逃脱坦南鲍姆定理与强跳跃反演定理

Duarte

Maia 2026年3月6日

arXiv:2603.04599v1 [math.LO] 4 Mar 2026

1 引言

1.1 背景——坦南鲍姆定理

Stanley Tennenbaum 的一项著名结果（例如参见 [10]）指出，皮亚诺算术（PA）的一阶理论不允许存在任何非标准可计算模型。事实上，在皮亚诺算术的每个非标准模型中，加法和乘法都不可计算。文献中可以找到该定理的推广，包括针对较弱皮亚诺算术片段的版本 [22], 、采用替代运算的版本 [20], ，以及有限集合论中的版本 [15, 7], ，仅举几例。然而，所有这些方法及其变体似乎都在很大程度上依赖于所选签名的具体特性。Fedor Pakhomov 注意到了这一点，并在 2022 [19] 构造了一个与皮亚诺算术定义等价的理论（其含义稍后会说明，粗略地说，就是“采用了不同签名的皮亚诺算术”），且该理论存在一个可计算非标准模型。这表明，坦南鲍姆定理确实依赖于签名的选择。

让我们通过一个例子，详细说明这个理论何以是“采用不同签名的皮亚诺算术”。在文献中，用于定义皮亚诺算术的签名并非一成不变。有些作者选择加入后继符号，另一些作者则选择省略它。只要签名中保留 1 的符号和 $+$ 的符号，这就不是问题，因为 x 的后继总可以改写为 $x+1$。类似地，有些作者选择省略 1 的符号，转而将其写作零的后继。这样，我们就有了两种不同的皮亚诺算术公理化，它们采用的签名互不包含，但直观上都能定义对方所缺少的符号。以已有符号定义新符号这一思想，是定义扩张概念的基础；而“没有后继符号的皮亚诺算术”和“没有 1 符号的皮亚诺算术”是“某种意义上相同的理论”，则对应于定义等价这一概念。

定义 1.1.1（定义扩张）。设 T 是签名 $\mathcal{L}$ 上的一个理论。T 的定义扩张是一个在语言 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ 上的理论 $S \supseteq T$, 满足：

- S 中仅使用语言 $\mathcal{L}$ 中符号的每个定理，也是 T 的定理；并且
- $\mathcal{L}\prime \setminus \mathcal{L}$ 的每个符号都可以用 $\mathcal{L}$ 中的符号来 S-可定义。例如，若 $\mathcal{L}\prime$ 中的任意一个命题符号为 P，则存在一个 $\mathcal{L}$ 公式 φ，使得

$$S \vdash \forall_{\vec{x}}(P(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})),$$

函数符号也有类似的结论。

定义 1.1.2（定义等价）。设 T_1 和 T_2 是两个理论，其签名 $\mathcal{L}_1$ 和$\mathcal{L}_2$ 分别假定互不相交（不失一般性）。如果存在一个理论 T，它是二者的定义扩张，我们就称 T_1 和 T_2 是定义等价的。

定义等价这一概念与一种更常见的“理论具有相同表达能力”的概念——双重可解释性——有关，但二者并不相同：定义等价严格更强，不过对于大多数自然的例子，这两个概念是一致的。有兴趣的读者可以在 [6] 中找到对这两个概念的详尽比较。

两个定义等价理论的一个非平凡例子是皮亚诺算术与一种特定版本的有限集合论，我们将其称为 ZFfin+TC。这个理论以及一个与之密切相关的理论将在下文中发挥重要作用，因此我们在此向读者正式介绍它们。

定义 1.1.3. 理论 ZF−inf+TC 由策梅洛-弗兰克尔集合论的通常公理组成，但去除了无穷公理，并加入了所谓的“传递闭包公理”，该公理指出，任何集合都包含于某个传递集中。

注 1.1.4. 在 ZF（去除无穷公理）其余公理的条件下，传递闭包公理等价于 $\in$-归纳法成立。在相同条件下，它也等价于如下断言：每个集合都属于冯·诺伊曼层级 V_α 的某个层级。事实上，这正是我们在论证中需要这一公理的主要原因。

定义 1.1.5. 理论 ZFfin+TC 由 ZF−inf+TC 加上无穷公理的否定组成。

注 1.1.6. 通常的 ZF 理论由 ZF−inf+TC 加上无穷公理组成——在这种情况下，传递闭包公理不会增加演绎能力。换言之，传递闭包公理可以在 ZF 中得到证明。这是因为集合的传递闭包可以通过 $x \mapsto x \cup \bigcup x$ 可数次迭代该运算得到，但要定义这种可数迭代，就必须诉诸 ω。这种诉诸无法避免，而且事实证明 ZF $-$inf $+ \neg$TC 是一致的；证明见 [15] 或 [11]。

定理 1.1.7. 皮亚诺算术与 ZFfin+TC 定义等价。

证明：见 [11]。 ■

除了作为定义等价的一个有趣例子之外，定理1.1.7也是Pakhomov构造的全部基础，因为与直接使用皮亚诺算术相比，采用集合论框架更为方便。它还为我们提供了更大的灵活性，使我们能够构造与ZF集合论或ZFC集合论定义等价的理论的可计算模型，不过本文不会探讨这一方向。接下来，我们将简要介绍Pakhomov构造背后的思路，然后再详细阐述我们的原创贡献。

1.2 Pakhomov构造与新结果

在Fedor Pakhomov的论文《如何逃脱坦南鲍姆定理》 [19], 中，作者定义了一个理论T_S，它与ZF−inf+TC定义等价，并公理化了一个特定的三元谓词 $S(x,\ y,\ z)$。这个三元谓词充当“带见证的集合隶属关系”，最初是在ZF−inf+TC中通过冯·诺伊曼层级上的超限递归定义的（另见注1.1.4），其定义方式满足如下规则

$$\mathsf{ZF}-\mathsf{inf}+\mathsf{TC} \vdash \forall_{x,y}(x \in y \leftrightarrow \forall_z S(x,y,z)). \tag{1}$$

由于 S 最初是在集合论的语境中定义的，因此它可以用集合隶属关系来定义；而方程 (1) 保证集合隶属关系本身也可以用 S来定义，这就是这两个理论定义等价的原因。

定义 1.2.1。 下文中， T_{both} 表示由 ZF−inf+TC 以及签名中同时包含 S 和集合包含的 S 定义所能证明的全部句子的集合。此外， T_S 表示 S的理论，即将 T_{both} 限制为仅包含谓词 S的句子。

谓词 S 的主要性质在于，它具有某种“灵活性”或“一般性”。正如我们稍后将精确说明的那样，如果我们试图构造 T_S 的模型，并在过程中犯了一些错误，那么我们不小心添加的任何额外“垃圾”元素，之后仍然可以重新用作添加的“实数”元素。Pakhomov 利用这种灵活性证明了：

定理 1.2.2。 若 T 是一致的可计算可枚举理论，且扩充了 T_S，则 T 有一个可计算模型。

Pakhomov 通过一种明确的“亨金构造”式论证证明了这一点。我们将他的工作重新表述为以下更强的结果：

定理（4.1.3）。 若 D 是 T_{both}的一个 $0'$-可计算模型，则其约化结构 $D{\restriction}S$ 有一个可计算副本。

我们简要概述定理 4.1.3 如何推出定理 1.2.2。若 T 是一致的可计算可枚举理论¯，并扩充了 T_S，考虑一致的可计算可枚举理论 $T = T \cup T_{\mathrm{both}}$。根据可计算完备性定理，¯存在一个 $0'$-可计算模型 M，其到 S 的可计算约化结构根据定理 4.1.3 是 T 的一个可计算模型。

我们对 Pakhomov 所用的方法作了广泛推广，从而对他提出的一个问题作出了肯定回答：

问题（Pakhomov [19]）。固定一个 n 的取值。是否存在一些与“PA 加上所有真 Π_n 语句”定义等价、且具有可计算非标准模型的理论?

提出这个问题的动机是，正如 Pakhomov 在 [19], this statement 中证明的那样，这个结论“在极限意义下”并不成立。更确切地说，Pakhomov 证明了，与真算术定义等价的理论的任何非标准模型都不可计算。这引出了一个问题：能否得到一个部分性的结果?

我们通过改进 Pakhomov 理论T_S的构造来回答 Pakhomov 的问题：

定理（4.2.1）。存在一个相容的可计算可枚举理论 ZF−inf+TC $\subseteq T^0 \subseteq T^1 \subseteq T^2 \subseteq \cdots$的嵌套序列，满足以下性质：

- 每个 T^n 都具有包含 $\in$和谓词 S^0、…、 S^n 的签名，其中每个 S^i 都是一个（$i+2$）元谓词符号，
- 所有这些扩展都是 ZF−inf+TC 的保守扩展，• 这意味着它们不会在谓词 $\in$中引入额外的定理，
- 在 T^n 中，谓词 $\in$ 和 S^n 可以用另一个谓词来定义，并且
- 给定一个 T^n 的 0-可计算模型 D，其语言限于包含 S^i、… 和 S^n 的语言，则存在一个 $D{\restriction}(S^{i+1}, \ldots, S^n)$ 的可计算副本 M。

最后一项可以相对化：给定一个 T^n 的 X'-可计算模型，实现最后 k 个谓词，则存在其约化结构的一个 X-可计算副本，该约化结构对应最后 $k-1$ 个谓词。

注 1.2.3。 第二和第三个要点意味着，对于每个 n，ZF−inf+TC 与 $T^n{\restriction}S^n$ 定义等价。

根据定理 4.2.1，我们得出本文的一项主要结果：

定理 (4.2.6)。 对于每个 n，都存在一个与“皮亚诺算术加上所有真 Π_n 句子”定义等价的理论，该理论有一个可计算非标准模型。

证明： 首先注意，包含皮亚诺算术加上所有真 Π_n 句子的理论 T 是一个 $0^{(n)}$-可计算可枚举理论。根据 Kaye 和 Wong [11], 的结果，皮亚诺算术与 ZFfin+TC 定义等价，因此 T 与定理 4.2.1 中理论 T^{n+1} 的一个 $0^{(n)}$-可计算可枚举扩张定义等价。设 $\bar{T}$为这个理论，并令 $\bar{T}^+$ 为在其基础上加入常元 c 以及一个公理模式后得到的理论，该模式确保 c是一个非标准元素。令 D 为 $\bar{T}^+$的一个 $0^{(n+1)}$-可计算模型，其签名包含从 S^0 到 S^{n+1}的 $n+2$ 谓词；根据可计算完备性定理（参见 [8]），这样的模型存在。然后，应用定理 4.2.1 $n+1$ 次的相对化版本，得到 $\bar{T}\restriction S^{n+1}$的一个可计算模型。这表明 $\bar{T}\restriction S^{n+1}$ 正是我们要找的理论：它与“皮亚诺算术加上所有真 Π_n 句子”定义等价，并且有一个可计算非标准模型。■

顺带一提，Pakhomov 在原论文中还提出了另一个问题，后来 Lutz 和 Walsh 已经给出了答案。

问题（Pakhomov [19]）。是否存在一个可计算可枚举理论 T，使得没有任何与之定义等价的理论 T'拥有可计算模型?

定理 1.2.4（Lutz–Walsh [14]）。存在一个可计算可枚举理论 T，使得每个与之定义等价的理论 T'的每个模型 T 都是不可计算的。

1.3 一个强跳跃反演定理

在回答 Pakhomov 的问题时，我们发现，构造中的某些部分并非算术特有，因此得以提炼出一个适用于强跳跃反演的通用定理。[1]

就我们的目的而言，强跳跃反演类型定理具有以下形式：“如果某种类型的结构拥有大量数据] ，并且存在一个在 X' 中可计算的副本，那么该结构的一个数据较少的约化结构] 就存在一个在 X 中可计算的副本。”（关于这一点的详细说明，请参见下文的注 1.3.4。）下面给出几个例子。我们以可计算情形陈述这些例子，但显然它们都可以一致地相对化。

定理 1.3.1（民间结果， [4, 定理 9.1。4]）。假设 $(E, \simeq)$ 是一个等价关系，且有无穷多个无限等价类。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $P_{\geq n}(x)$ 表示谓词“ x的等价类至少有 n 个元素”。如果 $(E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}})$ 有一个 $0'$-可计算副本，那么 $(E, \simeq)$ 有一个可计算副本。

定理 1.3.2（Knight–Stob [13], Downey–Jockusch [3]）。假设 B 是一个布尔代数，并且结构 $(B, \wedge, \vee,$ isAtom) 有一个 $0'$-可计算副本。那么，结构 $(B, \wedge, \vee)$ 有一个可计算副本。

定理 1.3.3（Fellner, [17, VII。26]）。假设 L 是一个线性序，其中每个元素都有后继和前驱；并假设结构 $(L, <, S)$ 有一个 $0'$-可计算副本，其中$S(x, y)$ 是后继关系。那么，结构 $(L, <)$ 有一个可计算副本。

如果能找到一个广义定理，使定理 1.3.1、1.3.2 和 1.3.3 都能作为其推论得出，那将很有意思。我们已经取得了一些进展：经过一番努力，我们的通用定理 2.3.1 能够涵盖定理 1.3.1 和 1.3.3（分别见第 3.1 节和第 3.4 节），以及文献中的其他一些定理（见第 3 节）。我们尚未成功地得到定理 1.3.2，但我们并不认为这是不可能的——事实上，布尔代数比本文中我们研究的大多数结构都更复杂，因此要将定理 2.3.1 应用于布尔代数，需要付出更多努力。

我们并非首批寻求此类定理的人——2018 年论文 [2] 也包含一个通用定理（定理 2.5），可据此部分恢复与上述结果相关的结论。我们的定理似乎遵循

[1] Patrick Lutz 是第一个让我注意到广义推广这一想法的人。他还提出了一个可行的猜想，这对理论的发展很有帮助。

与 [2], 中的定理相似的主题，但我们的假设风格不同，结论的方向也不同。值得注意的是，我们的结果在应用时需要一定的创造性——在大多数情况下，必须构造一个中间结构，以便将定理 2.3.1 应用于其中，从而得到跳跃反演结果；而 [2] 中的定理 2.5 在应用于实例时则相对直接。

注 1.3.4。 关于"跳跃反演定理"含义的一般框架，请读者参阅 [2]第 1.1 节。为求完整而简洁，下面作极简概述。本注的内容和术语大多取自 [17]。

首先要指出，"结构的跳跃"有一种标准概念，参见例如 [17, 定义 IX.1], 。众所周知，这一概念涵盖了几十年来出现的其他几种不同的"结构的跳跃"概念；参见 [17] 中的历史注记 IX.2，以及 [2]中的注 1.11。这里讨论的"结构的跳跃"概念，是向结构的语言中添加某个谓词，或者更确切地说，添加一个称为 Kleene 的相对可计算不可枚举完备关系的可数谓词族。

虽然 Kleene 的相对可计算不可枚举完备关系的定义完全一般，适用于通常意义下的任何结构，但它显然很不自然，因为它想必从未在可计算性语境之外出现过。然而，对于某些特定类型的结构，Kleene 的关系可以由更自然的关系族取代（在"相对图灵等价"的意义下；这是结构上关系的一种自然等价类型，用来比较它们内在的可计算复杂度）。例如，对于任意线性序（$L,\ \leq$），邻接关系与 $0'$（编码为可数个零元谓词）相对于图灵等价于 Kleene 的相对可计算不可枚举完备关系 [17, 例 II.29],，因此，将线性序（$L,\ \leq$）的跳跃视为结构（$L,\ \leq,\ S$）再加上一个 $0'$的预言机是合理的。[2]

即便跳跃其余的"可计算信息"已被自然关系 S很好地涵盖，针对 $0'$ 的这一预言机仍然出现，这一事实可被视为一个缺陷。由此产生了"（该/一个）结构的结构跳跃"这一概念。我们参照 [2], 中的定义 1.12，并以略有不同但等价的措辞转述如下：

定义。 结构 $\mathcal{A}$ 的结构跳跃是一个扩张 $\mathcal{A}' = (\mathcal{A},(R_i)_{i\in\mathbb{N}})$，使得诸关系$R_i$ 在 $\mathcal{A}$ 中是一致相对内在可计算可枚举的（这是此语境下可计算可枚举概念的自然类比），并且使得Kleene 的递归可枚举完备关系 $K^{\mathcal{A}}$ 从 $\mathcal{A}' \oplus 0'$ 出发是相对内在可计算的（这是从预言机 $\mathcal{A}' \oplus 0'$可计算的自然类比）。

应当指出，结构的跳跃始终是该结构的一个结构跳跃，但此定义的好处在于，在某些情形下存在自然的结构跳跃，这里"自然"意指"已被非逻辑学家研究过"。以下三个例子应当看起来很熟悉：

- 如果（$E,\ \simeq$）是一个等价关系，那么定理 1.3.1 中的扩张（$E,\ \simeq,\ \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}}$）是（$E,\ \simeq$）的一个结构跳跃 [17, 练习 II.45.(b)],
- 如果 B 是一个布尔代数，那么扩张（$B,$ isAtom）是 B [2]的一个结构跳跃,
- 如果（$L,\ \leq$）是一个线性序，那么扩张（$L,\ \leq,\ \neg S$）是（$L,\ \leq$）的一个结构跳跃 [2].[3]

在这一背景下，Soskov 和 Soskova 提出了弗里德伯格跳跃反演定理的一个公认类比 [21], ，后来 Montalban 也独立地重新发现了这一结果 [18]。其中两个略有不同的版本见于 [17, 定理 IX.9] 和 [2, 定理 1.13]。我们只陈述一个特例：

定理（Soskov–Soskova [21], Montalban [18]）。如果一个结构的结构跳跃有一个 $0'$-可计算副本，那么原始结构就有一个低副本。

[2]我们或许更倾向于采用邻接关系的否定，因为在线性序中检验非邻接是可计算可枚举的，而检验邻接则是余可计算可枚举的。[3]作者声称"[构造结构跳跃时，] 关系 后继$(x,\ y)$ 对线性序来说已经足够"，但这在字面上（即使不论其本意）是个笔误，因为如脚注 2 所述，后继关系是余相对可计算不可枚举的，而非相对可计算不可枚举的。

如果这就是我们可以称为“跳跃反演”的定理，那么我们或许可以作出如下定义：强跳跃反演定理是以下类型的定理：如果某个0′结构类的结构跳跃有一个可计算副本 [在此处插入结构类], ，那么原始结构就有一个可计算副本。

我们倾向于稍微放宽这个“定义”，这样就不必每次都验证某些关系是否构成某个结构的结构跳跃，从而得到一类更广泛的可能结果：

定义。 一个强跳跃反演定理 具有以下形式之一：如果存在一个 $0'$-可计算副本，其对象是 [在此插入结构类], 例如 $\mathcal{A}$，并且附带 [额外结构]„ 那么就存在一个 $\mathcal{A}$ 的可计算副本。

我们用以下事实结束这条说明；它进一步说明了我们为何选择放宽强跳跃反演定理这一概念。假设我们已经证明，对于某个类中的结构 $\mathcal{A}$ ，如果存在一个 $0'$-可计算副本，并附带额外关系 $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$，那么就存在一个 $\mathcal{A}$ 的可计算副本。接下来，在对这些关系 $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 作出一些相对较弱的假设后（例如，它们是一致相对内在可计算可枚举的；或者更一般地说，它们可由 $\mathcal{A}$的跳跃相对内在可计算），我们实际上可以得出结论：如果存在一个 $0'$-可计算副本，其对象是任意 结构跳跃 $\mathcal{A}$ ，那么就存在一个 $\mathcal{A}$ 的可计算副本。这是因为， $0'$ 加上 $\mathcal{A}$ 的任意结构跳跃，足以一致地计算出这些关系 $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$。

现在我们将介绍主要结果——定理 2.3.1，但首先必须给出一些必要的定义。定理 2.3.1 有两个重要组成部分：一个可计算结构论定义（定义 2.1.1），以及一个几乎完全属于模型论的条件（定义 2.2.6）。

从现在起，我们将注意力限制在关系结构上。

定义 1.3.5。 就我们的目的而言，变量 $\vec{x}$ 中的一个原子公式 是指对元组 $\vec{x}$ 中的某些变量（可以重复，也可以重新排序）应用一个谓词而得到的公式。值得注意的是，根据我们的定义，原子公式不 对否定封闭——在线性序的签名 $\mathcal{L}=\{\leq\}$ 下， $x\leq y$ 被视为原子公式，但 $\neg(x\leq y)$则不是。

定义 1.3.6。 变量 $\vec{x}$ 中的一个原子型 就是 $\vec{x}$中的一组原子公式。对于结构中的一个元素元组 $\vec{b}$，其原子型 $\vec{b}$ 由所有该元组满足的原子公式构成。

注记 1.3.7. 需要注意的是，尽管原子类型与无量词类型在许多情形下包含相同的数据，但在我们所考虑的情形中并非如此。我们将使用原子类型的可枚举指标，而由此一般无法得到相应无量词类型的可计算可枚举指标（事实上，该无量词类型甚至可能不是可计算可枚举的）。

定义（2.1.1）。 设 $\mathcal{L}'$ 为一个可计算关系签名。一个 $0'$-可计算的可计算可枚举类型结构 D由一个 $0'$可计算函数 t构成，其定义域是 $\mathbb{N}$ 的某个初始段的有限幂集（我们将该初始段称为 D的定义域 ），它以自然数有限集合 $\vec{n}=\{n_0<n_1<\cdots<n_{k-1}\}$ 的强指标作为输入，并输出变量（x_{n_0}，.....， $x_{n_{k-1}}$）上的一个原子 $\mathcal{L}'$型 $\mathrm{tp}(\vec{n})$ 的可计算可枚举指标 $t(\vec{n})$，且满足相容条件：若 $\vec{n}\subseteq\vec{m}$ ，则 $\mathrm{tp}(\vec{n})\subseteq\mathrm{tp}(\vec{m})$。

注 1.3.8. 一个 $0'$-可计算的可计算可枚举类型结构 D 会在D的定义域上诱导出一个自然的 $\mathcal{L}'$ 结构。因此，稍微滥用一下记号，我们常常将 D 与以这种方式得到的 $\mathcal{L}'$-结构视为同一对象，从而可以例如谈论一个 $0'$-可计算的可计算可枚举类型结构与其他结构之间的同构。特别地，如果 D_0 是一个预先存在的 $\mathcal{L}'$-结构，我们将与 D_0同构的 $0'$-可计算可枚举类型结构 D 定义为 $0'$-可计算可枚举类型副本 D_0。

注 1.3.9. 定义 2.1.1 在谓词的否定方面极不对称。对于我们的语言是否包含每个谓词 P 的否定 $\neg P$，这可能会造成显著差异。

为了介绍我们的模型论定义，我们需要回顾一些可计算结构理论中的概念。

定义（2.2.1）。我们将在可计算无穷语言中开展讨论，具体内容见 [16, 第三章]。我们只会使用这种语言中一个非常小的片段，现将其描述如下。

给定关系签名 $\mathcal{L}'$，我们将**正有穷合取公式**的集合定义为类型为 $\varphi(\vec{x}) \equiv P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$ 的公式集合，其中每个 P_j 表示 $\mathcal{L}'$ 中的一个关系，作用于来自 $\vec{x}$ 的变量元组，顺序任意，变量可以重复或省略。我们还允许 P_j 表示 $\top$，即"真"谓词，以及 $\bot$，即"假"谓词。

我们将**正可计算无量词析取公式**的集合（记作 $\bigvee^{\mathrm{c}}$）定义为含有无穷多个变量、类型如下的公式集合

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \bigvee_{i<\omega} \varphi_i(\vec{x}),$$

其中 $\{\varphi_i\}_{i<\omega}$ 是正有穷合取公式的可计算序列。

最后，我们将第三类公式集合（记作 $\bigvee^{\mathrm{c}}_2$）定义为含有有穷多个变量、类型如下的那些公式

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \bigvee_{i<\omega} \left(\psi_i(\vec{x}) \wedge \neg\varphi_i(\vec{x})\right),$$

其中 $\{\psi_i\}_{i<\omega}$ 是正有穷合取公式的可计算序列，且 $\{\varphi_i\}_{i<\omega}$ 是 $\bigvee^{\mathrm{c}}$ 公式的可计算序列。

可以设想不断迭代这个定义，从而得到可计算无穷语言中的无量词公式分层$\{\bigvee^{\mathrm{c}}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，但前两个层次就足以满足我们的需要。

给定可计算无穷语言中的一个公式，记作 $\varphi(\vec{x})$，一个结构 D，以及 D中的一个元素元组 $\vec{b}$，我们可以用显而易见的方式为表达式 $D \vDash \varphi(b)$赋予一个真值。更多详情请见 [16, 第三章] 。

现在我们可以给出模型论定义了。这个定义相当技术化，因此我们先提供一些直观说明和动机。

注 1.3.10. 许多强跳跃反演类型的结果都遵循如下模式。我们有一个$0'$-可计算结构。借鉴舍恩菲尔德极限引理中的一些思想，可以设想这个结构是由一个可计算过程给出的，但该过程有时会出错（尤其是有时会添加"虚假"元素，之后才意识到这一错误）。接下来，我们按如下方式构造该结构的一个可计算副本：复制这个极限可计算过程；当意识到某个元素是误加的，就重新安排它，让它充当另一个你能确定存在的元素——你所研究的结构往往包含一类元素，可以可靠地用来"处理垃圾"。例如，在定理 1.3.1 中，任何意外添加的元素都可以被归入一个无限等价类。这就是定义 2.2.6 中所定义的 τ谓词的作用。（选择字母 τ 是为了表示"垃圾"，即"需要处理掉的东西"。）

有时，我们无法立即判断某个元素最终会被归入哪一类垃圾。例如，下面的命题 3.2.3 讨论了一类特殊的等价关系，其中只有有限多个无限等价类。此时，若元素 x 是要处理掉的，我们就不能把它归入无限等价类，而是要将它归入一个"足够大"的等价类。如果等价类大小的集合是可计算可枚举的，这并不难处理；但命题 3.2.3 还涵盖了等价类大小的集合不可计算可枚举（甚至不是 $0'$-可计算可枚举）的一些情形。因此，我们对 τ 的可计算性只提出相对较弱的假设。

还有一些其他需要考虑的因素。有些错误的代价太大，无法补救。例如，回到定理 1.3.1，我们不能容忍添加一个会破坏 $\simeq$ 是等价关系这一假设的元素——例如，某个元素 x 同时与 $x \simeq y$ 和 $x \not\simeq z$ 有关，而 y 和 z 是此前添加的两个元素，且它们具有 $y \simeq z$。在大多数具体情形中，我们很容易不失一般性地假设此类病态情形不会出现，但在构造通用定理时，必须明确处理这一点。这正是定义 2.2.6 中定义的 χ 谓词所要发挥的作用。

出于技术上的原因，我们还引入了第三个谓词，称为 $\varepsilon\tau$ （其中 ε 表示"存在"）。要简要解释为什么需要这个谓词，动机稍显复杂，难以三言两语说清

不过，粗略地说，这与以下事实有关：如果某个元素被 τ 划归垃圾，但它被划归的是一个“不正确”或“伪造”的垃圾元素，那么按 χ 衡量，添加更多元素（满足某个规定 Q）的可行性就不可靠。因此，我们需要一个不依赖于 y 的 $\chi(\vec{x}, y) \equiv \exists_{\vec{z}} Q(\vec{x}, y, \vec{z})$ 的代理量；这正是 $\varepsilon\tau(\vec{x}) \equiv \exists_y \exists_{\vec{z}} [\tau(\vec{x}, y) \wedge Q(\vec{x}, y, \vec{z})]$ 所起的作用。

定义（2.2.6）。设 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ 为可计算签名，D 为定义在 $\mathcal{L}'$上的结构。若D 满足可计算正量词消去与垃圾存在性性质（简称*QETP*，），则以下性质成立：

(a) $\mathcal{L}$ 是有限的、对否定封闭的，并且包含谓词 $\neq$，

(b) 对每个无量词的 $\mathcal{L}$ 公式 $q(\vec{x}, \vec{y})$，都存在一个 $\mathbb{W}^{\mathrm{c}}$ $\mathcal{L}'$-公式 $\chi_q(\vec{x})$，可由 q计算得到，使得

$$D \vDash \forall_{\vec{x}} [\chi_q(\vec{x}) \leftrightarrow \exists_{\vec{y}} q(\vec{x}, \vec{y})],$$

(c) 存在一个 $0'$-可计算的偏函数，记作 τ。其输入为一对 $(q(\vec{x}, y, \vec{z})\ \varphi(\vec{x}))$，其中$q(\vec{x}, y, \vec{z})$是一个无量词的 $\mathcal{L}$-类型，而 $\varphi(\vec{x})$是一个有限元无量词的 $\mathcal{L}'$-公式；其输出是一个$\mathbb{W}_2^{\mathrm{c}}$ 公式，记作 $\tau_{q\varphi}(\vec{x}, y)$，且满足以下两个性质：

- 对于 D 中每个元素元组 $(\vec{x}, y, \vec{z})$，如果其具有 $\mathcal{L}$-类型 $q(\vec{x}, y, \vec{z})$，那么存在一个由 $\vec{x}$ 满足的公式 $\varphi(\vec{x})$，使得 (q, φ) 属于 τ 的定义域。等价地，如果 $\vec{b}$ 是 D 中的一个元素元组，且满足 $D \vDash \chi_q(\vec{b})$，那么存在 $\varphi(\vec{x})$，使得 (q, φ) 属于 τ 的定义域，并且满足 $D \vDash \varphi(\vec{b})$。此外，
- 以下公式在 D 中成立：

$$D \vDash \forall_{\vec{x}} [\chi_q(\vec{x}) \wedge \varphi(\vec{x}) \to \exists_y \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y)].$$

(d) 给定 τ 的定义域中的一对 $(q(\vec{x}, y, \vec{z})\ \varphi(\vec{x}))$，如上所述，并给定一个无量词的 $\mathcal{L}$-类型$Q(\vec{x}, y, \vec{z}, \vec{w})$，它扩展了 $q(\vec{x}, y, \vec{z})$，则存在一个 $\mathbb{W}^{\mathrm{c}}$ 公式 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})$，可由三元组 (q, φ, Q) 计算得到，使得

$$D \vDash \forall_{\vec{x}} [\exists_y [\chi_Q(\vec{x}, y) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y)] \leftrightarrow \varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})].$$

(e) 最后，对于所有的 q、φ、Q，我们要求

$$D \vDash \forall_{\vec{x}, y} [\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y) \to \chi_Q(\vec{x}, y)].$$

现在，我们可以陈述本文的核心结果了。

定理（2.3.1）。如果 D 是签名 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ 上的一个满足 QETP 的 $0'$-可计算可枚举类型结构，那么约化结构 $D\restriction\mathcal{L}$ 有一个可计算副本 M。$D\restriction\mathcal{L}$ 与 M之间存在一个 $0'$-可计算同构。该结果关于 D 的指标以及证明 D 满足 QETP 的见证指标是一致的，且能一致地相对化。

如前所述，我们已将文献中的既有结果作为定理 2.3.1 的推论得以推出，其中一些例子见第 3 节。现在，我们将简要介绍这些应用中的另一个，作为一个简单示例，让读者领略我们所采用的论证类型。

定义 1.3.11。如果 T 是一棵树，且 σ 是一个节点，我们用“ σ的父节点”指称（如果存在的话）以 σ 为子节点的唯一节点。我们用“ σ的第a个父节点”指称（如果存在的话） σ的父节点的父节点.....如此重复 a 次后所得的节点。特别地， σ 的第 0 个父节点就是 σ 本身。

命题（3.5.1, [2, 命题 3.8]）。设 T 为 $\omega^{<\omega}$ 中的一棵无限树（即$\omega^{<\omega}$ 的一个非空子集，且在前缀下封闭），使得 T 的每个节点要么是叶节点，要么有无穷多个子节点，其中只有有限多个是叶节点。在 T 上定义谓词：

[4]其中包括：一个指标，其对应的谓词在 $\mathcal{L}$ 中互为否定；可计算函数 χ 和 $\varepsilon\tau$ 的指标；以及 $0'$-可计算函数 τ 的指标。

- 叶节点(x)，表示 x 没有子节点，
- $S_{a^\frown b}(x,y)$，也就是说， x 有一个第 a 个父节点， y 有一个第 b 个父节点，并且这两个父节点相同，
- $R_a(x)$，也就是说， x 以树的根作为第 a 个父节点，

其中的特例包括谓词 $S(x,y) \equiv S_{0^\frown 1}(x,y)$，表示 y 是 x 的子节点；以及 $R_0(x)$，表示 x 是根。

那么，如果结构 $(T,$叶节点 $S, R_0)$ 有一个 $0'$-可计算副本，则结构 (T,S,R_0) 有一个可计算副本。

证明： 我们只对证明作简要概述。更详细的证明见第 3.5 节。

首先，从 $(T,$叶节点 $S, R_0)$ 的一个 $0'$-可计算副本出发，我们一致地计算出 $(T, \neg$叶节点$, \{S_{a^\frown b}, \neg S_{a^\frown b}\}_{a,b\in\mathbb{N}}, \{R_a, \neg R_a\}_{a\in\mathbb{N}})$ 的一个 $0'$-可计算可枚举类型副本，因此只需证明结构 T 在这些签名下满足 QETP

- $\mathcal{L} = (S, \neg S, R_0, \neg R_0, =, \neq)$，以及
- $\mathcal{L}'$ 等于 $\mathcal{L}$，加上 $\neg$叶节点以及所有谓词 $S_{a^\frown b}$, $\neg S_{a^\frown b}$, R_a，以及 $\neg R_a$。

为此，我们需要构造函数 χ、 τ 和 $\varepsilon\tau$。

- 构造 χ：这相当于证明此类结构的一个量词消去结果。我们将（对量词消去类型结果而言是标准的）细节留到第 3.5 节。
- 构造 τ：在我们的构造中， τ的定义域是序对 $(q,\top)$ 的集合。换言之， $\varphi(\vec{x})$ 在这里将始终为 $\top$ 。

  假设给定无量词的 $\mathcal{L}$-类型 $q(\vec{x},y,\vec{z})$。我们定义 τ的目标，是定义元素 y 相对于剩余数据而言何为“垃圾”或“一般元”。对此，有两种情形：

  – 如果 q已经规定了 y与某个 x_i的关系（例如，其中包含数据 $S(x_1,y)$，或 $S(x_1,z_1) \wedge S(z_1,y)$），那么 y相对于 $\vec{x}$ 在树中的位置就是“被强制确定的”。在这种情况下，我们要求 y 不是叶节点。因此，在这种情况下， $\tau_{q\top}(\vec{x},y) \equiv \chi_q(\vec{x},y) \wedge \neg$叶节点$(y)$。
  – 如果 q 没有规定 y 相对于任何 x_i的位置，我们希望将 y 设为根的任意一个子节点。但这不一定可行，因为 q 可能包含足够的数据，能够说明 y 有若干个直接前驱。因此，我们令 N 为 q 保证 y 拥有的前驱数量中的最小值，并令 $\tau_{q\top}(\vec{x},y)$ 表示“y 不是叶节点，恰好有 N 个前驱，并且与除根以外的任何 x_i 都没有共同祖先”。注意，我们没有谓词 $Q(x_i,y)$ 来表示两个元素仅以根为共同祖先，但这可以在 $\mathcal{L}'$ 中表示为一个 $\bigvee^c$ 句子：存在某个 $a,b\in\mathbb{N}$， x_i 具有深度 a， y 具有深度 b，并且 $\neg S_{a-1^\frown b-1}(x,y)$。

- 要构造 $\varepsilon\tau$：给定一个无量词的 $\mathcal{L}$ 类型 $q(\vec{x},y,\vec{z})$ 和另一个扩展它的类型 $Q(\vec{x},y,\vec{z},\vec{w})$，我们希望根据 $\vec{x}$ 来确定，是否存在满足 $\chi_Q(\vec{x},y)$ 和 $\tau_{q\top}(\vec{x},y)$ 的 y。这包括（元理论地）检查 χ_Q 和 $\tau_{q\top}$ 对 y 提出的要求，并确认它们之间没有冲突。如果没有冲突，则令 $\varepsilon\tau_{q\top Q}(\vec{x}) \equiv \chi_Q(\vec{x})$；否则，令 $\varepsilon\tau_{q\top Q}(\vec{x}) \equiv \bot$。

至此，构造完成。一个繁琐的模型论论证（当然，这要求先完成所有细节）将表明，这些公式满足 QETP 的所有条件，因此定理 2.3.1 适用，由此我们得到结构 (T,S,R_0) 的一个可计算副本。作为细节的替代，我们解释一下为何可以预期这些条件成立。

性质 (a)、(b) 和 (d) 都是通过刻意构造而成立的。在此语境下，性质 (c) 要求：若 $\vec{x}$ 满足 $\chi_q(\vec{x})$，则存在 y 使得 $\tau_{q\top}(\vec{x},\ y)$；事实上，我们的 τ 只提出“一般元”要求，

例如“y 不是叶节点”或“y 除了根以外没有与 $\vec{x}$ 共同祖先”，而这些要求总能由无穷多个元素满足。最后，性质 (e) 用文字来说是：给定 $\vec{x}$，若存在某个 y满足 $\chi_Q(\vec{x},y) \wedge \tau_{q^\top}(\vec{x},y)$，那么任何满足 $\tau_{q^\top}(\vec{x},y)$ 的 y也会满足它。这是因为，可能区分这类两个 y 的唯一因素，是后继于它们的叶节点模式（例如，一个这样的y 可能有两个叶节点作为后继，而另一个 y 可能有无穷多个）；但 $\chi_Q(\vec{x},y)$ 不能对后继于 y 的叶节点数（或后继于 y的节点的叶节点数，等等）提出任何要求——尽管它可以要求y 不是叶节点，这就是我们将 $\neg\mathrm{leaf}(y)$ 添加到 τ 定义中的原因 —— 因此，任何两个满足 $\tau_{q^\top}(\vec{x},y)$ 的 y，从 $\chi_Q(\vec{x},y)$ 的角度来看都无法区分。■

注记 1.3.12。我们想强调定理 2.3.1 的两个要点。首先，我们注意到，它颠倒了跳跃逆构造通常采用的顺序：一般来说，先从 $0'$-可计算结构出发，由此构造一个可计算结构，并证明该可计算结构与原结构同构。另一方面，定理 2.3.1 的应用则先从中构造一个 $0'$-可计算的可计算可枚举类型结构，证明该结构与原结构同构，然后才构造可计算副本。

关于定理 2.3.1，另一个有趣之处在于，在我们发现的所有应用中，它都能将证明中所有关于损伤的提及封装为黑箱。这未必会使证明更容易；应用定理 2.3.1 所需的验证往往负担更重，甚至未必比标准的损伤证明更困难。尽管如此，我们认为，定理 2.3.1 概括了许多不同的跳跃反演定理有限损伤证明中一个共同的主题。

致谢

我要感谢 Denis Hirschfeldt、Miles Kretschmer 和 Patrick Lutz 提供宝贵的反馈、帮助与建议；没有他们的支持，这项工作便不可能完成。

2 一般跳跃反演定理

正如引言中所述，在陈述并证明本文的主要定理——定理 2.3.1——之前，需要先引入两个主要概念。接下来，我们将花些时间定义、阐释并说明这些概念。

2.1 可计算可枚举类型结构

在可计算结构理论中，对于有限/可计算签名 $\mathcal{L}$ 上的可计算结构，最标准的定义是：一个可计算集合 A，配备对来自 $\mathcal{L}$ 的符号的解释，使得原子图 $D(A) = \{$带有来自 A 的参数、且在 A 中成立的无量词公式$\}$ 是可计算的。这一概念显然可以相对化到任意预言机 X，由此便得到“X-可计算结构”的标准含义。然而，我们发现这一概念在某些方面表现不佳，尤其是在无穷符号集（或函数符号）与极限可计算性的相互作用方面。

更精确地说，考虑签名 $\mathcal{L}$ 有限且仅含关系符号的情形，设 A 是一个$0'$-可计算结构。那么，给定来自 A 的元素元组 $\vec{a}$，在每个时刻，我们都能猜测 $\vec{a}$ 的无量词 $\mathcal{L}$-类型是什么；由于每个关系（这样的关系只有有限个）的猜测都只会改变有限次，因此这个猜测也只会改变有限次。然而，如果签名 $\mathcal{L}$ 是有限的，情况就会变得更加困难：我们无法再确定，最终一定能正确猜出 $\vec{a}$ 的类型；我们只能确定，对于任意特定谓词，最终都会正确猜出该谓词。这可能会给有限损伤构造带来问题：例如，假设我们希望在某个元素 x 满足可数多个谓词 $P_0(x)$、$P_1(x)$ 等中的一个时执行任务 A，若不满足则执行任务 B。那么，在有限损伤构造中，我们会一直执行任务 B，直到（除非）看到 x 满足其中一个谓词

P_i，此时我们会撤销任务 B，转而执行任务 A。然而，如果我们只有关于 P_i 的猜测，就无法再保证有限损伤：可能出现这样的情况：x 不满足任何一个 P_i，但在任意大的时刻，我们对某个 P_N 的猜测都是 $P_N(x)$ 成立。只有当存在某个时刻，此后我们对所有 P_i 的猜测都保持不变时，才能保证有限损伤。我们认为，这使得无穷符号集上的 $0'$-可计算结构表现不佳，也促使我们定义一种或许可称为 $0'$-可计算的、具有可计算类型的结构的结构：存在一个 $0'$-可计算函数，它以元素元组为输入，并输出其无量词 $\mathcal{L}$-类型的一个可计算指标。

这已经让我们对本节的核心定义有了一半的认识，但我们还要进一步推广。在某些情形下，要求可计算指标实在过于苛刻：要么是因为结构中元素的类型在可计算性上可能过于复杂，无法用可计算指标表示（例如定理 3.3.1，它讨论带有整除谓词的阿贝尔群——即使在可计算群中，能整除给定元素的整数集合也可能复杂到足以编码 $0'$）；要么即便类型本身很简单，$0'$ 也可能无法在有限时间内确定一个可计算类型（例如定理 3.4.1，它讨论带有“n阶后继”谓词的线性序——如果 $0'$ 能够为满足 x 和 y 是 n阶后继的 n 集合计算出一个可计算指标，那么它也能判定 x 和 y 之间是否相距有限步（这称为块关系）；但可以证明，$0''$ 能够编码在线性序的块关系中，因此 $0'$ 一般来说无法计算出它）。不过，我们发现，在这两种情形下，可计算可枚举指标都提供了一个可行的折中方案：无论是说这是对结构提出的合理要求，还是说它足以证明一些有意义的结果，都是如此。

当然，元组的无量词类型的可计算可枚举指标所提供的信息与可计算指标完全相同——只需等待 $\varphi(\vec{x})$ 或 $\neg\varphi(\vec{x})$ 被枚举进该类型，就能确定哪一个成立。因此，为了从要求可计算可枚举而非可计算中获得任何好处，我们需要谨慎处理否定。

定义 2.1.1。设 $\mathcal{L}'$ 是一个可计算关系签名。一个 $0'$-**可计算可计算可枚举类型结构** D由一个 $0'$-可计算函数 t 构成，其定义域是 $\mathbb{N}$ 的某个初始段的有限幂集（我们称这个初始段为 D的**定义域**），该函数以有限个自然数构成的集合 $\vec{n} = \{n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1}\}$ 的强指标为输入，并输出一个原子[5] $\mathcal{L}'$类型 $\mathrm{tp}(\vec{n})$ 的可计算可枚举指标 $t(\vec{n})$，其变量为 $(x_{n_0}, \ldots, x_{n_{k-1}})$，并满足相容条件：若 $\vec{n} \subseteq \vec{m}$，则 $\mathrm{tp}(\vec{n}) \subseteq \mathrm{tp}(\vec{m})$。

注记 2.1.2. 作为定义 2.1.1 中一个虽显而易见却值得注意的边界情况，考虑空集，我们也可以得到空元组的原子 $\mathcal{L}'$-类型的一个可计算可枚举指标，它对应于对 D 中为真的零元 $\mathcal{L}'$-谓词的枚举。

注记 2.1.3. 定义 2.1.1 对谓词的否定并不对称。对于每个谓词 P，我们的语言是否包含其否定 $\neg P$，可能会造成显著差异。

2.2 QETP

定义 2.2.1. 我们将在 [16, 第三章]所述的可计算无穷语言中进行研究。我们只会使用这种语言的一个很小的片段，现对其加以描述。

给定一个关系签名 $\mathcal{L}'$，我们将**正有穷合取公式** 定义为形如 $\varphi(\vec{x}) \equiv P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$ 的公式集合，其中每个 P_j 表示在 $\mathcal{L}'$ 中的一个关系，并以任意顺序应用于来自 $\vec{x}$的变量元组，变量可以重复或省略。我们还允许 P_j 表示 $\top$这个“真”谓词，以及 $\bot$这个“假”谓词。

我们将**正可计算无量词析取公式**的集合定义为 $\bigvee^{\mathrm{c}}$，它是由无穷多个变量组成的类型的公式集合

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \bigvee_{i<\omega} \varphi_i(\vec{x}),$$

[5]关于原子型与无量词类型之间的区别，请参见引言中的定义 1.3.5 和 1.3.6；这一点在此语境中十分重要。

其中$\{\varphi_i\}_{i<\omega}$是一个正有穷合取公式的可计算序列。

最后，我们定义第三类公式，记作 $\bigvee\!\!\bigvee_2^{\mathrm{c}}$，它们是具有以下类型且仅含有限多个变量的公式

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \bigvee\!\!\bigvee_{i<\omega} \left(\psi_i(\vec{x}) \wedge \neg\varphi_i(\vec{x})\right),$$

其中$\{\psi_i\}_{i<\omega}$和$\{\varphi_i\}_{i<\omega}$是公式的可计算序列。

备注 2.2.2. $\bigvee\!\!\bigvee^{\mathrm{c}}$ 公式的主要性质如下：

- 存在一种规范方式，为 $\bigvee\!\!\bigvee^{\mathrm{c}}$ 公式关联指标，使得计算机程序能够处理这些公式；并且
- 给定某个结构中元素元组 $\vec{b}$ 的原子 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$-类型的一个可计算可枚举指标，以及一个由 $\vec{b}$满足的 $\bigvee\!\!\bigvee^{\mathrm{c}}$ 公式 $\varphi(\vec{x})$，我们可以在有限时间内通过计算确认元组 $\vec{b}$ 满足公式 φ。

备注 2.2.3. $\bigvee\!\!\bigvee_2^{\mathrm{c}}$ 公式的主要性质如下：

- 存在一种规范方式，可以为 $\bigvee\!\!\bigvee^{\mathrm{c}}_2$ 公式关联指标，
- 存在一种规范方式，可以将 $\bigvee\!\!\bigvee^{\mathrm{c}}$ 公式的指标转换为与之逻辑等价的$\bigvee\!\!\bigvee^{\mathrm{c}}_2$ 公式的指标，而且
- 给定一个结构中的元素元组以及其类型的一个可计算可枚举指标，判断一个 $\bigvee\!\!\bigvee^{\mathrm{c}}_2$ 公式是否对这些元素成立，是$0'$-可计算可枚举的。

让我们简要阐述最后一点。若 $\varphi(\vec{x}) \equiv \bigvee\!\!\bigvee_i (\psi_i(\vec{x}) \wedge \neg\varphi_i(\vec{x}))$ 是一个 $\bigvee\!\!\bigvee_2^{\mathrm{c}}$ 公式，并且 $\vec{b}$ 是一个结构中的元素元组，且我们有一个可计算可枚举指标来表示 b 的原子型，那么我们可以有效地生成一个猜测序列，以判断 $\varphi(\vec{b})$ 是否成立：首先，持续猜测 “ 否 ”，同时交错搜索 i 的各个取值，直到找到一个使 $\psi_i(\vec{b})$ 成立的取值。若找到这样的取值，就持续猜测“是”，直到发现 $\varphi_i(\vec{b})$ 成立为止。此时，猜测一次“否”，然后重新寻找一个（新的）取值 j，使 $\psi_j(\vec{b})$ 成立，依此类推。这个猜测序列将表现出以下行为：

- 如果 $\varphi(b)$ 成立，我们除了有限多次之外都会猜“是”，并且
- 如果 $\varphi(\vec{b})$ 不成立，我们就会无限多次猜“否”。

备注 2.2.4。 将备注 2.2.2 中的性质与以下一类相关可计算无穷公式的性质进行比较。Σ_1^{c} 公式是可计算无穷语言中具有以下形式的公式：

$$\bigvee\!\!\bigvee_{i<\omega} \exists_{\vec{y}_i} \varphi_i(\vec{x}, \vec{y}_i),$$

其中，公式序列 $\{\exists_{\vec{y}_i}\varphi_i(\vec{x},\vec{y})\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是可计算的，并且每个 φ_i 都是谓词作用于元组 $(\vec{x},\vec{y})$ 中变量所得结果的有限布尔组合。

- 这些 Σ_1^{c} 公式也允许以一种规范方式关联指标，并且
- 给定可计算结构 D 中的元素元组 b，且它们满足公式 Σ_1^{c} $\varphi(\vec{x})$，我们可以经过有限时间确认该元组 b满足公式 φ。

尽管存在相似之处，$\bigvee\!\!\bigvee^{\mathrm{c}}$ 公式在我们的论述中会更加有用，因为要检验 Σ_1^{c} 公式的真值，我们需要访问整个模型（这样才能穷举元组 $\vec{y}_i$）；而我们将处理 $0'$-可计算的可计算可枚举类型结构，其中可能包含会导致误报的“幻影元素”。此外，由于我们只有关于元素的正信息的一个可计算可枚举指标，因此无法以可计算方式检验谓词的任意有限布尔组合——这正是我们将范围限制在正公式上的原因。

备注 2.2.5。 在该序列中，我们将有两个嵌套签名， $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$。我们遵循以下约定：

- 除非另有说明，所有公式均假定为无量词的，
- 所有命名的 $\mathcal{L}$-公式均为无量词的有限一阶公式，并用小写罗马字母表示，
- 所有命名的 $\mathcal{L}\prime$-公式均为 $\bigvee^{c}$ ，并用小写希腊字母表示；但命名为 τ 的公式除外，它们为 $\bigvee^{c}{}_{2}$。反过来，序列中的所有 $\bigvee^{c}$ 或 $\bigvee^{c}{}_{2}$ 公式均假定属于符号集 $\mathcal{L}\prime$。

现在我们给出本节的主要定义。这是一个相当技术性的定义。我们在引言中已为此定义提供了一些动机；参见注 1.3.10。

定义 2.2.6（QETP）。设 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ 是可计算签名，且 D 是基于 $\mathcal{L}'$ 的结构。若 D 满足可计算正量词消去与垃圾存在性性质（简称*QETP*，），则称其具有以下性质：

(a) $\mathcal{L}$ 是有限的、在否定下封闭的，并且包含谓词 $\neq$，

(b) 对于每个无量词的 $\mathcal{L}$ 公式 $q(\vec{x},\vec{y})$，都存在一个 $\bigvee^{c}$ $\mathcal{L}'$ 公式 $\chi_q(\vec{x})$，可由 q 计算得到，使得

$$D \vDash \forall_{\vec{x}} \left[\chi_q(\vec{x}) \leftrightarrow \exists_{\vec{y}} q(\vec{x},\vec{y})\right],$$

(c) 存在一个 $0'$-可计算的 偏 函数，记作 τ。它以一对 $(q(\vec{x},y,\vec{z})\ \varphi(\vec{x}))$ 作为输入，其中 $q(\vec{x},y,\vec{z})$ 是一个无量词的 $\mathcal{L}$ 类型[6]，而 $\varphi(\vec{x})$ 是一个有限元的 $\mathcal{L}'$ 公式；其输出是一个 $\bigvee^{c}_{2}\mathcal{L}'$ 公式，记作 $\tau_{q\varphi}(\vec{x},y)$，并满足以下两个性质：

- 对于 D 中任意一个类型为 $\mathcal{L}$ 的元素元组 $(\vec{x},y,\vec{z})$，其类型为 $q(\vec{x},y,\vec{z})$，都存在一个公式 $\varphi(\vec{x})$，使得 $\vec{x}$ 满足该公式，且 (q,φ) 属于 τ 的定义域。等价地，若 $\vec{b}$ 是 D 中的一个元素元组，且满足 $D \vDash \chi_q(\vec{b})$，则存在 $\varphi(\vec{x})$，使得 (q,φ) 属于 τ 的定义域，并且 $D \vDash \varphi(\vec{b})$。此外，
- 以下公式在 D 中成立：

$$D \vDash \forall_{\vec{x}} \left[\chi_q(\vec{x}) \wedge \varphi(\vec{x}) \rightarrow \exists_y \tau_{q\varphi}(\vec{x},y)\right].$$

(d) 给定定义域为 τ（如上所述）中的一对 $(q(\vec{x},\ y,\ \vec{z})\ \varphi(\vec{x}))$，以及一个扩展 $q(\vec{x},\ y,\ \vec{z})$ 的无量词 $\mathcal{L}$-类型$Q(\vec{x},\ y,\ \vec{z},\ \vec{w})$，则存在一个 $\bigvee^{c}$ $\mathcal{L}'$-公式 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})$，可由三元组 $(q,\ \varphi,\ Q)$ 计算得到，使得

$$D \vDash \forall_{\vec{x}} \left[\exists_y \left[\chi_Q(\vec{x},y) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x},y)\right] \leftrightarrow \varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})\right].$$

在某些情况下，即使一对 $(q,\ \varphi)$ 不属于 τ 的定义域，函数 $(q,\ \varphi,\ Q) \mapsto \varepsilon\tau_{q\varphi Q}$ 仍可能有定义。在这种情况下，我们不对 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}$ 作任何要求。

注：作为推论 由 (c) 可得，对于定义域为 τ 中的 $(q,\ \varphi)$，有 $D \vDash \forall_{\vec{x}} \left[\chi_q(\vec{x}) \wedge \varphi(\vec{x}) \rightarrow \varepsilon\tau_{q\varphi q}(\vec{x})\right]$.

(e) 最后，对于所有 q、 φ、 Q，我们要求

$$D \vDash \forall_{\vec{x},y} \left[\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x},y) \rightarrow \chi_Q(\vec{x},y)\right].$$

备注 2.2.7。 我们将按以下方式处理 QETP 的条目 (c)：设想有一个可计算过程，它枚举三元组 $(q,\ \varphi,\ \tau)$，有时也会删除这些三元组；具体而言，如果 $\tau_{q\varphi}$ 定义良好，那么三元组 $(q,\ \varphi,\ \tau_{q\varphi})$ 最终会被枚举，且不会再被删除；而对于定义域中任意 $(q,\ \varphi)$，任何不属于 $(q,\ \varphi,\ \tau_{q\varphi})$ 形式的三元组最终都会被删除。

[6]注意变量 y 上没有“向量箭头”。这表示一个单独的变量，而不是由多个变量组成的元组。

注 2.2.8. 根据定义 2.2.6 的条目 (b)，如果 D 是满足 QETP 的 $0'$-可计算可枚举类型结构，那么我们可以枚举在 D 中已实现的无量词 $\mathcal{L}$-类型。这是因为，要判断类型 $q(\vec{y})$ 是否在 D 中已实现，我们会检查零元正句子 χ_q 的真值，而该句子由 D 的零元谓词构成的正组合组成。因此，通过检查 D 的零元元素元组的类型，我们便可以枚举已实现的类型 $q(\vec{y})$。

我们对公式 χ_q 作出一项额外的技术性假设，不过这不会造成任何损失。令$q(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})$ 为一个无量词 $\mathcal{L}$ 公式。我们可以用（至少）两种不同的方式为 $q$in 指定一个 χ-公式：将变量分组为 $(\vec{x},\ [\vec{y},\vec{z}])$，或将它们分组为 $([\vec{x},\vec{y}],\ \vec{z})$。这样会得到两个不同的公式；必要时，为了加以区分，我们分别将它们记作 $\chi_{q(\vec{x},\cdot,\cdot)}(\vec{x})$ 和 $\chi_{q(\vec{x},\vec{y},\cdot)}(\vec{x},\vec{y})$。现在，**不失一般性地假设**在这种情形下，$\chi_{q(\vec{x},\vec{y},\cdot)}(\vec{x},\ \vec{y})$ 包含 $\chi_{q(\vec{x},\cdot,\cdot)}(\vec{x})$ 作为一个子公式。

我们之所以可以作出这样的假设，是因为对于给定的无量词 $\mathcal{L}$-公式 $q(\vec{x},\ \vec{y})$，我们可以将 $\bar{\chi}_q(\vec{x})$ 重新定义为

$$\bar{\chi}_q(\vec{x}) = \bigwedge_{\vec{x}=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)} \chi_{q(\vec{x}_1,\cdot,\cdot)}(\vec{x}_1),$$

其中，合取遍历将元组 $\vec{x}$ 分解为两个变量元组的所有方式（不一定按顺序）。我们在此隐含地利用了这样一个事实：有限个 $\mathbb{W}^c$ 公式的合取本身仍是 $\mathbb{W}^c$。如果先前的 $\bar{\chi}$ 能够作为 QETP 的见证，那么这个新定义的 $\bar{\chi}$ 仍然可以；而且它还具有一项额外的技术优势，这一点在我们的证明中是必需的。

注 2.2.9. 验证某个特定结构是否满足 QETP 时，对于任意无量词 $\mathcal{L}$-公式 $q(\vec{x},\vec{y})$，我们都必须构造一个公式 $\chi_q(\vec{x})$。这可能相当繁琐。因此，我们介绍一种量词消去证明中常用的简化步骤，今后将不再特别说明地使用它：构造χ_q 时，我们可以不失一般性地假设 $q(\vec{x},\vec{y})$ 是一个无量词 $\mathcal{L}$-类型，且其中所有元素都互不相同。这是因为任意公式 $q(\vec{x},\vec{y})$ 都可以写成析取 $\vee_i (q(\vec{x},\vec{y}) \wedge t_i(\vec{x},\vec{y}))$，其中$t_i$遍历所有无量词 $\mathcal{L}$-类型；每个 $q(\vec{x},\vec{y}) \wedge t_i(\vec{x},\vec{y})$ 都逻辑等价于 $\perp$ 或 $t_i(\vec{x},\vec{y})$（将结果记为 $q_i(\vec{x},\vec{y})$），而且 $\exists_{\vec{y}} \vee_i q_i(\vec{x},\vec{y})$ 逻辑等价于 $\vee_i \exists_{\vec{y}} q_i(\vec{x},\vec{y})$，因此只需在每个 q_i 上定义 χ。此外，我们可以假设所有变量互不相同，因为如果 q_i 包含 $y_a = y_b$ 或 $y_a = x_b$，我们只需进行代换，并消去 y_a 中的量化；如果 q_i 包含$x_a = x_b$，则可利用这样一个事实消去这两个变量中的一个：$\exists_{\vec{y}} q_i(\vec{x},\vec{y})$（在这种情况下）逻辑等价于 $x_a = x_b \wedge \exists_{\vec{y}} \hat{} q_i(\vec{x}_{\hat{a}},\vec{y})$，其中 $\hat{}\, q_i$ 由 q_i 在删去 x_a 的那个变量元组上的约化结构构成。

注 2.2.10. 事实上，注 2.2.9 完全没有必要：仔细检查定理 2.3.1 的证明便会发现，实际上只有当 q 是由互异元素构成的量词自由 $\mathcal{L}$-类型时，才会计算 χ_q。尽管如此，我们仍倾向于按现有形式表述 QETP，即使它表面上比必要的要求更强（但实际上并非如此），以强调定义中的 χ 部分不过是一个有效的量词消去结果。

2.3 主要结果

定理 2.3.1. 若 D 是签名 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ 上满足 QETP 的 $0'$-可计算可枚举类型结构，则约化结构 $D{\restriction}\mathcal{L}$ 存在一个可计算副本 M。$D{\restriction}\mathcal{L}$ 与 M 之间存在一个 $0'$-可计算同构。对于 D 的指标以及表明 D 满足 QETP 的见证指标而言，此结果是一致的，并且一致地相对化。

证明：我们将通过有限伤害论证构造一个 $D{\restriction}\mathcal{L}$的可计算副本。首先，我们为算法的运行打下基础：

[7]其中包括：一个指标，使得 $\mathcal{L}$ 中的谓词互为否定；可计算函数 χ 和 $\varepsilon\tau$ 的一个指标；以及 $0'$-可计算函数 τ 的一个指标。

• 我们把结构 D 想象成由一个可计算过程给出：该过程输出元素以及截至目前所输出元素的原子 $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$-类型的可枚举指标，有时还会擦除先前构造的元素。我们将在后台并行执行这一构造。

• 我们将通过一个可计算过程构造 $\mathcal{L}$结构 $M \cong D|_{\mathcal{L}}$：该过程输出一个元素序列，并为每个元素给出截至目前所输出元素的无量词 $\mathcal{L}$类型。

• 我们按照添加时间为 M 中的元素和 D 中的元素良序。这其中也包括 D的"虚假"元素。当我们提到"M（或 D）中满足某种性质的第一个元素"时，指的是最早被添加的那个元素。

• 我们设想有一组工作者，称为"工作者 i" $i = 0,$ 1、2、.....，每个工作者负责通过往返构造完成 D 与我们正在构造的结构 M 之间同构的一个步骤。

• 我们假设每个时刻只有一个工作者处于活动状态。当工作者 i 完成其任务后，它将激活工作者 $i+1$。当发生损伤时（造成损伤的方式将在后文讨论），我们可以将执行转回某个先前的工作者，例如工作者 j，并删除工作者 j之后所有工作者的状态。

• 这个构造的内部状态，也就是说，我们将持续跟踪的信息，由以下数据组成（以及跟踪工作者机制所需的任何辅助信息）：

– 结构 M 和 D的当前状态，– M 中的某些元素与 D中的某些元素之间的一一匹配，后者可能是实数，也可能不是实数，–对于 M中的某些元素 m，我们将它们与一组三元组公式 $(q(\vec{x}, y, \vec{z})\ \varphi(\vec{x})\ \tau(\vec{x}, y))$ 匹配；这些公式由备注 2.2.7 中的过程输出，同时还记录创建此匹配时 M 中各元素的分解，分解为 $\vec{x}$、 $y = m$和 $\vec{z}$。– 对于前两类匹配中的每一个，我们都会记录创建它的工作者以及创建时间。

• 可以通过以下操作修改此构造的内部状态 :

– 我们可以向 M添加一个新元素，此时立即将其匹配到 D的一个元素，– 我们可以在 M 的一个元素与 D的一个元素之间建立匹配，–我们可以将公式三元组（q, φ, τ）匹配到元素 $y \in M$，连同分解$M_{\text{current}} =$（$\vec{x}, y, \vec{z}$），其中 $\vec{x}$表示 M中此时在 D中具有匹配的那些元素（特别地，注意我们假定 y 此时没有匹配），– 在发生损伤时，我们可以移除上述两类匹配。

• 若发生以下三种事件中的任一事件，该构造将受到损伤:

– D 中某个允许匹配到 M 的一个元素的元素被删除，–存在 M的一个元素，它带有已指派公式三元组（q, φ, τ），且该公式三元组已从备注 2.2.7所述过程的枚举中被删除，–存在 M的一个元素，它带有已指派三元组（q, φ, τ）以及已匹配元素 $d \in D$，使得我们关于 τ 是否对该元素成立的猜测已变为"否"。

在这两种情况中的任何一种下，在"错误匹配"之后创建的所有匹配都将被删除。

现在，我们建立一些关于该构造内部状态的假设，并将在每一步都谨慎地维持这些假设。对于每一条假设，我们都会指出在执行时需要小心的操作——其余操作将始终保持给定的假设。此外，除非发生损伤，否则这些假设不会随着时间的推移而被破坏；若发生损伤，算法中处理损伤的部分将纠正任何问题。

假设（A）如果 $M = (\vec{x}, \vec{y})$，其中 $\vec{x}$ 表示当前在 D中有匹配的 M 元素，$\vec{b}$表示这些匹配，而 $q(\vec{x}, \vec{y})$ 是 M 中元素的类型，则我们要求 $D \vDash \chi_q(\vec{b})$。向 M 添加新元素，以及在 M 中的元素与 D 中的元素之间建立匹配时，我们需要谨慎确保这一点成立。删除匹配时也需要谨慎，但此时备注 2.2.8 就派上用场了，因为它确保这不会成为问题。假设（B）如果 $y \in M$与公式三元组 (q, φ, τ) 和分解 $(\vec{x}, y, \vec{z}) \subseteq M$相匹配，则我们要求 $M \vDash q(\vec{x}, y, \vec{z})$，并且 $\vec{x}$中的所有元素都在 D中有满足 $D \vDash \varphi(\vec{b})$ 的匹配 $\vec{b}$。将三元组指派给一个元素时，我们需要谨慎确保这一点成立。移除匹配或 D中的元素时，我们不必谨慎，因为在这种情况下，我们的损伤过程会取消指派给 y的公式的匹配。假设（C）在任何给定时刻，M 中至多有一个未匹配元素 m 带有已指派三元组；若有这种情况，变量 $\vec{x}$ 对应于当前与 D中的元素相匹配的 M 中的元素，而接下来要采取的行动应当是将 m 与 D中的一个元素相匹配。假设（D）如果 y是 M中的一个元素，带有已指派三元组 $(q(\vec{x}, y, \vec{z})\ \varphi(\vec{x})\ \tau(\vec{x}, y))$，并且 y在 D中有匹配

$\vec{d}$，若 b是与 $\vec{x}$匹配的元素元组，则在当前逼近下（按照备注 2.2.3 的含义），必须有 $D \vDash \tau(b, d)$。在创建 M中带有已指派三元组 (q, φ, τ) 的元素与 D中的元素之间的匹配时，我们需要谨慎确保这一点成立。将三元组 (q, φ, τ) 指派给 M中的一个元素时，我们不需要谨慎，因为（事实证明）我们总会将这类三元组与未匹配的元素相匹配。如果当前逼近（按照备注 2.2.3 的含义）发生变化，我们也需要谨慎；这就是为什么“ $\tau(\vec{b}, d)$ 的值的近似发生变化”会导致损伤。假设（E）如果 m是一个带有已指派公式 $(q(\vec{x}, y, \vec{z})\ \varphi(\vec{x})\ \tau(\vec{x}, y))$ 的元素，$\vec{b}$表示 $\vec{x}$的匹配，并且在此阶段，M分解为 $M = (\vec{x}, y, \vec{z}, \vec{w})$，其无量词 $\mathcal{L}$-类型为 $Q(\vec{x}, y, \vec{z}, \vec{w})$，那么，如果 $\vec{b}$是 D中的实数元素，就必须有 $D \vDash \varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{b})$。向 M添加新元素，以及将三元组 (q, φ, τ) 指派给 M中的元素时，我们需要谨慎确保这一点成立。

这个过程从工作者 0 的初始化开始。

Now，下面描述工作者 i 将遵循的算法。初始化时：

- 首先，找出 M中第一个（若存在）在 D中没有匹配的元素。如果没有，则跳到本要点的末尾。如果有，将其称为 m。如果 m没有被指派的公式：令（$\vec{x}$，y，$\vec{z}$）为 M的当前元素，其中 $\vec{x}$对$\vec{}$应于当前在 D 中有匹配的元素——称它们为 b ——，y 对应于 m，$\vec{z}$对应于其余元素。按照备注 2.2.7 所枚举的三元组（q，φ，τ）逐一查找，直到找到满足 $M \vDash q$（$\vec{x}$，y，$\vec{z}$）和 $D \vDash \varphi$（$\vec{b}$）的这样一个三元组。如果所有元素

b 都是实数，则根据假设（A）并结合QETP的第(c)项，可在有限时间内找到这样一个三元组。如果并非全部都是实数，则会发生损伤。一旦找到这样一个三元组，我们就将三元组（q，φ，τ）连同上面的分解（$\vec{x}$，y，$\vec{z}$）指派给 m 。
我们需要确保假设（B）和假设（E）得以保持。

– 假设（B）——按设计如此。– 假设（E）——我们需要保证，若 $\vec{b}$ 均为实数，则有 $D \vDash \varepsilon\tau_{q\varphi q}(\vec{b})$。这是QETP条目（d）末尾注记的一个推论。

设(q, φ, τ)为分配给 m的公式。公式 $q(\vec{x}, y, \vec{z})$一般而言不会是 M当前元素的无量词 $\mathcal{L}$-类型，但它必定是 M中某些元素子集的无量词 $\mathcal{L}$-类型。根据假设（C），与 $\vec{x}$ 对应的元素恰好是那些$\vec{}$当前在 D中容许匹配的元素。令 b表示它们的匹配。

我们令 $Q(\vec{x}, y, \vec{z}, \vec{w})$表示 M当前元素的无量词类型，其中 $\vec{x}$、 y和 $\vec{z}$与上文相同。

$\vec{}$依次检查 D 中的元素，直到找到一个满足 $D \vDash \tau(b,\ d)$ 且符合当前近似（按照备注 2.2.3 的含义）的元素 d。

$\vec{}$技术说明：必须以某种系统化的方式进行这项搜索，这样一来，如果所有 b 都是实数，我们最终就能找到一个满足该公式的实数元素 d，并且近似此后不再改变。下面是这种系统化方法的一个例子：假设我们给加入 D 的第 n 个元素（比如说 d_n）设置一个惩罚值，即在计算 $D \vDash \tau(\vec{b},\ d_n)$ 是否成立时，额外耗费 n 个阶段；然后选择满足以下条件的 d： $D \vDash \tau(\vec{b},\ d)$ 已在最少阶段数内得到验证（且迄今尚未被证伪）。这在证明有限伤害时将会很重要。

我们声称，除非发生损伤，否则这项搜索最终会终止。具体来说，假设所有 $\vec{b}$ 都是实数，并且三元组 $(q,\ \varphi,\ \tau)$ 永远不会从备注 2.2.7 中的枚举里移除。那么，根据假设（A），必有 $D \vDash \chi_Q(\vec{b})$；根据假设（E），必有 $D \vDash \varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{b})$。因此，根据 $\varepsilon\tau$ 的定义，必有 $D \vDash \exists_y \tau_q(\vec{b},\ y)$，而该陈述的任何见证都可用作上述的 d。

一旦找到这样的 d，我们就将 m与 d匹配。
我们需要确保假设（A）和假设（D）成立。

– 假设（A）– 如果 d 是实数，根据 QETP 的条目 (e)，这可直接得出。–
假设（D） – 根据构造

- 接下来，找出 D 中第一个在 M中没有匹配项的元素——称之为 d 。如果目前还没有这样的元素，则继续看下一条。

  $\vec{}$设 $q(\vec{x}, \vec{y})$为 M中元素的无量词 $\mathcal{L}$类型， b为M中那些存在匹配项的元素所对应的匹配项。设 $r(\vec{x}, z)$为元组$(\vec{b}, d)$的无量词 $\mathcal{L}$类型。[8] 同时，遍历已实现的无量词 $\mathcal{L}$ 存在类型 $\exists_{\vec{x}}\exists_{\vec{y}}\exists_z Q(\vec{x}, z, \vec{y})$，直到找到这样的 $Q(\vec{x}, z, \vec{y})$，使其扩展 $q(\vec{x}, \vec{y}) \wedge r(\vec{x}, z)$，并且满足：

  $\vec{}$– $D \vDash \chi_{Q(\vec{x},z,\cdot)}(b,\ d)$，且$\vec{}$–对于每个 m，若存在一个已指派三元组（$q_0(\vec{x}_0,\ y_0,\ \vec{z}_0)$ $\varphi(\vec{x}_0)$ $\tau(\vec{x}_0,\ y_0)$），且 b_0是 $M\vec{}$中与 $\vec{x}_0$、 $D \vDash \varepsilon\tau_{q_0\varphi Q}(b_0)$相对应的元素。

[8]在这里，我们使用 QETP 的条款 (a)，从 $(\vec{b}, d)$ 的原子$\mathcal{L}'$类型的可计算可枚举指标，计算地获得 $r(\vec{x}, z)$ 的（一个强指标）。更一般地说，我们利用这一事实：QETP 的条款 (a) 允许我们从一个元组的 $\mathcal{L}'$类型的可计算可枚举指标，计算地获得该元组的 $\mathcal{L}$类型的强指标。

我们论证，要么能在有限时间内找到这样的 Q，要么就会发生损伤。事实上，假设$\vec{\ }$，d和 b中的元素全都是真实的，并且每个三元组（q_0，φ，τ）此后都不会再受到损伤。现在，由于我们假设 $D \vDash \chi_q(\vec{b})$，D 中必定存在一个由实数元素构成的元组 $\vec{c}$，使得 $D \vDash q(\vec{b},\ \vec{c})$。现在，我们声称元组（$\vec{b}$，$d$，$\vec{c}$）的类型 Q 满足所需条件：

$\vec{\ }$ $\vec{\ }$ $\vec{\ }$– 由于 $D \vDash Q(b,d,\vec{c})$，我们必有 $D \vDash \exists_{\vec{y}} Q(b,d,\vec{y})$，从而 $D \vDash \chi_Q(b,d)$；并且——若 m被赋予三元组（q_0,φ,τ），其分解为（$\vec{x}_0,y_0,\vec{z}_0$）$\subseteq M$，其中 $\vec{b}_0$是 D $\vec{x}_0$ d_0 m $D \vDash$中与之对应 $\chi_Q\ \vec{b}_0\ d_0$ $D \vDash \chi_Q\ \vec{b}\ d$ $D \vDash Q\ \vec{b}\ d\ \vec{c}$ 的元素，而 是与 对应的元素，则由（,）可得（,），再由（,,）可得（,）。此外，根据假设（D），$D \vDash \tau(\vec{b}_0,d_0)$，因此 $D \vDash \exists_y \left[\chi_Q(\vec{b}_0,y) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{b}_0,y)\right]$）；于是根据 QETP 的条目（d），$D \vDash \varepsilon\tau_{q_0\varphi Q}(\vec{b}_0)$。

一旦找到这样的 $Q(\vec{x},z,\vec{y})$，就会发生两种情况之一。它要么包含 $z = y_j$某个值的j，此时我们将 d 与对应于 y_j的元素匹配；要么包含所有变量表示不同元素的信息，此时我们向 M中添加一个新元素，其与先前元素的关系由 Q决定，并将它与 d匹配。

我们需要确保假设（A）和假设（E）成立。

$\vec{\ }$– 假设（A）– 根据构造，因为我们已确保 $D \vDash \chi_Q(b,d)$。– 假设（E）– 根据构造。

- 完成上述两个步骤后，工作者 i 应暂停执行，并初始化工作者 $i+1$。

现在我们描述损伤过程。损伤有三种方式：

- 假设观察到 D 的一个元素被移除。如果该元素在 M中没有匹配，则无需采取任何行动。另一方面，假设该元素 d 与M中的一个元素 m 匹配。在这种情况下，假设工作者 i 执行了这次匹配，则停止所有指标大于 i的工作者的执行，并擦除在 m 和 d 匹配之后创建的匹配和已指派公式。如果 d 与 m 之间的匹配是由第一条要点创建的，则重新启动工作者 i的执行。如果 d 与 m 之间的匹配是由第二条要点创建的，则初始化工作者 $i+1$ （且不重新启动工作者 i）。

- 假设元素 $m \in M$有一个已指派三元组 $(q,\ \varphi,\ \tau)$，并且发现它在某个阶段从备注 2.2.7 中描述的枚举中被删除。假设工作者 i 是指派该公式的工作者。那么，我们停止所有指标大于 i的工作者的执行，并删除该公式被指派给 m之后创建的所有匹配和已指派公式。然后，我们运行工作者 i。

- 假设元素 $m \in M$有一个已指派三元组 $(q(\vec{x},\ y,\ \vec{z})\ \varphi(\vec{x})\ \tau(\vec{x},\ y))$，并且有一个已匹配元素$d$。假设工作者 i创建了这些匹配。假设元素 $\vec{x}$与元组 $\vec{b}$匹配，并且假设 $D \vDash \tau(\vec{b},\ d)$的当前逼近（按照备注 2.2.3 的含义）已变为“否”。那么，我们停止所有指标大于 i的工作者的执行，删除此后创建的所有匹配和已指派公式（包括 m 与 d之间的匹配，但保留已指派三元组 $(q,\ \varphi,\ \tau)$），并运行工作者 i。

构造至此完成。剩下要证明所得结构 M 与 $D|\mathcal{L}$同构，这将通过有限伤害论证来完成。我们证明每个工作者只会受到有限次损伤。这将表明，D 中的每个元素最终都会与 M 中的一个元素匹配（ D中的第 i 个元素——同时计算真实元素与虚假元素——至迟会由第 i 个工作者在该元素加入 D之后进行匹配），并且 M 中的每个元素最终都会与 D 中的一个元素匹配（给定 M中的一个孤儿元素，归纳地考虑在所有先前元素 M

均已匹配后激活的第一个工作者）；由于这些匹配都保留了 $\mathcal{L}$中的谓词，所得映射将是一个同构。

为归纳法起见，假设工作者 i之前的所有工作者都只受到有限多次损伤。我们证明工作者 i 本身也只遭受有限伤害。我们对每个项目符号分别加以证明：

- 首先，我们证明此时由 m 的第一个孤儿元素所创建的匹配（如果存在）只受到有限多次损伤。事实上，按照备注 2.2.7 的记号，并利用 QETP 的第 (c) 项，最终会枚举出一个三元组 (q, φ, τ)，且永不被移除，使得 D 的相关元素满足 $\chi_q \wedge \varphi$。在此之后，待所有先前添加的虚假三元组都被移除后，该三元组（或另一个三元组）将被永久分配给 m。此后，我们知道（参见工作者过程描述中第一个项目符号里的技术说明），经过足够多步后，我们将m与 D 的一个真实元素 d 相匹配，该元素在当前逼近下满足 $\tau(\vec{b}, d)$，且此后不再改变。因此，过了这一点之后，该匹配将永不再受到损伤。

- 现在，假设我们已经到达这样一个时刻：由前一个要点或先前的工作者所建立的匹配将不再遭受损伤。假设在 D 中有一个未匹配元素，供工作者 i与 M 中的某个元素匹配。如果该元素是实数，就不会遭受损伤。如果不是，它最终会被删除，执行过程将转到工作者 $i+1$，从那时起，工作者 i 将不再遭受损伤。

证明至此结束。 ■

3 先前已知的应用

本节列举定理 2.3.1 的一些推论。我们并不声称这些结果本身具有原创性——此处的目的仅仅是说明它们如何都能从同一个一般原理推出，并指出文献中可找到这些结果的先前出处。

以下所有结果都是双向的，但鉴于本文的论述方向，我们只关注每种情形下两个方向中最相关的一个，而这个方向通常也可以说是最困难的。

3.1 无限秩等价关系

命题 3.1.1（民间结果， [**4, 定理 9.1**。**4**]）。设 $(E, \simeq)$ 是一个具有无限多个等价类的等价关系，并假设结构 $(E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}})$ 存在一个 $0'$-可计算副本，其中 $P_{\geq n}(x)$ 是谓词“ x 的等价类大小至少为 n”。[9] 那么，$(E, \simeq)$ 存在一个可计算副本。

证明：首先，我们注意到，如果 $(E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}})$ 存在一个 $0'$-可计算副本，那么 $(E, \simeq, \{P_{\geq n}\}^{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}})$ 存在一个 $0'$-可计算的 c.e.型副本，其中 $P_{\geq\infty}(x)$ 是谓词“ x 的等价类是无限的”。我们如下构造这个副本：借助 $0'$ 的预言机，运行 $(E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}})$ 的构造；每当看到一个属于新的有限等价类且该类大小恰为 n 的元素（即满足 $P_{\geq n}$ 但不满足 $P_{\geq n+1}$），就输出一个大小恰为 n 的等价类。最终，你将输出一个副本，它是 E中由属于有限等价类的元素构成的子结构。与此同时，构造可数多个无限等价类。由于输出任何给定元素时，我们都知道其等价类的所有信息，因此为截至某一时刻已输出的元素元组的类型提供一个可计算可枚举（甚至可计算）的指标是轻而易举的。

接下来，我们证明 E 满足相对于以下语言的 QETP：

- $\mathcal{L}$ 是包含 $\simeq$、 $\not\simeq$、 $=$和 $\neq$ 的语言，
- $\mathcal{L}_I$ 是包含 $\mathcal{L}$ 以及可数多个谓词 $P_{\geq n}$ 的语言。

[9] 这包括 x 的等价类是无限集的情形。

这显然　显然，$\mathcal{L}$ 是有限的，且对否定封闭，因此只需构造 χ、τ 和 $\varepsilon\tau$。

- 构造 $\chi_q(\vec{x})$，给定 $q(\vec{x},\ \vec{y})$：不失一般性（见注 2.2.9），我们假设 $q(\vec{x},\ \vec{y})$ 是由以下类型的原子公式构成的极大合取：

  $-\ y_i \simeq x_j$ 或 $y_i \not\simeq x_j$，并且对于每个 i 和 j，其中之一都包含在内，$-\ y_i \simeq y_j$ 或 $y_i \not\simeq y_j$，并且对于每个 i 和 j，其中之一都包含在内，$-\ x_i \simeq x_j$ 或 $x_i \not\simeq x_j$，并且对于每个 i 和 j，其中之一都包含在内，$-\ y_i \neq x_j$，并且对于每个 i 和 j，这些公式都包含在内，$-\ y_i \neq y_j$，并且对于 $i \neq j$，这些公式都包含在内，$-\ x_i \neq x_j$，并且对于 $i \neq j$，这些公式都包含在内。

  因此，$q(\vec{x},\ \vec{y})$ 包含了关于这些元素所属等价类的全部信息。如果这些信息不一致（即不满足传递性、自反性或对称性），则只需令 $\chi_q(\vec{x}) \equiv \bot$。另一方面，如果这些信息是一致的，那么要使给定元组 $\vec{y}$ 在需要元组 $\vec{x}$ 的情况下存在，实际上等价于要求每个 x_i 的等价类足够大——也就是说，x_i 的等价类大小必须至少为 n_i，其中 n_i 是满足 $z \simeq x_i$ 属于 q 中信息的不同变量 z 的数量。因此，我们令 $\chi_q(\vec{x}) \equiv q_0(\vec{x}) \wedge \bigwedge_i P_{\geq n_i}(x_i)$，其中 $q_0(\vec{x})$ 是 q 中涉及 $\vec{x}$ 的元素的信息。根据构造，它将满足关于 χ 的要求。

  注意，我们使用了这样一个假设：存在无穷多个大小任意大的等价类，以处理那些不与任何 x_j 等价的变量 y_i。

- 构造 $\tau_{q\varphi}(\vec{x},\ y)$：令 τ 的定义域为有序对 $(q,\ \top)$ 的集合。给定 $q(\vec{x},\ y,\ \vec{z})$，令 $\tau_{q\top}(\vec{x},\ y) \equiv \chi_q(\vec{x},\ y) \wedge (P_{\geq\infty}(y) \vee \bigvee_i y \simeq x_i)$。
- 构造 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})$：在所有情况下，只需令 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \equiv \chi_Q(\vec{x})$。

在《模型论》中，验证上述赋值是 QETP 的见证，是一项繁琐但直接的练习。在验证 QETP 的第 (c) 项时，我们从根本上用到了存在无穷多个无限等价类这一事实。应用定理 2.3.1 后，证明即告完成。■

上述证明有几个性质之后还会再次出现，因此我们现在先对它们作些说明。

注 3.1.2. 我们使用的定理 2.3.1 版本非常弱。例如：我们没有使用无穷公式；我们的 τ 是可计算的，且定义域可计算，而不只是 $0'$-可计算且定义域为 $0'$-可计算可枚举，等等。这反映出，就跳跃反演定理而言，命题 3.1.1 相当简单！我们还将看到其他一些自然的例子（虽然它们不一定复杂得多），这些例子会运用定理 2.3.1 的更多力量。

注 3.1.3. 尽管定理 2.3.1 给出了原始结构的约化结构与所得结构之间的一个 $0'$-可计算同构，但命题 3.1.1 并未提供这样的保证。事实上，可以证明，一般而言我们所能做到的最好结果，是在原始的 $0'$-可计算等价关系（记作 E_0）与可计算副本（记作 E_1）之间找到一个 $0''$-可计算同构。这是因为我们构造了一个中间的辅助结构，以便将定理 2.3.1 应用于它——记作 E_+ ——尽管定理 2.3.1 保证 E_+ 与 E_1 之间存在一个 $0'$-可计算同构，但 E_0 与 E_+ 之间的同构在计算上可能复杂得多。我们所能保证、事实上也确实能保证的最好结果是，这样的同构为 $0''$-可计算，正如下文的命题 3.1.5 所示。

引理 3.1.4。该　　re 是所有有限或无限可计算等价关系的可计算枚举　　.

证明：令 $\varphi_n(x)$ 表示第 n 个取值为 {0, 1} 的部分可计算函数。于是，对每个 n，按如下方式定义 n 个定义在 $\mathbb{N}$ 的某个初始段上的可计算等价关系：如果我们已将小于某个给定 k 的所有数加入该等价关系，那么我们尝试计算 $\varphi_n\mathbf{0}, k$、$\varphi_n\mathbf{1}, k$、. . .、$\varphi_n k, k$，以及 $\varphi_n k, \mathbf{0}$、$\varphi_n k, \mathbf{1}$、. . .、$\varphi_n k, k$。如果这些计算中有任何一个不停机，那么 k 以及任何大于 k 的数都不被视为属于第 n 个可计算等价关系，因此该关系是有限的，且恰有 k 个元素。否则，我们检查集合 $\{0, \ldots, k\}$ 上得到的关系是否为等价关系。如果不是，我们仍然认为第 n 个等价关系恰有 k 个元素；如果是，我们就将 k 加入该等价关系，并用 $k+1$ 重复上述过程。这个构造保证，任何可计算等价关系都有一个同构副本，对应于 n 的某个取值。■

命题 3.1.5。 存在一个 $0'$-可计算等价关系 $(E_0, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}})$，它有无穷多个无限等价类，并且任何一个从 $E_0{\restriction} \simeq$ 到某个可计算等价关系的同构 f，都可以用来计算 $0''$。

证明：我们将构造 $E_0 = E_{00} \amalg E_{01}$，其中 E_{00} 将用于编码 $0'$（编码进 E_0 与某个可计算等价关系之间的任意同构），而 E_{01} 将用于通过编码全定义图灵指标的集合来编码 $0''$——不过，解码过程需要使用 $0'$，这就是为什么必须有 E_{00}。

构造 E_{00}：考虑指定元素 a_0、a_1、a_2 等，其中定义 a_{2n} 与 a_{2n+1} 等价，当且仅当 $n \in 0'$，并且任意 a_i 与 E_0 中的其他元素之间都不存在其他等价关系。因此，如果我们有一个从 E_0 到某个可计算等价关系的同构 f，就可以通过检查 $f(a_{2n})$ 是否与 $f(a_{2n+1})$ 等价，来判断 $n \in 0'$。

构造 E_{01}：考虑指定元素 $\{b_{nx}\}_{(n,x)\in\mathbb{N}^2}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，依次检查$x \in \mathbb{N}$ 的取值，直到找到满足 $\varphi_n(x)\!\uparrow$ 的 x。如果找不到这样的 x，则对所有 i, j，令 $b_{ni} \simeq b_{nj}$。否则，设 x 是使 $\varphi_n(x)\!\uparrow$成立的第一个取值。然后，花费 x 步枚举前 n 个可计算等价关系（根据引理 3.1.4）中的元素，并利用 $0'$ 找到一个数 $k \geq x$，使得这些至多 xn 个元素中没有任何一个属于大小恰为 k的等价类。然后，令$b_{n0} \simeq \cdots \simeq b_{nk}$，且不令任何其他 b_{ni} 与任何其他对象等价。此选择的关键之处在于，它确保 E_0 与这些等价类中的任意一个之间不存在同构能将 b_{n0} 映射到其中前 x 个元素之一。

现在，我们来证明，任意一个 f 在 E_0 与可计算等价关系 E_1 之间的同构 $0''$都会计算出 $0''$。如前所述，f 计算出 $0'$，所以我们可以毫无顾忌地使用 $0'$ 作为预言机。假设我们想知道某个 $n \in \mathbb{N}$ 是否是全图灵指标。不失一般性——因为除有限多个 n 外，这对所有 n 都成立——假设 E_1 是前 n个可计算等价类之一。然后，找出 $f(b_{n0})$ 在等价关系 E_1 中的指标——设该指标为 t ——并检查 $\varphi_n(\mathbf{0})$ 到 $\varphi_n(t)$ 是否都能终止。若不能，那么显然 φ_n 是非全的。另一方面，若 φ_n 是非全的，且 x 是第一个满足 $\varphi_n(x)\!\uparrow$的元素，我们知道 $f(b_{n0})$ 的指标必定大于 t x，此时，从$\varphi_n(\mathbf{0})$ 到 $\varphi_n(t)$ 的某个计算将不会终止。因此，检查这前 t 个元素，就足以判断 φ_n 是否全定义。■

注 3.1.6. 我们对 $\tau_{q\varphi}$ 的选择在其定义中包含了 χ_q，而我们对 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}$ 的选择包含了 χ_Q（并且在此情形下，二者相等）。检查 QETP 的定义后会发现，我们总能这样做——也就是说，如果 χ_q、$\tau_{q\varphi}$ 和 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}$ 是 QETP 的见证，那么 χ_q、$\tau_{q\varphi} \wedge \chi_q$ 和 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q} \wedge \chi_Q$ 也会是见证，尽管反过来未必成立。

如果我们愿意，也可以修改 QETP 的定义，使实际使用的公式更简单，例如将每个 τ 都替换为 $\tau \wedge \chi$，$\varepsilon\tau$ 也同理。例如，条目 (e) 目前要求

$$D \vDash \forall_{\vec{x},y} \left[\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y) \to \chi_Q(\vec{x}, y)\right],$$

我们可以考虑改为提出较弱的要求：

$$D \vDash \forall_{\vec{x},y} \left[\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \wedge \chi_Q(\vec{x}) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y) \wedge \chi_q(\vec{x}, y) \to \chi_Q(\vec{x}, y)\right].$$

这样的改变不会改变哪些结构满足 QETP，只会改变它们的见证公式是什么；如果我们是为了撰写应用而进行优化，本可以采用较弱的版本。

例如，就命题 3.1.1 而言，我们目前有

$$\tau_q(\vec{x}, y) \equiv \chi_q(\vec{x}, y) \wedge \left(P_{\geq\infty}(y) \vee \bigvee_i y \simeq x_i \right) \text{ and } \varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \equiv \chi_Q(\vec{x}),$$

并且，使用 QETP 的另一种表述，可以将其替换为更简单、或许也更优雅的

$$\tau_q(\vec{x}, y) \equiv P_{\geq\infty}(y) \vee \bigvee_i y \simeq x_i \text{ and } \varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \equiv \top.$$

我们没有采用这个更简洁的 QETP 版本，因为定义本身已经足够技术化、复杂了；在应用证明中，我们优先考虑定义的易懂性，而不是仅仅在字符数上略有减少。

3.2 有限秩等价关系

下面的命题 3.2.3 是促使 QETP 采用当前形式的主要动因之一。我们首先需要陈述几个重要定义。

定义 3.2.1（Khisamiev, [4, 定义 9.1。3]）。如果存在一个全可计算函数 $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对每个 $x\in\mathbb{N}$，序列 $\{f(x,\ y)\}_{y\in\mathbb{N}}$ 弱递增（即非递减）且有界（因此收敛），并且 X 是逐点极限函数 $g(x) = \lim_y f(x,\ y)$的像，则称集合 $X\subseteq\mathbb{N}$ 为 极限逐点单调集合。

定义 3.2.2（[4, 定义 9.1。1]）。设 $(E,\ \simeq)$ 是一个等价关系。E 的特征集为集合

$$\#E = \{\, n\in\mathbb{N} \mid E \text{ admits at least one equivalence class of size } n \,\}.$$

命题 3.2.3（民间结果, [4, 定理 9.1。4]）。设 $(E,\ \simeq)$ 是一个等价关系，且只有有限多个无限等价类，并假设结构 $(E,\ \simeq,\ \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}})$ 有一个 $0'$-可计算副本，其中 $P_{\geq n}(x)$ 是谓词“ x 的等价类大小至少为 n”。此外，假设 E 的特征集是极限逐点单调的。那么，$(E,\ \simeq)$ 有一个可计算副本。

证明：与命题 3.1.1 的证明类似但并不完全相同，我们的第一步是构造 $(E,\ \simeq,\ \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}},\ \{P_{=n}\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}})$ 的一个 $0'$-可计算 c.e.型副本，其中 $P_{=n}(x)$ 表示“ x的等价类大小恰好为 n”。只需稍作修改，就可以采用命题 3.1.1 证明中的同一构造。新增谓词不成问题，因为添加元素时，我们已经准确知道其等价类大小；而且，我们不是手动添加无限多个等价类，而是添加与 E 所拥有的数量一样多的等价类（这是一个必须非一致地获得的有限数目）。接下来只需证明 $(E,\ \simeq,\ \{P_{\geq n}\}^{n\leq\infty},\ \{P_{=n}\}^{n\leq\infty})$ 在仅包含 $\simeq$（及其否定，以及等号及其否定）的语言上具有 QETP，不过还需要处理一些额外的技术细节。

在全文中，我们假设 E 有任意大的有限等价类；换言之，$\#E$ 是无限集合。$\#E$ 为有限集的情形相对简单，我们会单独处理：如果 $\#E$ 是有限集，那么只需有限的空间就能编码 E 在每种大小下拥有多少个等价类，我们只需构造一个符合此规范的可计算等价关系。我们将在注释 3.2.5 中看到这一条件是必要的，并在注释 3.2.6 中探讨其根本原因以及如何规避这一问题。

以下，我们令 f 为一个可计算函数，作为 $\#E$ 是极限逐点单调的见证，如定义 3.2.1 所述。

- 要构造 $\chi_q(\vec{x})$，给定 $q(\vec{x},\ \vec{y})$：命题 3.1.1 中的构造仍然适用，只要像其中指出的那样，假设 E 具有任意大的有限等价类。
- 构造 τ：令 $q(\vec{x}, y, \vec{z})$ 遍历在 E 中已实现的无量词 $\mathcal{L}$-类型，并令 $\varphi(\vec{x})$ 遍历元组中元素可能具有的等价类大小赋值 $\vec{x}$。对于这样一对

(q,φ)，令 N_0 为 $\varphi(\vec{x})$ 所规定的等价类的最大有限大小，令 N_1 为满足 $\chi_q(\vec{x},y)$ 的 y 的等价类的最小大小，并在 $\mathbb{N}^2$ 的某个固定良序中找出满足 $f(i,j) > \max\{N_0,N_1\}$ 的最小一对 (i,j)。然后，令 $M(i) = \lim_k f(i,k)$。最后，我们令

$$\tau_{q\varphi}(\vec{x},y) \equiv \chi_q(\vec{x},y) \wedge \left(P_{=M(i)}(y) \vee \bigvee_i y \simeq x_i \right).$$

.

- 为了构造 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})$，令 N 为满足 $\chi_Q(y)$ 所需的 y 的最小等价类大小，令 i 为上一个要点中得到的值，并设

$$\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \equiv \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \chi_Q(\vec{x}) \wedge \left([\![f(i,k) \geq N]\!] \vee \bigvee_i y \simeq x_i \right),$$

其中，$[\![f(i,\ k)\ \geq N]\!]$表示

$$[\![f(i,k) \geq N]\!] \equiv \begin{cases} \top & \text{if } f(i,k) \geq N, \\ \bot & \text{otherwise.} \end{cases}$$

与命题 3.1.1 中一样，检验 QETP 虽然繁琐，但过程直接。证明中最有意思的部分在于注意到，$\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})$ 与 $\chi_Q(\vec{x}) \wedge ([\![M(i) \geq N]\!] \vee \bigvee_i y \simeq x_i)$ 逻辑等价；这利用了 $f(i,\ k)$ 关于 k 单调这一事实。应用定理 2.3.1，当 $\#E$ 为无限时，证明即告完成。■

注 3.2.4。与命题 3.1.1 不同，对于命题 3.2.3，我们实际上可以保证存在一个 $0'$-可计算同构，尽管这种保证并非一致的。为此，只需从原等价关系的每个无限等价类中选取一个元素，例如 E_0，并将这些代表元硬编码进我们的算法中（这没有问题，因为它们只有有限多个）。接着，在 $\#E$ 为无限的情形下（$\#E$ 为有限的情形很直接，留给读者），按证明中概述的方法定义 E_+，并如下定义 E_0 与 E_+ 之间的同构：属于有限等价类的 E_0 中的元素，以显然的方式映射到它们所负责生成的等价类；通过检查它们是否与有限多个代表元之一等价，可以识别出 E_0 中属于无限等价类的元素；然后，为 E_0 的每个无限等价类选定 E_+ 的一个无限等价类与之建立双射，并据此进行映射。这个同构是 $0'$-可计算的；又因为 E_+ 与最终得到的可计算等价关系 E_1 之间也存在一个 $0'$-可计算同构，所以命题 3.2.3 实际上可以保证存在一个 $0'$-可计算同构。

要说明这件事无法一致地做到，即使在等价关系 E_0 保证具有每种有限大小的等价类（这会立即使 $\#E$ 一致极限单调），且至多——甚至恰好——有一个无限等价类的情形下也不行，我们可以借助命题 3.1.5 的证明：注意到其中定义的等价关系是由若干无限等价关系组成的可计算不交并$\amalg_i E_{(i)}$，每个关系都只有零个或一个无限类。这些等价关系也并非具有每种有限大小的等价类，但由于使同构在计算上变得复杂的因素是每个 $E_{(i)}$中的指定元素，我们只需为每个 $E_{(i)}$ 添上一个相应大小的等价类即可。我们还可以确保每个 $E_{(i)}$ 恰好有一个无限类：对于（命题 3.1.5 的证明中所用语言里的）E_{00}，只需添上一个无限类；而对于 E_{01} 的每个分支，则让所有$\{b_{ni}\}_i$ 在 i 足够大时彼此等价（而不是让它们都属于单元素类）。这表明，命题 3.2.3 无法被改造为一致地生成一个 $0'$-可计算同构，即使将范围限制在等价关系在 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 中每种大小都恰好有一个等价类的情形下也是如此。

另一方面，如果 E_0 被保证具有没有无限类，同时仍具有$\#E$ 无限极限逐点单调，我们确实能得到一致性于 E_0 以及一个对以下事实的见证：$\#E$ 是极限逐点

单调，而这直接来自命题 3.2.3 的证明：如果 E_0 没有等价类，则 E_0 与 E_+ 之间的同构可以容易且一致地构造，并且我们需要#E 是极限逐点单调这一见证来构造 $\varepsilon\tau$。

最后，下面简要证明：要保证一致性，输入中确实必须包含 #E 是极限逐点单调的见证。假设存在一个可计算过程 F，它以一个 $0'$-指标作为输入，该指标对应一个没有无限类且 #E 极限逐点单调的等价关系 $(E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}})$，并输出 $(E, \simeq)$ 的一个可计算指标。那么，利用相对于 $0'$ 的递归定理，我们可以如下构造一个等价关系 E：首先，考察 $F(E)$。通过诉诸 $0'$，不失一般性地假设 $F(E)$ 是一个关系结构的定义良好的指标；并且可以假设它表示一个有效的等价关系，因为存在一个可计算过程，它以关系结构 R 的指标为输入，并输出等价关系 $E(R)$ 的一个指标，且若 R 原本就是等价关系，则 $E(R) \cong R$。现在，利用 $0'$，询问 $F(E)$ 是否包含任何元素。如果没有，就令 E 由每种大小各一个等价类组成。如果有，就选取一个元素，并反复询问：该元素的等价类大小是否至少为 $n+1$? 每当答案为“是”时，就向 E 中添加一个大小为 n 的等价类。如果某次答案为“否”，这就意味着该元素的等价类大小恰好为 n，因此我们不添加这种大小的等价类，而是添加其他每种大小的等价类。显然，这保证了 E 与 $F(E)$ 不同构，尽管 E 不含无限等价类，并且 #E 要么是 $\mathbb{N}$，要么是 $\mathbb{N}$ 减去一个点，因此是极限逐点单调的。这就产生了矛盾，说明这样的可计算 F 不可能存在。

注释 3.2.5. 我们将“#E 有限”的情形单独（且非一致地）处理，这是不可避免的，原因如下。我们断言，不存在一种一致方式，能将一个 $0'$-可计算等价关系的指标（$E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}}$）转换为（$E, \simeq$）的可计算指标，即使该关系没有无限等价类也是如此。事实上，我们证明一个更强的结论：任何能够一致地将一个具有无限多个单元素类、且有一个或两个大小为二的等价类[10]，、没有其他大小类的 $0'$-可计算等价关系（$E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}}$）转换为（$E, \simeq$）的可计算指标的预言机 X，都可以用来计算 $0''$。

假设我们想确定可计算函数 $f(x)$ 是否全定义。首先注意，我们可以一致地（且可计算地）构造一个 $0'$-可计算等价关系的指标（$E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}}$），该关系完全由无限多个单元素集和一个二元类组成；但如果存在某个 x 的取值，使得$f(x)\uparrow$，那么我们就再添加一个含有两个元素的等价类。随后，利用预言机 X，我们构造（$E, \simeq$）的一个可计算指标。我们可以在 E 中进行可计算搜索，寻找两对彼此不同但等价的元素。当且仅当 f 非全时，我们会找到两对。这表明 X 枚举了非全指标的集合，而这直接推出 $X \geq 0'$。因此，X 无需在 E 中可计算地搜索两对彼此不同的元素，而是可以在有限时间内检验是否存在这样的元素，从而确定 f 是否全定义。

注释 3.2.6。 要理解为什么特征集有限的等价类在计算上如此难以处理，可以考虑以下直觉：从 $0'$的角度来看，$(E, \simeq)$的一个可计算副本，比$(E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_{n\in\mathbb{N}})$的一个 $0'$-可计算副本具有更强的描述能力。换言之，$0'$ 可以从$(E, \simeq)$的一个可计算副本中读出某些计算内容，而这些内容无法从$(E, \simeq, \{P_{\geq n}\}_n)$的一个 $0'$-可计算副本中读出；这类内容的一个例子，是以下问题的答案：“ E 中是否存在大小大于或等于 n的等价关系？”或者更一般地说：“ E 中是否至少有 k 个大小为 $\geq n$的等价关系？”因此，要将 E 的一个 $0'$-可计算副本转换为其可计算副本，知道这些问题的答案是必要条件，因为可以利用 $0'$ 从该可计算副本计算出这些问题的答案。这解释了为什么具有无穷多个等价关系或任意大的有限等价类的情形在计算上容易处理：这些问题的答案总是“是”。此外，这些问题的答案总是简单到可以用有限多个信息比特编码，因此可以将其非一致地硬编码进算法中，从而得到$(E, \simeq)$的一个可计算副本；然而，无法一致地做到这一点，解释了为什么命题 3.2.3 无法像现在这样改写为一致版本。

[10]请注意，这意味着 #$E = \{1,2\}$，尤其是一致极限单调的。

3.3 Khisamiev 定理

以下定理已见于文献，例如参见 [4]的第 5 章。我们将其作为定理 2.3.1 的推论得到。它是定义 $0'$-可计算可枚举类型结构的主要动机。

下文中，我们将群的可枚举呈示理解为对该群的一种描述：它由一列生成元和关系构成，并且存在一个计算机程序能够枚举这列生成元和关系。在这里，这等价于可计算性理论中结构的更一般的可枚举呈示概念。

定理 3.3.1（Khisamiev）。每个可枚举呈示的无挠阿贝尔群都同构于一个可计算群。此外，如果该群非平凡，那么可以根据其可枚举呈示的指标一致地构造这个可计算副本。

证明：给定一个群 G 的可枚举呈示，我们首先在适当的签名 $\mathcal{L}'$ 下构造 G 的一个 $0'$-可计算的 c.e.型副本；随后我们将证明，任何非平凡的无挠阿贝尔群都在 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ 下具有 QETP（一致地），其中 $\mathcal{L}$ 是只包含三元谓词 $S(x,\ y,\ z) \equiv$“$x + y = z$”（及其否定，以及等号及其否定）的签名。

签名 $\mathcal{L}'$ 应包含 $\mathcal{L}$，以及：

- 可数多个谓词 $Q_{n,\ \vec{c}}(\vec{x})$，以 $n \in \mathbb{N}$ 和有限元组 $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$ 为参数：

$$Q_{n,\vec{c}}(\vec{x}) \equiv \text{“}n \mid c_1x_1 + \cdots + c_kx_k\text{”}.$$

  注意，我们允许 n 等于零；在这种情况下（因为 $0 \mid y$ 当且仅当 $y = 0$），$Q_{0,\ \vec{c}}(\vec{x})$ 对应于谓词 $\vec{c} \cdot \vec{x} = 0$。

- 可数多个谓词 $\neg Q_{0,\ \vec{c}}(\vec{x})$，以有限元组 $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$ 为参数：

$$\neg Q_{0,\vec{c}}(\vec{x}) \equiv \text{“}c_1x_1 + \cdots + c_kx_k \neq 0\text{”}.$$

- 可数多个谓词 $\{n\Delta(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$，其含义如下：我们将仔细选取 G 的一个指定非零元素，并称之为 δ；而 $n\Delta(x)$ 应解释为“$x = n\delta$”。

我们将需要一些关于 $\mathbb{Z}$-模的线性代数，以证明我们可以从 G 的一个可计算可枚举呈示一致地得到 G 的一个 $0'$-可计算的 c.e.型副本。然后，我们将说明如何选择 G 中将标记为 Δ 的元素。要得到 G 的 $0'$-可计算 c.e.型副本，基本思路如下：考虑一个可计算过程，输出所有可能的生成元线性组合。对于每个新生成元线性组合（比如 d），我们先检查它是否等于此前生成的某个组合（借助 $0'$，这很容易检查）；若不等，我们就输出其相对于此前已输出元素的类型的一个可计算可枚举指标。正谓词很容易处理——例如，要检查 $5 \mid 4d + 6c$（其中 c 是此前输出的生成元组合），只需检查是否存在另一个生成元组合 u 满足关系 $5u - 4d - 6c = 0$。这是一个可计算可枚举的检查。困难在于负谓词，其中 $\neg Q_{0,\ \vec{c}}(\vec{x})$ 是一般情形。换言之，我们需要在单个可计算可枚举指标中编码迄今为止输出的元素的所有线性组合中哪些等于零的完整信息。

下面是交换代数中的一个事实，其证明可见于任何介绍主理想整环上的模的标准教材（例如 [5]）：

事实 A 任意子模 M of $\mathbb{Z}^k$ 都存在一个有限基。

我们需要这个事实的一个有效版本。以下是一个铺垫，虽然我们不会直接使用它，但它体现了主要思路：

事实 B 给定一个有限 给定集合 $X \subseteq \mathbb{Z}^k$，我们可以有效地求出由 X 生成的 $\mathbb{Z}^k$ 的子模的一组基 .

证明思路：对通常的高斯消元算法稍作修改，并将其应用于行由 X 中的元素构成的矩阵。要消去主元下方的元素，不要通过除法将主元元素化为 1，而是使用欧几里得算法，将主元化为它自身与其下方所有元素的最大公约数；这样一来，就可以将其下方的所有元素消为零。

现在我们已经可以陈述并证明将要使用的版本：

Fact C 给定 $\mathbb{Z}^k$ 的子模 M 的一个可计算可枚举指标，我们可以通过 $0'$ 有效地找到 M 的一组基 .

证明思路：考虑一个宽度为 k、高度可能无限的矩阵，其各行为 M 的元素。使用 $0'$ 求出第一列元素的最大公约数，记为 d。如果 $d = 0$ （即第一列的所有元素都为零），则跳到下一步。如果 $d \neq 0$，则找出 M 的若干行的一个线性组合，使其第一坐标为 d ，并将这个组合加入基中。然后，如果 $k \geq 1$，递归地将此算法应用于一个宽度为 $(k-1)$、高度可能无限的矩阵，该矩阵的各行由前一个矩阵中首项为 0 的行组成。找到一个行组合，使其第一坐标为新的最大公约数后，将原矩阵中相应行的组合加入基中。经过 k 步后，便可得到 M 的一组基。

回到我们原来的问题：我们有一组生成元组合，比如说 d_0、 d_1.....、d_k，并且我们希望编码这些元素的所有可能的、结果为零的线性组合。我们通过对 $\mathbb{Z}^{k+1}$ 的可计算可枚举子模应用事实 C 来做到这一点，该子模由

$$M = \{\, \vec{c} \in \mathbb{Z}^{k+1} \mid \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \,\}.$$

若能取得 M 的一个基，比如说 b_1, ..., b_ℓ （编码到矩阵 B 的各列中），我们就可以通过使用标准算法在 $\mathbb{Q}$ 上求解线性方程 $B\vec{x} = \vec{c}$，来判断任一系数集合 $\vec{c}$ 是否属于 M （从而判断对 $Q_{0,\ \vec{c}}$（$\vec{d}$）应回答是或否），并且当且仅当存在一个解且其系数全为整数时断定 $\vec{c} \in M$。通过将这个基硬编码进一个可计算可枚举指标，我们因此可以得到生成元线性组合的元组 $\vec{d}$ 的原子 $\mathcal{L}'$-类型的一个可计算可枚举指标。

现在，让我们解释如何选择元素 δ，我们将用它来判定谓词 $n\Delta$。当然，这必须事先完成，以便我们能够预先将对应于 δ 的生成元组合硬编码到 G 中各元素类型的可计算可枚举指标里。

选择 δ有简单方法和困难方法。简单方法就是从 G中任意选取一个非零元素。问题在于，作出这一选择需要使用关于 $0'$的预言机，这将导致一个非一致呈现。不过，如果不关心一致性，就可以继续进行，而忽略我们现在将提出的、困难但一致的元素选择方法。

考虑以下模式：令 $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 枚举所有可能的生成元组合。首先，我们猜测 $\delta = C_0$，并查看这些关系，直到（如果最终确实发生）我们看到足够多的关系，从而得出$C_0 = 0$。发生这种情况时，我们猜测 $\delta = N_1C_1$，其中 N_1 是一个能被足够多个整数整除的非零数。作出这一选择，是为了使得对于每个数 k —— 在发现 $C_0 = 0$之前，我们已经能够得出 $k \mid C_0$——都有 $k \mid N_1$ ，因而有 $k \mid N_1C_1$。我们以这种方式继续枚举关系，直到能够得出 $N_1C_1 = 0$，或者等价地得出 $C_1 = 0$。如果发生这种情况，我们改变猜测，改为猜测 $\delta = N_2C_2$，其中 N_2 具有足够多的整除条件；同样地，我们此前关于 N_1C_1 已经得出的每个整除条件，对于 N_2 也成立，从而有 N_2C_2。由于根据假设， G是一个非平凡群，最终这一过程将遇到生成元的一个非零组合，而 $0'$ 能够预先确定哪个元素是 δ 。

读者或许会想知道，这个过程究竟在哪方面更具一致性。毕竟，极限生成元组合 N_MC_M 无法一致地计算出来，只能以 $0'$-一致的方式计算。然而，关键在于，我们可以如下所示，一致地计算出极限生成元组合 δ 的类型的一个可计算可枚举指标：按照用于求出 δ 的过程进行；每当我们断定（当前对） δ 的一个新的整除性时，就将该整除性加入其类型中。我们特意确保，加入的任何整除性之后都不需要删除。谓词 $\neg Q_{0,c}(x)$ 除了 $\neg Q_{0,0}(x)$ 之外全都为真，因为该群是无挠的。因此，将这些谓词加入类型后，我们便得到 δ 的类型的一个枚举。

下面，我们将以关键方式使用 δ 的类型（即用来计算 ε_τ），因此能够以一致方式计算该类型至关重要。

现在，我们已经得到了一个关于签名 $\mathcal{L}'$ 的群的 $0'$-可计算可枚举型副本。接下来将证明，每个带有指定非零元素且其原子型可计算可枚举的非平凡无挠阿贝尔群都满足 QETP。

- 首先，我们构造 χ_{q°。这是对标准证明的一种改编。该证明表明，带有整数整除谓词的无挠阿贝尔群理论允许进行量词消去；例如，可在 [9, 附录 A2]中找到该证明。简而言之：

  – 不失一般性，假设 $q(\vec{x},\ \vec{y})$是原子公式的析取（见注 2.2.9），因此可以表示为一个由整数系数方程和不等式组成的方程组

  $$q(\vec{x},\vec{y}) \equiv \begin{cases} M\vec{x} = N\vec{y}, \\ K\vec{x} \neq L\vec{y}. \end{cases}$$

  重要提示： 这里的记号 $K\vec{x} \neq L\vec{y}$ 并非用来表示“向量 $K\vec{x}$ 和 $L\vec{y}$彼此不同”，而是表示更强的事实：“向量 $K\vec{x}$ 的每个分量都与 $L\vec{y}$中对应的分量不同”。因此，处理这些不等式时务必谨慎——例如，不能对它们进行任何形式的高斯消元。

  – 现在，写作 $N = ADB$，其中 D 是补零后的对角矩阵（即形如 $\left[\begin{smallmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$且 D_0 为对角矩阵），而 A和 B 都是整数上的可逆矩阵——这总能用类似事实 B 中的方法做到，参见例如 [1, 定理 2.12]。于是，$q(\vec{x},\ \vec{y})$ 在逻辑上等价于一个新的方程与不等式组

  $$q(\vec{x},\vec{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} M'\vec{x} = DB\vec{y}, \\ K'\vec{x} \neq LB^{-1}B\vec{y}. \end{cases}$$

  – 由于 B 可逆，该方程组有解等价于下面另一个方程组有解

  $$\exists_{\vec{y}} q(\vec{x},\vec{y}) \Leftrightarrow \exists_{\vec{z}} \begin{cases} M'\vec{x} = D\vec{z}, \\ K'\vec{x} \neq L'\vec{z}. \end{cases}$$

  – 方程 $M'\vec{x} = D\vec{z}$ 中对应于 D 的非零项的行给出如下类型的方程：$nz_i = \vec{a}\cdot\vec{x}$。这使我们能够从其他每个（不）等式中消去每个 z_i（同时保持逻辑等价）：任何其他（不）等式都可以乘以 n（保持逻辑等价；这用到了 $n \neq 0$ 以及我们所处理的是无挠群这一事实），从而得到一个（系数）$\times nz_i$，再用它替换（系数）$\times$（$\sum a_i x_i$）。因此，我们可以消去所有对应于 D 非零行的 z 变量，现在方程组变为

  $$\exists_{\vec{y}} q(\vec{x},\vec{y}) \Leftrightarrow \exists_{\vec{z}} \exists_{\vec{w}} \begin{cases} M_0\vec{x} = 0, \\ n_1 z_1 = \vec{c}_1\cdot\vec{x}, \\ \vdots \\ n_\ell z_\ell = \vec{c}_\ell\cdot\vec{x}, \\ K'\vec{x} \neq L'\vec{w}. \end{cases}$$

  – 包含 z 变量的方程变成了整除陈述，即 $\exists_{z_i} nz_i = \vec{c}\cdot\vec{x} \Leftrightarrow n \mid \vec{c}\cdot\vec{x} \equiv Q_{n,\vec{c}}(\vec{x})$，因此现在我们只需处理不等式 $K'\vec{x} \neq L'\vec{w}$。
  – 现在，让我们将方程 $K'\vec{x} \neq L'\vec{w}$ 分层如下：首先，考虑不使用任何 w-变量的方程。然后，考虑使用 w_1 而不使用其他变量的方程。接着，考虑只使用 w_1 和 w_2的方程，依此类推。不使用 w-变量的方程很重要——保留它们。这些是对 $\vec{x}$ 的要求，我们无法摆脱。我们将这些方程称为 $K_0\vec{x} \neq 0$。另一方面，在层的每个新阶段，所得方程无疑会被某个 w_i满足。例如，如果第一层有 e 个方程，那么它至多禁止

e 个 w_1的可能取值。但这个群是非平凡的，因而是无限的，所以至少存在一个有效的 w_1选择。然后，在下一层中，取决于 w_1的这一选择，对于 w_2而言，再次至多有（方程数量）个被禁止的值。只需选择 w_2 ，使其不属于这些值即可。以此方式继续，我们可以确保所有包含 w变量的方程都能自动得到满足，因此不会增加任何信息。

– 总　　结而言，我们已经证明，任意存在语句都等价于一个如下形式的系统　　e

$$\exists_{\vec{y}} q(\vec{x},\vec{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} M_0\vec{x}=0, \\ n_1 \mid \vec{c}_1\cdot\vec{x}, \\ \vdots \\ n_\ell \mid \vec{c}_\ell\cdot\vec{x}, \\ K_0\vec{x}\neq 0, \end{cases} \tag{2}$$

并且该系统可以有效地求出，因此我们以这种方式定义 $\chi_q(\vec{x})$。

– 若 q 并非如最初假设的那样是原子公式的析取，则将其写成合取范式 $q \equiv q_1 \vee \cdots \vee q_k$，并令 $\chi_q \equiv \chi_{q_1} \vee \cdots \vee \chi_{q_k}$。

• 接下来，我们构造 τ。直观地说，给定 $q(\vec{x},y,\vec{z})$，我们考虑所有形如$y=\frac{1}{a}\vec{c}\cdot\vec{x}$ 的 y的可能赋值（如果存在这样的元素）。在下面证明 QETP 时，我们将证明，假设 $\vec{x}$ 并非所有元素都为零，则存在一种满足 $\chi_q(\vec{x},\frac{1}{a}\vec{c}\cdot\vec{x})$ 的组合。我们将选取这样一种组合，并令 $\tau_{q\varphi}(\vec{x},y) \equiv (ay=\vec{c}\cdot\vec{x})$。我们还需要处理元组 $\vec{x}$ 中的所有元素都为零的情况（通常在元组为空，或仅包含一个恰好为零的元素时会发生），这就是我们需要指定元素 δ 的原因——如果 $\vec{x}$中的所有元素都为零，我们就令 $\tau(\vec{x},y) \equiv N\Delta(y)$，其中 N 足够大，能够涵盖元素元组 $\vec{z}$所要求的所有整除条件（例如，如果 $q(y,z) \equiv (z+z=y)$，我们就令 $y=2\delta$）。

让我们更正式地讨论这一过程。给定 $q(\vec{x},\ y,\ \vec{z})$:

– 设 $\varphi_0(\vec{x}) \equiv \wedge_i(x_i=0)$（或者，如果要刻意追求不必要的精确性，设 $\varphi_0(\vec{x}) \equiv \wedge_i Q_{0,1}(x_i)$），并设 $\tau_{q\varphi_0}(\vec{x},y) \equiv \varphi_0(\vec{x}) \wedge N\Delta(y)$，其中 N 足够大，以确保 $\forall_d \chi_q(\vec{0},Nd)$。– 对每个非零整数 a 和整数元组 $\vec{c}$，设 $\varphi_{a\vec{c}}(\vec{x}) \equiv$“$\chi_q(\vec{x},\frac{1}{a}\vec{c}\cdot\vec{x})$”，并设 $\tau_{q\varphi_{a\vec{c}}}(\vec{x},y) \equiv (ay=\vec{c}\cdot\vec{x})$。接下来需要解释我们所说的 $\chi_q(\vec{x},\frac{1}{a}\vec{c}\cdot\vec{x})$ 是什么意思。由于假定 q 是一种类型，根据定义，$\chi_q(\vec{x},y)$ 是如 (2) 中所示的一个方程组。将所有方程乘以 a，我们便得到一个等价的方程组，其中 y 的每个实例都乘以 a。换言之，我们可以将 $\chi_q(\vec{x},y)$ 重写为 $\Leftrightarrow \psi(\vec{x},ay)$，因此公式“$\chi_q(\vec{x},\frac{1}{a}\vec{c}\cdot\vec{x})$”可以理解为

–

$$\text{“}\chi_q(\vec{x},\frac{1}{a}\vec{c}\cdot\vec{x})\text{”} \equiv (a \mid \vec{c}\cdot\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x},\vec{c}\cdot\vec{x}).$$

• 最后，我们构造 $\varepsilon\tau$。给定 $q(\vec{x},y,\vec{z})$ 以及作为上述情形之一的 $\varphi(\vec{x})$，还有扩展 q 的 $Q(\vec{x},y,\vec{z},\vec{w})$，我们希望找到一个与 $\exists_y[\chi_Q(\vec{x},y) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x},y)]$ 等价的无量词表达式。直观上，其想法是：在任一情形中，我们的公式 τ 都恰好确定 y （作为 $\vec{x}$的函数），因此我们只需“把该 y 代入 $\chi_Q(\vec{x},y)$”。为更精确地做到这一点，我们分情形讨论：

– 若 $\tau_{q\varphi}(\vec{x},y) \equiv (ay=\vec{c}\cdot\vec{x})$，我们采用同样的“将每个方程乘以 a”技巧，写出一个对应于“$(a \mid \vec{c}\cdot\vec{x}) \wedge \chi_Q(\vec{x},\frac{1}{a}\vec{c}\cdot\vec{x})$”的公式。所得公式即为所需的 $\varepsilon\tau$。

– 如果 $\tau_{q\varphi}(\vec{x},y) \equiv \varphi_0(\vec{x}) \wedge N\Delta(y)$，那么直观地说，我们知道，对于满足 τ 的元组，所有 x_i 都为零，并且 $y=N\delta$。因此，可以消去存在量词，我们希望确定 $\chi_Q(\vec{0},N\delta)$ 是否成立。此时，拥有 δ 的类型的可计算可枚举指标就很重要；而且，如果我们希望得到一致的结果，就需要在不借助任何预言机的情况下取得这个指标

。知道 δ 的类型的可计算可枚举指标后，我们只需查询 $\chi_Q(\vec{0}, N\delta)$ 是否成立——更准确地说，存在一个可计算序列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\begin{cases} G \nvDash \chi_Q(\vec{0}, N\delta) & \Rightarrow B_n = \bot \text{ for all } n, \\ G \vDash \chi_Q(\vec{0}, N\delta) & \Rightarrow B_n = \top \text{ for all but finitely many } n. \end{cases}$$

因此，在这种情形下，我们设

$$\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \equiv \bigvee_n B_n.$$

现在我们验证上述定义是 QETP 的见证。

(a) ($\mathcal{L}$ 有限且在否定下封闭) 显然。

(b) ($G \vDash \chi_q(\vec{x}) \leftrightarrow \exists_{\vec{y}} q(\vec{x}, \vec{y})$) 根据构造。

(c) 这里有两个项目符号。按相反顺序：

- ($G \vDash \chi_q(\vec{x}) \wedge \varphi(\vec{x}) \to \exists_y \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y)$) 直接由构造得出。
- （G 中满足 $\chi_q(\vec{b})$的每个元素元组 $\vec{b}$都满足某个 $\varphi(\vec{b})$，其中(q, φ)属于 τ的定义域）– 若 $\vec{b} = \vec{0}$，则这是显然的。– 若某个 $b_i \neq 0$：我们希望证明存在 $a \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 和 $\vec{c} \subseteq \mathbb{Z}$，使得 $a \mid \vec{c} \cdot \vec{b}$ 且$\chi_q(\vec{b}, \frac{1}{a}\vec{c} \cdot \vec{b})$。为此，我们证明如下相关引理，它显然蕴含所需结论：

引理 3.3.2. 若 $q(\vec{x}, \vec{y})$是较小语言 $\mathcal{L}$中的一个无量词类型，且 b 是 G 中的一个元组，使得 $G \vDash \exists_{\vec{y}} q(b, \vec{y})$，并且 b 的某个元素非零，则存在整数向量 $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_\ell$ 以及非零整数 $a_1, \ldots, a_\ell$，使得对每个 i，都有 $a_i \mid \vec{c}_i \cdot \vec{b}$，且 $G \vDash q(\vec{b}, \frac{1}{a_1}\vec{c}_1 \cdot \vec{b}, \ldots, \frac{1}{a_\ell}\vec{c}_\ell \cdot \vec{b})$。

引理的证明：我们首先将 $q(b, \vec{y})$ 写成一个线性方程组

$$q(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \begin{cases} M\vec{b} = N\vec{y}, \\ K\vec{b} \neq L\vec{y}. \end{cases}$$

然后，如同在 χ_q 的构造中一样，我们用替代变量 $\vec{z}$重写该方程组，这些替代变量通过关系 $\vec{z} = B\vec{y}$ 与变量 $\vec{y}$ 相关联，其中 B 为可逆矩阵：

$$\begin{cases} M'\vec{b} = D\vec{z}, \\ K'\vec{b} \neq L'\vec{z}, \end{cases}$$

其中 D 是一个补零的对角矩阵。现在，让我们看看方程 $M'\vec{b} = D\vec{z}$ 的各行。有些行对应于 D 对角线上的零元素，即形式为 $\vec{m} \cdot \vec{b} = 0$ 的行。这些行可以忽略——因为已知 $\exists_y q(\vec{b}, \vec{y})$，这些行仅由元素之间成立的真线性关系构成，而相应的 z-变量是自由的。我们将它们称为 $\vec{z}_{\text{free}}$。其余的 z-变量则由方程确定，对应于形式为 $\vec{c}_i \cdot b = a_i z_i$ 的方程。与 χ_q 的构造一样，这意味着相应的 z 变量可表示为 $z_i = \frac{1}{a_i}\vec{c}_i \cdot \vec{b}$（这尤其排除了 $a_i \mid \vec{c}_i \cdot \vec{b}$ 的情况）。不失一般性，我们用相应的、以 $\vec{b}$ 表示的扩张代替已确定的变量（这可能需要通分），这样只需满足关系$K''\vec{b} \neq L''\vec{z}_{\text{free}}$。这里再次运用与构造 χ_q 时类似的推理，但略有不同。将方程分层，使我们先确定 z_1，再确定 z_2，

依此类推，我们会发现，在每一步中，z_i 只能取有限多个被禁止的值。接着，我们取某个非零 b_j，并对某个足够大的系数 k 设定 $z_i = kb_j$。

最终可得，方程组 $q(b, B\vec{z})$ 存在一个解，其中 $\vec{z}$ 的每个分量都是由 b 的各分量构成的有效有理组合。将其乘以整数矩阵 B，即可得到所需的向量 $\vec{y}$，其分量也全都是有效有理组合，并且它是 $q(\vec{b}, \vec{y})$ 的一个解。

（引理证明完毕。）

至此，条目 (c) 的证明完成。

(d) ($G \vDash \exists_y [\chi_Q(\vec{x}, y) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y)] \leftrightarrow \varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})$) 根据构造显然成立。

(e) ($G \vDash \varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x}) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y) \rightarrow \chi_Q(\vec{x}, y)$) 本质上，这是成立的，因为 $\tau_{q\varphi}(\vec{x}, y)$ 总是能唯一确定 y 关于 $\vec{x}$ 的值。因此，如果存在某个 y_0 满足 $\chi_Q(\vec{x}, y_0) \wedge \tau_{q\varphi}(\vec{x}, y_0)$（即 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})$ 成立），并且某个特定的 y 满足 $\tau_{q\varphi}(\vec{x}, y)$，那么必然有 $y = y_0$，从而 $\chi_Q(\vec{x}, y)$。

因此，我们现在可以对 $0'$-可计算的 G（加上指定元素）的可计算可枚举型副本应用定理 2.3.1。由于这个副本是从原始表示一致地得到的，因此结果也是一致的。■

备注 3.3.3. 在前面的证明过程中出现了一个实用的技巧：如果碰巧 $\tau_{q\varphi}(\vec{x}, y)$ 具有这样的性质，即 y 能由 $\vec{x}$ 唯一确定，那么 QETP 的条目 (e) 就自动成立。这一技巧并不适用于本文中的其他例子，但它确实指出了一点值得注意的地方：τ 的任务是尽可能唯一地确定 y，这样定理 2.3.1 才“知道”哪些对象可以与 y 匹配，哪些不可以。若存在一个唯一且明确确定的元素可供匹配，这是最理想的情况；但即便在其他情况下，我们也希望 τ 尽可能确定 y 的 $\mathcal{L}'$-类型（事实上，从某种意义上说，这正是 QETP 条目 (e) 的本质）。

3.4 带有后继和前驱的线性序

定理 3.4.1 ([17, VII.26])。假设 L 是一种线性序，其中每个元素都有后继和前驱，并且结构 $(L, <, S)$ 有一个 $0'$-可计算副本，其中 $S(x, y)$ 是后继关系。那么，结构 $(L, <)$ 有一个可计算副本。

证明：最重要的一步是构造一个 $0'$-可计算的、具有 c.e.型的副本 $(L, <, \not<, =, \neq, \{D_{\geq i}\}_{i\in\mathbb{N}})$，其中 $D_{\geq i}(x, y)$ 是“存在 $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = y$”这一关系，因为这是实现量词消去所需的最低限度语言。这样做的主要困难在于，$0'$ 对任意两个元素所知不足，无法在有限时间内创建一个使它们满足距离关系的可计算可枚举指标。因此，我们需要构造一个中间结构，使其中某种距离关系是一致可计算可枚举的。

我们知道 $(L, <, S)$ 是 $0'$-可计算的，因此存在一个可计算过程，它生成一个 $(<, S)$-结构，并且允许删除先前添加的元素；从未被删除的元素构成 $(L, <, S)$ 的一个同构副本。我们构造一个辅助可计算线性序，使其充当 $(L, <, S)$ 的可计算影子，并以此构造 L 的一个 $0'$-可计算可计算枚举型副本。

不失一般性，假设每当一个真实元素（即永远不会被删除的元素）被加入 L时，此刻 L的所有元素本身都是真实的（因为当某个元素被删除时，只需删除自其加入以来所添加的全部元素，然后再把它们重新添加回去）。我们构造一个新的可计算线性序 $(L_+, <)$，其元素如下构成：对于某些（但并非全部）曾经被加入 L 的元素 x（即使后来被移除），在 L_+中有一个对应元素 x_+，使得若 x 与 y同时共存于 L 中，则 $x < y$ 当且仅当 $x_+ < y_+$。以下是构造 L_+的过程：每当一个元素 x 被加入 L时，我们设想 L_+ 中存在一个元素 x_+，使得对此时 L 中的每一个 y，x_+与 y_+ 的比较方式都与 x与 y的比较方式相同。然后，我们需要确定 x_+ 如何与L_+ 中那些不属于这种形式的当前元素进行比较。传递性会强制某些比较。那些未被强制的比较可以

被任意决定，例如对每一个比较未被强制的元素都规定 $x_+ < z$。最后，检查加入该元素是否会破坏 $(L_+, <)$ 是一个线性序这一要求（例如因为 x实际上是 L 的一个伪元素，它以一种明显荒谬的方式与 L 的其余元素进行比较），并且重要的是，它是否位于 L 中两个当前被认为是后继的元素的像之间。如果它不破坏这些要求，我们就将 x_+ 加入 L_+。否则，继续处理下一个被加入 L的元素。

我们做几点观察：

- 注意， L 通过映射 $x \mapsto x_+$嵌入 L_+。这条陈述的主要内容是，对于每个实数 x，我们确实会将 x_+ 添加到 L_+中。这要求我们作出如下假设：每当将一个真实元素 x 添加到 L时，当前 L 中的所有元素也都是真实元素。这确保了 x_+ 与所有其他形如 y_+ 的元素之间的比较方式一致。根据线性序的一条标准事实（合并性质），我们随后可以将 x_+ 添加到 L_+ 中，使得所得的序仍是线性序。事实上，“将x_+ 添加为它必然所属区间中最左侧的元素”这一规则，是一种一致的做法。
- 如果 xSy 是 L中的元素，那么 x_+ 和 y_+之间只有有限多个 L_+ 中的元素。这是因为在这两个元素加入之后，不会再有元素被添加到 L_+ 中。
- 在任意可计算线性序（例如 L_+）中，距离关系$\{D_{\geq i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 都是一致可计算可枚举的，因为它们是由 Σ_1定义的。因此，存在一个过程，以来自序 L_+的有限个元素组成的元组作为输入，并输出它们在签名$(<, \not<, =, \neq, \{D_{\geq i}\}_{i\in\mathbb{N}})$中的原子型的一个可计算可枚举指标。

现在我们可以创建 $0'$-可计算的 L 的可计算可枚举型副本了。首先，我们将 $0'$-可计算可枚举子集$L_{+-} \subseteq L_+$ 定义为

$$L_{+-} = \{\, z \in L_+ \mid \text{there exist real elements } xSy \in L \text{ such that } x_+ \leq z \leq y_+ \,\}.$$

然后，我们对 L_{+-} 中的元素进行 $0'$-枚举，并且每加入一个新元素，我们也为截至目前已枚举的元素元组生成一个可计算可枚举指标，来自序$(L_+, <)$。我们声称，所得线性序与 L 同构，并且谓词 $D_{\geq i}$ 得到了正确的解释。

- （所得线性序与 L 同构）：考虑嵌入 $f\colon L \to L_{+-}$，其定义为 $x \mapsto x_+$。（我们已经看到，此映射定义良好，并将 L 嵌入 L_+；根据 L_{+-} 的定义，以及 L 中每个元素都有后继（或前驱）这一事实，显然对于每个 $x \in L$，都有 $x_+ \in L_{+-}$。）这是一个保序映射，具有以下性质：

  – 如果 xSy，那么 f（x）与 f（y）之间只有有限多个元素，– L_{+-} 中的每个元素都与 f的像中的某个元素相距有限距离。

  可以论证（事实上，定理 3.4.1 的标准证明也要用到这一事实），在这种情况下，$(L, <)$ 与 $(L_{+-}, <)$ 同构：从 L 的每个有限距离块中选取一个代表元 x，并将 $S^i x$（$i \in \mathbb{Z}$）映射到 S^i（f（x））。要说明这个映射——记为 g ——定义良好，需要一些细节[11]，g 是嵌入这一点显然，而 g 是满射则意味着：L_{+-} 中的每个元素 z 都与某个 y_+相距有限距离；如果 x 是 y 在 L中的块的代表元，那么我们必须有 z 与 x_+相距有限距离。如果 i 是 z 与 x_+之间的带符号距离，那么我们有 $z = g(S^i x)$。

- （谓词 $D_{\geq i}$ 被正确解释）：就本论证而言，我们将由 L_+ 诱导出的谓词（因而也就是我们拥有其可计算可枚举指标的那些谓词）记为$\{D^{\text{ind}}_{\geq i}\}_{i\in\mathbb{N}}$，并将“真”谓词记为$\{D_{\geq i}\}_{i\in\mathbb{N}}$。我们希望证明 $L_{+-} \vDash D^{\text{ind}}_{\geq i}(x, y) \leftrightarrow D_{\geq i}(x, y)$。蕴含 $\leftarrow$

[11]必须验证 L_{+-} 中的每个元素都有后继和前驱。这是因为 L_{+-}中的每个元素 z 都满足 $\exists_x x_+ < z < (S^3 x)_+$，并且 x_+ 与 $(S^3 x)_+$之间只有有限个元素，因此必定存在一个大于（分别小于）z的最小元素；只需取有限区间 $\left]z,\ (S^3 x)_+\right]$（分别为 $[x_+, z[$）中的最小（分别为最大）元素即可。

这是显然的，因此我们关注蕴含 $\to$，并用逆否命题加以证明。设 x 与 y是 L_{+-} 的元素，使得 $\neg D_{\geq i}(x, y)$。令 $x^{\leftarrow}$ 为 L 的一个元素，使得$(x^{\leftarrow})_+ \leq x \leq (Sx^{\leftarrow})_+$，并同样定义 $y^{\rightarrow}$，使得$(S^{-1}y^{\rightarrow})_+ \leq y \leq (y^{\rightarrow})_+$。于是，开区间$]x^{\leftarrow},\ y^{\rightarrow}[$ 中的所有元素都被映到 x 与 y之间的（互异）实数元素，因此它们必定只有有限多个（事实上少于 i 个）。从而，区间 $](x^{\leftarrow})_+,\ (y^{\rightarrow})_+[\subseteq L_+$ 的全部实际上都位于 L_{+-}之中，因此在只考虑 L_{+-}的元素时，其中任意两个元素之间的距离得以保持。由于 x 与 y 在 L_{+-}中的距离小于 i，在 L_+中也必定如此，即 $\neg D^{\mathrm{ind}}_{\geq i}(x, y)$。

现在我们有了一个 $0'$-可计算的可计算可枚举型副本 $(L,\ <,\ \not<,\ =,\ \neq,\ \{D_{\geq i}\}_{i\in\mathbb{N}})$，只需证明它具有 QETP，由此根据定理 2.3.1，$(L,\ <)$ 有一个可计算副本：

- 构造 χ_q：给定一个类型 $q(\vec{x},\ \vec{y})$（见注 2.2.9），要求 $\exists_{\vec{y}} q(\vec{x},\ \vec{y})$，这相当于要求（由 q 诱导的变量序是一致的，并且） x_i 按特定顺序排列，且相邻的（按此顺序） x_i 之间有足够的空间，以便加入所需的 y_j。显然，这可以（可计算地）写成 $D_{\geq n_i}(x_i,\ x_j)$ 的正组合。

- 构造 τ：给定一个类型 $q(\vec{x},\ y,\ \vec{z})$，我们如下定义 $\tau_{q\top}(\vec{x},\ y)$。考虑由 q 在变量 $\vec{x}$、 y 和 $\vec{z}$ 上诱导的线性序。
  - 如果在这个序中，存在满足 $x_i < y$ 的 i，则不失一般性地令 i 为最大的此类项，并令 k 为满足 $x_i < z_j < y$ 的变量 z_j 的数量。然后，设
  $$\tau_{q\top}(\vec{x}, y) \equiv D_{\geq k}(x_i, y) \wedge \neg D_{\geq (k+1)}(x_i, y) \text{ (which is to say } S^k(x_i, y)).$$
  - 如果不存在这样的 i，但至少存在一个 x-变量，则令 x_i 为最小的 x-变量，令 k 为满足 $y < z_j < x_i$ 的 z_j 的数量，并设
  $$\tau_{q\top}(\vec{x}, y) \equiv D_{\geq k}(y, x_i) \wedge \neg D_{\geq (k+1)}(y, x_i) \text{ (which is to say } S^k(y, x_i)).$$
  - 如果不存在 x-变量，则设 $\tau_{q\top}(y) \equiv \top$。

- 构造 $\varepsilon\tau_{q\top Q}$：根据 $\tau_{q\top}$ 定义中的相应情形，并使用其中的记号，
  - $\varepsilon\tau_{q\top Q}(\vec{x})$ 表示“$\chi_Q(\vec{x})$，并且 Q 没有在 y 和 x_i 之间添加任何新变量”，
  - 同样，$\varepsilon\tau_{q\top Q} \equiv \chi_Q$ （应用于空元组）。

所有相关性质的验证都很直接，留给读者完成。 ■

3.5 一类简单的树

现在我们给出一个更完整的证明版本，此证明先前只在引言中略作勾勒。提醒一下：如果 T 是一棵树，而 σ 是一个节点，我们用“σ 的父节点”表示（如果存在的话）那个唯一以 σ 为子节点的节点。我们用“σ 的第 a 个父节点”表示（如果存在的话）从 σ 开始，依次向上经过父节点的父节点.....（重复 a 次）后得到的节点。特别地， σ 的第 0 个父节点就是 σ 本身。

命题 3.5.1 ([2, 命题 3.8])。设 T 是 $\omega^{<\omega}$ 中的一棵无限树（即一个非空且对前缀封闭的 $\omega^{<\omega}$ 子集），并且 T 的每个节点要么是叶节点，要么有无限多个子节点，其中只有有限个是叶节点。在 T 上定义以下谓词：

- leaf(x)，表示 x 没有子节点，
- $S_{a^\frown b}(x,\ y)$，这意味着 x 有一个 a 级父节点，且 y 有一个 b 级父节点，并且这两个父节点相同，

- $R_a(x)$，这意味着 x 将树的根作为一个 a 级父节点，

其中的特殊情形包括谓词 $S(x, y) \equiv S_{0^\frown 1}(x, y)$，其含义是 y 是 x的子节点，以及 $R_0(x)$，其含义是 x 是根。

那么，如果结构 $(T$，叶节点 S，$R_0)$ 有一个 $0'$-可计算副本，则结构 $(T$，S，$R_0)$ 有一个可计算副本。

证明：首先，我们注意到，从 $(T$，叶节点 S，$R_0)$ 的 $0'$-可计算副本出发，通过枚举该副本的元素，并对每个新元素找出其直到根的所有前驱，再将这些前驱与截至目前已枚举的所有元素的前驱进行比较，我们可以一致地计算出 $(T$，¬叶节点，$\{S_{a^\frown b}$，$\neg S_{a^\frown b}\}_{a,\ b\in\mathbb{N}}$，$\{R_a$，$\neg R_a\}_{a\in\mathbb{N}})$ 的一个 $0'$-可计算的可枚举类型副本；这一过程使我们能够计算出（更关键的是，将其编码为有限量的信息）该新元素与此前已枚举的其他元素之间成立的哪些 $S_{a^\frown b}$ 关系，以及该新元素到根的距离（以计算 R_a）。因此，只需证明结构 T 在这些签名上满足 QETP

- $\mathcal{L} = (S, \neg S, R_0, \neg R_0, =, \neq)$，以及
- $\mathcal{L}'$ 等于 $\mathcal{L}$，加上 ¬叶节点以及所有谓词$S_{a^\frown b}$、$\neg S_{a^\frown b}$、R_a，以及 $\neg R_a$。

为此，我们首先需要建立一个（一致的）量词消去结果。因此，假设 $q(\vec{x}, \vec{y})$是签名 $\mathcal{L}$中的一个无量词公式，并让我们计算签名 $\mathcal{L}'$ 中的一个公式 $\chi_q(\vec{x})$，使得 $T \vDash \forall_{\vec{x}}(\chi_q(\vec{x}) \leftrightarrow \exists_{\vec{y}} q(\vec{x}, \vec{y}))$。

假设 $q(\vec{x}, \vec{y})$是一个无量词的 $\mathcal{L}$-类型，其所有元素互不相同（见注 2.2.9）。我们希望以无量词的方式改写 $\exists_{\vec{y}} q(\vec{x}, \vec{y})$。让我们暂时考虑用部分函数符号 $P(x)$扩充后的语言，该符号在存在时返回 x 的唯一前驱。于是，每一个变量 y_a，只要 q 中存在 $S(y_a, *)$的某个实例，就可以被替换为 $P(*)$，并附加要求$\neg R_0(*)$。如果发现 $S(y_a, P^n(y_a))$的任何实例，则中止并设置 $\chi_q \equiv \bot$。否则，我们便使用部分函数符号 P，将 $\exists_{\vec{y}} q(\vec{x}, \vec{y})$替换为一个逻辑等价的公式，其中仅保留的变量 y_a 是那些不被要求成为任何其他变量之前驱的变量。对于每一个这样的 y_a，会出现以下两种情形之一：

情况1。存在某个 x_b，使得我们现在有 $x_b = P^m(y_a)$，其中某个整数为 $m \geq 1$。在这种情况下，只要加入要求 $\neg\mathsf{leaf}(x_b)$，就可以消去变量 y_a，同时保持逻辑等价；因为如果 x_b 不是叶节点，它就会有无限多个无限子节点，而这些子节点又会有无限多个无限子节点，如此等等，所以这样的 y_a 总是存在。

情况2。类型 q 并不要求 y_a 的任何前驱是任意一个 x_b。在这种情况下，我们可以消去变量 y_a，因为我们对 y_a 提出的任何（自洽）要求，总能由根的某个足够深的子节点满足。

这个过程终止后，我们就把 $\exists_{\vec{y}} q(\vec{x}, \vec{y})$ 替换成了以下各项的一个逻辑等价的正布尔组合：$\neg\mathsf{leaf}(x_i)$、$P^a(x_i) = P^b(x_j)$、$P^a(x_i) \neq P^b(x_j)$（包括其中一侧未定义良好的情况）、$R_0(P^a(x_i))$ 和 $\neg R_0(P^a(x_i))$。它们分别等价于：$\neg\mathsf{leaf}(x_i)$、$S_{a^\frown b}(x_i, x_j)$、$\neg S_{a^\frown b}(x_i, x_j)$、$R_a(x_i)$ 和 $\neg R_a(x_i)$，由此得到所需的公式 χ_q。

现在，让我们构造 τ。假设给定了一个无量词的 $\mathcal{L}$-类型 $q(\vec{x}, y, \vec{z})$。如同构造 χ 时那样，考虑消去所有作为其他变量前驱的变量 $\vec{z}$。现在有两种情况：

情况1。存在 x_a、m 和 n，使得 $P^m(x_a) = P^n(y)$ 属于 q 的数据。在这种情况下，令 $\tau_{q^\top}(\vec{x}, y) \equiv \chi_q(\vec{x}, y) \wedge \neg$叶节点$(y)$。

情况2。q 的数据并不意味着 y 的某个特定前驱等于任意 x_a的某个特定前驱。这里有两种子情况：要么 q 的数据允许我们精确确定 y 的深度，要么它只能给出深度的下界（因为 y 的前驱中没有一个被规定为根）。根据具体情况，令 N 为 y 的深度或其下界，并令 $\tau_{q^\top}(\vec{x}, y)$表示“$\chi_q(\vec{x}, y)$，且 $\varphi_n(\vec{x})$，且 ¬是叶节点，且 y 处于深度 N，并且 y 与除根之外的任何其他 x_a都没有共同前驱”。（正如引言中所解释的，这可以表示为一个 $\mathbb{W}^c$ 公式。）

最后，我们构造 $\varepsilon\tau_\circ$。给定无量词 $\mathcal{L}$类型 $q(\vec{x},y,\vec{z})$和 $Q(\vec{x},y,\vec{z},\vec{w})$，我们根据$\tau_{q\varphi}$ 的定义属于哪种情况来定义 $\varepsilon\tau_{q\varphi Q}(\vec{x})$：

情况1。如果 $\tau_{q\top}(\vec{x},y)\equiv\chi_q(\vec{x},y)\wedge\neg$叶节点$(y)$，则设置 $\varepsilon\tau_{q\top Q}(\vec{x})\equiv\chi_Q(\vec{x})$。

情况2。如果将 $\tau_{q\top}(\vec{x},y)$ 设定为表示“$\chi_q(\vec{x},y)$，且 $\neg$叶节点(y)，且 y 的深度为 N，且 y 与除根以外的任何 x_a 都没有共同前驱”，则检查 Q是否要求 y 有超过 N 个前驱。如果是，则设置 $\varepsilon\tau_{q\top Q}(\vec{x})\equiv\bot$。如果其中包含关于 y恰好有 N 个不同前驱的相容数据，则检查它是否要求第 N 个前驱为根，且其他前驱都只通过根与任何 x_a相关联。如果是，则设置 $\varepsilon\tau_{q\top Q}(\vec{x})\equiv\chi_Q(\vec{x})$；如果不是，则设置 $\varepsilon\tau_{q\top Q}(\vec{x})\equiv\bot$。最后，如果其中包含关于 y少于 N 个前驱的数据，则检查这些前驱是否都不是根，并且是否都只通过根与任何 x_a 相关联，然后设置 $\varepsilon\tau_{q\top Q}(\vec{x})\equiv\chi_Q(\vec{x})$（如果检查未通过，则设置 $\bot$）。

构造至此结束。通过一个繁琐的模型论论证，可以证明这些公式满足 QETP 的所有条件，因此定理 2.3.1 适用，由此我们得到结构 $(T,\ S,\ R_0)$ 的一个可计算副本。■

4 以更多真理逃脱 Tennenbaum 定理

本节将回答 Pakhomov 在引言中概述的 [19] 问题：是否存在与“包含 $+$ 所有 Π_n 真理的皮亚诺算术”定义等价、且具有可计算非标准模型的理论？答案是肯定的。不过，为了说明我们构造的动机，我们将先简要概述 Pakhomov 最初的构造，以突出我们的构造在何种方面以此为基础。

如引言所述，以下我们主要研究 ZF−inf+TC 理论。该理论由 ZF集合论的公理构成，但去除了无穷公理，并加入了传递闭包公理；在其余公理的前提下，这一公理等价于如下公理：每个集合都属于冯·诺伊曼层级的某一层 V_α。

4.1 Pakhomov 的原始构造

如引言中所述，Pakhomov 在 ZF−inf+TC 中通过对冯·诺伊曼层级进行超限递归，定义了一个三元谓词 $S(x,y,z)$，并可证明它满足规则 $x\in y\leftrightarrow\forall_z S(x,y,z)$；由此，$S$ 的理论与 ZF−inf+TC 定义等价。该谓词还满足某些性质，使得 $(\in,S)$ 的理论适用于跳跃反演型结果，由此可得该理论的一个可计算非标准模型 S。下面简要概述 Pakhomov 在 ZF−inf+TC 中对 S 的定义。我们的定义与 Pakhomov 的并不完全相同，但差异仅在于无关紧要之处。

我们在 $V_{q\alpha}$上定义一个关系 S_α 的递增序列，其中 q 是一个足够大的有限序数，其具体取值稍后确定（Pakhomov 的构造取 $q=6$，而我们选择的构造稍低效一些，目的是让它更容易理解，因此取 $q=10$），使得每个 S_α在彼此都有定义的地方都与其他每个 S_β 一致。在极限序数上，该关系由$V_{q\text{上确界}\,\alpha_i}=\cup V_{q\alpha_i}$唯一确定，因此只需说明后继步骤。接下来，我们用 S_α来定义 $S_{\alpha+1}$。

给定 α、集合 $A\subseteq V_{q\alpha}$和 $SA\subseteq(A\cup\{q\alpha\})^3$,[12]，定义一个满足以下条件的元素 $w(\alpha,A,SA)$：

- $w(\alpha,A,SA)\in V_{q(\alpha+1)}\setminus V_{q\alpha}$，
- 运算 $(\alpha,A,SA)\mapsto w(\alpha,A,SA)$ 是一个单射类函数 $V\times V\times V\to V$，并且
- $w(\alpha,\ A,\ SA)$ 与 A 中的任何元素都不具有 $\in$关系。

[12]采用满足 $\beta\sup\alpha_i=\sup(\beta\alpha_i)$ 的序数乘法约定。

此类函数的一个例子是 $w(\alpha,\ A,\ SA) := (q\alpha,\ (A,\ SA))$，假设使用 Kuratowski 序对 $(x,\ y) := \{\{x\}、\{x,\ y\}\}$，这将立即满足第二和第三个项目符号。为确保满足第一个项目符号，我们必须选择 $q = 10$，如下所示：

- 假设 $A \subseteq V_{q\alpha}$。那么， $A \in V_{q\alpha+1}$。
- 因此， $A \cup \{q\alpha\} \subseteq V_{q\alpha+1}$，由此其任意两个元素都属于 $V_{q\alpha+3}$，进而任意三元组都属于$V_{q\alpha+5}$。

- 因此，我们有 $SA \subseteq V_{q\alpha+5}$，从而 $SA \in V_{q\alpha+6}$。因此，我们得出 $w(\alpha, A, SA) \in V_{q\alpha+10}$，于是我们将 $q = 10$ 设为，以得到 $w(\alpha, A, SA) \in V_{q(\alpha+1)}$。
- 我们还知道， $w = w(\alpha, A, SA)$ 不属于 $V_{q\alpha}$，因为 $V_{q\alpha}$ 具有传递性且不包含 $q\alpha$，而 w 则包含它。

定义 $w(\alpha, A, SA)$ 的动机如下：在构造一个理论 S 的可计算非标准模型时，可以考虑从一个 $(\in, S)$ 的 $0'$-可计算非标准模型 D 开始；当我们不得不移除一个误加入的元素时，不妨改为改变我们对它代表 D 中哪个元素的判断。这要求我们保留此前对 S 作出的所有承诺；由于我们无法预先控制这些错误承诺具体是什么，因此需要确保：给定 D 中的若干元素 $a_1, \ldots, a_n$，以及一个假设的元素，它与这些元素之间以某种难以控制的方式具有 S-关系，那么 D 中存在一个真实元素，具有相同的这些关系。这个元素恰好是通过 w 函数得到的，其中 A 是集合 $\{a_1, \cdots, a_n\}$，而 SA 编码了假设元素与 A 中各元素之间的 S- 关系。

现在，我们不能简单地允许所有可能的 S-关系都成立，否则 S的理论就只会是随机三元超图的理论，而后者过于齐次，无法与集合论定义等价。下面的定义（在ZF−inf+TC内部进行）正是为此而引入的。

我们称序对（A, SA）是好的 （对于序数 α），如果 SA 是由 $A \cup \{q\alpha\}$中元素构成的三元组集合，并且以下两个条件成立：

- SA 在 A上与 S_α 一致，即 $SA \cap A^3 = \{(a, b, c) \in A^3 \mid S_\alpha(a, b, c)\}$，并且
- 对每一个满足 $a \in b$的 $a, b \in A$，我们有$(a, b, q\alpha) \in SA$。通过对 α使用归纳法，可知这等价于更强的要求：$\forall_{a,b\in A} a \in b \to \forall_{z\in A\cup\{q\alpha\}}(a, b, z) \in SA$。

现在我们可以定义 $S_{\alpha+1}$ 了。给定一个三元组 $(a,\ b,\ c) \in V_q^{3}{}_{(\alpha+1)}$，

- 如果三元组的所有元素都属于 $V_{q\alpha}$，则令 $S_{\alpha+1}(a,\ b,\ c) \equiv S_\alpha(a,\ b,\ c)$，
- 如果存在某种对 A 和 SA 的选择，且该选择对 α 是好的，使得三元组的每个元素要么属于 A，要么等于 $w = w(\alpha,\ A,\ SA)$，则规定 $S_{\alpha+1}(a,\ b,\ c)$ 成立，当且仅当将三元组 $(a,\ b,\ c)$ 中的每个 w 都替换为 $q\alpha$ 后，所得三元组属于 SA。例如，若 a、$b \in A$ 和 $c = w(\alpha,\ A,\ SA)$，则令 $S_{\alpha+1}(a,\ b,\ c) \equiv [(a,\ b,\ q\alpha) \in SA]$。在该序列中，当上下文已清楚表明此类 α、A 和 SA 的选择时，用 a^* 表示将 $q\alpha$ 替换为 $w(\alpha,\ A,\ SA)$ 的操作，用 a_* 表示其逆操作。因此，这种情况下 $S_{\alpha+1}$ 的定义可以改写为： $S_{\alpha+1}(a,\ b,\ c) \equiv [(a_*,\ b_*,\ c_*) \in SA]$，或者等价地， $S_{\alpha+1}(a^*,\ b^*,\ c^*) \equiv [(a,\ b,\ c) \in SA]$。
- 对于来自 $V_{q\ (\alpha+1)}$ 的其他每个三元组，令 $S_{\alpha+1}(a,\ b,\ c)$ 成立。

据此，我们在 ZF−inf+TC 中定义如下 S 关系：给定 a、b 和 c，根据传递闭包公理，三者均属于某个共同的 V_α。然后，判断 $S(a,\ b,\ c) \equiv S_\alpha(a,\ b,\ c)$。

正如 Pakhomov 最初指出的，关系 S 的主要定义性质是以下两个引理：

引理 4.1.1. 在ZF集合论−inf+TC中可证：给定集合 x 与 y，$x \in y$ 当且仅当 $\forall_z S(x,\ y,\ z)$。

证明：假设 $x \in y$，但同时也存在 z 使得 $\neg S(x,y,z)$。设 α 是使得存在 x、y、$z \in V_{q\alpha}$ 满足 $x \in y$ 且 $\neg S_\alpha(x,y,z)$ 的最小序数。这种情况发生的唯一方式是，对于α的这个值，存在 A 与 SA 的一个良好选择，使得$(x_*, y_*, z_*) \notin SA$。由于 α 是极小的，x_*、y_*或 z_* 中至少有一个必须是 $q\alpha$，又由于 $x \in y$，它既不能是 x_* 也不能是 y_*。然而，由于 $x_* \in y_*$ 且 $z_* = q\alpha$，我们于是必有$(x_*, y_*, z_*) \in SA$，矛盾。这就证明了 $x \in y$ 蕴含 $\forall_z S(x,y,z)$。

对于另一个方向，假设 $x \notin y$。选取一个足够大的 α 值，使得 $A = \{x, y\}$ 包含于 $V_{q\alpha}$ 中，并考虑集合 $SA = \{(y, x, q\alpha)\} \cup (S_\alpha \cap A^3)$。可以验证，$(A, SA)$ 这一对是良好的（事实上，如果 $y \notin x$，我们甚至可以令 $SA = S_\alpha \cap A^3$）。因此，对于 $w = w(\alpha, A, SA)$，我们有 $S_{\alpha+1}(x,y,w)$ 当且仅当 $(x, y, q\alpha) \in SA$，而事实并非如此。于是，$\neg S_\alpha(x,y,w)$，因此 $\exists_z \neg S(x,y,z)$，如所需。■

引理 4.1.2。令 M 为满足 ZF−inf+TC 的模型。令 A 为 M 的有限[13] 子集，并假设我们希望找到一个元素 w，使其按照预先规定的方式与 A 中的所有元素满足 S 关系。只要该规定满足以下规则："对于所有 $a,\ b \in A$，若 $a \in b$，则有 $S(a,\ b,\ w)$"，实际上就存在某个 $w \in M \setminus A$，它与 A 中任何元素都不满足 $\in$ 关系，并且满足这一规定。

证明：这基本上直接来自 S 关系的定义，以及这样一个事实：从元理论的角度看，每个有限集合都在 M 中有所表示。■

上述两个性质足以确立以下跳跃反演定理，不过我们不再给出证明，因为定理 4.2.4 已完全涵盖了它。

定理 4.1.3. 若 D 是关于 ZF−inf+TC 中 $(\in, S)$ 的所有真事实的一个 $0'$-可计算模型，则其约化结构$D\restriction S$ 存在一个可计算副本。

注记 4.1.4。定理 4.1.3（经过简单修改后）是强意义上的强跳跃反演结果的一个例子，见注 1.3.4，因为结构 $(D, \notin, S)$ 是 (D, S) 的结构跳跃。事实上，由于 $x \in y \leftrightarrow \forall_z S(x,y,z)$，我们得出 $\notin$ 在 (D, S) 中是相对可计算不可枚举的；并且我们将在定理 4.2.4 的证明中确立以下量词消去结果：签名中仅含 S 的任意公式 $\exists_{\vec{y}} q(\vec{x}, \vec{y})$，在 D 中等价于签名 $(\notin, S)$ 中仅含 $\notin$ 正实例的一阶无量词公式 $Q(\vec{x})$。因此，借助来自 $0'$ 的预言机，我们可以一致地将任意 $\Sigma^c_1(S)$ 公式转化为 $(\notin, S)$ 中等价的有限元无量词公式；这足以说明 $(D, \notin, S)$ 是 (D, S) 的结构跳跃。

定理 4.1.3 足以证明 Pakhomov 原论文中的以下结果：

推论 4.1.5（Pakhomov [19]）。每个一致的可计算可枚举扩张 T 都存在一个可计算模型，该模型满足 ZF−inf+TC 中关于 S 的理论。

证明：理论 ZF−inf+TC 是可计算可枚举的，因此由 T、ZF−inf+TC 以及用 $\in$ 定义 S 所组成的理论 $T\prime$ 也可计算可枚举。因此，存在一个 $0'$-可计算的完备一致扩张 T''，它是 $T\prime$ 的扩张。应用相对化可计算完备性定理（见 [8]），可得一个 $0'$-可计算模型 T''，因而它也是理论 $(\in, S)$ 的模型。接着，我们对该模型应用定理 4.1.3，得到其在 S 上的约化结构的一个可计算副本，而该副本是 T 的模型。■

推论 4.1.6（Pakhomov [19]）。存在一个与皮亚诺算术定义等价的理论的可计算非标准模型。

证明：回想一下，ZFfin+TC（即 ZF−inf+TC 加上无穷公理的否定）与皮亚诺算术定义等价（详情见 [11]），因此，ZFfin+TC 中 S 的理论也如此。于是，令 T 为一个理论，它包含 S 的理论，以及一个与皮亚诺算术相容但不属于真算术的陈述的 S 语言翻译。根据推论 4.1.5，存在 T 的一个可计算模型。■

[13]这里所说的有限，是指从元理论的视角来看是有限的；不过，基本上根据定义，这个结果在理论内部也成立。

上文给出的推论 4.1.6 的证明与 Pakhomov 的原始证明非常接近。我们给出另一种证明；若仅使用 Pakhomov 的结果，便无法直接按此处所述的方式完成证明。

证明（推论 *4.1.6*）：令 T 为算术语言中的理论，并添加常元 c；该理论包含皮亚诺算术的理论，以及断言 c 是非标准的语句：$c \neq 0$、$c \neq S0$、$c \neq SS0$，等等。令 T' 为理论 T，再加上谓词 S 和 $\in$，以及用算术符号定义 S 和 $\in$ 的公理。由于 T'是一个可计算可枚举理论，它有一个 $0'$-可计算模型 M，其在 $(\in, S)$ 上的约化结构满足推论 4.1.5 的假设，因此其在 S 上的约化结构有一个可计算副本。■

4.2 推广 Pakhomov 的构造

在 Pakhomov 的原始构造中，正如第 4.1 节所解释的，谓词 $\in$ 承担着两个不同的任务。一方面，S 被定义为“集合包含，并带有一个第三参数；当包含关系不成立时，该参数表示一个见证”，其中“见证”部分发挥着关键作用，因为它足够灵活，能够将 $0'$-可计算模型转变为可计算模型。另一方面，谓词 $\in$提供了所需的“定义灵活性”，使 S 的整个构造得以进行，因为我们需要所研究的理论足够强大，能够量化假想额外元素的 S 可能规定，以确保确实存在满足该规定的元素。理解了这两种作用彼此独立之后，人们便会想到，这一构造可以应用于其他谓词，甚至可以递归地应用于自身。

这一思路存在一些技术障碍，其中最显著的是，构造 S 时有一个隐含的要素：$\in$-关系是“稀疏”的，因此容易构造出与先前元素在 $\in$上不可比的元素；与之相反，S 关系则是“常见”的。这预示着，为了推广到更高阶的“S 关系”，我们需要引入一些否定（见引理 4.2.2）。

另一个技术问题涉及第 4.1 节所述的系数 q。如果我们完全采用其中所述的策略，那么我们希望引入的“ S的迭代”越多，就需要增大系数 q。这本身未必是个问题，但我们发现，采用稍有不同的视角可以简化定义。在第 4.1 节中，我们设想，对于冯·诺伊曼层级的某个阶段 $q\alpha$，考察一个新元素通过 S 与 $V_{q\alpha}$ 中各元素建立关系的所有可能方式，并指定某个元素在 $V_{q(\alpha+1)}$ 中实现这些可能的关系。相反，如果我们稍有耐心，就可以考虑：在冯·诺伊曼层级的每个阶段 V_α，对于一个元素与 V_α 中各元素通过 S建立关系的每种可能方式，我们都“安排”一个元素以这种方式与它们建立关系，不过这个元素可能要到 $V_{\alpha+100}$ 才会真正加入。我们认为，这样做增加了灵活性，也简化了构造。

现在我们可以陈述并证明：

定理 4.2.1。存在一个相容的可计算可枚举理论 ZF−inf+TC $\subseteq T^0 \subseteq T^1 \subseteq T^2 \subseteq \cdots$的嵌套序列，满足以下性质：

- 每个 T^n 都处于包含 $\in$和谓词 S^0、…、S^n的语言中，其中每个 S^i 都是一个（$i+2$）元谓词符号，
- 所有这些扩张都是保守的，也就是说，它们在谓词 $\in$中不包含任何额外的定理，
- 谓词 $\in$ 和 S^n 可在 T^n中用其他谓词定义，并且
- 给定一个0′-可计算模型 D，它是 T^n 在包含 S^i、…和 S^n的语言上的约化模型，则存在 D↾(S^{i+1},…, S^n)的一个可计算副本 M。

最后一项可以相对化：给定一个在最后 k 个谓词上为 X'-可计算的 T^n 模型，就存在一个 X-可计算副本，其约化结构取到最后 $k-1$ 个谓词上。

本节余下部分将用于证明定理 4.2.1。我们先用归纳法定义序列$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。对于基础情形，我们令 T^0 为 ZF集合论−inf+TC，再加上公理 $\forall_{x,y}[S^0(x,y) \leftrightarrow (x \notin y)]$。它显然满足所有要求的条件（对于最后一条，几乎是空泛地满足）。现在，假设 T^n 已经定义，我们着手定义 T^{n+1}。

在 T^n 中，我们定义谓词的序数指标序列 $S^{n+1}_\alpha(\vec{x},\ y)$，其中 $\vec{x}$ 是一个由 $(n+1)$ 个变量组成的元组，定义方式类似于第 4.1 节中 $S_\alpha(x,\ y,\ z)$ 的定义。总体思路相同：我们将 S^{n+1}_α 归纳地定义为 V_α 上一列相容的关系（注意这里没有常元 q），而对于极限序数 λ，S^{n+1}_λ 的定义显而易见，因此只需描述后继步骤。为此，我们定义以下类函数序列：

给定集合 A、mA、序数 α，以及对于 $i = 0,\ \ldots\ldots,\ n+1$ 的集合 $S^iA \subseteq (A \cup \{\alpha\})^{i+2}$，我们按如下方式在 n 中归纳地定义元素 $w^n(\alpha,\ mA,\ A,\ SA,\ \ldots\ldots,\ S^nA)$。全文均采用 Kuratowski 序对。

- $w^0(\alpha,\ mA,\ A) = (\alpha,\ (A,\ mA))$，以及
- $w^{n+1}(\alpha, mA, A, S^0A, S^1A, \ldots, S^nA, S^{n+1}A) = w^n(\alpha,(S^{n+1}A, mA)\ A, S^0A, \ldots, S^nA).$

这一类函数序列的主要定义特征如下：

- 对于每个 n，$(\alpha,\ mA,\ A,\ S^0A,\ \ldots,\ S^nA) \mapsto w^n(\alpha,\ mA,\ A,\ S^0A,\ \ldots,\ S^nA)$ 是一个单射可定义类函数，并且
- $w^n(\alpha, mA, A, S^0A, \ldots, S^nA)$ 不 属于 V_α。

让我们回到归纳定义 S^{n+1}，假设我们已经将 S^0 定义到 S^n，其中$n \geq 0$。假设 S^{n+1}_α已经定义在 V_α的元素元组上，我们将满足以下性质的序列 $(\alpha,\ mA,\ A,\ S^0A,\ \ldots,\ S^{n+1}A)$ 称为“良序列”：

- A 是 V_α 的子集，
- 对于 $i = 0,\ldots,n+1$，集合 S^iA 是 $(A \cup \{\alpha\})^{i+2}$ 的子集，
- 对于 $i = 0,\ldots,n$，集合 $S^iA \cap A^{i+2}$ 与 A 上的关系 S^i 重合，
- 集合 $S^{n+1}A \cap A^{n+2}$ 与 A 上的关系 S^{n+1}_α 重合，
- 集合 S^0A 包含所有满足 $a \in A$ 的序对 (a,α)、(α,a) 和 (α,α)。
- 对于 $i = 0,\ldots,n$，以下条件成立：对于 $A \cup \{\alpha\}$ 中元素的每个 $(i+3)$-元组 $(\vec{a},b)$，如果 $\vec{a} \notin S^iA$，那么 $(\vec{a},b) \in S^{i+1}A$。

现在我们可以定义 $S^{n+1}_{\alpha+1}$ 了。给定 $V_{\alpha+1}$ 中由元素构成的一个 $(n+3)$ 元组 $\vec{x}$，

- 如果该元组中的所有元素都属于 V_α，则令 $S^{n+1}_{\alpha+1}(\vec{x}) \equiv S^{n+1}_\alpha(\vec{x})$，
- 如果存在某个 $\beta \leq \alpha$，使得有一个良序列 $(\beta,\ mA,\ A,\ S^0A,\ \ldots,\ S^{n+1}A)$，其中元素 $w = w^{n+1}(\beta,\ mA,\ A,\ S^0A,\ \ldots,\ S^{n+1}A)$ 属于 $V_{\alpha+1}$，且 $\vec{x}$ 的每个条目都是 $A \cup \{w\}$ 的元素，那么当且仅当将元组 $\vec{x}$ 中每个 w 都替换为 β 后，所得元组属于 $S^{n+1}A$ 时，令 $S^{n+1}_{\alpha+1}(\vec{x})$ 成立。

  在该序列中，当上下文清楚表明所选的良序列时，用 $\vec{x}^*$ 表示如下操作：将 $\vec{x}$ 中每个等于 β 的项替换为 w；用 $\vec{x}_*$ 表示其逆操作。因此，此处 $S^{n+1}_{\alpha+1}$ 的定义可以改述为：$S^{n+1}_{\alpha+1}(\vec{x}) \equiv [\vec{x}^* \in S^{n+1}A]$。

[14]集合 mA 在 S的原始构造中并不存在，而且从技术上讲在这里也并非必要，但它会为我们省去麻烦。它应被视为对即将定义的元素 w 编码某种“元数据”，其本质上被归纳地用于为高阶 S^N 谓词提供灵活性。[15]这里，表达式 S^iA 仅仅是记号（其中 i 是一个有限序数，A 是一个集合），意在唤起这样的想法：S^iA 正在定义 A 的元素与一个新元素之间的关系 S^i。注意，S^0A 与 A并不相同。

备注：注意，根据定义，若 $(\beta, mA, A, S^0A, \dots, S^{n+1}A)$ 是一个良序列且 $n \geq 0$，那么 $(\beta, (S^{n+1}A, mA)\ A, S^0A, \dots, S^nA)$ 也是一个良序列（对应更小的 n 值）。因此，元素 $w = w^{n+1}(\beta, mA, A, S^0A, \dots, S^{n+1}) = w^n(\beta, (S^{n+1}A, mA)\ A, S^0A, \dots, S^nA)$ 也满足：对于 $A \cup \{w\}$ 的所有元素元组，以及归纳地对于更低的指标，均有 $S^n(\vec{x}) \equiv [\vec{x}^* \in S^nA]$ 。 S^0 的情况是一个边界情况，但良序列的定义仍能确保 $S^0(x, y) \equiv [(x, y)^* \in S^0A]$。

- 对于来自 $V_{\alpha+1}$ 的其他任意元素三元组，令 $S^{n+1}_{\alpha+1}(\vec{x})$ 成立。

注意，定义中的第一项和第二项并不矛盾：如果一个元组 $\vec{x}$ 同时符合两个项目符号，那么要么它的所有元素都属于 A，此时良序列的定义保证 $S^{n+1}_{\alpha+1}(\vec{x})$ 的两种可能定义一致；要么它的某个元素是 $w = w^{n+1}(\beta, mA, A, \dots\dots, S^{n+1}A)$，此时 $S^{n+1}_{\gamma}(\vec{x})$ 已被定义为与 γ 中满足 $w \in V_\gamma$ 的最小序数所对应的第二个项目符号一致。

这导出了一个定义良好的关系 S^{n+1}，其主要定义性质如下：

引理 4.2.2。在 ZF−inf+TC 中可证明，$\neg S^n(\vec{x})$ 当且仅当 $\forall_y S^{n+1}(\vec{x}, y)$。

引理 4.2.3。设 M 是一个 ZF集合论−inf+TC 模型。设 A 是 M 的有限子集，并假设我们希望找到一个元素 w，使其关于谓词 $S^0, \dots, S^{n+1}$ 按照给定的方式与 A 的所有元素建立关系。以下是保证存在满足此规定的 M 中元素 w 的一个充分条件：对于每个 $0 \leq i \leq n$，规定都满足以下规则

- 规定与既有关系一致，适用于不包含任何 w 实例的元组，
- 对于所有 $x \in A \cup \{w\}$，规定 $S^0(x, w)$ 和 $S^0(w, x)$。
- 对于所有 $(\vec{x}, y) \in (A \cup \{w\})^{i+2}$，若规定了 $\neg S^i(\vec{x})$，则也规定 $S^{i+1}(\vec{x}, y)$。

这两个性质足以证明：

定理 4.2.4. 设 D 是一个在谓词 $S^i, \dots, S^n$ 中的 T^n 的 X'-可计算模型，且满足 $i < n$。那么，约化结构 $D\restriction(S^{i+1}, \dots, S^n)$ 存在一个 X-可计算副本。

注记 4.2.5. 使用注记 4.1.4 中相同的推理可知，定理 4.2.4 是注 1.3.4 所述强意义下强跳跃反演结果的一个例子。更准确地说，该推理表明，结构 $(D, S^i, \dots, S^n)$ 是 $(D, S^{i+1}, \dots, S^n)$ 的一个结构跳跃。

证明（定理 *4.2.4*）： 我们将把定理 2.3.1 应用于 D；它作为一个有限语言上的 X'-可计算模型，也是一个 X'-可计算的 X-可计算可枚举类型模型。我们只需证明 D 在 $\mathcal{L} = (S^{i+1}, \dots, S^n)$（以及其否定）和 $\mathcal{L}' = (S^i, \dots, S^n)$（以及其否定）上具有 QETP。

我们构造 χ、τ 和 $\varepsilon\tau$：

- 首先，我们构造 χ_q。不失一般性，我们假设 q 是一个无量词类型，其中所有变量都各不相同（见注 2.2.9）。

  我们首先考虑 $q(\vec{x}, y)$ 仅含有一个 y-变量的情形。在这种情况下，当且仅当存在一个元素 y 满足谓词 S^{i+1}、……、S^n 的某个规定时，公式 $\exists_y q(\vec{x}, y)$ 为真。我们证明以下三个陈述是等价的：

  - $P(\vec{x}) \equiv \exists_y q(\vec{x}, y)$− $Q(\vec{x})$：对于 $q(\vec{x}, y)$ 中 $\neg S^{j+1}(\vec{z}_0, z_1)$ 的每个实例：
    - 如果 $j > i$，我们要求 $S^j(\vec{z}_0)$ 属于 q，并且 [16]

[16]注：这一要求是在一阶逻辑之外提出的。更确切地说，这是我们在元理论地对 $q(\vec{x}, y)$ 所做的一项检验；如果检验未通过，我们就将 $Q(\vec{x}) \equiv \bot$。

∗ 如果 $j = i$、 $z_1 \equiv y$ 和 $\vec{z}_0$ 是 $\vec{x}$ 的子元组，我们就要求 $S^i(\vec{z}_0)$。此外，我们还要求 $(q\restriction\vec{x})(\vec{x})$，也就是说，无论 q 对元组 $\vec{x}$ 提出什么要求，我们也都要求满足。– $R(\vec{x}) \equiv$ 存在一个 y，使得 $q(\vec{x}, y)$，并且对于包含来自 $(\vec{x}, y)$ 的元素且至少包含一个 y 实例的所有元组，关系 S^0 到 S^i 均成立。

证明如下。首先， $P(\vec{x}) \to Q(\vec{x})$ 由以下事实得出： $\forall_{\vec{z}_0}(\exists_{z_1} \neg S^{j+1}(\vec{z}_0, z_1)) \to S^j(\vec{z}_0)$（以及 q 是一个类型这一假设）。其次， $Q(\vec{x}) \to R(\vec{x})$ 由引理 4.2.3 如下得出：如果我们能找到一个元素 w，它以某种方式与 $\vec{x}$ 的元素相关联，则 $R(\vec{x})$ 为真。这种方式包括使用 q 来规定 S^{i+1} 到 S^n，并将所有包含 w 的元组的 S^0 设为 S^i 为真，而对不包含的元组则保持其原有取值。最后， $R(\vec{x})$ 显然蕴含 $P(\vec{x})$。

现在，仍在仅有一个 y-变量的情形中，我们如上设定 $\chi_q(\vec{x}) \equiv Q(\vec{x})$。现在我们将处理有两个 y-变量的情形，设为 y_1 和 y_2，而显然的归纳法将处理一般情形。我们将使用上文针对不同公式 q构造的公式 P、 Q 和 R。我们将用下标来表明正在使用哪个公式 q。

令 $q(\vec{x}, y_1, y_2)$ 为一个无量词的 $\mathcal{L}$-类型。接下来，我们来看 $\chi_q(\vec{x}, y_1)$。如上所述，它要么是 $\perp$（如果定义 $Q_q(\vec{x}, y_1)$ 的第一条不成立），在这种情况下，量词消去是平凡的；否则，它由 $q\restriction(\vec{x}, y_1)$ 以及若干条类型为 $S^i(\vec{z}_0)$ 的正向要求组成，其中 $\vec{z}_0$是 $(\vec{x}, y_1)$ 的一个子元组。令 $q'(\vec{x}, y_1)$ 表示 $q\restriction(\vec{x}, y_1)$ 加上那些包含 y_1 的要求，而令 $q^*(\vec{x})$ 表示其余的这些要求。注意到

$$\exists_{y_1}\exists_{y_2} q(\vec{x}, y_1, y_2) \leftrightarrow \exists_{y_1} \chi_q(\vec{x}, y_1) \leftrightarrow q^*(\vec{x}) \wedge \exists_{y_1} q'(\vec{x}, y_1),$$

关键的是，由于 q' 提出的所有 S^i-要求都是正向的， $\exists_{y_1} q'(\vec{x}, y_1)$ 在逻辑上介于 $P_{q'}(\vec{x})$ 和 $R_{q'}(\vec{x})$ 之间，因此与二者都等价，也就与 $Q_{q'}(\vec{x})$ 等价。因此，我们得出 $\exists_{\vec{y}} q(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow q^*(\vec{x}) \wedge Q_{q'}(\vec{x})$，于是我们在这种情形下将后者定义为 χ_q。如果还有更多 y-变量，归纳法便以类似方式继续进行。关键在于，每一步提出的每个 S^i-要求都是正向的。

- 现在，我们来构造 τ。给定 $q(\vec{x}, y, \vec{z})$，我们令 $\tau_{q^\top}(\vec{x}, y)$ 表示如下要求：每个至少包含一次 y 的 S^i-关系都成立，并且 $\chi_q(\vec{x})$ 成立。
- 最后， $\varepsilon\tau_{q^\top Q}(\vec{x})$ 就是 $\chi_Q(\vec{x})$。

证明这些公式是 QETP 的见证很简单，沿用相同的 P, Q, R 推理即可；这种推理曾用于证明 $\chi_q(\vec{x}) \leftrightarrow \exists_y q(\vec{x}, y)$。
■

定理 4.2.1 立即可得。正如引言中所述，我们可得到如下推论：

定理 4.2.6。 对于每个 n，都存在一个与“皮亚诺算术加上所有真 Π_n 句子”定义等价的理论，它有一个可计算非标准模型。

5 进一步的问题

在定理 4.2.4 中，我们成功将模型复杂度降低了“一次跳跃”，把一个可计算可枚举理论的 $0'$-可计算模型转化为可计算模型。然而，可计算可枚举理论存在复杂度远低于 $0'$ 的模型。我们想知道能否利用这一点来获得更强的结果。

问题 1. 在我们被给定的假设下，比如说给定一个低模型而非仅仅一个 $0'$-可计算模型，除了定理 4.2.4 和定理 2.3.1 之外，是否还能再说些什么？

如同这类工作中一贯的情形，人们可能会想，是否存在不那么人为的理论或谓词，能够充当我们的谓词 S^1、 S^2 等所扮演的角色。依照 [14], ，我们将“自然”的理论或谓词定义为由并非逻辑学家的数学家所研究过的理论或谓词。

问题2. 是否存在一种自然理论，它与皮亚诺算术定义等价，并且具有一个非标准的可计算模型?

作为问题2的对偶，在了解签名在坦南鲍姆定理中的作用后，人们或许会进一步研究签名对皮亚诺算术非标准模型复杂度的影响。例如，有一个标准定理（或定义）指出，PA度就是能够计算出皮亚诺算术非标准模型的度。另一方面，我们看到，由 Pakhomov 构造的定义等价理论 T_0 存在一个可计算非标准模型；因此，根据 Knight 的一个定理 [12], ，每个度中都存在这样的模型。对于与皮亚诺算术定义等价的理论 T ，我们将其非标准模型的度所构成的集合定义为它的非标准谱。

问题3. 如果 T 是一个与皮亚诺算术定义等价的可计算可枚举理论，那么我们可以看出，它的非标准谱至多是所有图灵度构成的集合，至少是所有 PA 度构成的集合。是否存在这样一种理论，其非标准谱严格介于这两种情况之间？更一般地说，与皮亚诺算术定义等价的可计算可枚举理论的非标准谱可能是什么样的?

本文所用的方法过于粗略，无法解决这个问题；必须对其进行巧妙的修改，才能阻止非标准谱包含 0。

作为一个对偶问题，尽管它与本文内容无关：我们在引言中提到，Lutz 和 Walsh [14] 构造了一个可计算可枚举的一致理论，使得没有任何与之定义等价的理论能有可计算模型。更准确地说，他们实际上构造了一个可计算可枚举的一致理论$T_{\mathrm{LW}}(R)$族，这些理论由一棵无限可计算二叉树 R 参数化；该树的路径都不可“猜测”（这是 [14]中定义的术语），并且任何与 $T_{\mathrm{LW}}(R)$定义等价的理论的模型都没有可计算模型。我们认为，探究这类模型能在多大程度上接近可计算模型，会很有意思。

问题4。 将一棵路径均不可猜测的无限可计算二叉树 R 的 Lutz–Walsh谱（记作 LWSpec(R)）定义为这样一个图灵度的集合：其中每个度都能计算出某个与 $T_{\mathrm{LW}}(R)$定义等价的理论的模型。显然，LWSpec(R)总是包含所有 PA度；而 [14] 中证明了，如果 R 的路径仍都不可猜测，那么 LWSpec(R)不包含 0。LWSpec(R)是否会包含任何非 PA度? 如果会，它们能离 PA 有多远? 是否存在这样的树 R ，使得 LWSpec(R)恰好由所有非零度组成? 是否存在某个永远不可能属于 LWSpec(R)的非零度?

在定理 4.2.1 的陈述中，每当复杂度增加一次跳跃，用来替代集合包含的谓词元数就增加 1。我们不确定这是逻辑上的必然要求，还是仅仅源于我们的构造。

问题 5. 对于给定的 n 值，是否存在一个理论 T^n_Q，它以单个三元谓词$Q(x, y, z)$ 为公理化，并且T^n_Q 与皮亚诺算术加上“所有 Π_n 真理”定义等价，同时还具有一个可计算非标准模型? 如果要求该谓词是二元的，情况又如何?

关 于我们的跳跃反演定理——定理 2.3.1——以下问题仍未解决 :

问题 6. 是否存在一个证明，能将定理 1.3.2（布尔代数的跳跃反演）作为定理 2.3.1 的推论?

虽然定理 2.3.1 保证原始结构与其可计算副本之间存在一个 $0'$-可计算同构，但文献中的大多数结果只能（出于必要）保证存在一个 $0''$ or $0'''$-可计算同构。这是因为，在我们的证明中，必须先构造一个与原始结构同构的 $0'$-可计算可枚举型副本，尽管这个同构本身可能相当复杂。Hirschfeldt 曾询问，能否得到一个更直接的结果，例如通过放宽 QETP 的假设来实现。

问题 7（Hirschfeldt）。 是否存在定理 2.3.1 的一个版本，其所需假设更弱，并可能采用无限伤害法而非有限伤害法，从而更容易得到诸如定理 3.4.1（线性序的跳跃反演）或命题 3.1.1（具有无穷多个无限类的等价关系的跳跃反演）这样的定理?

可计算结构理论中的许多一般性结果都需要使用有限关系语言，这往往是出于与第 2.1 节开头所讨论的理由类似的原因。正因如此，我们引入了 $0'$-可计算可枚举类型结构的概念。我们想知道，这一定义是否也适用于其他情形。

问题 8。是否有 文献中针对有限关系签名的结果，可以
进一步（并且有用摊广为使用 $0'$-可计算可枚举类型结构的概念?

在第 2.2 节中，我们发现使用 $\mathbb{W}^c$ 公式很有用；这类公式与 Σ^c_1 公式有关，但并不完全相同。Ash、Knight、Manasse 和 Slaman 证明了，一个关系能否由 aΣ^c_1 公式定义，与可计算性理论性质有关，具体而言，与其是否为相对可计算不可枚举（r.i.c.e.，即相对内在可计算可枚举）关系有关；详见 [17, 定理 II. 16] 。我们想知道， $\mathbb{W}^c$ 公式是否也能以类似方式处理。

问题 9. 结构中由一个$\mathbb{W}^c$ 公式可定义的关系，是否存在可计算论上的刻画?

参考文献

[1] Ravindra B. Bapat。《图与矩阵》。第二版。Universitext。施普林格，伦敦；Hindustan Book Agency，新德里，2014年，第 xii+193 页。ISBN：978-1-4471-6568-2；978-1-4471-6569-9；978-93-80250-66-3。DOI： 10.1007/978-1-4471-6569-9。网址： https://doi.org/10.1007/978-1-4471-6569-9。[2] W. Calvert 等。“强跳跃反演”。载于：《逻辑与计算杂志》28.7（2018年），第 1499–1522 页。ISSN：0955-792X,1465-363X。DOI： 10.1093/logcom/exy025。网址： https://doi.org/10.1093/logcom/exy025。[3] Rod Downey 和 Carl G. Jockusch。“每个低布尔代数都同构于某个递归布尔代数”。载于：《美国数学会会刊》122.3（1994年），第 871–880 页。ISSN：0002-9939,1088-6826。DOI： 10.2307/2160766。网址： https://doi.org/10.2307/2160766。[4] Rodney G. Downey 和 Alexander Melnikov。《可计算结构理论》。可计算性理论与应用。统一方法。施普林格，Cham，2026年，第 xii+540 页。ISBN：978-3-031-92432-3；978-3-031-92433-0。DOI： 10.1007/978-3-031-92433-0。网址： https://doi.org/10.1007/978-3-031-92433-0。[5] David Steven Dummit、Richard M Foote 等。《抽象代数》。第 3 卷。Wiley Hoboken，2004年。[6] Harvey M. Friedman 和 Albert Visser。《当双重可解释性蕴含同义性》。2025年。arXiv: 2506.01028 [math.LO]。网址： https://arxiv.org/abs/2506.01028。[7] Michał Tomasz Godziszewski 和 Joel David Hamkins。“算术与集合论模型的可计算商表示”。载于：《逻辑、语言、信息与计算》。第 10388 卷。《计算机科学讲义》。施普林格，柏林，2017年，第 140–152 页。ISBN：978-3-662-55386-2；978-3-662-55385-5。DOI： 10.1007/978-3-662-55386-2_10。网址： https://doi.org/10.1007/978-3-662-55386-2_10。[8] Valentina S Harizanov。“纯可计算模型论”。载于：《逻辑与数学基础研究》。第 138 卷。爱思唯尔，1998年，第 3–114 页。[9] Wilfrid Hodges。《模型论》。第 42 卷。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，剑桥，1993 年，第 xiv+772 页。ISBN：0-521-30442-3。DOI： 10.1017/CBO9780511551574。网址： https://doi.org/10.1017/CBO9780511551574。

[10] Richard Kaye。《皮亚诺算术模型》。第 15 卷。牛津逻辑指南丛书。牛津科学出版物。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1991年，第 x+292 页。ISBN：0-19-853213-X。[11] Richard Kaye 和 Tin Lok Wong。“关于算术与集合论的解释”。载于：《圣母大学形式逻辑杂志》48.4（2007年），第 497–510 页。ISSN：0029-4527,1939-0726。DOI： 10.1305/ndjfl/1193667707。网址： https://doi.org/10.1305/ndjfl/1193667707。[12] Julia F. Knight。“序的跳跃中编码的度”。载于：《符号逻辑杂志》51.4（1986年），第 1034–1042 页。ISSN：0022-4812,1943-5886。DOI： 10.2307/2273915。网址： https://doi.org/10.2307/2273915。[13] Julia F. Knight 和 Michael Stob。“可计算布尔代数”。载于：《符号逻辑杂志》65.4（2000年），第 1605–1623 页。ISSN：00224812。网址： http://www.jstor.org/stable/2695066 （访问日期：2025年9月12日）。[14] Patrick Lutz 和 James Walsh。一个满足坦南鲍姆定理强形式的理论。2023年。arXiv： 2309.11598 [math.LO]。网址： https://arxiv.org/abs/2309.11598。[15] Antonella Mancini 和 Domenico Zambella。“关于集合论递归模型的一则短札”。载于：《圣母大学形式逻辑杂志》42.2（2001年），第 109–115 页。ISSN：0029-4527,1939-0726。DOI： 10.1305/ndjfl/1054837937。网址： https://doi.org/10.1305/ndjfl/1054837937。[16] Antonio Montalbán。《可计算结构理论：超越算术》。逻辑展望丛书。剑桥大学出版社，2026年。[17] Antonio Montalbán。《可计算结构理论：算术之内》。逻辑展望丛书。剑桥大学出版社，2021年。[18] Antonio Montalbán。“结构的跳跃札记”。载于：数学理论与计算实践。第 5635 卷。《计算机科学讲义》。施普林格，柏林，2009年，第 372–378 页。ISBN：978-3-642-03072-7；3-642-03072-6。DOI： 10.1007/978-3-642-03073-4_38。网址： https://doi.org/10.1007/978-3-642-03073-4_38。[19] Fedor Pakhomov。如何逃脱坦南鲍姆定理。2022年。arXiv： 2209.00967 [math.LO]。网址：https://arxiv.org/abs/2209.00967。[20] James H. Schmerl。“坦南鲍姆定理与递归约化结构”。载于：集合论、算术与数学基础：定理与哲学。第 36 卷。《逻辑讲义》，符号逻辑协会，拉霍亚，加利福尼亚州，2011年，第 112–149 页。ISBN：978-1-107-00804-5。[21] Alexandra A. Soskova 和 Ivan N. Soskov。“度谱的跳跃反演定理”。载于：《逻辑与计算杂志》19.1（2009年），第 199–215 页。ISSN：0955-792X,1465-363X。DOI： 10.1093/logcom/exn024。网址： https://doi.org/10.1093/logcom/exn024。[22] George Wilmers。“有界存在归纳”。载于：《符号逻辑杂志》50.1（1985年），第 72–90 页。ISSN：0022-4812,1943-5886。DOI： 10.2307/2273790。网址： https://doi.org/10.2307/2273790。