题共线平衡点附近的动力学。Physica D：非线性现象 157, 4 (2001), 283–321.[15] Hatcher, A. 代数拓扑。剑桥大学出版社，剑桥，2002.[16] Hlawka, E., Thomas, C., Schoissengeier, J., and Taschner, R. 几何数论与解析数论。Universitext。施普林格柏林海德堡，2012.[17] Holgado, A. J. N., Terry, J. R., and Bogacz, R. 丘脑底核–苍白球网络中β振荡产生的条件。《神经科学杂志》30, 37 (2010), 12340–12352.[18] Ju, Z., Lin, Y., Chen, B., Wu, H., Chen, M., and Xu, Q. 电磁辐射诱发Wilson神经元模型中的非混沌行为。《中国物理学刊》77 (2022), 214–222.[19] Kaslik, E., Kokovics, E.-A., and Rădulescu, A. 具有分布时滞的Wilson-Cowan系统中的稳定性与分岔及其在基底神经节相互作用中的应用。《非线性科学与数值模拟通讯》104 (2022), 105984.

[20] Khasawneh, F. A., and Munch, E. 利用持久同调检测车削颤振。《机械系统与信号处理》70 (2016), 527–541。

[21] Kim, K., and Jung, J.-H. 时间序列数据的精确多参数持久同调：多参数持久性理论的一维快速可变约简。arXiv 预印本 arXiv:2211.03337 (2022).[22] Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., and Ross, S. D. 天体力学中周期轨道之间的异宿连接与共振跃迁。Chaos: 非线性科学跨学科期刊 10, 2 (2000), 427–469.[23] Leong, N. 倒数和与三距离定理。博士论文，约克大学，2017.
[24] Lesnick, M. 多维持久模上交错距离的理论。《计算数学基础》15, 3 (2015), 613–650.
[25] Levine, D., and Steinhardt, P. J. 准晶体：一类新的有序结构。《物理评论快报》53, 26 (1984), 2477.[26] McCarthy, B. P., and Howell, K. C. 四体地月空间准周期轨道及其在弹道月球转移设计中的应用。空间研究进展 71, 1 (2023), 556–584.[27] Morozov, D. 最坏情况下，持久性算法的运行时间为立方级。BioGeometry News，杜克大学计算机科学系，美国北卡罗来纳州达勒姆 (2005).[28] Morrison, K., Degeratu, A., Itskov, V., and Curto, C. 竞争性阈值线性网络中涌现动力学的多样性。SIAM应用动力系统杂志 23, 1 (2024), 855–884.[29] Murudi, M. M., and Mane, S. M. 不同地震动参数下调谐质量阻尼器（TMD）的抗震有效性。载于第13届世界地震工程大会 (2004)，第2卷，第1–8页。[30] Myers, A. D., and Khasawneh, F. A. 运用拓扑信号处理进行阻尼参数估计。机械系统与信号处理 174 (2022), 109042.[31] Olds, C. 连分数。美国数学协会 (1963).
[32] Penalva Vadell, J. Takens 定理：证明与应用。硕士论文，巴利阿里群岛大学，2018.
[33] Perea, J. A. 拓扑时间序列分析。《美国数学会通讯》66, 5 (2019), 686–694.[34] Perea, J. A., Deckard, A., Haase, S. B., and Harer, J. Sw1pers：滑动窗口与1-持久性评分；发现基因表达时间序列数据中的周期性。《生物信息学》16, 1 (2015), 1–12.[35] Phys.org. 日本公司关注地震减振摆。https://phys.org/news/ 2013-08-japanese-companies-quake-damping-pendulums.html，2013年8月。访问日期：2024- 03-20.[36] Rockett, A. M., et al. 连分数。World Scientific，1992.
[37] Shadden, S. C., Lekien, F., and Marsden, J. E. 从二维非周期流的有限时间李雅普诺夫指数定义并刻画拉格朗日相干结构。Physica D：非线性现象 212, 3-4 (2005), 271–304.[38] Shannon, C. E. 噪声环境下的通信。IRE会刊 37, 1 (1949), 10–21.[39] Skraba, P., De Silva, V., and Vejdemo-Johansson, M. 递归系统的拓扑分析。载于NIPS 2012代数拓扑与机器学习研讨会，12月8日，美国内华达州太浩湖 (2012)，第1–5页。[40] Takens, F. 检测湍流中的奇异吸引子。载于《动力系统与湍流》，华威1980。Springer，1981，第366–381页。

[41] Tralie, C. J., and Perea, J. A. 利用拓扑量化视频数据中的（准）周期性。《SIAM影像科学杂志》11, 2 (2018), 1049–1077.[42] Van Ravenstein, T. 三间隙定理（Steinhaus猜想）。《澳大利亚数学会杂志》45, 3 (1988), 360–370.[43] Weixing, D., Wei, H., Xiaodong, W., and Yu, C. 等离子体中的准周期通向混沌的转变。《物理评论快报》70, 2 (1993), 170.[44] Wen, R., Li, T., and Zhen, B. 振动悬挂点处摆的准周期运动。《振动工程与技术杂志》7 (2019), 519–532.[45] Wilden, I., Herzel, H., Peters, G., and Tembrock, G. 哺乳动物发声中的次谐波、双声源发声与确定性混沌。《生物声学》9, 3 (1998), 171–196.[46] Wilson, H. R. 人类和哺乳动物新皮层神经元的简化动力学。《理论生物学杂志》200, 4 (1999), 375–388.[47] Xu, B., Tralie, C. J., Antia, A., Lin, M., and Perea, J. A. 扭曲Takens：稠密轨迹上良好观测的几何刻画。《应用与计算拓扑学杂志》3 (2019), 285–313.[48] Xu, Q., Ju, Z., Feng, C., Wu, H., and Chen, M. 双极性脉冲电流驱动二维Wilson神经元模型的模拟电路综合与动力学验证。《欧洲物理学杂志专题》230, 7 (2021), 1989–1997.[49] Zhigljavsky, A., and Aliev, I. Kronecker序列：分割长度的渐近分布。网址：https://ssa.cf.ac.uk/zhigljavsky/pdfs/number%20theory/Kroneker% 20sequences.pdf.
[50] Zomorodian, A., and Carlsson, G. 计算持久同调。《离散与计算几何》33, 2 (2005), 249。

A 附录

命题 A.1. 设 $\sigma \in C_1(R_\epsilon(S_{\omega,T}))$ 且 $\sigma \neq 0$. 。若 $\partial(\sigma) = 0$，则存在 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\sigma_i \in C_1(R_\epsilon(S_{\omega,T}))$，使得 $\sigma_i \neq 0$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i,$$

$\partial(\sigma_i) = 0$，且若 $\tau \subsetneq \sigma_i$,

$$\partial(\tau) \neq 0.$$

此外， σ_i 可以表示为如下形式的和

$$\sigma_i = \sum_{j=0}^{N_i-1} [x_j, x_{j+1}],$$

其中 $x_i \in S_{\omega,T}$、 $N_i \in \mathbb{N}$ 和 $x_{N_i} = x_0$.

证明。设 $\tau_1 \subsetneq \sigma$ 满足 $\partial(\tau_1) = 0$，并且不存在满足 $\partial(\bar{\tau}) = 0$ 且 $\tau_1 \subsetneq \bar{\tau}$. 的 $\bar{\tau} \subsetneq \sigma$。若不存在这样的 τ_1 ，则令 $\sigma_1 = \sigma$ ，结论即得。否则，令 $\sigma_1 = \sigma/\tau_1$. 。由τ_1, σ_1 满足所述条件。现在，设 $\tau_2 \subsetneq \tau_1$ 满足 $\partial(\tau_2) = 0$ ，并且不存在满足 $\partial(\bar{\tau}) = 0$ 且 $\tau_2 \subsetneq \bar{\tau}$. 的 $\bar{\tau} \subsetneq \tau_1$。若不存在这样的 τ_2 ，则令 $\sigma_2 = \tau_1$ ，结论即得。否则，令 $\sigma_2 = \tau_1/\tau_2$。与前面一样，可以验证 σ_2 满足所需条件。经过有限步后，该过程将终止，从而得到所需的和。

现在我们证明， σ_i 可以按所述方式表示。注意，由于 $\sigma_i \neq 0$，存在 $[x_0, x_1] \in \sigma_i$.此外，由于 $\partial(\sigma_i) = 0$，必定存在一个 $[x_1, x_2] \in \sigma_i$ ，用于消去项 x_1。同理，也必定存在一项 $[x_2, x_3] \in \sigma_i$ ，用于消去项 x_2. 。有限次重复这一过程后，设为 N_i，我们必定会得到一项 $[x_{N_i-1}, x_0]$ ，用于消去项 x_0. 。显然，

$$\partial\big(\sum_{j=0}^{N_i-2} [x_j, x_{j+1}] + [x_{N_i-1}, x_0]\big) = 0,$$

t因此，根据 σ_i 的性质，它的所有项必定都已得到处理。结论得证 .

□

对于 $[x,y]\in C_1(R_\epsilon(S_{\omega,T}))$，我们令

$$L_{x,y}=1$$

¯如果在 $S_{\omega,T}$ 的圆周表示中， $d(x,y)$ 是从 x 出发、终止于 y、沿顺时针方向遍历所得弧的长度。类似地，我们令

$$L_{x,y}=-1$$

¯ ¯如果 $d(x,y)$ 是沿逆时针方向遍历的弧的长度。由于 $d(x,y)\neq 1/2$, 对于 $x,y\in S_{\omega,T}$, $L_{x,y}$ 是定义良好的。我们现在定义

$$f([x,y])=L_{x,y}\bar{d}(x,y).$$

利用 li 性，我们将该函数延拓到 $C_1(R_\epsilon(S_{\omega,T}))$ 的全体, 即如果 $\sigma=\sum_i[x_i,y_i]\in C_1(R_\epsilon(S_{\omega,T})$),

$$f(\sigma)=\sum_i f([x_i,y_i])=\sum_i L_{x_i,y_i}\bar{d}(x_i,y_i).$$

命题 A.2. 设 $\sigma\in C_1(R_\epsilon(S_{\omega,T}))$ $f(\sigma)\neq 0$, 且 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sigma=\sum_{i=0}^{N}[x_i,x_{i+1}].$$

若存在一个 i_0 ，使得

$$L_{x_i,x_{i+1}}=\pm 1$$

对于 $0\leq i\leq i_0$ 和

$$L_{x_i,x_{i+1}}=\mp 1$$

对于 $i_0<i\leq N$，则 σ 与一个.....同调等价

$$\bar{\sigma}=\sum_{i=0}^{\bar{N}}[\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1}]\in C_1(R_\epsilon(S_{\omega,T})),$$

¯，其中 $N\in\mathbb{N}$、 $\bar{x}_{i+1}$ 与 $\bar{x}_i$ 相邻，并且

$$L_{\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1}}=\mathrm{sgn}(f(\sigma)).$$

¯，对于
$0\leq i\leq N.$

证明。 不失一般性地，令

$$L_{x_i,x_{i+1}}=1$$

对于 $0\leq i\leq i_0$。考虑 $S_{\omega,T}$ 的圆周表示。令 $\{x_j^0\}_{j=0}^{N_0}$ 表示包含在 $S_{\omega,T}$ 中、从 x_0 开始并沿顺时针方向终止于 x_1 的弧上的点。我们注意到 $x_0^0=x_0$ 和 $x_{N_0}^0=x_1$.若 $N_0>1$，则可以验证

$$\sum_{j=0}^{N_0-1}[x_j^0,x_{j+1}^0]-[x_0,x_1]=\partial(\sum_{j=0}^{N_0-2}[x_j^0,x_{j+1}^0,x_{N_0}^0]),$$

即 $[x_0,x_1]$ 同调等价于

$$\sigma_0=\sum_{j=0}^{N_0-1}[x_j^0,x_{j+1}^0].$$

若令 $N_0=1$ 我们令 $\sigma_0=[x_0^0,x_{N_0}^0]=[x_0,x_1]$. 通过重复这一过程，我们构造出 σ_i 使得对于 $0\leq i\leq i_0$

$$\sum_{i=0}^{i_0}\sigma_i=\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{j=0}^{N_i-1}[x_j^i,x_{j+1}^i]=\sum_{i=0}^{A_1}[y_i,y_{i+1}],$$

其中 $y_0 = x_0$ 以及 $y_{A_1+1} = x_{i_0+1}$，与其同调等价

$$\sum_{i=0}^{i_0}[x_i, x_{i+1}].$$

类似地，考虑从 x_i 开始、到 x_{i+1}结束的弧上的点，对于 $i_0 < i \leq N$，沿逆时针方向遍历且包含于 $S_{\omega,\ T}$ 中，我们可以像之前一样构造 σ_i，使得

$$\sum_{i=i_0+1}^{N}\sigma_i = \sum_{i=i_0+1}^{N}\sum_{j=0}^{N_i-1}[x_j^i, x_{j+1}^i] = \sum_{i=0}^{A_2}[\bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}],$$

其中 $\bar{y}_0 = x_{i_0+1}$ 和 $\bar{y}_{A_2+1} = x_{N+1}$，与.....同调等价

$$\sum_{i=i_0+1}^{N}[x_i, x_{i+1}].$$

注意到 $y_{A_1+1} = \bar{y}_0 = x_{i_0+1}$ 和 $y_{A_1} = \bar{y}_1$，因为顺时针弧 σ_{i_0} 结束处的点正是逆时针弧 σ_{i_0+1}，开始处的点。因此，$[y_{A_1}, y_{A_1-1}] = -[\bar{y}_0, \bar{y}_1]$ 和

$$\sum_{i=0}^{N}\sigma_i = \sum_{i=0}^{A_1-1}[y_i, y_{i+1}] + \sum_{i=1}^{A_2}[\bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}].$$

将这一论证重复 $A = \min\{A_1+1, A_2+1\}$ 次后，我们得出 $[y_{A_1-i}, y_{A_1-i+1}] = -[\bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}]$ 对于 $0 \leq i < A.$。注意，根据构造

$$f(\sum_{i=0}^{A_1}[y_i, y_{i+1}] + \sum_{i=0}^{A_2}[\bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}]) = f(\sigma) \neq 0,$$

因此 $A_1 \neq A_2$. 即

$$\sum_{i=0}^{N}\sigma_i = \sum_{i=0}^{A_1-A_2-1}[y_i, y_{i+1}]$$

or

$$\sum_{i=0}^{N}\sigma_i = \sum_{i=A_1+1}^{A_2}[\bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}].$$

结论得证。 □

推论 A.3。设 $\sigma \in C_1(R_\epsilon(S_{\omega,\ T}))$ 以及 $\partial(\sigma) = 0.$ 则 σ 与 0 同调等价，当且仅当 $f(\sigma) = 0.$

证明。根据命题 A.1，σ 可以表示为

$$\sum_{i=0}^{N-1}[x_i, x_{i+1}],$$

其中 $x_i \in S_{\omega,\ T}$，$N \in \mathbb{N}$，以及 $x_N = x_0.$ 注意到命题 A.2中，$f(\sigma) = 0$ 当且仅当 $A_1 = A_2$，而这当且仅当 σ 与 0 同调等价。 □

对于下面的结果，令 $\{x_i\}_{i=0}^{T}$ 表示 $S_{\omega,\ T}$ 中的元素，并按升序排列；令 $\oplus$ 表示模 $T+1$ 加法，并令 $k \in \mathbb{N}.$

引理 A.4. 设 $\sigma \in C_1(R_\epsilon(S_{\omega,T}))$ 满足 $\partial(\sigma) = 0$，且 σ 不同调等价于0。那么 σ 同调等价于

$$k\sum_{i=0}^{T}[x_i, x_{i\oplus 1}].$$

证明。 根据命题 A.1，我们可以将 σ表示为 as

$$\sum_{i=0}^{N-1}[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}],$$

其中$\bar{x}_i \in S_{\omega,\ T}$， $N \in \mathbb{N}$，以及 $\bar{x}_N = \bar{x}_0$. 此外，通过反复应用命题A.2， σ 与其同调等价

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=0}^{N_0}[y_i, y_{i+1}],$$

其中 $y_i \in S_{\omega,\ T}$， $N_0 \in \mathbb{N}$， $y_{N_0+1} = y_0$， y_{i+1}与 y_i 相邻，并且

$$L_{y_i,y_{i+1}} = \operatorname{sgn}(f(\sigma))$$

对于 $0 \le i \le N_0$. 我们注意到，要消去项 $[y_i, y_{i+1}]$ ，必须存在项$[y_{n_i}, y_{n_i+1}]$ 使得

$$L_{y_{n_i},y_{n_i+1}} = -\operatorname{sgn}(f(\sigma)).$$

由于这不可能发生，我们得出结论： $\bar{\sigma}$ 的表达式无法再约化。此外，我们注意到，根据构造， $T \le N_0$. 事实上，获得所需的项数的最小值 j_0

$$\partial(\sum_{i=0}^{j_0}[y_i, y_{i+1}]) = 0$$

为 $j_0 = T$，因为这涵盖了 S_ω 中的所有点，$_T$. 我们得出结论

$$\sum_{i=0}^{T}[y_i, y_{i+1}] = \sum_{i=0}^{T}[x_i, x_{i\oplus 1}].$$

事实上，将命题A.1 应用于 $\bar{\sigma}$，可得

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=0}^{N_2-1}\sigma_i$$

对于某个 $N_2 \in \mathbb{N}.$ ，根据 σ_i 的性质以及已证明的结果，我们得出

$$\sigma_i = \sum_{j=0}^{T}[x_j, x_{j\oplus 1}]$$

对于所有 $0 \le i \le N_2 - 1$。结论得证。 □

引理 A.5。 设 $T \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 的连分数展开为 $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$，第 i 个渐近分数为 $\frac{p_i}{q_i}$， 且 k、r、$\bar{s}$ 是满足下列条件的唯一数

$$q_k + q_{k-1} \le T < q_k + q_{k+1}$$

and

$$T = rq_k + q_{k-1} + s, \qquad 1 \le r \le a_{k+1}, \qquad 0 \le s \le q_k - 1.$$

Let

$$D_i = q_i\,\omega - p_i.$$

我们假设

$$s + 1 < q_k, \quad \text{and} \quad |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r + 1)\,|D_k| < \tfrac{1}{3}.$$

设 Γ 为由数对 (x, y) x、$y \in S_{\omega,\ T}$ 和 $x < y$ 构成的集合，其中存在一个 $z \in$ ¯ ¯ ¯

证明。 记 $\delta_C = |D_{k+1}| + (a_{k+1} - r + 1)|D_k|$. 由于 $\delta_C < 1/3$ 且 ω 是无理数， $\lambda > \delta_C$, 因此ϵ 定义良好。为证明该结论，只需证明不存在满足下列条件的 $\tau \in C_2(R_\epsilon(S_{\omega,\ T}))$

$$\sigma = \partial(\tau).$$

我们将假设这样的 τ 存在，并导出一个矛盾。因此，假设存在一个 $\tau \in C_2(R_\epsilon(S_{\omega,T}))$，使得

$$\sigma = \partial(\tau).$$

Let

$$\lambda_0 = \max\{\bar{d}(x,y), \bar{d}(y,z), \bar{d}(z,y)\}| \text{ there exists } [x,y,z] \in \tau\}.$$

令 y_1, y_2 $\in S_{\omega,T},\ y_1 < y_2,$ 满足条件： $d(y_1, y_2) = \lambda_0$. 根据假设，存在$y_3 \in S_{\omega,T}$使得 t $[y_1, y_2, y_3] \in \tau$或 $[y_1, y_3, y_2] \in \tau$。注意，根据构造

$$\max\{\bar{d}(y_2, y_3), \bar{d}(y_1, y_3)\} \leq \bar{d}(y_1, y_2).$$

此外，不失一般性，我们可以假设 $y_3 \in ([0, y_1) \cup (y_2, 1))$。事实上，假设 $y_3 \in (y_1, y_2)$。必定存在一个形如 $[y_1, y_2, z_0]$ 的项，用以抵消情形下的项 $-[y_1, y_2]$。对于项 $[y_1, y_3, y_2]$.，取 $[y_1, y_2, y_3]$。如果 $z_0 \in ([0, y_1) \cup (y_2, 1))$，则问题已解决。因此，我们假设$z_0 \in (y_1, y_2)$。这意味着必定存在一项 $[y_1, z_0, z_1] \in \tau$，用以抵消来自$\partial([y_1, y_2, z_0])$的项 $-[y_1, z_0]$。如果 $z_1 \in (y_1, y_2)$，则必定存在一个形如 $[y_1, z_1, z_2] \in \tau$的项，用以抵消来自 $\partial([y_1, z_0, z_1])$的项 $-[y_1, z_1]$。另一方面，如果 $z_1 \in ([0, y_1) \cup (y_2, 1))$，我们注意到

$$L_{y_1, z_1} = -L_{y_1, y_2}$$

或其他情况

$$\bar{d}(y_1, z_1) > \bar{d}(y_1, y_2),$$

矛盾。与之前一样，必定存在一个 $[z_0, z_2, z_1]$ ，用来消去 $\partial([y_1, z_0, z_1])$ 中的项 $[z_0, z_1]$ 。由于在这两种情形下，我们最终都会遇到与项 $[y_1, y_2, z_0]$ 类似的情形，因此可以断定这一过程不会终止。因此，不失一般性，我们假设 $y_3 \in ([0, y_1) \cup (y_2,\ 1))$，如前所述。我们注意到

$$L_{y_1, y_2} = L_{y_2, y_3}$$

$^-$ $^-$因为否则就会有 $d(y_2,\ y_3) > d(y_1,\ y_2) = \lambda_0$，这会导致矛盾。同样，必定有

$$L_{y_1, y_2} = L_{y_3, y_1}$$

$^-$ $^-$因为否则就会有 $d(y_3,\ y_1) > d(y_1,\ y_2) = \lambda_0$。这两个条件意味着

$$1 - \bar{d}(y_1, y_2) = \bar{d}(y_2, y_3) + \bar{d}(y_3, y_1) \leq 2\max\{\bar{d}(y_2, y_3), \bar{d}(y_1, y_3)\},$$

即 $(y_1,\ y_2) \in \Gamma$，但由于

$$\lambda_0 \leq \epsilon < \lambda$$

根据 λ. 的极小性，这是不可能的。因此，不存在这样的 τ。 □