手性波导量子电动力学中的光子统计：I 平均场与微扰展开

M. Eltohfa[1,*] 和 F. Robicheaux[1,2,†]

[1] *Department of Physics and Astronomy, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47906 USA* [2] *Purdue Quantum Science and Engineering Institute, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, USA*(日期：2026年3月6日)

波导量子电动力学（WQED）为控制光与原子之间的相互作用提供了合适的平台，并使超辐射和亚辐射等集体现象成为可能。在手性波导装置中，量子态会遍历整个希尔伯特空间，因此精确理论处理的难度随原子数呈指数级增长；迄今为止，对于超过 ~ 20 个原子的问题，尚未获得精确解。在这项工作中，我们采用计算效率较高的高阶平均场近似，对手性耦合原子阵列中的辐射动力学进行建模，结果与近期实验结果吻合良好。此外，基于对完整动力学的微扰近似，我们推导出一种解析解，可描述原子数适中（ N）且原子-波导耦合均匀（ β）时的光子统计。最后，我们表明，要捕捉完全反转态中二阶相干性的起始，需要采用四阶平均场近似，因为低阶处理无法考虑所需的四体关联。这些结果展现了无对称性系统的复杂行为，而本文讨论的方法则提供了系统的解析解，可用于对累积量展开或截断维格纳近似等半经典方法进行基准测试。

arXiv:2603.04591v1 [quant-ph] 4 Mar 2026

I. 引言

由于多体量子系统具有丰富的物理现象，对其进行研究一直是一项至关重要的任务。在量子光学领域，光与量子发射体系综相互作用，会产生多种效应，包括超辐射和亚辐射 [1–7] ，以及原子态或光态的操控 [8–14] ，这对相干量子控制和量子信息处理十分有用。然而，由于态的数量呈指数增长，多体量子系统本质上可能非常复杂。

在本研究中，我们旨在波导量子电动力学（波导量子电动力学）的框架下解决多原子系统中的这一复杂问题。波导量子电动力学为实现上述现象提供了合适的环境，这些现象已在多项理论研究 [15–19] 和实验研究 [20–23] 中得到证实。具体而言，我们关注反转系综发射的光子统计特性，包括超辐射爆发期间的光子通量和双时光子-光子关联函数，这些特性已通过实验得到验证 [23]。与原子紧密排列的狄克极限不同，在狄克极限下所有原子之间存在置换对称性，而一般的波导量子电动力学设置不具有任何对称性 [19] ，因此系统会遍历希尔伯特空间中的所有可用状态。这一点已在单激发流形中得到证实 [24]。在本研究考虑的多激发情形下，这意味着需要模拟呈指数增长的希尔伯特空间才能获得精确解。该方法仅适用于原子数较少的情况， $N \lesssim 20$，因此我们转而采用各种近似方法来模拟实验中可实现的原子数， $N \sim 10^3$。

在波导量子电动力学的背景下，人们采用了多种理论方法。超辐射爆发、二阶相干性的出现以及原子关联等感兴趣的特征，可以通过累积量展开（也称为高阶平均场或平均场）方法 [19], 、截断维格纳近似（TWA） [16, 18], 、矩阵乘积态（MPS） [18], 以及混合相干态近似（MCSA） [25]等工具提取。这些工具不仅复杂程度各异，而且能够可靠捕获的物理量也有所不同。迄今为止，双时间光子关联虽已能够通过实验获得 [23]，但尚未有研究使用这些技术对其进行展示。

在这项工作中，参考文献 [23] 中近期关于双时光子关联的实验结果促使我们对其进行建模。我们开发了高阶平均场方法，利用系统的一维（1D）特性，实现了高效的计算。这使我们能够研究包含大量原子的系统（ N ，正如配套论文 [26] 中所做的那样，原子数可达数万），并得到与实验结果定性一致的结果。

为验证平均场方法的有效性，我们将该方法与基于密度矩阵（DM）演化或蒙特卡洛（MC）轨迹的精确计算进行比较，比较对象为较小的原子数（ $\lesssim 20$ ），结果显示两者吻合良好。此外，我们利用较小的原子-波导耦合 β（在实验中为 ≈ 0.01 [23]），通过诺伊曼展开求得解析解。该展开揭示了系统状态遍历希尔伯特空间中所有状态时所呈现的多个时间尺度。它还使我们能够在中等原子数 $N \sim 10^3$ 下，以平均场或 TWA 近似等半经典方法作为基准。在一篇配套论文 [26], 中，我们探讨热力学极限

* meltohfa@purdue.edu
† robichf@purdue.edu

即 $N \to \infty$ 在保持光学深度 $OD = 4N\beta$ 固定的情况下。在该极限下，多个时间尺度合并，从而为各种可观测量揭示出闭式表达，并预言二阶相干性在此极限下消失。

我们指出，在实验建模中，我们的方法考虑了不同原子之间原子-波导耦合的涨落， β。另一方面，为了比较不同方法的行为和标度，我们假设每个原子的耦合相同 β。

本文结构安排如下。第 II 节中，我们定义所研究的手性 系统。第 II A 节中，我们介绍波导量子电动力学的平均场方法，以及一种提高其计算效率的方法。第 II B 节中，我们介绍一种解析解，该解基于从对称初始条件出发对精确解进行微扰展开。在第 III 节中，我们对平均场方法和解析方法进行基准测试。第 III C 节中，我们介绍一些实验方面的考量，并将实验结果与二阶平均场（MF2）方法的预测进行比较。最后，在第 III D 节中，我们展示了从理想化反转态出发时 MF2 的一个缺陷，并讨论其对成功建立实验模型可能造成的影响。

II. 方法

本文考虑的系统已在文献 [16, 21, 25] 中详细描述，并展示于图 1 上图。该系统由一根波导和被囚禁在其附近的 N 个原子组成。我们将沿波导排列的原子位置记为 z_i，其中 $1 \le i \le N$，使得若 $i < j$，则 $z_i < z_j$。单个原子以速率 Γ_0 自发辐射，辐射分别以概率 β^+、β^-和 $1-\beta^+-\beta^-$ 进入波导的前向和后向传播方向以及自由空间模式。施加磁场并使用圆偏振光后，可使原子主要与波导中向右传播的光子耦合，即 $\beta^+ \gg \beta^-$ [25]。在正文其余部分，我们假设波导是单向的（$\beta^- = 0$），并记 $\beta^+ \equiv \beta$，不过我们使用的一些方法也很容易扩展到双向波导，如附录 A 所示。

为研究集体自发辐射，我们用波导中的一个短共振激光脉冲驱动原子，该脉冲仅作用于两个内部态，分别记为 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$，对应基态和激发态。脉冲结束后，原子处于部分或完全反转状态，随后自发衰变。波导中发射的光子由末端的探测器捕获，据此可测量光子强度或强度-强度关联。

按照通常的处理，我们采用马尔可夫图像，并对量子化光场进行迹运算。此外，选取以跃迁频率（ω_0）为参考的旋转参考系。正如参考文献 [16], 中所述，

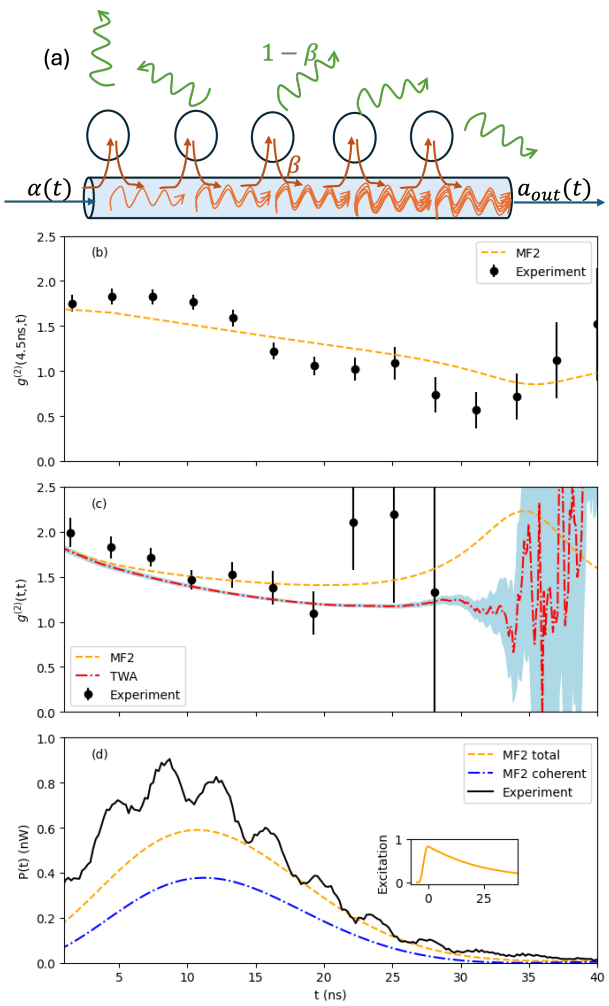

图 1：（a）装置示意图。N 个二能级原子与单向波导耦合。与右行波导模式的耦合常数为β，与自由空间模式的耦合常数为 $1-\beta$。由此实现了一个级联量子系统。我们关注输出模式$\hat{a}_{\text{out}}$的关联函数，例如输出功率 $P(t) = \langle \hat{a}^\dagger \text{out}(t)\hat{a}_{\text{out}}(t)\rangle$，以及 Glauber二阶量子关联函数 $G^{(2)}(t_1,t_2) = \langle \hat{a}^\dagger \text{out}(t_1)\hat{a}^\dagger \text{out}(t_2)\hat{a}_{\text{out}}(t_2)\hat{a}_{\text{out}}(t_1)\rangle$。在参考文献 [23], 中，该模型通过纳米光纤耦合的冷铯原子的D2跃迁实现，激发态寿命为

$$g^{(2)}\ 4.5\quad t\quad =\quad G^{(2)}\ 4.5\quad t\ /\ P\ 4.5\quad P\ t \qquad [23]$$

纳秒。（b）我们展示参考文献（纳秒）(纳秒)((纳秒)())中的实验数据（黑色数据点），对应于从接近最大反转态开始衰减的原子系综；同时展示了本文所述的二阶累积量展开或平均场（MF2）方法给出的理论预测。（c）我们展示了 $g^{(2)}(t,t)$的实验数据，以及 MF2 方法和参考文献 [16, 23]中使用的截断维格纳近似（TWA）给出的预测。浅蓝色阴影区域表示 TWA 方法的统计不确定性。（d）我们展示了 $P(t)$的实验数据，以及平均场预测。我们还展示了理论预测的 $P(t)$相干分量，具体说明见正文。插图显示了 MF2 预测的反转脉冲期间及之后的激发态布居分数。实验参数的详细信息见第 III C 节。

在单向波导的情况下，原子也可以被另一个旋转参考系吸收。密度矩阵 $\hat{\rho}$ 对应的 Lindblad主方程为[16]

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\mathrm{i}[\hat{H}_0 + \hat{H}_{\mathrm{casc}}, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_{\mathrm{coll}}[\hat{\rho}] + \mathcal{L}_0[\hat{\rho}] \tag{1}$$

其中 h.c. 表示厄米共轭

$$\hat{H}_0 = \sum_n \sqrt{\beta_n}\left(\alpha(t)\hat{\sigma}_n^\dagger + \mathrm{h.c.}\right), \tag{2a}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{casc}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_m\sum_{n<m}\left(\sqrt{\beta_m\beta_n}\hat{\sigma}_m^\dagger\hat{\sigma}_n - \mathrm{h.c.}\right), \tag{2b}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{coll}}[\hat{\rho}] = \sum_{m,n}\sqrt{\beta_m\beta_n}\left(\hat{\sigma}_n\hat{\rho}\hat{\sigma}_m^\dagger - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}_m^\dagger\hat{\sigma}_n, \hat{\rho}\right\}\right), \tag{2c}$$

$$\mathcal{L}_0[\hat{\rho}] = \sum_n (1-\beta_n)\left(\hat{\sigma}_n\hat{\rho}\hat{\sigma}_n^\dagger - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}_n^\dagger\hat{\sigma}_n, \hat{\rho}\right\}\right), \tag{2d}$$

其中我们设定 $\hbar = 1$，并以激发态的寿命为单位，使得 $\Gamma_0 = 1$。在式 (2) 中，H_0描述相干共振驱动，其中 $\alpha(t)$ 与输入激光的场振幅成正比（见图 1(a)）。因此，输入脉冲功率可写为 $P_p(t) = \hbar\omega_0\Gamma_0|\alpha(t)|^2$，其中 ω_0 为共振频率。此外，β_n 表示 n^{th} 原子与波导的耦合，该耦合通常因原子而异。进一步地，H_{casc} 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{coll}}$ 描述原子与波导的级联耦合，并决定原子间的集体动力学和关联。$\mathcal{L}_0$ 描述原子向自由空间的单独衰减。$\hat{\sigma}_n = |g_n\rangle\langle e_n|$ 是 n^{th}原子的自旋降算符。此外，n^{th}原子的激发算符为 $\hat{e}_n = \hat{\sigma}_n^\dagger\hat{\sigma}_n$。

对实验进行建模时，必须考虑原子之间 β_i 的涨落（见参考文献[16, 23]）。图 1 和第 III C 节中的结果采用了变化的 β，但在比较和研究不同方法所得趋势的计算中，始终忽略了这一因素。

本工作的目标是获得波导输出的时变关联函数的数值预测，

$$\hat{a}_{\mathrm{out}} = \alpha - \mathrm{i}\sum_n \sqrt{\beta_n}\hat{\sigma}_n, \tag{3}$$

例如场 $E(t) = \langle\hat{a}_{\mathrm{out}}(t)\rangle$，以及输出通量

$$P(t) = \langle\hat{a}_{\mathrm{out}}^\dagger(t)\hat{a}_{\mathrm{out}}(t)\rangle. \tag{4}$$

为监测系统的相干性，我们还追踪输出通量的相干分量和非相干分量，$P(t) = P_{coh}(t) + P_{inc}(t)$，其中 $P_{coh}(t) = |E(t)|^2$。最后，为研究光子关联和强度涨落，我们监测由下式给出的双时二阶关联函数$G^{(2)}(t_1, t_2)$

$$G^{(2)}(t_1,t_2) = \langle\hat{a}_{\mathrm{out}}^\dagger(t_1)\hat{a}_{\mathrm{out}}^\dagger(t_2)\hat{a}_{\mathrm{out}}(t_2)\hat{a}_{\mathrm{out}}(t_1)\rangle, \tag{5}$$

以及归一化关联函数

$$g^{(2)}(t_1,t_2) = \frac{G^{(2)}(t_1,t_2)}{P(t_1)P(t_2)}. \tag{6}$$

双时关联函数可以通过量子回归方法 [27]以计算方式求得。在平均场方法中应用量子回归方法的细节见参考文献 [28]。具体而言，为计算从反转态 $|\psi\rangle_N = |ee\ldots e\rangle$ 开始的系统的 $g^{(2)}(0, t)$，我们使用较低迪克态 $|\psi\rangle_{N-1} \propto \sum_n \hat{\sigma}_n|ee\ldots e\rangle$ 所发射的功率与 $|\psi\rangle_N$所发射功率之比。该量度反映了从完全反转态开始时输出光子率 [23] 的初始逐次涨落。

由于求解公式（1）具有指数计算复杂度（$\mathcal{O}(4^N)$），且手性系统中不存在任何简化对称性 [19], ，我们采用本节余下部分所述的近似技术。首先介绍平均场或累积量展开方法，然后转向基于微扰展开的解析方法。

A. 平均场方程

本节介绍公式（1）中系统的平均场方法。首先，可以针对一般的原子算符 A 推导出朗之万-海森堡方程 [16]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A} = \sum_n\left\{[\hat{\sigma}_n^\dagger, \hat{A}]\left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_n + \mathrm{i}\hat{b}_n^{\mathrm{in}}\right) + \left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_n^\dagger - \mathrm{i}(\hat{b}_n^{\mathrm{in}})^\dagger\right)[\hat{A}, \hat{\sigma}_n]\right\}, \tag{7}$$

其中 $b_n^{\mathrm{in}} = \sqrt{\beta_n}\hat{a}_n$ 是原子的输入模式（假设自由空间场处于真空态 [16]），并且

$$\hat{a}_n = \alpha - \mathrm{i}\sum_{m<n}\sqrt{\beta_m}\hat{\sigma}_m, \tag{8}$$

由于波导的单向性，从原子 n 的角度来看，求和仅针对上游原子。类似的双向波导方程也可以推导出来，见附录 A。

单原子算符（$\hat{\sigma}_n$ 和$\hat{e}_n$）的演化通过代入式（7）得到:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_n}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\hat{\sigma}_n - \mathrm{i}(1-2\hat{e}_n)\sqrt{\beta_n}\hat{a}_n, \tag{9}$$

and

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_n}{\mathrm{d}t} = -\hat{e}_n - \mathrm{i}\sqrt{\beta_n}\left(\hat{a}_n\hat{\sigma}_n^\dagger - \hat{a}_n^\dagger\hat{\sigma}_n\right), \tag{10}$$

这些算符的海森堡方程与公式（1）中的原始主方程同样难以求解。不过，我们可以通过将它们转化为复数方程

对初始态 $\rho(t=0)$ 求期望值，例如可得：

$$\frac{\mathrm{d}\langle\hat{\sigma}_n\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\langle\hat{\sigma}_n\rangle - \mathrm{i}\sqrt{\beta_n}(\langle\hat{a}_n\rangle - 2\langle\hat{e}_n\hat{a}_n\rangle). \tag{11}$$

请注意，单原子算符期望值的演化需要知道双原子算符的期望值。此时，我们可以使用累积量展开来近似双原子算符 [29, 30]

$$\langle\langle\hat{A}_m\hat{B}_n\rangle\rangle \equiv \langle\hat{A}_m\hat{B}_n\rangle - \langle\hat{A}_m\rangle\langle\hat{B}_n\rangle \approx 0, \tag{12}$$

由此得到关于单原子算符的封闭常微分方程（ODE）系统。这种方法称为平均场或 MF1 [28]。MF1 忽略原子之间的所有关联，并简单地假设系统始终处于乘积态。尽管这种方法易于使用，且在多体物理中被广泛采用，但已知它无法描述自旋系统接近完全反转时的瞬态动力学 [25, 28, 31, 32]。这是因为它无法捕捉反转系统中起初不存在的关联的逐渐形成。例如，它预测反转系统会呈指数衰减，且不会出现超辐射爆发。因此，在本文余下部分，我们不会研究这种方法，而将研究文献[21, 25]中的一种 MF1 变体。

在文献[21, 25], 中，MF1 被称为相干态近似（CSA），因为它假设驱动原子 n 的场模 $\hat{a}_n$ 是相干场。在 [25, 33], 中，研究者通过向相干模 $\hat{a}_n \to \hat{a}_{n,\mathrm{coh}} + \hat{a}_{n,\mathrm{inc}}$ 加入非相干部分，对 CSA 作了启发式扩展，形成混合相干态近似（MCSA）。MCSA 能够捕捉超辐射爆发所需的关联建立过程，并已成功用于在各种实验条件下重现一阶关联函数 $P(t)$ [25]。然而，该方法无法求得高阶关联函数 $g^{(2)}$。本文为与高阶平均场方法进行比较，展示了 MCSA 的一些结果，以及为捕捉从反转态出发的 $g^{(2)}(0,t)$ 而对其作的启发式扩展。

MF1（以及 MCSA）的另一种替代方案是为双原子算符补充方程，从而扩展常微分方程组；这些方程通常依赖于三原子算符，而三原子算符可通过另一种高阶累积量展开进行近似 [28, 30]。这种方法记为 MF2[28]。如有需要，可以扩展这一近似层级，以捕捉高阶关联。然而，这会导致常微分方程组的规模随 $\sim(N^n)$ 增长，其中 N 表示原子数，n 表示 MF-n 的阶数。本文研究了最高至三阶平均场（MF3）的方法，以捕捉包括发射功率和二阶相干性在内的相关物理特性。

与单原子算符的方程 Eq. (9) 类似，高阶平均场所需的双原子或三原子算符的运动方程也可以推导出来。例如，原子-原子关联函数 $\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{\sigma}_k$ 的演化满足：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{\sigma}_k}{\mathrm{d}t} = -\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{\sigma}_k - \mathrm{i}\sqrt{\beta_l}\hat{a}_l^\dagger(2\hat{e}_l-1)\hat{\sigma}_k + \mathrm{i}\sqrt{\beta_k}(2\hat{e}_k-1)\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{a}_k, \tag{13}$$

其余 MF2 方程见附录 B，以使正文更加清晰。

在上述方程中使用场算符 $\hat{a}_n$ 有三个目的。首先，它是一种记号手段，可使运动方程更加简洁。否则，方程中将包含对原子的单重求和。其次，它揭示了问题的集体特性；某一组原子的性质仅取决于上游原子的集体模式，而不直接取决于单个原子的行为。第三，它为计算加速提供了途径。对于手性系统，不同原子处的这类场算符可以递归地计算如下：

$$\hat{a}_n = \hat{a}_{n-1} - \mathrm{i}\sqrt{\beta_{n-1}}\hat{\sigma}_{n-1}, \tag{14}$$

场关联函数也可以如此计算。例如，在式 (13) 中，项 $\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{a}_k$ 属于 MF2 方程，可以通过逐步累积构造出来，如下所示：

$$\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{a}_k = \hat{\sigma}_l^\dagger\hat{a}_{k-1} - \mathrm{i}\sqrt{\beta_{k-1}}\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{\sigma}_{k-1}, \tag{15}$$

但 $l=k-1$ 时除外，此时 $\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{a}_k = \hat{\sigma}_l^\dagger\hat{a}_{k-1} - \mathrm{i}\sqrt{\beta_{k-1}}\hat{e}_{k-1}$。通过首先计算模式算符，$\langle\hat{a}_n\rangle$，并迭代地求出它与原子算符的关联，运动方程中的导数便可在 $\mathcal{O}(N^n)$ 步内计算得出，而一般的扩展系综则需要 $\mathcal{O}(N^{n+1})$ 步 [30]（例如自由空间耦合原子）。这样，我们便可以使用 MF2 模拟由 $N \sim 10^4$ 个原子组成的大型系统（见配套论文中的模拟 [26]），或使用 MF3 模拟由 $N \sim 10^3$ 个原子组成的系统。如今，近期实验已能实现如此规模的系统。请注意，如附录 A 所示，即使对于双向波导，也可以采用类似的加速方法。

B. 解析 β 展开

本节概述一种在特殊情况下求取解析解的方法。该方法利用较小的耦合 β（如实验中所用）对所需的可观测量进行泰勒展开。与其他方法相比，这种解析方法的优势在于，它可以相对轻松地外推至较大的 N。这使我们能够探索大 N 下的行为，并以此检验高 N下的平均场方法。所考虑的情况不包含输入场，即 $\alpha(t)=0$。为了实现标度，原子也从对称态出发，并假设所有原子具有均匀耦合 β。

这里，我们考虑从激发态 $|ee\ldots e\rangle$ 或较低的迪克态 $|\psi\rangle_{N-1}$ $\propto$ 开始

$\sum_n \hat{\sigma}_n |ee\ldots e\rangle$，并追踪辐射功率 $P(t)$ 或二阶关联函数 $G^{(2)}(t,\ t)$。这些信息足以计算 $g^{(2)}(t,\ t)$（如参考文献 [16] 中使用 TWA 方法所做），或计算实验在参考文献 [23] 中测得的 $g^{(2)}(0,\ t)$，其初态为激发态 $|ee\ldots e\rangle$。该方法的细节见附录 C。最终目标是将上述可观测量写成关于 β 的幂级数展开。例如，若系统初始化于激发态 $|ee\ldots e\rangle$，则式 (4) 中的辐射功率 P 为

$$P(t,N,\beta)=\sum_{k=1}\beta^k f_k(N,t), \tag{16}$$

其中

$$f_1(N,t)=Ne^{-t}, \tag{17}$$

$$f_2(N,t)=-N(N-1)\left[2e^{-2t}+(-2+t)e^{-t}\right], \tag{18}$$

$$\begin{aligned} f_3(N,t)=&\frac{1}{2}N(N-1)^2(t-2)^2e^{-t}\\ &+2N(N-1)(N-2)te^{-2t}\\ &-2N(N-1)(2N-3)e^{-2t}\\ &+2N(N-1)(N-2)e^{-3t}. \end{aligned} \tag{19}$$

各阶函数变得愈发复杂。这里我们只给出最前面的几个系数。由于附录 C 中所述的计算困难，我们通常将展开截断在约 k_{max} 7 或 8 阶。为展示结果部分（第 III 节）中截断阶数 k_{max} 对收敛性的影响，我们将使用可用的最高两个阶数。

一阶贡献 $f_1(N,\ t)$ 是辐射到波导中的功率的非相干贡献，也是 MF1 所预测的唯一贡献。一般而言，k^{th} 阶贡献包含一个关于 N 的多项式，其次数为 k。这意味着，对于有限的 N，动力学同时依赖于 N 和 β；但在 N 很大的极限下，动力学仅是 $N\beta$ 的函数，而 $N\beta$ 充当新的展开参数。此外，f_k 的低阶初始时刻导数为零，即对于 $m<k-1$，$f_k\ (N,\ t)|_{t=0}=0$，这意味着高阶项只会在更大的 t 时才有贡献。此外，我们注意到，该解具有多时间尺度特性：它由具有多个衰减率的指数函数以及次数不断增加的 t 多项式表示。这些多重时间尺度源于量子态依次遍历希尔伯特空间中越来越大的部分。它们也使人联想到缺乏简化对称性的手性系统的复杂动力学。

如式 (16) 中的解析 β 展开具有直观的收敛特性。首先，它们在早期时间比在晚期时间收敛得更快，这表明随着时间推移，多个时间尺度开始相互竞争，因此需要更多项。其次，$N\beta$ 值较小时，它们比值较大时收敛得更快。这是自然的，因为较大的 β 意味着相对于 $\beta\to 0$ 极限下平凡且精确的一阶贡献，扰动更强。此外，较大的 N 意味着动力学在更多原子中传播所带来的复杂性更高。最后，在固定 $N\beta$时，级数展开在 N较大时收敛得更快。事实上，在 $N\to\infty$极限下，某些可观测量的动力学具有简单的闭式，且 MF2 变得精确，与解析解一致。配套论文 [26]探讨了这一 $N\to\infty$ 极限。也可以对从完全反转态出发的 $G^{(2)}(t,\ t)$，以及从 $|\psi\rangle_{N-1}$出发的 $P(t)$进行类似分析。

III. 结果

在本节中，我们介绍手性波导系统中与光子统计相关的多个物理量的结果。首先，对于较小的 N，我们通过与精确计算进行比较，对第 II A 节中介绍的平均场方法进行基准测试，并讨论 MF2 和 MF3 的行为。其次，对于相对较大的 N，我们通过与第 II B 节中介绍的解析结果进行比较，对平均场方法进行基准测试。第三，我们讨论图 1 所示实验结果的实验模拟，并展示其对激发脉冲面积的高度敏感性。最后，我们确定了低阶平均场方法的一项局限性，即从理想化反转态开始时二阶相干性的出现。

对于实验模拟，我们采用国际单位制。我们使用纳米光纤耦合冷铯原子的 D2跃迁。激发态寿命（$1/\Gamma_0$）为 30.5 纳秒。跃迁频率为 $\omega_0/\left(2\pi\right)=3.52\times10^{14}$Hz，波长为 852 nm。对于比较不同近似方法的模拟，我们采用无量纲量，其中时间以 $1/\Gamma_0$ 为单位，功率以 $\Gamma_0\hbar\omega_0$ 为单位。

A. 小 N 下平均场方法的基准测试

为验证平均场方法在手性波导中的有效性，我们在各种设置下对平均场方法进行基准测试。首先考察小 N 区域，在该区域中，可以使用密度矩阵或蒙特卡洛轨迹进行精确模拟。受参考文献 [23], 中实验的启发，在我们的大多数测试中，光学深度固定为 $\propto\beta N\sim 10$。我们在不同测试中改变了光学深度（此处未展示），结果符合预期：随着光学深度增加，各种近似方法的准确性都会降低。

在图 2 中，我们设定 $N=18,\ \beta=0.5$ 从基态 $|gg\ldots g\rangle$ 开始，并向波导中发送一个持续 4 ns （从 $t=-4$ ns 到 $t=0$ ns）的方波脉冲。这是一个受实验启发的短脉冲，

其脉冲面积为 $A = 1.13\pi$，可使系统达到最大反转（关于量 A 的解释，见第 III C 节和参考文献 [25] ）。脉冲结束后（$t \geq 0$），我们记录随后发射到波导中的功率。我们发现，MF2 和 MF3 近似给出了定性上正确的行为。我们还将结果与[25], 的 MCSA 进行了比较，发现它在大多数测试中都与 MF2 高度吻合。

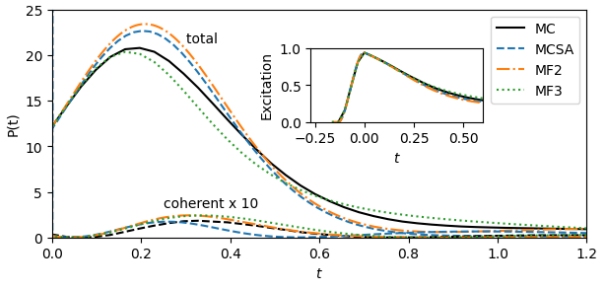

图 2：比较采用蒙特卡洛、MCSA、MF2 和 MF3 方法时，$N = 18$ 个原子从基态出发的辐射与激发动力学。脉冲结束后，波导中发射的总功率 $P(t)$ 以及较小的相干分量 $P_{coh}(t)$ 如图所示。为便于观察，$P_{coh}(t)$ 放大了 10 倍。插图显示了脉冲期间及脉冲结束后的激发情况。

在图 2 中，随着关联逐渐形成，所有方法在定量上均相符。随着关联和超辐射达到最大值，不同方法开始出现差异，但在定性上仍然一致，其中 MF3 通常最接近基于蒙特卡洛轨迹的精确计算。MF2 和 MCSA 会高估峰值功率，而 MF3 往往低估峰值功率。这是我们在各种情形中观察到的一般规律，与近期的研究结果一致 [32]。在参考文献 [32], 中，MF 的偶数阶近似往往会高估峰值功率，而奇数阶近似则会低估。因此，对实际功率的良好估计或许可以通过对奇数阶和偶数阶近似取平均得到。

请注意，由于系统处于最大反转状态，大部分功率以非相干功率的形式释放，只有一小部分以相干方式发射。在插图中，我们展示了随时间变化的平均原子激发；在短脉冲期间，所有模型的结果一致，并在脉冲结束时达到 $\approx 94\%$。随后，激发发生超辐射衰减。在超辐射爆发期间，峰值功率较高的方法所对应的激发较低。请注意，脉冲结束时辐射部分同步，这是因为合作增强$P(0) - \beta N \times$激发$(0) = 30\% \times P(0)$占初始发射功率的相当大一部分。这是由激发方式和脉冲的有限持续时间造成的。由于脉冲在有限时间内使系统反转，原子开始锁定其辐射，因此在脉冲结束时，它们处于部分相位锁定状态。

B. 大 N 下平均场方法的基准测试

本节中，我们将平均场和 MCSA 方法与第 IIB 节针对大 $N = 900$ 和 $\beta = 0.011$ 、从完全反转态或较低能级的迪克态 $|\psi\rangle_{N-1} \propto \sum_n \hat{\sigma}_n |ee\ldots e\rangle$ 出发得到的解析结果进行比较基准测试（ $g^{(2)}(0,\ t)$ 所需）。这些参数的选取参考了 [23, 25] 中的实验。结果见图3。

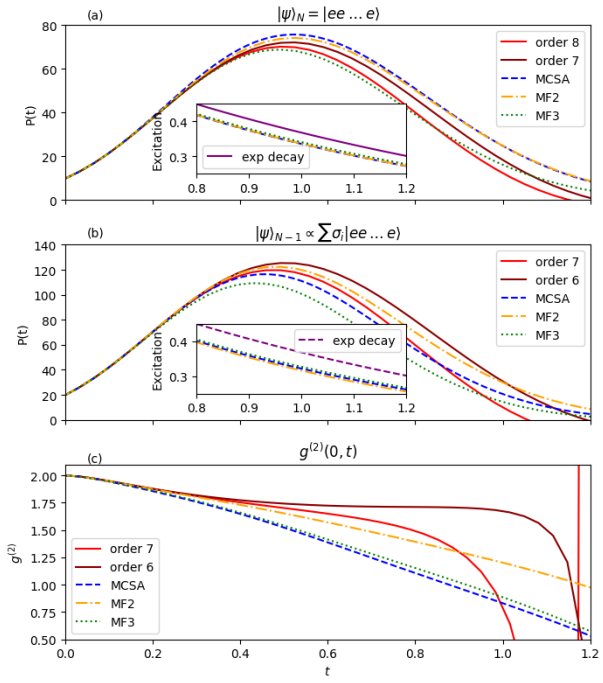

图3：对波导中的辐射功率 $P(t)$ 和二阶关联函数 $g^{(2)}(0,\ t)$ 进行比较。所比较的解析解截断于 k_{max} =6、7、8，以及 MCSA、MF2 和 MF3 方法，参数为 $N = 900$ 个原子和 $\beta = 0.011$。(a) 从完全反转态出发时的 $P(t)$。(b) 从较低的迪克态$|\psi\rangle_{N-1} \propto \sum_n \hat{\sigma}_n |ee\ldots e\rangle$出发时的 $P(t)$。(c) (b)中的功率与(a)中的功率之比给出 $g^{(2)}(0,\ t)$。插图显示激发分数随时间衰减。

在上图中，从完全反转态出发，解析解中连续两个阶次所呈现的高估与低估模式，与图 2 中以蒙特卡罗计算替代的情况相同。在中图中，MCSA 像 MF3 一样低估。对于解析解，我们注意到，连续两个阶次仅在峰值功率附近之前收敛。超过峰值功率后，两者开始偏离，在较晚时刻给出非物理的负功率。其他方法不会出现这种非物理行为。在下图中，较低迪克态的功率与顶部迪克态的功率之比为 $g^{(2)}(0,\ t)$。在此，MF3 和 MCSA 的表现相似。解析解仅在峰值功率附近之前收敛，

而在此点之前，它与 MF2 的吻合程度高于与其他方法的吻合程度。

对于 MCSA 计算，我们遵循参考文献 [33] 中的步骤。该方法最初是针对初始态 $|ee\dots e\rangle$ 建立的。这里，我们将此方法扩展到初始态 $|\psi\rangle_{N-1} \propto \sum_n \hat{\sigma}_n |ee\dots e\rangle$ 的模拟。对于所考虑的大原子数 $N = 900$，可以证明，经过对相位 $e^{i\phi}$ 求平均（或取凸组合）后，集体态 $|\psi\rangle_{N-1}$ 接近由单个原子处于态 $\sqrt{1-1/N}\,|e\rangle + e^{i\phi}\sqrt{1/N}\,|g\rangle$ 的乘积态构成的系综。在 $N \to \infty$ [34] 极限下，这是量子 de Finetti 定理在对称迪克态中的一种应用。纯态 $|\psi\rangle_{N-1}$ 与这一提出的系综具有相同的单原子期望值（$\langle \hat{\sigma}_n \rangle$ 和 $\langle \hat{e}_n \rangle$），而它们的双原子期望值（$\langle \hat{\sigma}_l^\dagger \hat{\sigma}_k \rangle$ 和 $\langle \hat{e}_l \hat{e}_k \rangle$）相差一个按 $\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 标度的因子，因此在大 N 时该近似是合理的。对于图3中间面板的~~M~~CSA 模拟，我们使用这一近似系综，并对 ϕ 的多个取值进行平均，直至结果收敛。

C. 实验模拟

本节讨论用于重现参考文献 [23] 中图 1 所示实验测量结果的模拟细节，并讨论对反转脉冲面积的敏感性。在该模拟中，有 $N = 900$ 个原子最初处于全基态 $|gg\dots g\rangle$。由于热涨落导致原子沿径向远离纳米光纤运动，原子的耦合强度会发生涨落，$\beta \sim p(\beta)$。分布 $p(\beta)$ 为高斯分布，均值为 0.0108，标准差为 0.0051，并经过截断，使得 $0 \le \beta \le 1$。由此得到 $\langle \beta \rangle = 0.01103$ 和 $\langle \sqrt{\beta} \rangle = 0.1019$，以及预期的光学深度 $\propto \langle N\beta \rangle \approx 10$。

持续时间为 $T_p = 4$ 纳秒、功率为 P_p 的脉冲，在 $t = -4$ 纳秒至 $t = 0$ 纳秒期间施加到波导上。这使得第一个铯原子感受到的平均脉冲面积为 [25]

$$\langle A \rangle \equiv \sqrt{\frac{4\Gamma_0 P_p}{\hbar\omega_0}} T_p \langle \sqrt{\beta} \rangle. \tag{20}$$

如参考文献 [23], 所示，达到最大反转所需的平均脉冲面积 $\langle A \rangle$ 为 $\langle A \rangle = 1.07\pi$。与 π 的差异源于三个相互竞争的因素。首先，与无限短脉冲相比，有限脉冲时间会使最优 $\langle A \rangle$ 移向较大值。其次，耦合涨落 β会使 $\langle A \rangle$ 相较于理想化的均匀耦合移向较小值。第三，脉冲沿阵列传播时会被吸收，导致其功率降低，因此需要通过提高脉冲功率（面积）[23, 25]来进行补偿。正如参考文献 [23] 中采用 TWA 方法以及参考文献 [21, 25] 中采用 MF1 方法所做的那样，可以通过模拟从理论上证明这一点；本工作则通过 MF2 方法验证了这一点。

我们根据实验测得的短脉冲对其进行建模。该脉冲的上升沿和下降沿具有 ~ 0.5 纳秒的特征时间尺度。为表征超辐射衰变系综的光子统计，我们确保激发脉冲已变得可以忽略，并从 $t \approx 1$ 纳秒开始记录图 1 中的可观测量。

达到最大反转所需的脉冲面积为 $\langle A \rangle = 1.07\pi$，而图 1 中的数据是在$\langle A \rangle = 1.1\pi$时采集的。在激发脉冲关闭时（$t = 1$ 纳秒），平均激发程度（见插图）为 80%，相干功率约占总辐射功率的 50%。这表明脉冲结束后，系统仍与入射激光场部分相干 [21]。只有在 $A = 1.07\pi$ 达到最大反转时，这种相干性才会消失；此时相干辐射仅占总初始功率的一小部分。

对于 $\langle A \rangle = 1.1\pi$ 处实验可获得的数据，我们验证了 MF2 对双时刻关联函数 $g^{(2)}(t_1,\ t_2)$ 在 $(t_1,\ t_2) = (4.5$ 纳秒 $,\ t)$ 处的预测与数据吻合，如图 1 所示。此外，我们还验证了相同时刻 $(t_1,\ t_2) = (t,\ t)$ 的预测与数据吻合。图 4 给出了 MF2 预测的完整双时刻二阶关联函数 $g^{(2)}(t_1,\ t_2)$。我们注意到，对于 $A = 1.1\pi$，初始二阶相干性 $g^{(2)}(1$纳秒，1纳秒$)$ 为 1.8，这与反转脉冲面积为 $A = 1.07\pi$ 时最大反转态的情况不同；此时 $g^{(2)}(1,$ 纳秒，1 纳秒$) \approx 2$ (见图 4(b))。

对于最大反转，目前没有可用的实验数据。在这种情况下，MF2 预测同时刻相干性 $g^{(2)}(t,\ t)$ 在 ≈ 2 持续 $t < 30$ 纳秒。这表明，在最大反转时，二阶相干性不会建立；如果系统从完美反转态开始，这一结果是预期之中的。从完美反转态开始，当原子具有均匀耦合时，根据参考文献 [16] 中的 TWA 方法，$|ee\dots e\rangle$, $g^{(2)}(t,\ t)$ 预计会从 2（独立辐射系综）降至 ~ 1（相干辐射系综），$\beta = 0.01$。

这一明显的差异引发了一个问题：在最大反转时，MF2 计算是否可靠，尤其是对于同时刻关联函数 $g^{(2)}(t,\ t)$。在第 III D 节中，我们将展示，从完美反转态开始时，MF2 无法预测 $g^{(2)}(t,\ t)$，并说明采用 MF4 的必要性。然而，对于使用激光脉冲实现的最大反转，我们不确定图 4(b) 中的预测是否准确。

D. 完全反转态下的二阶相干性

本节将介绍低阶平均场近似的一项局限。虽然在非最大反转态下能够捕捉二阶相干性，但从完全反转态 $|ee\dots e\rangle$ 出发时，MF2 和 MF3 无法捕捉二阶相干性的建立过程，而 TWA 方法 [16] 和我们的解析结果都预测了这一过程。我们将说明，需要采用更高阶的平均场方法（MF4 或更高阶）才能

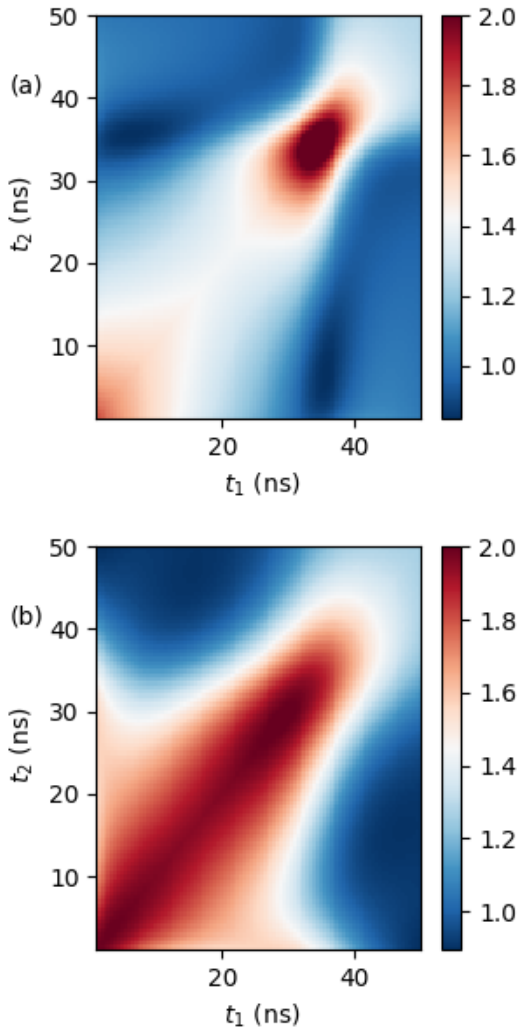

图4：使用 MF2 方法得到的双时二阶关联 $g^{(2)}(t_1, t_2)$。(a) 使用脉冲面积 $A = 1.1\pi$ 时接近最大反转。(b) 使用脉冲面积 $A = 1.07\pi$ 时处于最大反转。

在完全反转时捕捉同时刻关联函数 $g^{(2)}(t,\ t)$。由于所研究的手性系统的运动方程相对复杂，且计算耗时较长（$\mathcal{O}(N^4)$），我们尚未实现 MF4 计算；不过，我们将 MF2 和 MF3 与均匀系统 β的解析解进行比较。在附录 D中，我们展示了 MF4 或更高阶方法能够可靠地预测 $g^{(2)}(t,\ t)$，适用于具有更简单常微分方程组的置换对称系统。

我们对式(6)中 $g^{(2)}(t,t)$的解析解来自对其分子 $G^{(2)}(t,t)$（式(5)）和分母的近似。下文中，我们对分母采用最高可用阶数，同时改变分子的截断阶数以检验收敛性。我们采用适中的参数：原子数$N = 150$ 或 $N = 300$ 以及耦合 $\beta = 0.01$，它们具有

对 $t < 1.5$合理的收敛性。选择这些参数的另一个原因是，我们可以与参考文献 [16]中的TWA近似进行比较。

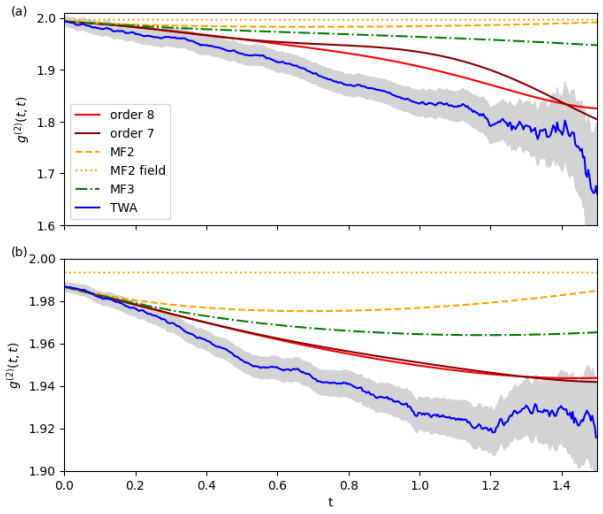

图5：比较从完全反转态出发，经由平均场、截断阶数为7和8的解析近似以及文献 [16, 23]中的 TWA 方法得到的 $g^{(2)}(t,t)$ 的动力学。MF2 中的累积量既在“标准”原子层级（记为“MF2”）上进行，也在“场”层级（记为“MF2 field”）上进行。灰色阴影区域表示 TWA 数据的统计不确定性。参数为 $\beta = 0.01$ 和$N = 300$ (a) 或 $N = 150$ (b)

在图5(a)中，8阶解析解显示其数值在 $t \approx 1$处从 ≈ 2 下降至 ≈ 1.91 。我们认为，这一阶近似在 $t \approx 1$之前是准确的。我们注意到，TWA倾向于高估 $g^{(2)}(t,\ t)$ 中的下降幅度，其数值在 $t \approx 1$ 处（以寿命 $1/\Gamma_0$为单位）从 ≈ 2 下降至 $\approx 1.83 \pm 0.025$ 。为确认这一规律，我们在图5(b)中展示了一个光学深度更小的情况，其中 $N = 150$ 和$\beta = 0.01$。在该图中，7阶和8阶解析解在图5所示的时间窗口内收敛，并显示其数值在 $t = 0$ 处从 ≈ 1.985 下降至 ≈ 1.945，并在 $t = 1.2$处达到。另一方面，TWA预测其数值在 $t = 1.2$处下降至 $\approx 1.92 \pm 0.01$ 。

在图5中，与解析解和TWA相比，MF2和MF3方法难以表现出 $g^{(2)}(t,\ t)$的这种下降。对这一失败的一个直观解释可归因于：MF2和MF3所用的累积量展开是从完全反转开始的，如下所述。

二阶关联函数$G^{(2)}(t,t) = \langle \hat{a}^\dagger_{\text{输出}}(t)\hat{a}^\dagger_{\text{输出}}(t)\hat{a}_{\text{out}}(t)\hat{a}_{\text{out}}(t)\rangle$ 中的输出场由各个原子算符组成，如式（3）所示。累积量展开的标准处理是在原子尺度上进行的：先代入式（3），然后进行累积量展开（参见参考文献 [28]）。然而，在大 N情况下，累积量展开也可以在宏观尺度或场尺度上进行，而不会造成太大的精度损失 [32]。在从完全

反转态开始的瞬态动力学中，只有升降场算符数量相同的关联函数才非零。例如，$\langle\hat{a}_{\rm out}(t)\rangle = \langle\hat{a}^\dagger{}_{\text{输出}}(t)\hat{a}^\dagger{}_{\text{输出}}(t)\hat{a}_{\rm out}(t)\rangle = 0$。在 MF2 或 MF3 阶进行累积量展开后可得

$$\begin{aligned} G^{(2)}(t,t) &= 2\langle\hat{a}^\dagger_{\rm out}(t)\hat{a}_{\rm out}(t)\rangle^2 \\ &\quad + \langle\hat{a}^\dagger_{\rm out}(t)\hat{a}^\dagger_{\rm out}(t)\rangle\langle\hat{a}_{\rm out}(t)\hat{a}_{\rm out}(t)\rangle \\ &\quad - 2\langle\hat{a}^\dagger_{\rm out}(t)\rangle^2\langle\hat{a}_{\rm out}(t)\rangle^2 = 2(P(t))^2, \end{aligned} \tag{21}$$

从而得到一个平凡的 $g^{(2)}(t,\ t) = 2$。

为验证这一推理，我们采用了基于“场”层级展开的 MF2 方法，从而得到$g^{(2)}(t,\ t) \approx 2$，如图5所示。即使在标准的微观展开中，MF2 和 MF3 也预测 $g^{(2)}(t,\ t)$ 保持在 2 附近，与解析预测存在显著偏差。MF2 和 MF3 中累积量展开的失效表明，至少需要四体关联，才能正确描述 $g^{(2)}(t,\ t)$ 的行为。总的来说，这一分析表明，对于高阶关联函数，需要采用更高阶的平均场，尤其是在不存在相干动力学时（$\langle\hat{\sigma}_i(t)\rangle = \langle\hat{\sigma}_i(t)\hat{\sigma}_j(t)\rangle = 0$，例如从完全反转态开始）。我们在附录D中表明，对于具有参数 $\beta = 0.01$和 $N = 300$的置换对称系统，MF4 近似（不对四体关联函数使用累积量展开）与基于密度矩阵计算得到的精确结果符合良好。

尽管 MF2 和 MF3 无法可靠地预测完全反转时的$g^{(2)}(t,\ t)$，但对于参考文献 [23], 中所有实验上可获得的数据——这些数据对应的反转态接近但尚未达到最大反转——MF2 都能够作出预测。在最大反转情况下，手性系统中的原子具有显著的偶极矩，$\langle\hat{\sigma}_i\rangle$，如参考文献 [25]所示。这些偶极矩可能会在阵列中激发相干动力学，进而产生非零的输出场，$E(t) = \langle\hat{a}_{\rm out}(t)\rangle$。有限相干场的存在，使得在 MF2（如公式（21）所示）或 MF3 阶次下进行累积量展开，比完全反转情况下更为复杂，因此难以对 $G^{(2)}(t,\ t)$作出解析判断。因此，在通过最优波导脉冲实现最大反转这一具有实验相关性的条件下，图 4(b) 中所示的 MF2 预测在定量上是否可靠，仍不明确。

IV. 结论

在这项工作中，我们提出了两种研究波导量子电动力学中光子统计的方法，重点考察近期实验已展示的手性耦合原子阵列。采用高阶平均场方法，使我们得以重现参考文献 [23] 中近期的实验结果。尽管高阶平均场方法通常计算开销较大，我们提出了一种将计算速度提升 N 倍的方法，从而能够使用 MF2 模拟多达数万个原子（配套论文 [26]中也采用了这一方法）。

第二种方法依赖于从对称态出发，系统地求解动力学，并将结果外推至一般的 N。这使我们能够在中等耦合常数下，获得原子数适中（~ 1000）时的收敛结果。此外，该方法揭示了缺乏对称性的系统所具有的复杂多时间尺度特性。最后，我们展示了 MF2 和 MF3 在理想反转阵列中二阶相干性出现方面可能存在的不足。在这种情况下，需要采用 MF4 或更高阶的方法，才能使二阶相干性恰当建立。

从上述结果中引出了若干有待未来研究的问题。首先，正如我们在正文中所提及的，尚不清楚 MF2 方法是否足以描述实验中采用最优短脉冲时最大反转 阵列中的光子-光子关联。通过使用旨在实现最大反转的脉冲面积，从理论和实验两方面探讨这一问题是有意义的。其次，我们对有限 N 的解析方法受到计算代价高昂的符号矩阵幂的阻碍。我们通常止步于 ~ 10 的矩阵幂（对应于微扰展开中的最高阶）。探索能够将这一计算瓶颈推进到更高阶的方法是有意义的。这将使更广泛的实验相关参数范围内获得收敛结果成为可能。

图中所绘数据可在 [35] 获取。

致谢

我们感谢 Constanze Bach 提供 [23]中的实验数据与细节。我们感谢 Philipp Schneeweiß 和 Christian Liedl 就参考文献 [25] 中的实验装置进行了有益讨论。我们感谢 Saptarshi Saha 就平均场方法进行讨论。我们感谢 Wenqi Tong 和 AbdAlghaffar Amer 的有益讨论与建议。

本研究得到美国国家科学基金会项目（编号：2410890-PHY）的支持。本研究还部分使用了普渡大学信息技术部门在印第安纳州西拉斐特提供的计算资源。

附录 A：双向WQED

在本节中，我们将说明海森堡方程 (7) 可以推广至双向波导。如果 $i^{\rm th}$ 原子分别以速率 β_i^+ 和 β_i^- 向前向和后向发射，则可以定义单原子常数 $r_i = \sqrt{\beta_i^+}e^{-{\rm i}k_{1D}z_i}$ 和$l_i = \sqrt{\beta_i^-}e^{+{\rm i}k_{1D}z_i}$，其中 k_{1D} 是跃迁的波数。与右行传播模式$\hat{a}_i$类似，我们

ˆ 也可以定义一个类似的左向传播模式， b_j

$$\hat{a}_j = \alpha_f - \mathrm{i}\sum_{i<j} r_i \hat{\sigma}_i, \tag{A1}$$

$$\hat{b}_j = \alpha_b - \mathrm{i}\sum_{i>j} l_i \hat{\sigma}_i, \tag{A2}$$

其中， α_f 和 α_b 分别是前向和后向输入场。

在这种情况下，主方程可以简洁地写为

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\mathrm{i}\sum_n \{r_n^*[\hat{\sigma}_n^\dagger, \hat{a}_n\hat{\rho}] + r_n[\hat{\sigma}_n, \hat{\rho}\hat{a}_n^\dagger] + l_n^*[\hat{\sigma}_n^\dagger, \hat{b}_n\hat{\rho}] \tag{A3}$$

$$+ l_n[\hat{\sigma}_n, \hat{\rho}\hat{b}_n^\dagger]\} + \mathcal{L}_{ng}[\hat{\rho}], \tag{A4}$$

其中， $\mathcal{L}_{ng}[\hat{\rho}] = \sum_n \hat{\sigma}_n \hat{\rho} \hat{\sigma}_n^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_n^\dagger \hat{\sigma}_n, \hat{\rho}\}$。由此方程可以得到海森堡方程（7）的一般化形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A} = \sum_n \{[\hat{\sigma}_n^\dagger, \hat{A}]\left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_n + \mathrm{i}r_n^*\hat{a}_n + \mathrm{i}l_n^*\hat{b}_n\right) + \left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_n^\dagger - \mathrm{i}r_n\hat{a}_n^\dagger - \mathrm{i}l_n\hat{b}_n^\dagger\right)[\hat{A}, \hat{\sigma}_n]\}. \tag{A5}$$

因此，为了加快计算，必须同时追踪前向和后向模式及其与原子算符的关联，并在计算平均场导数之前递归地求出它们。

附录B：MF2方程

本节给出式 (2) 中手性（单向）系统的 MF2方程。第一步是推导双原子算符的海森堡方程。

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{\sigma}_k}{\mathrm{d}t} = -\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{\sigma}_k - \mathrm{i}\sqrt{\beta_l}\hat{a}_l^\dagger(2\hat{e}_l - 1)\hat{\sigma}_k + \mathrm{i}\sqrt{\beta_k}(2\hat{e}_k - 1)\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{a}_k, \tag{B1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_l\hat{\sigma}_k}{\mathrm{d}t} = -\hat{\sigma}_l\hat{\sigma}_k + \mathrm{i}\sqrt{\beta_l}(2\hat{e}_l - 1)\hat{\sigma}_k\hat{a}_l + \mathrm{i}\sqrt{\beta_k}(2\hat{e}_k - 1)\hat{\sigma}_l\hat{a}_k, \tag{B2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_l\hat{\sigma}_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{2}\hat{e}_l\hat{\sigma}_k + \mathrm{i}\sqrt{\beta_l}\hat{a}_l^\dagger\hat{\sigma}_l\hat{\sigma}_k - \mathrm{i}\sqrt{\beta_l}\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{\sigma}_k\hat{a}_l + \mathrm{i}\sqrt{\beta_k}(2\hat{e}_k - 1)\hat{e}_l\hat{a}_k, \tag{B3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_l\hat{e}_k}{\mathrm{d}t} = -2\hat{e}_l\hat{e}_k + \mathrm{i}\sqrt{\beta_l}\hat{a}_l^\dagger\hat{\sigma}_l\hat{e}_k - \mathrm{i}\sqrt{\beta_l}\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{e}_k\hat{a}_l + \mathrm{i}\sqrt{\beta_k}\hat{a}_k^\dagger\hat{\sigma}_k\hat{e}_l - \mathrm{i}\sqrt{\beta_k}\hat{\sigma}_k^\dagger\hat{e}_l\hat{a}_k. \tag{B4}$$

请注意，在上述方程中，$\hat{a}_m^\dagger$ 始终作为算符乘积中最左侧的算符出现，而$\hat{a}_n$ 始终出现在最右侧。这是一条便于追踪算符顺序的经验法则。其他算符的指标不同，因此总是彼此对易。随后，对方程取期望值，并使用累积量展开将三体算符化为二体算符和单体算符 [28]，即可得到平均场方程。如第 IIA 节所述，为了将平均场计算加快 N倍，必须追踪场 $\langle\hat{a}_m^\dagger\rangle$以及场-原子关联函数 $\langle\hat{\sigma}_l^\dagger\,\hat{a}_k\rangle$、$\langle\hat{\sigma}\hat{a}_k\rangle$和 $\langle\hat{e}\hat{a}_k\rangle$，并在计算平均场导数之前递归地构建它们。MF3方程的推导方式类似，但更为复杂，为简洁起见，此处从略。

附录C：解析 β 展开的细节

本节将详细介绍第 II B 节中的解析β 展开。该方法首先在福克-刘维尔空间中，为少量 $N \lessapprox 10$ 原子写出演化方程。这是对主方程的精确重映射，不包含任何近似。在这种表述下，密度矩阵 $\hat{\rho}$被重塑为向量 $\boldsymbol{\rho}$，而林德布拉德超算符可以映射为矩阵 M，称为刘维尔矩阵。因此，主方程可写成矩阵与向量的乘积形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = M\boldsymbol{\rho} = (-M_0 - \beta M_1)\boldsymbol{\rho}, \tag{C1}$$

其中， M 分解为对角矩阵 M_0，它规定所有态均呈指数衰减，其来源是式 (2c) 中原子的单独衰减。M_1 将不同的态耦合起来，耦合强度为 β。由于[19], 中提到的手性系统具有特殊性质，矩阵 M_1 也具有一些特殊性质。它可以表示为一个加权有向图的邻接矩阵，其中节点是福克-刘维尔空间中的态，有向边的权重由 M_1的矩阵元给出。由此得到的图是无环的，因为节点之间不存在形成环路的相互依赖关系。一般的双向系统并不具备这一性质（置换对称的镜像构型或布拉格构型 [17], 除外，此时迪克态在相邻阶梯中形成向下级联，见 [36]）。原则上，无环性质使得可以通过迭代进行初等求解（无需解决由环路依赖导致的特征值问题），如单激发子空间[24]中的处理所示。

对方程 (C1) 进行拉普拉斯变换 $\boldsymbol{\rho}(t) \to \boldsymbol{\mathfrak{P}}(s)$ 后，可以得到一个形式上的解析解。

$$s\boldsymbol{\mathfrak{P}}(s) - \boldsymbol{\rho}(0) = M\boldsymbol{\mathfrak{P}}(s), \tag{C2}$$

可以形式化地求解并展开

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(s) &= (s-M)^{-1}\boldsymbol{\rho}(0) = (sI + M_0 + \beta M_1)^{-1}\boldsymbol{\rho}(0) \\ &= \sum_k \beta^k (A^{-1}M_1)^k A^{-1}\boldsymbol{\rho}(0), \end{aligned} \tag{C3}$$

其中 $A = sI + M_0$ 是一个对角矩阵，最后一项求和称为诺伊曼级数 [37]。我们使用诺伊曼展开有两个原因。首先，它揭示了集体相互作用如何随着相互作用强度的 successive 次幂逐步展开 β。其次，与求完整逆矩阵相比，求逆矩阵的截断近似值在计算上更可行（$s-M$）$^{-1}$。原则上，由于无环性质，该级数会截断，因此我们可以得到完整解。我们发现，对于较小的 N 情况，该级数会在 $k = N(N-1)$ 处截断。不过在实际计算中，对于 $k \sim 10$，诺伊曼级数中的符号矩阵幂会变得相对复杂，因此我们通常在约 7 或 8 处停止展开 k_{max}。

与定义该状态的 $\boldsymbol{\rho}$向量 $\hat{}\rho$类似，与所关注的可观测量对应的算符也可以映射为向量。于是，可观测量向量与状态向量的标量积就成为该可观测量的期望值。随后，期望值的诺伊曼展开可以由公式 (C3) 中状态向量的诺伊曼展开得到。例如，如果公式 (4) 中的辐射功率算符 $\hat{}P$ 可以重写为向量 $\boldsymbol{V}$，那么 $P(t)$ 的拉普拉斯变换为 $P(s) = \boldsymbol{V}.\mathfrak{P}(s)$。辐射功率 $P(t)$ 随后通过逆变换回到时域。求解较小的 N 情形后，我们可以将β^k 系数函数外推至一般的 N，从而得到类似公式 (16) 中的表达式。

附录 D：对称系统

本节研究一个更简单的对称系统的平均场预测，以说明要捕捉第 IIID 节讨论的二阶相干的建立过程，需要采用 MF-4 或更高阶近似。该系统的方程与式 (2) 中的手性系统相同，但去掉了级联哈密顿量；因此，它成为一个置换对称系统，动力学也简单得多。当原子对左向和右向传播的光子对称耦合时，且原子排列成镜像构型 [17]，便会出现这种情况。研究置换对称系统还有其他好处。首先，它可以作为一个基准，供更复杂的手性系统进行比较。这些系统仅在相干哈密顿量上有所不同，因此初始动力学相同 [17, 38], ，可用作合理性检查，以验证推导出的运动方程。其次，这种比较揭示了手性或对称性破缺对集体光-原子相互作用的复杂性及其物理特性的影响。对于有限系统，可通过参考文献 [39] 中的软件包轻松获得平均场方程。在这种情况下，方程数量随 MF-n 阶近似的阶数增长为 $\sim n^3$，且与原子数 N 无关，这是由于原子具有置换对称性。对于从反转态且无驱动开始的情况，方程数量更少，$\sim n^2$。

我们模拟到 MF-6，以表明要捕捉二阶相干性的建立过程，需要采用 MF-4 或更高阶的近似。图6展示了这一点：MF2 和 MF3 与精确解有明显偏差，而 MF4 及更高阶近似则与精确解吻合良好。计算采用了正文中相同的参数（$N = 300,\ \beta = 0.01$）。尽管对称系统与手性系统有所不同，我们注意到，在这个对称系统中，MF2 和 MF3 的预测与图5所示缺乏对称性的手性系统相似。参考文献 [23] 也指出了这两个系统具有类似的行为。从计算方法上看，精确解基于参考文献 [36], 中提出的“pisolve”方法，而 MF方程则使用 [39] 中的软件推导并求解。

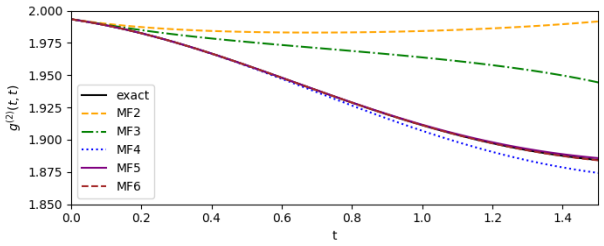

图6：对于对称系统，从完全反转态出发，通过不同阶的 MF 近似和精确解比较 $g^{(2)}(t,\ t)$ 的动力学。

[1] Robert H Dicke，《自发辐射过程中的相干性》，《物理评论》**93**，99（1954 年）。[2]Michel Gross 和 Serge Haroche，《超辐射：集体自发辐射理论述评》，《物理报告》**93**，301–396（1982 年）。[3]M Gross、C Fabre、P Pillet 和 S Haroche，《在钠原子级联跃迁中观测到近红外Dicke超辐射》，《物理评论快报》**36**，1035（1976 年）。[4] Marlan O Scully，《单光子Dicke超辐射中的集体兰姆位移》，《物理评论快报》**102**，143601（2009 年）。[5] J Pellegrino、R Bourgain、Stephan Jennewein、Yvan RP Sortais、Antoine Browaeys、SD Jenkins 和 J Ru-

ostekoski，“观察到偶极-偶极相互作用导致冷原子系综中的光散射受到抑制”，《物理评论快报》**113**，133602（2014）。[6] Sudhakar Prasad 和 Roy J Glauber，“极化子模型：共振介质的相干辐射”，《物理评论A》**61**，063814（2000）。[7] RG DeVoe 和 RG Brewer，“观察到两个囚禁离子的超辐射和亚辐射自发发射”，《物理评论快报》**76**，2049（1996）。[8] P-O Guimond、A Grankin、DV Vasilyev、B Vermersch 和 P Zoller，“远距离原子阵列中的亚辐射贝尔态”，《物理评论快报》**122**，093601（2019）。[9] HH Jen，“光子介导的偶极-偶极相互作用作为冷原子量子科学与技术的资源”，《量子科学与技术》（2024），10.1088/2058- 9565/adbb86。[10] Klemens Hammerer、Anders S Sørensen 和 Eugene S Polzik，“光与原子系综之间的量子接口”，《现代物理评论》**82**，1041–1093（2010）。[11] Stewart D. Jenkins、Janne Ruostekoski、Nikitas Papasi-makis、Salvatore Savo 和 Nikolay I. Zheludev，“超材料阵列中的多体亚辐射激发：实验与理论”，《物理评论快报》**119**，053901（2017）。[12] G. Facchinetti、S. D. Jenkins 和 J. Ruostekoski，“在原子阵列中利用亚辐射关联存储光”，《物理评论快报》**117**，243601（2016）。[13] G. Facchinetti 和 J. Ruostekoski，“光与平面原子晶格的相互作用：反射、透射与协同磁测量”，《物理评论A》**97**，023833 2018( )。[14] Robert J Bettles、Mark D Lee、Simon A Gardiner 和 Janne Ruostekoski，“平面原子阵列中透射光的量子效应与非线性效应”，《Communications Physics》**3**，141（2020）。[15]Ana Asenjo-Garcia、M Moreno-Cardoner、Andreas Al-brecht、HJ Kimble 和 Darrick E Chang，“利用原子阵列中的亚辐射和‘选择性辐射’显著提升光子存储保真度”，《物理评论X》**7**，031024（2017）。[16]Felix Tebbenjohanns、Christopher D Mink、Constanze Bach、Arno Rauschenbeutel 和 Michael Fleischhauer，“预测级联量子系统超辐射发射中的关联”，《物理评论A》**110**，043713 2024( )。[17] Silvia Cardenas-Lopez、Stuart J. Masson、Zoe Zager 和 Ana Asenjo-Garcia，“波导量子电动力学中的多体超辐射与动态镜像对称性破缺”，《物理评论快报》**131**，033605（2023）。[18] Bennet Windt、Miguel Bello、Daniel Malz 和 J. Igna-cio Cirac，“迟滞效应对手性波导量子电动力学中多体超辐射的影响”，《物理评论快报》**134**，173601 2025( )。[19]Kasper Jan Kusmierek、Sahand Mahmoodian、Martin Cordier、Jakob Hinney、Arno Rauschenbeutel、Maximilian Schemmer、Philipp Schneeweiss、J¨urgen Volz 和 Klemens Hammerer，“手性波导量子电动力学的高阶平均场理论”，《SciPost物理核心》**6**，041（2023）。[20] E. Vetsch、D. Reitz、G. Sagu´e、R. Schmidt、S. T. Dawkins 和 A. Rauschenbeutel，“由囚禁在光学纳米光纤周围倏逝场中的激光冷却原子构建的光学接口”，《物理评论快报》**104**，203603 2010( )。[21] Christian Liedl、Sebastian Pucher、Felix Tebbenjohanns、Philipp Schneeweiss 和 Arno Rauschenbeutel，“级联量子系统的集体辐射：从定时 Dicke 态到反转系综”，《物理评论快报》**130**，163602（2023）。[22]Wouter Verstraelen、Dolf Huybrechts、Tommaso Roscilde 和 Michiel Wouters，“通过截断累积量轨迹研究开放量子自旋晶格中的量子与经典关联”，PRX Quantum **4**，030304（2023）。[23] Constanze Bach、Felix Tebbenjohanns、Christian Liedl、Philipp Schneeweiss 和 Arno Rauschenbeutel，“超荧光中二阶相干性的涌现”，《物理评论快报》**136**，063402（2026）。[24] Riccardo Pennetta、Daniel Lechner、Martin Blaha、Arno Rauschenbeutel、Philipp Schneeweiss 和 J¨urgen Volz，“观测到集体耦合至单一传播光学模式的冷原子系综中超辐射态与亚辐射态之间的相干耦合”，《物理评论快报》**128**，203601（2022）。[25] Christian Liedl、Felix Tebbenjohanns、Constanze Bach、Sebastian Pucher、Arno Rauschenbeutel 和 Philipp Schneeweiss，“观测到级联量子系统中的超辐射爆发”，《物理评论X》**14**，011020（2024）。[26]M. Eltohfa 和 F. Robicheaux，“波导量子电动力学中的光子统计：II 热力学极限下的精确解”，。[27]Crispin Gardiner 和 Peter Zoller，*Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*（Springer Science & Business Media，2004）。[28] F Robicheaux 和 Deepak A Suresh，“超越光与原子阵列相互作用的最低阶平均场理论”，《物理评论A》**104**，023702（2021）。[29]Ryogo Kubo，“广义累积量展开法”，《日本物理学会志》**17**，1100–1120（1962）。[30]Sebastian Kr¨amer 和 Helmut Ritsch，“ 用于模拟具有长程相互作用的大型开放自旋系综动力学的广义平均场方法”，欧洲物理学杂志 D **69**，282（2015）。[31]Oriol Rubies-Bigorda、Stefan Ostermann 和 Susanne F. Yelin，“通过累积量展开方法表征原子阵列中的超辐射动力学”，物理评论研究**5**，013091（2023）。[32] Martin Fasser、Claudiu Genes、Helmut Ritsch 和 Raphael Holzinger，“使用迪克超辐射对累积量展开法进行基准测试”，预印本（2025），10.20944/preprints202509.1285.v1。[33] Christian Liedl, *Collective Radiative Effects in Nanofiber-Coupled Atomic Ensembles* 2023 ，博士论文（），版权 - 数据库版权归 ProQuest LLC 所有；ProQuest 不主张对各项底层作品享有版权；最后更新于 2025-11-24。[34] Robert Koenig 和 Graeme Mitchison，“一个极其简明易懂的量子 de Finetti 定理”，数学物理学杂志**50**（2009）。[35] “手性波导量子电动力学中的光子统计：I 平均场与微扰展开。用于图中数据的永久 DOI 链接将在审稿流程完成且图表定稿后于此提供。”https://doi.org/10.4231/???????? [36]Nathan Shammah , Shahnawaz Ahmed , Neill Lambert ,

Simone De Liberato、和 Franco Nori，“具有局域与集体非相干过程的开放量子系统：利用置换不变性进行高效数值模拟”，《物理评论A》**98**，063815（2018 年）。[37] Michael Wu、Bei Yin、Aida Vosoughi、Christoph Studer、Joseph R Cavallaro 和 Chris Dick，“用于大规模MIMO上行链路高吞吐量数据检测的近似矩阵反转”，载于 *2013 IEEE international symposium on circuits and systems (ISCAS)*（IEEE，2013）第 2155–2158 页。[38] F. Robicheaux，《原子云和阵列早期时刻超辐射的理论研究》，《物理评论A》**104**，063706（2021）。[39]David Plankensteiner、Christoph Hotter 和 Helmut Ritsch，《Quantumcumulants.jl：用于开放量子系统广义平均场方程的 Julia 框架》，《量子》**6**，617（2022）。