arXiv:2603.04594v1 [math.PR] 4 Mar 2026

通过 Bargmann–Segal 范数刻画（分数）Malliavin–Watanabe–Sobolev 空间$\mathcal{D}^{\alpha,2}$

WOLFGANG BOCK[1] 和 MARTIN GROTHAUS[2]

摘要。受 P. Malliavin 和 P.-A. Meyer 提出的一个开放问题启发（该问题与 S. Watanabe 的奠基性工作密切相关），我们探讨 Malliavin–Watanabe–Sobolev 正则性是否能够像 Hida 分布那样，通过全纯拉普拉斯像来刻画，并据此利用 S-变换的 Bargmann–Segal 范数，建立了对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，空间$\mathcal{D}^{\alpha,2}$ 的刻画。具体而言，我们用函数的可积性、可微性和增长性质来表述$\mathcal{D}^{\alpha,2}$正则性 $\alpha > 0$（针对 $F \in L^2(\mu)$），以及分布的对偶正则性

$$(0,1) \ni \lambda \longmapsto \int_{S'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u)$$

涉及 λ 中 $\alpha \in \mathbb{N}$ 的整数阶导数，以及非整数 α的 Riemann-Liouville 分数阶导数/积分。这里 ν 是 Gaussian Bargmann–Segal 测度。这为 Malliavin 正则性的正阶和负阶（包括分数阶）提供了实用判据，从而架起了 Malliavin 微积分与白噪声分析中的 Bargmann–Segal 技术之间的桥梁。文中还针对 Donsker δ 函数、高斯过程的自交局部时以及高斯核给出了应用。

关键词：Malliavin 可微性，刻画定理，正则性 数学主题分类：60H07，60H40，46E35，46C15

1. 引言

在高斯分析中，人们研究了无限维空间上的测试函数空间、广义函数空间和 Sobolev 空间。由于不存在勒贝格测度，高斯测度便成为自然的参考测度。Malliavin 微积分是其中非常成功的特例，参见例如 [3, 15]以及白噪声分析，参见例如 [10, 17]。关于二者之间联系的综述，另请参见 [9] 。它们的方法和工具已在随机分析（例如 [5, 21], 金融学（例如 [1, 2] ）以及数理物理（例如 [11]）等领域得到广泛应用。Malliavin 微积分因其在变分法中使用的 Malliavin–Watanabe–Sobolev 空间而闻名，参见例如 [15, 16], ；白噪声理论则为研究随机分布以及随机偏微分方程的广义解提供了途径，参见例如 [14, 7]。两种微积分的共同点是，Wiener–Itô 混沌分解都发挥着核心作用。

白噪声理论的主要优势在于其深刻的分析，这种分析基于各种刻画定理及其推论，见 [18, 14, 7]。这些定理使用户能够在应用 Laplace 变换或 Fourier 变换之后，借助适当的全纯函数空间，将对复杂无穷维对象与结构的研究加以简化。Paul Malliavin 与 Paul–Andre Meyer 早已看到这一强大工具箱的潜力，并给首批刻画定理的先驱 Hida、Potthoff 和 Streit 布置了作业：为 Malliavin-Watanabe-Sobolev 空间找到类似的刻画。

这项工作开启了对若干新 Gel'fand 三元组的刻画与研究，这些三元组细化了已有的 Hida 检验函数与广义函数三元组。其中包括研究充分的 Potthoff-Timpel 三元组 [19]。它是通过以下方式刻画的：

Bargmann-Segal 空间，其中 [6] 近期又对其进行了重新研究，证明了一种更易于应用的刻画方法，该方法涉及 Gauss–Laplace 变换的 Bargmann-Segal 范数，参见 [7]。

然而，这些三元组的测试函数空间过小。Potthoff 和 Timpel 早已利用 Nelson 超收缩定理证明，Potthoff–Timpel 测试函数属于无穷次 Malliavin 可微函数，其 Malliavin 导数属于所有 $L^p(\mu)$ $1 \leq p < \infty$。这当然不利于刻画 Malliavin–Watanabe–Sobolev 空间，因此需要新的思路。

本文利用 Bargmann–Segal 范数，对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 下的 Malliavin–Watanabe–Sobolev 空间 $\mathcal{D}^{\alpha,2}$ 给出完整刻画。

我们通过若干实例展示了这一刻画简单且实用的应用。这里我们想强调，它可应用于两种情形：首先，用于证明平方可积函数的光滑性；其次，用于推导分布的正则性。由于即使对于分数阶 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们也可以考虑$\mathcal{D}^{\alpha,2}$，因此也能非常精确地回答有关最优正则性的问题。

注意，由此我们填补了该理论中已开放逾二十五年的空白，从而在 Malliavin 微积分与白噪声分析之间架起了桥梁。

2. Preliminaries from White Noise Analysis

白噪声分析的出发点是 Gel'fand 三元组

$$\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'.$$

$L^2(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R}, dx; \mathbb{R})$ 的内积与范数——即关于 $\mathbb{R}$ 上勒贝格测度的实值平方可积函数所构成的希尔伯特空间——分别记为 $(\cdot,\cdot)$ 与 $|\cdot|_0$。符号 $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ 表示缓增广义函数空间，即所有将实值光滑速降函数的 Schwartz 空间 $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ 映到 $\mathbb{R}$ 的连续线性泛函的全体。$x \in \mathcal{S}'$与 $\xi \in \mathcal{S}$ 之间的对偶配对记为 $\langle \xi, x\rangle$，它是 $L^2(\mathbb{R})$ 中内积的延拓，即

$$\langle \xi, f\rangle = (\xi, f), \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \xi \in \mathcal{S}.$$

空间 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}'$ 分别被赋予其通常的投影极限拓扑与归纳极限拓扑，对应于一个可数的半范数系。由$\mathcal{S}'$ 上的归纳极限拓扑所生成的 σ-代数与由柱集所生成的 σ-代数一致

$$\mathcal{C}_\sigma := \{x \in \mathcal{S}' : (\langle \xi_1, x\rangle, \ldots, \langle \xi_n, x\rangle) \in B,\, \xi_1, \ldots \xi_n \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\},$$

其中 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$（对 $n \in \mathbb{N}$）是 $\mathbb{R}^n$ 上的博雷尔 σ-代数。应用 Bochner–Minlos 定理，我们在 $(\mathcal{S}',\mathcal{C}_\sigma)$ 上引入由其特征函数给出的标准高斯测度 μ

$$\mathcal{S} \ni \xi \longmapsto \int_{\mathcal{S}'} \exp\left(i\langle \xi, x\rangle\right) d\mu(x) = \exp\Big(-\frac{1}{2}|\xi|^2\Big).$$

概率空间 $(\mathcal{S}', \mathcal{C}_\sigma, \mu)$ 因而称为白噪声空间。关于白噪声测度的复值平方可积函数所构成的希尔伯特空间记为

$$L^2(\mu) := L^2(\mathcal{S}', \mathcal{C}_\sigma, \mu; \mathbb{C})$$

其内积为

$$((F, G)) := \int_{\mathcal{S}'} F(x)\overline{G}(x) d\mu(x), \text{ for any } F, G \in L^2(\mu),$$

以及记作 $\|\cdot\|$的诱导范数。下标 $\cdot_{\mathbb{C}}$ 表示复化。也就是说，如果 V是一个实向量空间，那么 $V_{\mathbb{C}}$ 表示它的复化。如果 $V(\mathbb{R}^n)$ 是一个由

$\widehat{\quad}$($\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$) 上的（广义）函数构成的向量空间，那么 $V(\mathbb{R}^n)$ 表示其中关于 n 变量对称的函数所构成的子空间。

每个 $F \in L^2(\mu)$ 都有维纳-伊藤展开或混沌分解

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \langle F^{(n)}, :\cdot^{\otimes n}: \rangle, \quad F^{(n)} \in L^2\widehat{(\mathbb{R}^n, dx)}_{\mathbb{C}}.$$

其 $L^2(\mu)$-范数为

$$\|F\|^2_{L^2(\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|F^{(n)}|^2 < \infty.$$

$\widehat{\quad}$这里 $S' \ni x \mapsto$: $x^{\otimes n}: \in S'(\mathbb{R}^n)$ 表示 Wick序，$\cdot,\cdot$ 表示 $S'(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}}$ 与 $S'(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}}$ 之间的对偶配对，并将其按照平方可积函数的意义扩展到第一变量中的核 $F^{(n)} \in L^2\widehat{\mathbb{R}^n}$ (, $dx)_{\mathbb{C}}$，例如参见 [17]。随机变量 $\langle F(n) : \cdot^{\otimes n}: \rangle$ 与 $F^{(n)} \in L^2\widehat{\mathbb{R}^n}$ (, $dx)_{\mathbb{C}}$ 的 n 重多重维纳积分相同，例如参见 [10]。对于具有有限混沌展开的 F，我们可以定义数算子 N 为

$$L^2(\mu) \ni F = \sum_{n=0}^{m} \langle F^{(n)}, :\cdot^{\otimes n}: \rangle \mapsto NF := \sum_{n=0}^{m} n\langle F^{(n)}, :\cdot^{\otimes n}: \rangle \in L^2(\mu).$$

按照 [7], 的定义，我们通过混沌分解来定义检验函数和正则广义函数

$$\mathcal{G}_s := \left\{ \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Phi^{(n)} : \cdot^{\otimes n} : \rangle : \Phi^{(n)} \in L^2\widehat{(\mathbb{R}^n, dx)}_{\mathbb{C}}, \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2sn} n!\,|\Phi^{(n)}|^2 < \infty \right\}, \quad s \in \mathbb{R},$$

其中，对于 $s > 0$，我们得到一个检验函数空间；对于 $s < 0$ ，则得到一个具有平方可积核的广义函数空间。赋予范数

$$\|\cdot\|_s := \|2^{sN} \cdot\|_{L^2(\mu)}$$

空间 $\mathcal{G}_s$， $s \in \mathbb{R}$，是一个希尔伯特空间。分别取射影极限和归纳极限，可得所谓的 Potthoff–Timpel三元组：

$$\mathcal{G} \subset L^2(\mu) \subset \mathcal{G}',$$

其中

$$\mathcal{G} := \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_q \quad \text{and} \quad \mathcal{G}' := \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{-q}.$$

我们有以下空间链，可用于定义对象的正则性 s

$$(\mathcal{S}) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{G}_r \subset \mathcal{G}_s \subset L^2(\mu) \subset \mathcal{G}_{-s} \subset \mathcal{G}_{-r} \subset \mathcal{G}' \subset (\mathcal{S})', \quad r > s > 0.$$

这里，$(\mathcal{S})$ 和 $(\mathcal{S})'$ 分别表示 Hida检验函数与分布空间。近期， [7] 通过结合 Bargmann–Segal空间与 U-泛函的概念，改进了对 Potthoff–Timpel三元组的刻画。为此，我们在$\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}$ 上引入高斯测度 ν ，其定义如下：

$$\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \exp\left(i\,\Re\langle h, \overline{u}\rangle\right) d\nu(u) = \exp\left(-\tfrac{1}{4}\langle h, \overline{h}\rangle\right), \quad h \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}.$$

即， ν 是$\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}$ 的实部和虚部上协方差分别为（$\cdot$，$\cdot$）/2的高斯测度的乘积测度。Bargmann–Segal空间随后定义为

$$E^2(\nu) := \left\{ H = \sum_{n=0}^{\infty} \langle H^{(n)}, \cdot^{\otimes n} \rangle : H^{(n)} \in L^2\widehat{(\mathbb{R}^n, dx)}_{\mathbb{C}}, n \in \mathbb{N}, \|H\|_{L^2(\nu)} < \infty \right\} \subset L^2(\nu).$$

其一个关键特征是：不同于Wick有序多项式的正交性，我们具有单项式的正交性，即，

$$\left(\langle F^{(n)}, \cdot^{\otimes n}\rangle, \langle G^{(m)}, \cdot^{\otimes m}\rangle\right)_{L^2(\nu)} = \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \langle F^{(n)}, u^{\otimes n}\rangle \overline{\langle G^{(m)}, u^{\otimes m}\rangle}\, d\nu(u) = n!\, \langle F^{(n)}, \overline{G^{(n)}}\rangle\, \delta_{nm}, \quad (2.1)$$

其中 $F^{(n)} \in L^2\widehat{(\mathbb{R}^n}, dx)_{\mathbb{C}}$、$G^{(m)} \in L^2\widehat{(\mathbb{R}^m}, dx)_{\mathbb{C}}$ 和 $n, m \in \mathbb{N}$ 分别为。

白噪声分析中的空间通过在适当的全纯函数空间中对拉普拉斯像进行局部化来刻画。拉普拉斯变换在高斯分析中所起的作用由 S-变换承担：

定义 2.1。设 $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$。我们将 Wick指数记为

$$:\exp(\langle h, \cdot\rangle):= \exp\left(\langle h, \cdot\rangle - \frac{1}{2}\langle h, h\rangle\right).$$

对于 $F \in L^2(\mu)$，我们定义 S-变换为

$$SF(h) := \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} :\exp(\langle h, \omega\rangle):\, F(\omega)\, d\mu(\omega), \quad h \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}.$$

由于对于 $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$，Wick指数是一个 Hida检验函数，因此即使对于$\Phi \in (S)'$，我们也可以定义：

$$S\Phi(h) = \langle\!\langle :\exp(\langle h, \cdot\rangle):, \Phi\rangle\!\rangle, \quad h \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}.$$

Hida 分布的 S-变换可以视为一个 U-泛函：

定义 2.2. (i) 映射 $U : \mathcal{S}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ 称为 U-泛函，当且仅当

(*a*) $\mathbb{C} \ni z \mapsto U(f + zg) \in \mathbb{C}$ 对所有 $f, g \in \mathcal{S}$都是整函数；(*b*) 存在 $0 \le A, B < \infty$ 以及定义在 $\mathcal{S}$ 上的连续范数 $\|\cdot\|$，使得

$$|U(zf)| \le A \exp\left(B|z|^2 \|f\|^2\right) \text{ for all } f \in \mathcal{S},\, z \in \mathbb{C}.$$

U-泛函的集合记作 $\mathcal{U}$。

(ii) 有限维正交投影 $\mathbb{P}$的集合定义为

$$\mathbb{P} := \left\{ P : \mathcal{S}'_{\mathbb{C}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{C}} : P = \sum_{m=1}^{n} \langle e_m, \cdot\rangle e_m, e_m \in \mathcal{S}, 1 \le m \le n, \text{ orthonormal w.r.t.}(\cdot,\cdot), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

我们得到空间的如下刻画：

定理 2.3 ([18], [7])。设 $\Phi : (S) \to \mathbb{C}$ 为线性算子。空间的刻画如下：

$$\begin{aligned}
\Phi \in (S)' &\quad\Leftrightarrow\quad S\Phi \in \mathcal{U};\\
\Phi \in \mathcal{G} &\quad\Leftrightarrow\quad S\Phi \in \mathcal{U} \text{ and } \sup_{P\in\mathbb{P}} \textstyle\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |S\Phi(\lambda P u)|^2\, d\nu(u) < \infty \quad \text{for all } \lambda > 0;\\
\Phi \in \mathcal{G}' &\quad\Leftrightarrow\quad S\Phi \in \mathcal{U} \text{ and } \sup_{P\in\mathbb{P}} \textstyle\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |S\Phi(\varepsilon P u)|^2\, d\nu(u) < \infty \quad \text{for some } \varepsilon > 0;\\
\Phi \in L^2(\mu) &\quad\Leftrightarrow\quad S\Phi \in \mathcal{U} \text{ and } \sup_{P\in\mathbb{P}} \textstyle\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |S\Phi(P u)|^2\, d\nu(u) < \infty.
\end{aligned}$$

如果我们已经知道 $\Phi \in \mathcal{G}'$，那么可以省去在 $P \in \mathbb{P}$ 中对上述积分取上确界，因为此时其混沌分解的核已经属于 $\widehat{\quad}L^2(\mathbb{R}^n; dx)_{\mathbb{C}}$，$n \in \mathbb{N}$。

引理 2.4。设 $\Phi \in G'$，则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $S\Phi(\varepsilon\cdot) \in E^2(\nu)$ 且

(i)

$$\sup_{P\in\mathbb{P}}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\left|S\Phi(\lambda Pu)\right|^2 d\nu(u)=\sum_{n=0}^{\infty}n!\lambda^{2n}|\Phi^{(n)}|^2=\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\left|S\Phi(\lambda u)\right|^2 d\nu(u)\quad \textit{for all } \lambda>0.$$

特别地，对于所有 $0<\lambda\le\varepsilon$，上述表达式都是有限的。一般而言，它们可能是无穷的。

(ii)

$$\|\Phi\|_s^2=\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\left|S\Phi(2^s u)\right|^2 d\nu(u)\quad \textit{for all } s\in\mathbb{R},$$

再次采用如下约定：等式两边都允许取无穷大。

证明。设 $\Phi\in\mathcal{G}'$。则存在 $q\in\mathbb{N}$，使得 $\Phi\in\mathcal{G}_{-q}$，因此 Φ 可作混沌展开

$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\Phi^{(n)},:\cdot^{\otimes n}:\rangle,\qquad \Phi^{(n)}\in L^2\widehat{(\mathbb{R}^n,dx)}_{\mathbb{C}},$$

with

$$\|\Phi\|_{-q}^2=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-2qn}\,n!\,|\Phi^{(n)}|^2<\infty.$$

Φ 的 S 变换由下式给出

$$S\Phi(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\Phi^{(n)},f^{\otimes n}\rangle,\qquad f\in\mathcal{S}_{\mathbb{C}},$$

参见 [7]。

(i)：对于任意 $\lambda>0$，有

$$\begin{aligned}\sup_{P\in\mathbb{P}}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\left|S\Phi(\lambda Pu)\right|^2 d\nu(u)&=\sup_{P\in\mathbb{P}}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}S\Phi(\lambda Pu)\overline{S\Phi(\lambda Pu)}\,d\nu(u)\\&=\sup_{P\in\mathbb{P}}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\sum_{n=0}^{\infty}\langle\Phi^{(n)},\lambda^n(Pu)^{\otimes n})\rangle\overline{\sum_{n=0}^{\infty}\langle\Phi^{(n)},\lambda^n(Pu)^{\otimes n})\rangle}\,d\nu(u)\\&=\sup_{P\in\mathbb{P}}\sum_{n=0}^{\infty}n!\lambda^{2n}|P^{\otimes n}\Phi^{(n)}|^2=\sum_{n=0}^{\infty}n!\lambda^{2n}|\Phi^{(n)}|^2\\&=\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\sum_{n=0}^{\infty}\langle\Phi^{(n)},\lambda^n u^{\otimes n}\rangle\overline{\sum_{n=0}^{\infty}\langle\Phi^{(n)},\lambda^n u^{\otimes n})\rangle}\,d\nu(u)\\&=\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\left|S\Phi(\lambda u)\right|^2 d\nu(u)=\|S\Phi(\lambda\cdot)\|^2_{L^2(\nu)},\end{aligned}\tag{2.2}$$

因为 $\Phi^{(n)}\in L^2\widehat{\mathbb{R}^n}(;dx)_{\mathbb{C}},n\in\mathbb{N}$。第三个等式由 (2.1) 得出，而第四个等式中的上界估计则是通过取与 $L^2(dx)$ 的一组标准正交基相对应的正交投影序列得到的。注意，$S\Phi(\lambda\cdot):\mathsf{S}'_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ 是定义良好的函数，这是因为 $\Phi^{(n)}\in L^2\widehat{\mathbb{R}^n}(;dx)_{\mathbb{C}},n\in\mathbb{N}$；在 (2.2) 中各项均有限时，可参见 (2.1)。现在，根据定理 2.3，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $S\Phi(\varepsilon\cdot)\in E^2(\nu)$。

(ii)：由 $\mathcal{G}_s$ 中范数的定义及（2.2）直接得出。 □

设 $(\mathcal{S}',\mathcal{C}_\sigma,\mu)$ 为白噪声概率空间。对于 $F\in L^2(\mu)$，将其维纳–伊藤混沌展开写作

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}\langle F^{(n)},:\cdot^{\otimes n}:\rangle,\qquad F^{(n)}\in L^2\widehat{(\mathbb{R}^n,dx)}_{\mathbb{C}},$$

使得

$$\|F\|^2_{L^2(\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|F^{(n)}|^2.$$

数算子 N 在 $L^2(\mu)$ 上的（闭包）定义为

$$NF := \sum_{n=0}^{\infty} n\langle F^{(n)}, :\cdot^{\otimes n}: \rangle,$$

其定义域为

$$\mathrm{Dom}(N) := \left\{ F \in L^2(\mu) : \sum_{n=0}^{\infty} n^2\, n!\,|F^{(n)}|^2 < \infty \right\}.$$

更一般地，对于 $\alpha \in \mathbb{R}, \Phi \in \mathcal{G}'$，我们将分数次幂 $(I+N^{\alpha/2})$ 定义为

$$(I+N^{\alpha/2})\Phi := \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^{\alpha/2})\langle \Phi^{(n)}, :\cdot^{\otimes n}: \rangle,$$

当右侧在 $L^2(\mu)$ 中收敛时。

定义 2.5（分数阶 Malliavin–Watanabe–Sobolev 空间）。设 $\alpha \in \mathbb{R}$。空间$\mathcal{D}^{\alpha,2}$ 定义为

$$\mathcal{D}^{\alpha,2} := \left\{ \Phi \in \mathcal{G}' : (I+N^{\alpha/2})\Phi \in L^2(\mu) \right\},$$

配备希尔伯特范数

$$\|\Phi\|_{\alpha,2} := \left\|(I+N^{\alpha/2})\Phi\right\|_{L^2(\mu)}.$$

等价地，用混沌核表示，

$$\|\Phi\|^2_{\alpha,2} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^{\alpha})\, n!\,|\Phi^{(n)}|^2, \tag{2.3}$$

and

$$\Phi \in \mathcal{D}^{\alpha,2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^{\alpha})\, n!\,|\Phi^{(n)}|^2 < \infty.$$

注 2.6。对于 $\alpha = m \in \mathbb{N}$，范数 (2.3) 等价于经典的 Malliavin– Sobolev 范数$\|F\|_{m,\,2}$，该范数通过 Malliavin 导数定义，即 $F \in \mathcal{D}^{m,\,2}$ 当且仅当 F 具有m 阶 Malliavin 可微性，且 $D^k F \in L^2(\mu;\ L^2(\mathbb{R})^{\otimes k})$ 对所有 $0 \le k \le m$均成立。本文将 (2.3) 用作所有 $\alpha \in \mathbb{R}$的定义。

从 Malliavin–Watanabe– Sobolev 标度 $\{\mathcal{D}^{\alpha,2}\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ 的角度来看，通过 Potthoff–Timpel 标度 $\{\mathcal{G}_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ 刻画 Malliavin–Watanabe 正则性并不令人满意。原因在于，$\mathcal{G}_s$-范数涉及混沌阶数的指数型权重，而$\mathcal{D}^{\alpha,\,2}$ 则由多项式型权重控制。因此，任何正的$\mathcal{G}_s$-正则性都足以保证任意高阶的 Malliavin 可微性（甚至对 Malliavin 导数有L^p-界），见下一个推论，其论证可追溯至[19]。

推论 2.7。令 $F \in L^2(\mu)$。

（i）对于所有的 $m \in \mathbb{N}$、$p \ge 1$，存在 $\lambda \ge 1$ 使得

$$\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \left|SF(\lambda u)\right|^2 d\nu(u) < \infty$$

意味着 $F \in \mathbb{D}^{m,\,p}$。也就是说，F 是 m 次 *Malliavin* 可微的，并且直到 m 阶的 *Malliavin* 导数都包含在 $L^p(\mu)$ 中。

(ii) 特别是，如果

$$\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) < \infty \quad \textit{for some } \lambda > 1,$$

那么 F 是无穷阶 ***Malliavin*** 可微的，且任意阶的 ***Malliavin*** 导数都属于 L^p（μ），$1 \le p \le 2$。

证明。 (i)：首先回顾一下，$L^2(\mu)$ 中具有有限阶混沌分解的函数在所有 Malliavin 可微函数空间中稠密，并且可以通过数算子 N表示它们的范数。因此，对于足够大的 $t \ge 0$ 以及一个正的有限常数 $C_{t,\,m}$ 有：

$$\begin{aligned} \|F\|_{m,p} = \|(N+1)^{\frac{m}{2}} F\|_{L^p(\mu)} &= \|e^{-tN}(N+1)^{\frac{m}{2}} e^{tN} F\|_{L^p(\mu)} \\ &\le \|e^{-tN/2}(N+1)^{\frac{m}{2}} e^{tN} F\|_{L^2(\mu)} \le C_{t,m} \|e^{tN} F\|_{L^2(\mu)} = C_{t,m} \|F\|_t \end{aligned} \quad (2.4)$$

对于所有函数 $F \in L^2$（μ），它们具有有限阶混沌分解。这里使用了由 $-N$生成的半群的超收缩性。现在取 $\lambda = e^t$ 并结合引理 2.4（ii）。

（ii）：注意，在 $1 \le p \le 2$ 的情况下，我们不需要超收缩性，并且类似于（2.4）的估计对所有 $t > 0$都可以得到。□

对于任意函数 $F \in L^2$（μ），$0 < \lambda < 1$，由引理 2.4（i）可得：

$$\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \lambda^{2n} |F^{(n)}|^2.$$

对 λ求导，得到：

$$\partial_\lambda \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) = \sum_{n=1}^{\infty} n! 2n \lambda^{2n-1} |F^{(n)}|^2.$$

对所有 $0 < \lambda < 1$ 取上确界，我们得到

$$\sup_{0<\lambda<1} \partial_\lambda \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n! n |F^{(n)}|^2.$$

由此得到以下定理：

定理 2.8. 设 $F \in L^2(\mu)$，$m \in \mathbb{N}$。则

$$F \in \mathcal{D}^{m,2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sup_{0<\lambda<1} \partial_\lambda^m \left(\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) \right) < \infty.$$

证明： 我们给出 $m = 1$ 的证明，一般情形可由归纳法得到。设

$$\sup_{0<\lambda<1} \partial_\lambda \left(\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) \right) < \infty,$$

那么我们有

$$\infty > 2 \sum_{n=1}^{\infty} n! n |F^{(n)}|^2 > \sum_{n=1}^{\infty} n! (n+1) |F^{(n)}|^2.$$

因此，$F \in \mathcal{D}^{1,2}$。

现在令 $F \in \mathcal{D}^{1,2}$。则

$$\sup_{0<\lambda<1} \partial_\lambda \left(\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n! n |F^{(n)}|^2$$
$$\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n!(n+1)|F^{(n)}|^2 = 2\|F\|_{1,2}^2 < \infty.$$

□

注 2.9. 因此，空间 $\mathcal{D}^{m,2}$ 与 $L^2(\mu)$ 非常接近，实际上比空间 $\mathcal{G}$ 更为接近。这是因为，对于$\mathcal{D}^{m,2}$，其刻画需要多项式权重，而在使 Potthoff-Timpel 三元组拓扑化的每一个空间中，权重均为指数型。

利用 Riemann-Liouville 分数阶导数，我们甚至可以刻画空间$\mathcal{D}^{m+\alpha,2}$，对于 $\alpha \in (0,1)$, $m \in \mathbb{N}$。

定理 2.10. 设 $F \in L^2(\mu)$, $\alpha \in (0,1)$, $m \in \mathbb{N}$。则

$$F \in \mathcal{D}^{m+\alpha,2}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\sup_{0<\lambda<1} D_{0+}^{\alpha} \partial_\lambda^m \left(\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) \right) < \infty.$$

证明： 我们对 $m = 0$ 给出证明，一般情形可由利用定理 2.8 的归纳论证得出。

Let

$$\sup_{0<\lambda<1} D_{0+}^{\alpha} \left(\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) \right) < \infty.$$

于是由引理 2.4(i) 并结合引理A.13 我们有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1-\alpha)} |F^{(n)}|^2 < \infty.$$

现在，引理A.14结合引理A.15 可推出

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} n!(2n)^{\alpha} |F^{(n)}|^2 > \sum_{n=1}^{\infty} n! n^{\alpha} |F^{(n)}|^2 > \sum_{n=1}^{\infty} n! |F^{(n)}|^2.$$

因此，我们得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(1+n^{\alpha})|F^{(n)}|^2 < \infty.$$

因此，$F \in \mathcal{D}^{\alpha,2}$。

现在设 $F \in \mathcal{D}^{\alpha,2}$。那么，如上所述，我们有

$$\sup_{0<\lambda<1} D_{0+}^{\alpha} \left(\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |SF(\lambda P u)|^2 \, d\nu(u) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1-\alpha)} |F^{(n)}|^2. \tag{2.5}$$

The 式（2.5）中的级数根据引理A.14 结合引理A.15 收敛当且仅当 if

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! n^{\alpha} |F^{(n)}|^2 < \infty.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! n^{\alpha} |F^{(n)}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n!(1+n^{\alpha})|F^{(n)}|^2 = \|F\|_{\mathcal{D}^{\alpha,2}} < \infty,$$

该断言得到了证明。 □

我们还可以刻画 m 次 Malliavin 可微函数的对偶空间：

定理 2.11。设 $\Phi \in \mathcal{G}'$, $m \in \mathbb{N}$。则

$$\Phi \in \mathcal{D}^{-m,2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \int_0^{\lambda_m} \cdots \int_0^{\lambda_2} \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \left|S\Phi(\lambda_1 u)\right|^2 d\nu(u)\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_m < \infty.$$

证明： 我们给出 $m = 1$ 的证明，一般情形可由归纳法得到。由于 $\Phi \in \mathcal{G}'$，由引理 2.4(i) 可得

$$[0,1] \ni \lambda \mapsto \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \left|S\Phi(\lambda u)\right|^2 d\nu(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\lambda^{2n} |\Phi^{(n)}|^2 \in [0,\infty]$$

是良定义且单调递增的。设

$$\int_0^1 \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \left|S\Phi(\lambda u)\right|^2 d\nu(u)\, d\lambda < \infty,$$

于是，由 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}\infty > \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} n!\lambda^{2n} |\Phi^{(n)}|^2 \, d\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_0^1 \lambda^{2n}\, d\lambda\, |\Phi^{(n)}|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1} |\Phi^{(n)}|^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n+1} |\Phi^{(n)}|^2 = \frac{\|\Phi\|^2_{-1,2}}{2}.\end{aligned}$$

因此，$\Phi \in \mathcal{D}^{-1,2}$。

现在，令 $\Phi \in \mathcal{D}^{-1,2}$。那么

$$\int_0^1 \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \left|S\Phi(\lambda P u)\right|^2 d\nu(u)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1} |\Phi^{(n)}|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n+1} |\Phi^{(n)}|^2 = \|\Phi\|^2_{-1,2} < \infty.$$

□

再次利用 Riemann–Liouville 分数阶积分，我们可以进一步刻画任意 $\alpha \in (0, 1)$ 的对偶空间。我们有：

定理 2.12。令 $\Phi \in \mathcal{G}'$, $\alpha \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{N}$。那么

$$\Phi \in \mathcal{D}^{-m-\alpha,2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda_{m+1})^{1-\alpha}} \int_0^{\lambda_{m+1}} \cdots \int_0^{\lambda_2} \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \left|S\Phi(\lambda_1 u)\right|^2 d\nu(u)\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_{m+1} < \infty.$$

证明： 我们给出 $m = 0$ 且 $\alpha \in (0, 1)$ 时的证明，一般情形可通过归纳论证并结合定理 2.11 得出。由于 $\Phi \in \mathcal{G}'$，根据引理 2.4(i)，我们有

$$[0,1] \ni \lambda \mapsto \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \left|S\Phi(\lambda u)\right|^2 d\nu(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\lambda^{2n} |\Phi^{(n)}|^2 \in [0,\infty]$$

定义良好且单调递增。令

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^{1-\alpha}} \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \left|S\Phi(\lambda u)\right|^2 d\nu(u)\, d\lambda < \infty,$$

于是，通过 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}\infty > \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^{1-\alpha}}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |S\Phi(\lambda u)|^2\, d\nu(u)\, d\lambda \\ = \sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^{1-\alpha}}\lambda^{2n}\, d\lambda\, |\Phi^{(n)}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1+\alpha)}|\Phi^{(n)}|^2,\end{aligned}$$

根据引理A.13，这意味着该级数收敛

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{1+n^{\alpha}}|\Phi^{(n)}|^2 = \|\Phi\|^2_{-\alpha,2},$$

根据引理 A.14 和引理 A.15。因此， $\Phi \in \mathcal{D}^{-\alpha,2}$。

现在令 $\Phi \in \mathcal{D}^{-\alpha,2}$。那么

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^{1-\alpha}}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |S\Phi(\lambda P u)|^2\, d\nu(u)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1+\alpha)}|\Phi^{(n)}|^2,$$

由引理A.14 和引理A.15 收敛当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{1+n^{\alpha}}|\Phi^{(n)}|^2 < \infty. \tag{2.6}$$

但是，(2.6) 中的级数求和后恰为 $\|\Phi\|^2_{-\alpha,2}$，根据假设这是有限的。 □

3. 应用

注 3.1. 设 $d \in \mathbb{N}$。过程 $\langle \eta, \cdot\rangle := (\langle \eta_1, \cdot_1\rangle \ldots, \langle \eta, \cdot_d\rangle)$ $\eta \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d, dx)$ 的 Donsker δ 函数， $\eta_k \neq 0$, $1 \leq k \leq d$，定义为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ 上的广义随机变量，由各分量过程的 Donsker δ 函数之积给出，参见例如 [20]:

$$\delta(\langle \eta_1, \cdot_1\rangle, \ldots, \langle \eta_d, \cdot_d\rangle) = \prod_{k=1}^{d}\delta(\langle \eta_k, \cdot_k\rangle).$$

于是，其在 $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ 中的 S-变换由下式给出

$$\prod_{k=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)\langle \eta_k, \eta_k\rangle}}\exp\Big(-\frac{1}{2\langle \eta_k, \eta_k\rangle}\langle \xi_k, \eta_k\rangle^2)\Big). \tag{3.1}$$

因此，若用 ν_d 表示由 $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}$ 上的测度 ν 的 d 重乘积得到的 $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ 上的测度，并用 P_k 表示正交投影 $P\colon \mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ 的第 k 个分量，则我们得到

$$\begin{aligned}&\sup_{P\in\mathbb{P}}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)}\Big|S\delta(\langle \eta_1, \cdot_1\rangle, \ldots, \langle \eta_d, \cdot_d\rangle)(\lambda P u)\Big|^2 d\nu_d(u)\\ =\ &\sup_{P\in\mathbb{P}}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)}\Big|\prod_{k=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)\langle \eta_k, \eta_k\rangle}}\exp\Big(-\frac{1}{2\langle \eta_k, \eta_k\rangle}\langle \lambda P_k u_k, \eta_k\rangle^2)\Big)\Big|^2 d\nu_d(u)\\ =\ &\sup_{P\in\mathbb{P}}\prod_{k=1}^{d}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})}\Big|\frac{1}{\sqrt{(2\pi)\langle \eta_k, \eta_k\rangle}}\exp\Big(-\frac{1}{2\langle \eta_k, \eta_k\rangle}\langle \lambda P_k u_k, \eta_k\rangle^2)\Big)\Big|^2 d\nu(u_k),\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中在等式（3.2）中，我们使用了分量过程的独立性。现在由（3.2）可知，在$\mathcal{G}'$ 中 d维情形下，Donsker δ 函数作为广义函数的存在性，可以归结为证明在一$\mathcal{G}'$ 维情形下 Donsker δ 函数的存在性，这归功于 [6]。

定理 3.2（Donsker δ 函数的正则性）。 对于任意以 $\mathbb{R}^d$ 为值域的中心化高斯过程（X_t）$_{t\geq 0}$，其具有独立分量 $X_t^k = \langle f_t^k, \cdot\rangle$ $k = 1, \ldots, n$，且 $0 \neq f_{(k)\,t} \in L^2(\mathbb{R}, dx)$， $t \geq 0$，我们有

$$\delta(X_t) \in \mathcal{D}^{-m,2} \setminus \mathcal{D}^{-\frac{d}{2},2}, \text{ for all } m > \frac{d}{2}.$$

证明。我们首先考虑一维情形。我们的目标是应用定理 2.12。根据注记 3.1，我们知道 Donsker δ 函数属于 $\mathcal{G}'$，其 S-变换的显式形式见（3.1）。因此，我们只需证明以下函数的可积性：

$$\begin{aligned}[0,1] \ni \lambda \mapsto &\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} |S(\delta(\langle f_t, \cdot\rangle))(\lambda u)|^2 \, d\nu(u) \\ &= \frac{1}{2\pi\|f_t\|^2} \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\left\langle u, \frac{f_t}{\|f_t\|}\right\rangle^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left\langle \overline{u}, \frac{f_t}{\|f_t\|}\right\rangle^2\right) d\nu(u).\end{aligned}$$

记 $u = v + iw$, $v, w \in \mathcal{S}'$，可得 $\langle u, \frac{f_t}{\|f_t\|}\rangle = \langle v, \frac{f_t}{\|f_t\|}\rangle + i\langle w, \frac{f_t}{\|f_t\|}\rangle$。因此，利用这些随机变量的像测度，以及虚部与实部的独立性，我们得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\left(\left\langle u, \frac{f_t}{\|f_t\|}\right\rangle^2 + \left\langle \overline{u}, \frac{f_t}{\|f_t\|}\right\rangle^2\right)\right) d\nu(u) \\ =\ &\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda^2(x^2-y^2))\exp(-x^2-y^2)\, dx\, dy \\ =\ &\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2(\lambda^2+1) - y^2(1-\lambda^2))\, dx\, dy \\ =\ &\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

现在考虑任意一个 $d \in \mathbb{N}$。根据等式（3.2）和（3.3），我们得到

$$\|S(\delta(\langle X_t, \cdot\rangle))(\lambda\cdot)\|^2_{L^2(\nu)} = \prod_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{2\pi\left\|f_t^{(k)}\right\|^2}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right).$$

因此，要应用定理2.12，我们需要检验以下函数的可积性：

$$[0,1] \ni \lambda \mapsto \frac{1}{(\sqrt{1-\lambda^2})^d},$$

因为其他项不会影响可积性。通过适当的常数，可以将它们从上方和下方界定，且下界远离零。

令 $d = 2n$。在这种情况下，有

$$\frac{1}{(\sqrt{1-\lambda^2})^d} = \frac{1}{(1-\lambda^2)^n} = \frac{1}{(1+\lambda)^n}\frac{1}{(1-\lambda)^n}.$$

对于积分的有限性，同样只需关注第二项。我们有 e

$$\int_0^x \frac{1}{(1-\lambda)^n}\, d\lambda = \int_{1-x}^1 \frac{1}{y^n}\, dy = -\frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}, \quad 0 \leq x < 1.$$

经过 n 次迭代积分，除去某个有限的加法常数和前因子后，我们得到原函数

$$\ln(1-x),$$

当 x 趋近于 1 时，它趋于 $-\infty$。因此，我们需要再应用一个阶数为 α的黎曼–刘维尔分数阶积分。省略一个有限的前置因子后，我们得到

$$\int_0^1 \ln(1-\lambda)(1-\lambda)^{\alpha-1}\, d\lambda = \int_0^1 \ln(y)\, y^{\alpha-1}\, dy.$$

分部积分可得

$$\lim_{s\searrow 0}\int_s^1 \ln(y)y^{\alpha-1}dy = \lim_{s\searrow 0}\frac{y^\alpha}{\alpha}\ln(y)\Big|_s^1 - \lim_{s\searrow 0}\int_s^1 \frac{y^\alpha}{\alpha}\frac{1}{y}dy$$
$$= \frac{1}{\alpha}\ln(1) - \lim_{s\searrow 0}\frac{s^\alpha}{\alpha}\ln(s) - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 y^{\alpha-1}\,dy = -\frac{1}{\alpha^2},$$

这是一个有限值。因此，对于 $d=2n$，我们有 $\delta(X_t)\in\mathcal{D}_{-\frac{d}{2}-\varepsilon,\,2}$，对所有 $\varepsilon>0$。对于 $d=2n+1$，我们记作：

$$\frac{1}{(\sqrt{1-\lambda^2})^d} = \frac{1}{(1-\lambda^2)^n}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{1}{(1-\lambda)^{n+\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1+\lambda)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

对于积分的有限性，我们只需关注第一项。我们有

$$\int_0^x \frac{1}{(1-\lambda)^{n+\frac{1}{2}}}\,d\lambda = \int_{1-x}^1 \frac{1}{y^{n+\frac{1}{2}}}\,dy = -\frac{1}{(n-\frac{1}{2})(1-x)^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}},\quad 0\le x<1.$$

因此，经过 n 次迭代积分，并再次略去一个有限的加性常数和前因子，我们得到原函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

当 x 趋近于 1 时，该式发散。应用阶数为 α 的黎曼–刘维尔积分，我们得到

$$\int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{\alpha-1}}{\sqrt{1-\lambda}}d\lambda = \int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha-\frac{3}{2}}d\lambda,$$

当且仅当 $-1<\alpha-\frac{3}{2}$ 时，该式为有限值，即 $\frac{1}{2}<\alpha$. 因此，对于 $d=2n+1$，我们有$\delta(X_t)\in\mathcal{D}_{-\frac{d}{2}-\varepsilon,\,2}$，对所有 $\varepsilon>0$。□

在证明 Donsker δ 函数的正则性之后，我们现在分析自交局部时。目标是证明 Malliavin 光滑性。为简单起见，此处我们专注于 $d=1$ 的情形。

定义 3.3. 中心高斯过程 $X_t=\langle f_t,\,\cdot\rangle$，$0\neq f_t\in L^2(\mathbb{R},dx)$，$0\le t\le T$ 的自交局部时定义为

$$\int_0^T\int_0^t \delta(X_t-X_s)\,dsdt$$

其意义是，在适当的希尔伯特空间中取 Bochner 积分，并且该空间是 $(\mathcal{S})'$ 的子集。

定义 3.4. 协方差为.....的中心高斯过程 B^H

$$\mathbb{E}(B_t^HB_s^H) = \frac{1}{2}\Big(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\Big),\quad t,s>0,$$

is c称为赫斯特参数为 $H\in$（0,1）的单维分数布朗运动).

定理 3.5. [12, 13] 对于 $d=1$ 赫斯特参数为 $H\in$（0，1）的分数布朗运动的自交局部时属于 $\mathcal{D}^{1,2}$ 对所有 $H\in$（0，1）。

事实上，我们得到如下推广。

定理 3.6。 考虑一维高斯过程 $X=(\langle f_t,\cdot\rangle)_{0\le t\le T}$，其中$f_t\in L^2(\mathbb{R},dx)$ $0\le t\le T$。我们采用记号 $f(t,s):=f_t-f_s, 0\le s,t\le T$，并假设 $0<\|f(t,s)\|\le M$在 $[0,T]^2$ 上对 $dtds$ 几乎处处成立，其中 $M<\infty$。那么， X 的自相交局部时是 $D^{1,2}$ 中的一个元素，如果

$$\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\Big(\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2-\big(\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle\big)^2\Big)^{-\frac{3}{2}}ds_2dt_2ds_1dt_1<\infty. \tag{3.4}$$

证明。证明分为三个正则化步骤。首先，我们证明 X 的自相交局部时是 $\mathcal{G}'$ 中的一个元素，从而通过引理 2.4消除对所有有限维投影取上确界。然后证明平方可积性，最后证明 Malliavin 正则性。

对所有 $0<\lambda<1$、 $P\in\mathbb{P}$，我们有:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\left|S\left(\int_0^T\int_0^t\delta(X_t-X_s)\,ds\,dt\right)(\lambda Pu)\right|^2 d\nu(u) \qquad (3.5)\\ =\;&\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} S(\delta(X_{t_1}-X_{s_1}))(\lambda Pu)\,\overline{S(\delta(X_{t_2}-X_{s_2}))(\lambda Pu)}\,d\nu(u)ds_2dt_2ds_1dt_1.\end{aligned}$$

对于式（3.5）中的被积函数，我们采用记号 $f(t,s)=f_t-f_s$，如定理3.6的表述中那样，并由引理A.16 得到:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} S(\delta(\langle f(t_1,s_1),\cdot\rangle))(\lambda Pu)\overline{S(\delta(\langle f(t_2,s_2),\cdot\rangle))(\lambda Pu)}d\nu(u)\\ &\quad=\frac{1}{2\pi\|f(t_1,s_1)\|\|f(t_2,s_2)\|}\frac{1}{\sqrt{1-\sigma_P^2\lambda^4}}, \qquad (3.6)\end{aligned}$$

with

$$\sigma_P=\frac{\langle Pf(t_1,s_1),Pf(t_2,s_2)\rangle}{\|f(t_1,s_1)\|\|f(t_2,s_2)\|}\in[-1,1].$$

因此，在$\lambda=\frac{1}{2}$ 的情形下，我们得到:-

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\left|S\left(\int_0^T\int_0^t\delta(X_t-X_s)\,ds\,dt\right)\left(\tfrac{1}{2}Pu\right)\right|^2 d\nu(u)\\ &=\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{1}{2\pi\|f(t_1,s_1)\|\|f(t_2,s_2)\|}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{16}\sigma_P^2}}\,ds_2dt_2ds_1dt_1\\ &=\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{ds_2dt_2ds_1dt_1}{2\pi\sqrt{\left(\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2-\frac{1}{16}\left(\langle Pf(t_1,s_1),Pf(t_2,s_2)\rangle\right)^2\right.}}\\ &\le\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{1}{\|f(t_1,s_1)\|\|f(t_2,s_2)\|}\,ds_2dt_2ds_1dt_1.\end{aligned}$$

由于后一积分与 $P\in\mathbb{P}$ 无关，且依假设为有限，故可知自相交局部时属于$\mathcal{G}'$，此结论由定理2.3得出。

现在，在极限 $\lambda\nearrow 1$ 下，我们由式（3.6）得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}}\left|S\left(\int_0^T\int_0^t\delta(X_t-X_s)\,ds\,dt\right)(u)\right|^2 d\nu(u)\\ &=\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{ds_2dt_2ds_1dt_1}{2\pi\sqrt{\left(\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2-\left(\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle\right)^2\right.}}<\infty\end{aligned}$$

由可积性条件（3.4）。因此，我们得到自相交局部时的平方可积性，依据定理2.3 以及引理2.4。

现在让我们考虑该函数

$$(0,1)\ni\lambda\mapsto I(\lambda):=\frac{1}{\sqrt{\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2-\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle^2\lambda^4}} \qquad (3.7)$$

由方程（3.6）得到。对方程（3.7）中的函数求导可得:

$$I'(\lambda)=\frac{1}{\|f(t_1,s_1)\|\|f(t_2,s_2)\|}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sigma_{Id}^2\lambda^4}}\right).$$

根据引理 A.17，有

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sigma_{Id}^2\lambda^4}}\right)=\frac{2\sigma_{Id}\lambda^3}{(1-\sigma_{Id}^2\lambda^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

因此，根据定理 2.8 我们有

$$\int_0^T\int_0^t \delta(X_t-X_s)\,ds\,dt\in\mathcal{D}^{1,2}$$

当且仅当

$$\sup_{0<\lambda<1}\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{1}{2\pi\|f(t_1,s_1)\|\|f(t_2,s_2)\|}\frac{2\sigma_{Id}^2\lambda^3}{(1-\sigma_{Id}^2\lambda^4)^{\frac{3}{2}}}\,ds_2dt_2ds_1dt_1<\infty. \tag{3.8}$$

(3.8) 中的被积函数可改写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\|f(t_1,s_1)\|\|f(t_2,s_2)\|}\frac{2\sigma_{Id}^2\lambda^3}{(1-\sigma_{Id}^2\lambda^4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda^3}{\pi}\frac{\sigma_{Id}^2\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2}{\|f(t_1,s_1)\|^3\|f(t_2,s_2)\|^3(1-\sigma_{Id}^2\lambda^4)^{\frac{3}{2}}}\\ =\;&\frac{\lambda^3}{\pi}\frac{\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle^2}{\left(\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2-\left(\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle\right)^2\lambda^4\right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.8) 中的积分因此可估计为

$$\begin{aligned}&\sup_{0<\lambda<1}\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{1}{2\pi\|f(t_1,s_1)\|\|f(t_2,s_2)\|}\frac{2\sigma_{Id}^2\lambda^3}{(1-\sigma_{Id}^2\lambda^4)^{\frac{3}{2}}}\,ds_2dt_2ds_1dt_1\\ \le&\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle^2\,ds_2dt_2ds_1dt_1}{\pi\left(\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2-\left(\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}<\infty\end{aligned}$$

b根据假设的可积性条件 (3.4)。因此，由定理 2.8可得所述结论 . □

注记 3.7. 请注意，定理 3.6 的证明以一种非常具体的方式实质性地运用了引理 2.4 。尤其重要的是，首先要将所研究的对象确定为 $\mathcal{G}'$ 中的正则广义函数。确定这一点后，后续论证便无需对有限维投影取上确界。这一点很重要：如果有限维投影出现在内积之中，那么要确保平方可积性就会成为一个极其复杂的问题。证明该对象属于$\mathcal{G}'$，既能保证后续步骤所需的基本表达式定义良好，也能确保满足引理2.4 的假设。因此，这一步并非迂回，而是论证中必要且具有结构意义的中间步骤。

例 3.8. 对于赫斯特参数为 $0<H<1$ 的分数布朗运动，我们有：

$$\begin{aligned}\|f(t,s)\|^2&=\mathbb{E}((B_t^H-B_s^H)^2)\\&=\mathbb{E}(((B_t^H)^2-2B_t^HB_s^H+(B_s^H)^2)\\&=t^{2H}-t^{2H}-s^{2H}+(t-s)^{2H}+s^{2H}=(t-s)^{2H}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle &= \mathbb{E}((B^H_{t_1}-B^H_{s_1})(B^H_{t_2}-B^H_{s_2}))\\ &= \frac{1}{2}\Big(t_1^{2H}+t_2^{2H}-(t_1-t_2)^{2H}-t_1^{2H}-s_2^{2H}+(t_1-s_2)^{2H}\\ &\quad -s_1^{2H}-t_2^{2H}+(s_1-t_2)^{2H}+s_1^{2H}+s_2^{2H}-(s_1-s_2)^{2H}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big((t_1-s_2)^{2H}+(s_1-t_2)^{2H}-(t_1-t_2)^{2H}-(s_1-s_2)^{2H}\Big).\end{aligned}$$

因此，判据

$$\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{1}{\sqrt{\left(\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2-\left(\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle\right)^2\right.}}ds_2dt_2ds_1dt_1<\infty$$

正是[12]中给出的自相交局部时平方可积性的判据。

在 [22] 中，给出了具有平稳增量的任意高斯过程的 Malliavin 光滑性判据。

请注意，在定理 3.6 中，我们不需要假设平稳增量，只需 $0<\|f(t,\ s)\|\le M<\infty\ dtds$-几乎处处成立。因此，我们能够处理的高斯过程类更广。从这个意义上说，我们的结果是对 [22]的推广。对于分数布朗运动，由于它具有平稳增量，这两个判据是一致的。

事实上

$$\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^T\int_0^{t_2}\frac{1}{\left(\|f(t_1,s_1)\|^2\|f(t_2,s_2)\|^2-\left(\langle f(t_1,s_1),f(t_2,s_2)\rangle\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}ds_2dt_2ds_1dt_1<\infty$$

对所有 $0<H<1$，分数布朗运动都满足该条件。因此，自相交局部时是 Malliavin 可微的。

最后，我们研究一类在高斯分析中很有用的密度，即所谓的高斯核。

定义 3.9。 用 $L(L^2(\mathbb{R},\ dx))$ 表示所有满足以下条件的 A 的集合： $L^2(\mathbb{R},\ dx)\to L^2(\mathbb{R},\ dx)$ 是线性且连续的。然后我们定义高斯核集合

$$GK:=\left\{\Phi_A\in(\mathcal{S})':S(\Phi_A)(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\langle\xi,(Id-A)\xi\rangle\right),\xi\in\mathcal{S}_{\mathbb{C}},\ A\in L(L^2(\mathbb{R},dx))\right\}.$$

此处及下文中，我们仍用 A 表示 A 的复化。注意， $S(\Phi_A)$ $\Phi_A\in GK$，是一个 $\mathcal{U}$ 泛函。

注 3.10。 (i) 函数 $S\Phi_A$ 确实是一个 $\mathcal{U}$ 泛函，因为 $\Phi_A\in(\mathcal{S})'$。例如，可以利用高斯核这一类函数的推广来构造费曼路径积分。因此，这类函数得到了广泛研究，参见例如 [10, 8, 4]。

(ii) 对于足够好的 A，也就是说，如果 $\det(A)>0$ 存在，且 A 在 $L^2(\mathbb{R},\ dx)$ 的某个适当子空间上有逆，则可显式地写出

$$\Phi_A=\frac{\exp(-\frac{1}{2}\langle\cdot,(A^{-1}-Id)\cdot\rangle)}{\sqrt{\det(A)}}.$$

在 A 满足什么条件时，我们会得到高斯核 $\Phi_A\in\mathcal{D}^{m,\,2}$，又适用于哪些$m\in\mathbb{N}$?

定理 3.11。 设 $A\in L(L^2(\mathbb{R},dx))$ 可沿标准正交基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$对角化，且其特征值属于开区间 (0,2)。

(i) 若 $0 < \det(2A - A^2) < \infty$，则 $\Phi_A \in L^2(\mu)$。(ii) 若 $\sup_{0<\lambda<1} \frac{\partial^\alpha}{\partial\lambda^\alpha} \det(Id - (\lambda^2 (Id-A))^2)^{-\frac{1}{2}} < \infty$，则 $\Phi_A \in D^{\alpha,\,2}$，其中 $\alpha > 0$，并定义 $\frac{\partial^\alpha}{\partial\lambda^\alpha} := D_{0+}^{\alpha-n} \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}$，对于 $\alpha > n \in \mathbb{N}$。

证明。令 $\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 和 $0 < \lambda < 1$。记 P_m 为由$\{e_n\}^{1\le n\le m}, m \in \mathbb{N}$生成的正交投影。那么

$$\langle P_m\xi, (Id - A)P_m\xi\rangle = \sum_{n=1}^{m} \langle \xi, e_n\rangle^2 \kappa_n, \tag{3.10}$$

其中 $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 $Id - A$相对于基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的特征值序列。由 (3.10) 结合 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}
&\|S(\Phi_A)(\lambda P_m\cdot)\|^2_{L^2(\nu)} \\
=\ & \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\langle P_m u, (Id-A)P_m u\rangle\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\langle P_m\overline{u}, (Id-A)P_m\overline{u}\rangle\right) d\nu(u) \\
=\ & \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \prod_{n=1}^{m} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\langle v+iw, e_n\rangle^2\kappa_n\right) \exp\left(-\lambda^2\frac{1}{2}\langle v-iw, e_n\rangle^2\kappa_n\right) d\nu(v,w) \\
=\ & \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \prod_{n=1}^{m} \exp\left(-\lambda^2(\langle v, e_n\rangle^2 - \langle w, e_n\rangle^2)\kappa_n\right) d\nu(v,w) \\
=\ & \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\lambda^2(x^2-y^2)\kappa_n\right)\exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy = \prod_{n=1}^{m} I_n,
\end{aligned}$$

其中

$$I_n := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(1+\lambda^2\kappa_n)x^2 - (1-\lambda^2\kappa_n)y^2)\, dxdy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

根据我们的假设，$(1 \pm \lambda^2\kappa_n)$ 为 > 0，因此

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-(1+\lambda^2\kappa_n)x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{1+\lambda^2\kappa_n}}, \qquad \int_{\mathbb{R}} \exp(-(1-\lambda^2\kappa_n)y^2)\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{1-\lambda^2\kappa_n}}.$$

Thus

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(1+\lambda^2\kappa_n)x^2 - (1-\lambda^2\kappa_n)y^2)\, dxdy = \frac{1}{\sqrt{1-(\lambda^2\kappa_n)^2}}$$

and

$$\det(Id - (\lambda^2(Id-A))^2)^{-1/2} = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{1-(\lambda^2\kappa_n)^2}} = \lim_{m\to\infty} \|S(\Phi_A)(\lambda P_m\cdot)\|^2_{L^2(\nu)}.$$

由于$\{|S(\Phi_A)(\lambda P_m\cdot)|^2\}_{m\in\mathbb{N}}$ 一致可积，结合.....的存在性

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \exp\left(\pm\lambda^2(\langle v, e_n\rangle)^2\kappa_n\right) \in [0,\infty], \quad v \in \mathcal{S}',$$

根据所作假设，可得

$$\|S(\Phi_A)(\cdot)\|^2_{L^2(\nu)} = \lim_{m\to\infty} \|S(\Phi_A)(\lambda P_m\cdot)\|^2_{L^2(\nu)} = \det(Id - (\lambda^2(Id-A))^2)^{-1/2}.$$

现在利用定理 2.10给出的刻画，即得所述结论。 □

参考文献

[1] K. Aase, B. Øksendal, N. Privault 和 J. Ubøe，Clark–Haussmann–Ocone 定理的白噪声推广及其在数理金融中的应用，《金融与随机过程》4（2000），第 4 期，465–496 页。[2] N. Agram 和 B. Øksendal，最优控制的飞田–马利亚万白噪声演算方法，《无限维分析、量子概率及相关主题》21（2018），第 3 期，1850014。[3] D. R. Bell，《马利亚万演算》，Courier Corporation，2012。[4] W. Bock 和 M. Grothaus，相空间费曼路径积分的白噪声方法，《概率论与数理统计理论》85（2012），7–22。[5] V. Bally 和 É. Pardoux，白噪声驱动的抛物型随机偏微分方程的 Malliavin 微积分，《位势分析》9（1998），第 1 期，27–64。[6] M. Grothaus、Yu. G. Kondratiev 和 L. Streit，复高斯分析与 Bargmann–Segal空间，《泛函分析与拓扑方法》3（1997），第 2 期，46–64。[7] M. Grothaus、J. Müller 和 A. Nonnenmacher，白噪声正则广义函数的改进刻画及其在奇异随机偏微分方程中的应用，《随机过程与偏微分方程：分析与计算》10（2022），第 2 期，359–391。[8] M. Grothaus 和 L. Streit，高斯分析中的二次作用量、半经典近似与 δ序列，《数学物理报告》44（1999），第 3 期，381–405。[9] Z.-Y. Huang 和 J.-A. Yan，《无限维随机分析导论》，施普林格，多德雷赫特，2000。[10] T. Hida、H.-H. Kuo、J. Potthoff 和 L. Streit，《白噪声：无限维演算》，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1993。[11] T. Hida 和 L. Streit（编），《让我们使用白噪声》，世界科学出版社，新加坡，2017。[12] Y. Hu 和 D. Nualart，分数布朗运动的重整化自相交局部时，《概率年刊》33（2005），第 3 期，948–983。[13] Y. Hu，通过混沌展开研究分数布朗运动的自相交局部时，《京都大学数理解析研究所讲究录》41（2001），第 2 期，233–250。[14] Yu. G. Kondratiev、P. Leukert、J. Potthoff、L. Streit 和 W. Westerkamp，高斯空间中的广义泛函：重新审视刻画定理，《泛函分析杂志》141（1996），第 2 期，301–318。[15] D. Nualart，《马利亚万演算及相关主题》，第 2 版，施普林格，柏林–海德堡，2006。[16] D. Nualart 和 B. Rozovskii，由时空白噪声驱动的加权随机索伯列夫空间与双线性随机偏微分方程，《泛函分析杂志》149（1997），第 1 期，200–225。[17] N. Obata，《白噪声演算与福克空间》，《数学讲义》第 1577 卷，施普林格，柏林，1994。[18] J. Potthoff 和 L. Streit，飞田分布的刻画，《泛函分析杂志》101（1991），第 1 期，212–229。[19] J. Potthoff 和 M. Timpel，光滑随机变量与广义随机变量空间的对偶空间对，《位势分析》4（1995），第 6 期，637–654。[20] L. Streit 和 W. Westerkamp，白噪声广义泛函刻画定理的推广，载于《复杂与非规则系统动力学》（Ph. Blanchard 等编），（1993），世界科学出版社。*[21]* D. Venturi、X. Wan、R. Mikulevičius、B. L. Rozovskii 和 G. E. Karniadakis，非线性随机偏微分方程的 Wick–Malliavin 近似：分析与模拟，《英国皇家学会会刊 A 辑》469（2013），第 2158 期，20130001。*[22]* L. Xie、W. Ni、S. Zheng 和 G. Lei，一类高斯过程的自相交局部时的存在性与光滑性，《统计与概率快报》213（2024），110190。

附录技术引理

定义 A.12. 绝对连续函数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 的 $\alpha\in(0,1)$ 阶左侧黎曼–刘维尔分数阶积分和导数分别定义如下：

(i)
$$I_{0+}^{\alpha}f(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt,\qquad x\ge 0,$$

(ii)
$$D_{0+}^{\alpha}f(x):=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt,\qquad x\ge 0.$$

引理 A.13. 对于 $n \in \mathbb{N}$，有：

(i)

$$I_{0+}^{\alpha} x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)}\, x^{n+\alpha}, \qquad x \geq 0,$$

(ii)

$$D_{0+}^{\alpha} x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}\, x^{n-\alpha}, \qquad x \geq 0.$$

证明。**(i)**：我们要计算

$$I(x) = \int_0^x \frac{t^n}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt = \int_0^x t^n (x-t)^{\alpha-1}\, dt.$$

我们作换元

$$t = xu, \qquad dt = x\, du, \qquad u \in [0,1].$$

Then

$$t^n = (xu)^n = x^n u^n,$$

and

$$x - t = x - xu = x(1-u) \quad \Rightarrow \quad (x-t)^{\alpha-1} = \big(x(1-u)\big)^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1}.$$

因此，积分变为

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x t^n (x-t)^{\alpha-1}\, dt \\ &= \int_0^1 \big(x^n u^n\big)\big(x^{\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1}\big) x\, du \\ &= x^{n+\alpha} \int_0^1 u^n (1-u)^{\alpha-1}\, du. \end{aligned}$$

我们认出剩下的积分就是贝塔函数：

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\, du.$$

取 $p = n+1$ 和 $q = \alpha$，得到

$$\int_0^1 u^n (1-u)^{\alpha-1}\, du = B(n+1, \alpha).$$

因此

$$I(x) = x^{n+\alpha} B(n+1, \alpha).$$

利用恒等式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

我们得到

$$B(n+1,\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}.$$

因此，最终结果为

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^n}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt = x^{n+\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)}.$$

(ii)：接下来我们计算

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^n}{(x-t)^{\alpha}}\, dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x t^n (x-t)^{-\alpha}\, dt.$$

首先，计算积分

$$R(x) := \int_0^x t^n (x-t)^{-\alpha}\, dt.$$

我们使用换元

$$t = xu, \qquad dt = x\, du, \qquad u \in [0,1].$$

Then

$$t^n = (xu)^n = x^n u^n,$$

and

$x-t = x-xu = x(1-u)$代入后得到 $(x-t)^{-\alpha} = \big(x(1-u)\big)^{-\alpha} = x^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha}$.

因此

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_0^x t^n (x-t)^{-\alpha}\, dt \\ &= \int_0^1 (x^n u^n)(x^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha}) x\, du \\ &= x^{n+1-\alpha} \int_0^1 u^n (1-u)^{-\alpha}\, du. \end{aligned}$$

我们将剩余的积分识别为贝塔函数:

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\, du.$$

利用 $p = n+1$ 和 $q = 1-\alpha$，我们得到

$$\int_0^1 u^n (1-u)^{-\alpha}\, du = B(n+1, 1-\alpha).$$

Thus

$$R(x) = x^{n+1-\alpha} B(n+1, 1-\alpha).$$

利用

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

我们得到

$$B(n+1,1-\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)}.$$

因此

$$R(x) = x^{n+1-\alpha}\, \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)}.$$

现在回到原来的表达式:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^n}{(x-t)^\alpha}\, dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} R(x).$$

我们计算:

$$\frac{d}{dx} R(x) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)} (n+1-\alpha) x^{n-\alpha}.$$

乘以$\Gamma^{\ 1}_{\ (1-\alpha)}$ 得到

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} R(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2-\alpha)} (n+1-\alpha) x^{n-\alpha}.$$

使用伽马函数恒等式

$$\Gamma(n+2-\alpha) = (n+1-\alpha)\, \Gamma(n+1-\alpha)$$

以简化:

$$\frac{(n+1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

因此

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^n}{(x-t)^\alpha}\,dt = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}x^{n-\alpha}.$$

□

引理 A.14。 对于所有 $\alpha \in (0,1)$ $n \in \mathbb{N}$, 我们有:

(i)

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \sim n^\alpha, \quad n \to \infty,$$

(ii)

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \sim n^{-\alpha}, \quad n \to \infty.$$

证明。 固定 $\alpha \in (0,1)$。我们使用斯特林渐近公式

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \qquad x \to \infty,$$

这意味着

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}\,(x/e)^x} = 1.$$

(i): 对 $x = n$ 和 $x = n-\alpha$应用斯特林公式:

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad \Gamma(n+1-\alpha) \sim \sqrt{2\pi(n-\alpha)}\left(\frac{n-\alpha}{e}\right)^{n-\alpha}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} &\sim \frac{\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi(n-\alpha)}\,(\frac{n-\alpha}{e})^{n-\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{n}{n-\alpha}}\,\frac{n^n e^{-n}}{(n-\alpha)^{n-\alpha}e^{-(n-\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{n}{n-\alpha}}\,\frac{n^n}{(n-\alpha)^{n-\alpha}}\,e^{-\alpha}.\end{aligned}$$

改写

$$\frac{n^n}{(n-\alpha)^{n-\alpha}} = \frac{n^n}{(n-\alpha)^n}(n-\alpha)^\alpha = \left(\frac{n}{n-\alpha}\right)^n (n-\alpha)^\alpha.$$

Thus

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \sim \sqrt{\frac{n}{n-\alpha}}\left(\frac{n}{n-\alpha}\right)^n e^{-\alpha}\,(n-\alpha)^\alpha.$$

注意到

$$\left(\frac{n}{n-\alpha}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\alpha/n}\right)^n \longrightarrow e^\alpha \quad \text{as } n \to \infty,$$

and

$$\sqrt{\frac{n}{n-\alpha}} \longrightarrow 1, \text{ as well as } \quad (n-\alpha)^\alpha \sim n^\alpha.$$

将这些极限结合起来可得,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \sim \sqrt{\frac{n}{n-\alpha}}\left(\frac{n}{n-\alpha}\right)^n e^{-\alpha}\,(n-\alpha)^\alpha \sim n^\alpha.$$

因此,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \sim n^{\alpha}.$$

(ii)：接下来，我们对 $x=n$ 和 $x=n+\alpha$ 应用斯特林公式：

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}, \qquad \Gamma(n+1+\alpha) \sim \sqrt{2\pi(n+\alpha)}\left(\frac{n+\alpha}{e}\right)^{n+\alpha}.$$

Then

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} &\sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}{\sqrt{2\pi(n+\alpha)}\left(\frac{n+\alpha}{e}\right)^{n+\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{n}{n+\alpha}}\,\frac{n^{n}e^{-n}}{(n+\alpha)^{n+\alpha}e^{-(n+\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{n}{n+\alpha}}\,\frac{n^{n}}{(n+\alpha)^{n+\alpha}}\,e^{\alpha}.\end{aligned}$$

重写

$$\frac{n^{n}}{(n+\alpha)^{n+\alpha}} = \frac{n^{n}}{(n+\alpha)^{n}}\,(n+\alpha)^{-\alpha} = \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n}(n+\alpha)^{-\alpha}.$$

因此

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \sim \sqrt{\frac{n}{n+\alpha}}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n} e^{\alpha}\,(n+\alpha)^{-\alpha}.$$

Now

$$\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n} = \left(\frac{1}{1+\alpha/n}\right)^{n} \longrightarrow e^{-\alpha} \quad \text{as } n\to\infty,$$

and

$$\sqrt{\frac{n}{n+\alpha}} \longrightarrow 1, \text{as well as} \quad (n+\alpha)^{-\alpha} \sim n^{-\alpha}.$$

So

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \sim \sqrt{\frac{n}{n+\alpha}}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n} e^{\alpha}\,(n+\alpha)^{-\alpha} \sim n^{-\alpha}.$$

综上可得

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \sim n^{-\alpha}.$$

□

引理 A.15. 设 $(a_n)_n$ 是非负数序列，且$(g_n)_n$，$(f_n)_n$ 是正实数序列，满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{g_n} = C > 0$。则

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot a_n < \infty.$$

证明。 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{g_n} = C > 0$ ，对所有 $\varepsilon > 0$ ，我们都能找到一个 $N \in \mathbb{N}$ ，使得对所有 $n > N$ 都有 $C-\varepsilon < \frac{g_n}{f_n} < C+\varepsilon$。这直接意味着

$$(C-\varepsilon)f_n < g_n < (C+\varepsilon)f_n,$$

由于 f_n 为正。因为 $a_n \geq 0$、 $n \in \mathbb{N}$，我们得到

$$(C-\varepsilon)\sum_{n=N}^{\infty} f_n \cdot a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} g_n \cdot a_n \leq (C+\varepsilon)\sum_{n=N}^{\infty} f_n \cdot a_n,$$

由控制收敛判别法即可得出该结论。 □

引理 A.16. 设 $0 \neq f, g \in L^2(\mathbb{R}, dx)$， $P \in \mathbb{P}$ 和 $0 < \lambda < 1$，则

$$\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} S(\delta(\langle f, \cdot\rangle))(\lambda P u)\overline{S(\delta(\langle g, \cdot\rangle))(\lambda P u)} d\nu(u) = \frac{1}{2\pi\|f\|\|g\|}\frac{1}{\sqrt{1-\sigma_P^2\lambda^4}}, \quad \sigma_P := \left\langle \frac{Pf}{\|f\|}, \frac{Pg}{\|g\|} \right\rangle.$$

证明。 我们计算

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} S(\delta(\langle f, \cdot\rangle))(\lambda P u)\overline{S(\delta(\langle g, \cdot\rangle))(\lambda P u)} d\nu(u) \\
&= \frac{1}{2\pi\|f\|\|g\|}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\left(\left\langle Pu, \frac{f}{\|f\|}\right\rangle^2 + \left\langle \overline{Pu}, \frac{g}{\|g\|}\right\rangle^2\right)\right) d\nu(u) \\
&= \frac{1}{2\pi\|f\|\|g\|}\int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\left(\left\langle u, \frac{Pf}{\|f\|}\right\rangle^2 + \left\langle \overline{u}, \frac{Pg}{\|g\|}\right\rangle^2\right)\right) d\nu(u) \\
&= \frac{1}{2\pi^3\|f\|\|g\|\sqrt{\det(\Sigma)}}\int_{\mathbb{R}^4} \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}((x+iy)^2 + (v-iw)^2)\Big) \\
&\quad \cdot \exp\left(-\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle\right) dxdydvdw,
\end{aligned}$$

其中 Σ 由下式给出

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma_P & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sigma_P \\ \sigma_P & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma_P & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\sigma_P = \left\langle \frac{Pf}{\|f\|}, \frac{Pg}{\|g\|} \right\rangle$。因此，我们得到一个完全交换分块矩阵，并且

$$\det(\Sigma) = (1-\sigma_P^2)^2.$$

接着，我们求得其逆矩阵：

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A & I \end{pmatrix}^{-1} = (I-A^2)^{-1} \times \begin{pmatrix} I & -A \\ -A & I \end{pmatrix},$$

其中此处的 $\times$ 表示按块进行的矩阵乘法。注意

$$(I-A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\sigma_P^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\sigma_P^2} \end{pmatrix},$$

因此，

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{1-\sigma_P^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma_P & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sigma_P \\ -\sigma_P & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sigma_P & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

此外，我们可以改写为

$$((x+iy)^2 + (v-iw)^2) = (x^2 + i2xy - y^2 + v^2 - 2ivw - w^2) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & -1 \end{pmatrix}.$$

综上所述，我们有：

$$\int_{\mathbb{R}^4} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}((x+iy)^2+(v-iw)^2)\right) \exp\left(-\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle\right) dxdydvdw$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4} \exp\left(-\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix}, \left(\tfrac{\lambda^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & -1 \end{pmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \tfrac{1}{1-\sigma_P^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma_P & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sigma_P \\ -\sigma_P & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sigma_P & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle\right) dxdydvdw$$

$$= (2\pi)^2 \sqrt{\det \begin{pmatrix} \lambda^2 + \frac{2}{1-\sigma_P^2} & i\lambda^2 & -\frac{2\sigma_P}{1-\sigma_P^2} & 0 \\ i\lambda^2 & -\lambda^2 + \frac{2}{1-\sigma_P^2} & 0 & -\frac{2\sigma_P}{1-\sigma_P^2} \\ -\frac{2\sigma_P}{1-\sigma_P^2} & 0 & \lambda^2 + \frac{2}{1-\sigma_P^2} & -i\lambda^2 \\ 0 & -\frac{2\sigma_P}{1-\sigma_P^2} & -i\lambda^2 & -\lambda^2 + \frac{2}{1-\sigma_P^2} \end{pmatrix}^{-1}} = \pi^2 \frac{1-\sigma_P^2}{\sqrt{1-\sigma^2\lambda^4}}$$

因此，

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}} S(\delta(\langle f, \cdot \rangle))(\lambda u)\overline{S(\delta(\langle g, \cdot \rangle))(\lambda u)} d\nu(u) &= \frac{1}{2\pi \|f\| \|g\| (1-\sigma_P^2)} \frac{1-\sigma_P^2}{\sqrt{1-\sigma_P^2\lambda^4}} \\ &= \frac{1}{2\pi \|f\| \|g\|} \frac{1}{\sqrt{1-\sigma_P^2\lambda^4}}. \end{aligned}$$

□

引理 A.17。我们有：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx^4}}\right) = \frac{2bx^3}{(a-bx^4)^{3/2}},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx^4}}\right) = \frac{6bx^2\,(a+bx^4)}{(a-bx^4)^{5/2}},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx^4}}\right) = \frac{12a^2b\,x \;+\; 84ab^2x^5 \;+\; 24b^3x^9}{(a-bx^4)^{7/2}}.$$

林奈大学，数学系，Universitetsplatsen 1，352 52 韦克舍，瑞典

电子邮箱： wolfgang.bock@lnu.se

凯泽斯劳滕-兰道莱茵兰-普法尔茨工业大学，数学系，凯泽斯劳滕校区，德国电子邮箱：grothaus@rptu.de