arXiv:2603.04617v1 [math.PR] 4 Mar 2026

类书图上的热核估计

EMILY DAUTENHAHN 和 LAURENT SALOFF-COSTE

Abstract. 本文证明了我们称为“书本状”图上的双侧热核估计。这类图由若干满足抛物 Harnack 不等式的片组成，并以足够良好的方式在一个可能无限的顶点集上粘合在一起。典型的例子是：取四维方格点阵 $\mathbb{Z}^4$、 $\mathbb{Z}^5$的一份副本以及$\mathbb{Z}^6$ 的一份副本，将它们的 x_1轴识别起来，并在所得粘合图上进行惰性简单随机游走。我们的结果具有足够的灵活性，可以处理这一例子的扰动，例如在某个格中添加对角线，或增添少数几个顶点/边。

1. 引言

本文旨在为一类图推导热核估计。这类图可以看作由若干足够良好的片（“页”）通过一个粘合集（“脊柱”）以足够良好的方式粘合而成。我们得到的结果既适用于通过有限顶点集粘合满足抛物 Harnack 不等式的片（这是 Grigor’yan 和 Saloff-Coste 在 [19]中的部分结果的离散版本），也适用于在一组特定假设下通过无限顶点集粘合这类图。与后一种情形相近的现有研究只有 Grigor’yan 和 Ishiwata 的工作 [21], ，该研究考虑了通过旋转抛物面粘合 $\mathbb{R}^n$ 的多个副本。本文对顶点粘合集所作的假设虽然相当严格，但其性质与 [21], 中的假设不同，而且我们的结果不要求精确的对称性。例如，适用于粘合格的结果 $\mathbb{Z}^d$ 同样适用于粘合类格点图（例如与格拟等距的图）。本文可视为我们前几篇论文 [5, 7]的集大成之作。

读者在阅读本文时应始终牢记的典型例子，是通过低维格来粘合格。例如，如图1所示，考虑将一份 $\mathbb{Z}^4$ （四维方格点）、一份 $\mathbb{Z}^5$和一份 $\mathbb{Z}^6$ 通过将其 x_1轴等同而粘合起来。

在这个粘合图上，考虑惰性简单随机游走（惰性 SRW）：每个离散时间步以概率 $1/2$ 留在原地，或以相同概率移动到一个邻近顶点。在三个格中的任意一个中，远离 x_1-轴时，该随机游走的行为与该格上的惰性简单随机游走相同。在 x_1-轴上的顶点处，该随机游走有机会跳到三个格中任意一个格的邻近顶点。热核 $p(n, x, y)$ 是该随机游走的转移密度（相对于自然参考测度，该测度在每个顶点处由该顶点的度给出

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号60J10, 60G50, 35K08。*Key words and phrases.* 热核，格上的随机游走，马尔可夫链，粘合图。部分由美国国家科学基金会项目DMS-2054593资助。部分由美国国家科学基金会项目DMS-2054593和DMS-2343868资助。

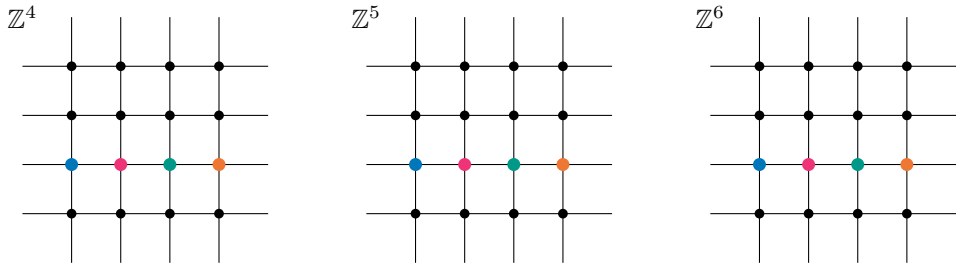


FIGURE 1. 必要时为图形添加额外维数，通过将它们的 x_1 轴对齐，把 $\mathbb{Z}^4$, $\mathbb{Z}^5, \mathbb{Z}^6$ 的副本粘合起来：图中每种颜色所示的三个顶点都是同一个顶点。

）。令 D_x 表示顶点 x所属格的维数，若 x 位于 x_1-轴上，则 $D_x = D_{\min} = \min\{4,5,6\} = 4$。令 $|x|$ 为 1 与 x 到 x_1-轴的距离中的较大者，$d_{i_x}(x,y)$ 表示在包含 x 的格中、从 x 到 y 且不经过 x_1-轴的距离；若 x, y 不在同一个格中，则 $d_{i_x}(x,y) = +\infty$；而 $d_+(x,y)$ 表示 x 与 y 之间必须经过 x_1-轴的距离。接着，我们在推论 6.1 中证明

$$p(n,x,y) \approx \frac{C}{n^{\frac{D_x}{2}}} \exp\Big(-\frac{d_{i_x}^2(x,y)}{cn}\Big) + \Bigg[\frac{C}{n^2\,|x|^{D_x-3}\,|y|^{D_y-3}} + \frac{C}{n^{\frac{D_y}{2}}\,|x|^{D_x-3}} + \frac{C}{n^{\frac{D_x}{2}}\,|y|^{D_y-3}}\Bigg] \exp\Big(-\frac{d_+^2(x,y)}{cn}\Big). \tag{1}$$

这里的记号 $\approx$ 表示我们有这种形式的匹配上界和下界，其中常数 C, c 在上界和下界中有所不同。这些常数可能取决于格的维数及其粘合方式，但与 n, x, y 无关。

例如，如果 x 和 y 都位于 x_1 轴上，那么

$$p(n,x,y) \approx \frac{C}{n^2} \exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big).$$

事实上，在前一篇论文 [7] 中，我们已经得到了两个点都属于粘合集时的此类热核估计。然而，在本文中，我们现在能够给出任意两个点的热核估计。

如果 $x \in \mathbb{Z}^5$, $y \in \mathbb{Z}^6$, 那么

$$p(n,x,y) \approx \Bigg[\frac{C}{n^2|x|^2|y|^3} + \frac{C}{n^3|x|^2} + \frac{C}{n^{5/2}|y|^3}\Bigg] \exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big).$$

注意到， n 的最小幂次，即第一项中出现的 n^2 ，是由最小的格点（就体积而言）——$\mathbb{Z}^4$ 的副本所产生的影响。

如果 x, $y \in \mathbb{Z}^5$, 那么

$$p(n,x,y) \approx \frac{C}{n^{5/2}} \exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big) + \frac{C}{n^2|x|^2|y|^2} \exp\Big(-\frac{d_+^2(x,y)}{cn}\Big).$$

这里，第一项表示在 x 和 y 之间移动，同时留在 $\mathbb{Z}^5$的副本中，而且，事实上，这一项就是高斯热

核在 $\mathbb{Z}^5$ 上的估计。第二项表示在 x 和 y 之间移动，同时访问其他格，尤其是访问最小的格。请注意， $d_+(x,\ y)$ 不一定等于 $|x|+|y|$ ，因为在 x_1 轴上，分别离 x 和 y最近的点可能相距很远。只有当粘合集为无限集时才会出现这种效应。

读者同样可以使用（1）来考察 x和 y位于其他位置时的情形。推论 6.1 给出了一个通用公式，适用于任意多个通过一个共同的低维格粘合而成的格。维数限制源于对暂留概念的要求；请注意，在我们沿一条直线粘合的例子中，格的最小可能维数为 4。这一限制在公式中的体现之一是 $|x|^{D_x-3}$，其指数应大于 0，因为$p(n,\ x,\ y)$不能取大于 1 的值。

以系统方式研究由其他空间粘合（或切分）而成的空间上的热核估计，这一方法最早见于 Grigor'yan 和 Saloff-Coste 关于带端流形的研究 [15, 16, 17, 18, 19, 20]。主要论文 [19] 给出了有限个满足抛物 Harnack 不等式的流形沿紧集粘合时的热核估计，条件是至少有一个流形是非抛物（暂留）的。文中还介绍了一些所有流形均为抛物（常返）的特殊情形，但一般而言，这种情况较为复杂；关于进一步放宽这一假设的研究，参见 Grigor'yan、Ishiwata 和 Saloff-Coste 的工作 [12, 13, 14]。前几篇论文均未考虑边界条件；作者在[6]中处理了带 Dirichlet 边界条件或混合 Dirichlet 与 Neumann 边界条件的带端流形情形。

处理这类粘合问题的另一种途径，所描述的是并不保持在流形类之内的粘合。例如，考虑经由一个点，或经由一个被等同于一个点的紧集，将 $\mathbb{R}^{d_1}$ 与 $\mathbb{R}^{d_2}$ （或 $\mathbb{R}^{d_2}_+$）粘合。由于这种粘合并不光滑，而且这些空间不具有相同的拓扑维数，这样的空间不是流形。此类空间上的热核借助狄利克雷型理论来定义。这一方法由 Chen与Lou在 [2], 中开创，他们考虑了一种"旗形空间"，即一份 $\mathbb{R}_+$ 粘合到一份 $\mathbb{R}^2$的原点。在[27], 中，Ooi将这项工作推广为：对任意 D_1, D_2，在原点处粘合 $\mathbb{R}^{D_1}$ 与 $\mathbb{R}^{D_2}$ 。Lou的进一步研究在 [25], 中得到了上述"旗形空间"上带漂移布朗运动的热核估计；并且在 [24, 26], 中，Lou以及Li与Lou给出了将一份 $\mathbb{R}^3$ 在原点处粘合到一份$\mathbb{R}_+$ 上时扭曲布朗运动的热核估计。

上述方法都涉及连续时间和连续空间。本文关注离散时间和离散空间中的这类粘合问题，尤其是可数无限图。我们先前的论文 [5, 7] 构建了获得本文结果所需的理论工具，其中一些内容也见于第一作者的博士论文 [4]。本文针对有限个满足抛物 Harnack 不等式的可数无限图进行粘合，并使所得图呈"书本状"，在此情形下给出了完整的双侧匹配热核估计。我们要求被粘合的图是一致的 S- 暂留图；这是我们在 [5]中引入的概念。那篇论文还证明了本文所用的命中概率估计。 [7] 中的结果给出了从粘合集到粘合集的热核估计，本文在此基础上进一步扩展，得到了完整估计。我们的主要

结果是，定理 4.1 给出了书状图上最一般的热核估计。该定理的具体例子展示了如何在实践中运用它，以及它的局限性。推论 5.1 给出了粘合集有限时显著更简单的估计；这是对 [19]中定理 4.9 和 5.10 的离散时间与离散空间版本。虽然我们没有陈述一个能够处理仅有一个部分需要满足一致的 S-暂留条件这一情形的一般定理（如 [19],中的定理 6.6），例 7.6 和 7.7 展示了混合暂留性与常返型的情形。

我们对粘合集的关键假设是，该图为“书本状”。如果粘合脊柱上的所有点始终都能看到所有页，就像书的脊柱一样，那么这个图就是“书本状”的。例如，在本引言前面讨论的例子中， x_1轴上的所有点始终都能看到其他三个格点。非书本型图最简单的例子如下：再取一份 $\mathbb{Z}^4$、一份$\mathbb{Z}^5$，以及一份 $\mathbb{Z}^6$。不过，这次将 $\mathbb{Z}^4$ 中的 x_1轴与 $\mathbb{Z}^5$ 中的x_2轴粘合起来，并将 $\mathbb{Z}^5$ 中的 $\mathbb{Z}^6$轴与 x_2中的 $\mathbb{Z}^4$ 轴粘合起来。现在粘合脊柱呈“十字形”，脊柱上的点通常只能轻易看到三页中的两页。例如，离原点越来越远的 [7] 轴上的点，也会离页越来越远。的例 7.5 讨论了这个十字形例子中的一些难点。作者希望未来能运用类似的思路和方法处理这个例子；不过，我们也认为，这是我们能够计算的最复杂的一类例子。

我们在此评述离散情形与连续情形中结果之间的关系。理想情况下，作者希望以本文给出的离散方法为蓝图，得到与 Grigor’yan 和 Ishiwata [21] 互补的结果，从而允许在流形的连续情形中对不具有严格对称性的非紧集进行粘合。这一方法面临的一些障碍包括： [5] 中命中概率结果的适当连续情形类比，以及在流形情形中描述粘合的困难。值得回顾的是，并不存在一般定理表明热核估计会在任何相关的离散空间与连续空间之间自动转化。（例如，考虑一个流形及其相关联的 ε-网，分别作为同一空间的连续版本与离散版本。）然而，某些函数不等式可以在拟等距空间之间传递，并且函数不等式的某些组合等价于特定的热核估计。例如，Coulhon 与 Saloff-Coste 证明抛物 Harnack 不等式（因而双侧高斯热核估计）在拟等距下可以传递 [3]。事实上，我们在 [7]中利用了这一在拟等距空间之间传递函数不等式（特别是相对 Faber-Krahn 不等式）的想法。然而，在当前情形中，我们所得到的热核估计足够复杂，以至于试图将它们等同于函数不等式，或证明一个使其能够传递到其他情形的定理，似乎相当具有挑战性。因此，我们转而希望本文（及其所依托的工作）的整体方法仍可应用于连续情形，同时需谨慎处理由此产生的具体困难。

本文其余部分安排如下。第2节列出我们所需的记号、假设，以及所考虑的图的切割与粘接的特定构造。第 3 节介绍利用粘接公式估计热核的一般框架。这些粘接公式中出现的各项可利用我们论文 [5, 7] 中的结果进行估计。第4节应用粘接公式，为我们所考虑的这类书状图获得一般的热核估计

本节中，主要结果是定理 4.1。本章最后三节将定理 4.1 应用于几个能够得到更具体估计的例子。第5节讨论有限粘合集的情形，第6节介绍沿着一个较低维格将不同维数的格进行粘合这一主要动机示例。第 7 节给出沿半空间或沿锥粘合格的其他例子。其中还包含两个一个格是常返的例子；这些例子使用 h-变换技术。

2. Notation and Set-up

本文所用的记号和构造与 [5, 7] 中的相同。为节省篇幅，这里对定义作简要说明。关于图上的随机游走结构和 S-暂留性的更多背景，可参见 [5]，的第 1 节和第 2 节；关于我们的粘合/切割构造的更深入描述，见 [7] 的第 3 节。本节的总体目标是介绍书状图的概念，并陈述本文其余部分将采用的主要假设。

2.1. 图上的随机游走结构。

图 Γ 是由顶点集合 V 和边集合 E 组成的，其中 E 是 V 中所有元素对构成的集合的子集。（这类图是无向图。）一般而言，我们认为所有图都是简单且

d

连通的，除非另有说明。

任何这样的图 Γ 都有一个距离度量 $d = d_\Gamma$，定义为任意两个顶点之间边数最少的路径长度。记号 $x \sim y$ 表示 $\{x, y\} \in E$；我们也可以说 x，y 是邻居。记号 $x \simeq y$ 表示 $x \sim y$ 或 $x = y$.

我们希望研究具有随机游走结构的图。我们将这类随机游走结构定义为三元组 (Γ, π, μ) 或 $(\Gamma, \mathcal{K}, \pi)$，其中 π 是顶点权重函数（测度），μ 是边权重函数（电导），而 $\mathcal{K}$ 是马尔可夫核。

定义 2.1（边权重与顶点权重）。任意函数 $\pi : V \to \mathbb{R}_{>0}$ 都是顶点权重。给定这样的权重 π，如果函数 $\mu : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足以下三个性质，则称其为边权重：

- 与边相适配：$\mu_{xy} \neq 0 \iff x, y \in E$
- 对称：$\mu_{xy} = \mu_{yx}$
- 从属于顶点测度：对于所有 $x \in V$，$\sum_{y \sim x} \mu_{xy} \leq \pi(x)$。

我们用 $B(x, r) = \{y \in \Gamma : d_\Gamma(x, y) \leq r\}$ 表示图中以 x 为中心、半径为 r 的闭球。记号 $V(x, r)$ 表示 $B(x, r)$ 关于 π，的体积，也就是说，$V(x, r) = \sum_{y \in B(x,r)} \pi(y)$。正如本段所示，我们经常滥用记号，将 Γ（图）与 V（Γ 的顶点集合）互换使用。

定义 2.2（图上的马尔可夫核）。给定顶点权重 π 和边权重 μ，我们通过以下方式定义 Γ 上的马尔可夫核 $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \frac{\mu_{xy}}{\pi(x)}, & x \neq y \\ 1 - \sum_{z \sim x} \frac{\mu_{xz}}{\pi(x)}, & x = y. \end{cases} \tag{2}$$

一个重要的区别是，虽然图 Γ 不允许有自环，但马尔可夫核 $\mathcal{K}$ 仍可能停留在原地。

在定义 2.2 中， $\mathcal{K}$ 是根据 π 和 μ 定义的；不过，给定 $\mathcal{K}$ 和 π 后，方程 (2) 唯一确定了 μ。

马尔可夫核 $\mathcal{K}$ 相对于顶点测度 π是可逆的：

$$\mathcal{K}(x,y)\pi(x) = \mathcal{K}(y,x)\pi(y) \quad \forall x, y \in \Gamma.$$

上述一行之所以重要，原因之一是，尽管图 Γ 是无向的，$\mathcal{K}(x,\ y)$ 未必等于 $\mathcal{K}(y,\ x)$（请参见式 (2)）。

定义 2.3（图上的热核）。 设 $\mathcal{K}^n(x,\ y)$ 表示 $\mathcal{K}(x,\ y)$ 的 n 阶卷积幂，且 $(X_n)_{n\geq 0}$ 表示由 $\mathcal{K}$ 驱动、定义在 Γ 上的随机游走。那么， $\mathcal{K}^n$满足 $\mathcal{K}^n(x,\ y) = \mathbb{P}^x(X_n = y)$。 量 $\mathcal{K}^n(x,\ y)$ 未必对称。不过， $\mathcal{K}$ 的转移密度，

$$p(n,x,y) = p_n(x,y) = \frac{\mathcal{K}^n(x,y)}{\pi(y)},$$

始终是对称的。转移密度 $p(n,\ x,\ y)$ 也是 $(\Gamma,\ \pi,\ \mu)$ 的热核。

本文对图上的权重作出以下两项假设。

定义 2.4（受控权重）。 图 Γ 具有受控权重，如果存在常数 $C_c > 1$ 使得

$$\frac{\mu_{xy}}{\pi(x)} \geq \frac{1}{C_c} \quad \forall x \in \Gamma,\ y \sim x. \tag{3}$$

这一假设意味着 Γ 是局部一致有限的（即任意顶点的度都有一个一致上界），并且对于 $x \sim y$，有 $\mu_{xy} \approx \pi(x) \approx \pi(y)$，其中符号 $\approx$ 表示在相差与常数因子意义下可比较，这些常数不依赖于 x, y；这是对下文定义 2.5 的一种滥用。

定义 2.5（记号 $\approx$）。 对于变量为 x 的两个函数，记号$f \approx g$ 表示存在常数 c_1, c_2（与 x 无关）使得

$$c_1 f(x) \leq g(x) \leq c_2 f(x).$$

定义 2.6（一致惰性）。 权重对（μ, π）称为一致惰性的，如果存在 $C_e \in \in(0,1)$使得

$$\sum_{y\sim x} \mu_{xy} \leq (1 - C_e)\pi(x) \quad \forall x \in V,\ y \sim x.$$

马尔可夫核 $\mathcal{K}$ 称为一致惰性的，如果存在 $C_e \in \in(0,1)$使得

$$\mathcal{K}(x,x) = 1 - \sum_{z\sim x} \frac{\mu_{xz}}{\pi(x)} \geq C_e \quad \forall x \in \Gamma.$$

上述两个条件等价。在这种情况下，马尔可夫链是非周期的。

除非另有说明，我们将假设所有出现的随机游走结构都是一致惰性的，并具有受控权重。

定义 2.7（惰性简单随机游走）。 设 Γ 是一个局部一致有限图。定义权重 π（x）$= 2\deg$（x），其中对所有 $x \in \Gamma$ 以及对所有 $x,\ y \in E$， $\mu_{xy} = 1$，$\deg$（x）返回顶点 x的度。在每个时间步，惰性简单随机游走（惰性 SRW）以概率 $1/2$ 停留在原地，否则以相等的概率移动到当前顶点的一个邻点。

惰性简单随机游走具有受控的权重，且是一致惰性的，因此，对于任何顶点度一致有界的图，总是可以施加我们所考虑类型的随机游走结构。

注 2.1. 受控权重假设对我们的工作非常重要。一致惰性假设并非严格必要：我们采用这一假设只是为了方便，以避免奇偶性问题。

2.2. **子图上的随机游走**。 给定一个图 $\Gamma=(V,E)$, 对于任意子集 V of V，我们可以构造一个图 Γ，其顶点集为 V，边集为 E，其中 $\{x,y\}\in E$ 当且仅当 $x,y\in V$ 且 $\{x,y\}\in E.$。按照惯例，我们滥用记号，使用同一个符号 Γ 表示 V 的一个子集及其对应的子图。

任意这样的子图都有一个距离函数 d_Γ，满足对于所有 $x,y\in\Gamma.$， $d_{\widehat{\Gamma}}(x,y)\leq d_\Gamma(x,y)$。子图 Γ 还继承了 (Γ,π,μ) 的随机游走结构，其定义为 $\pi_\Gamma(x)=\pi_{\widehat{\Gamma}}(x)$，且对于所有 $x,y\in V,\ \{x,y\}\in E.$， $\mu^\Gamma_{xy}=\mu^\Gamma_{xy}$。（因此，只要给定 $x,y\in\Gamma.$，我们就可以直接使用 π,μ，而无需指明具体的图。）

在 Γ.上有两个自然的（次）马尔可夫核

定义 2.8（子图上的诺伊曼马尔可夫核）。 按定义 2.2 在 Γ 上定义马尔可夫核, 即得到 Γ 的诺伊曼马尔可夫核（关于Γ），记为 $\mathcal{K}_{\Gamma,\ N}$：

$$\mathcal{K}_{\Gamma,N}(x,y)=\begin{cases}\frac{\mu^\Gamma_{xy}}{\pi(x)}=\frac{\mu^{\widehat{\Gamma}}_{xy}}{\pi(x)}, & x\neq y,\ x,y\in V\\ 1-\sum_{z\sim x}\frac{\mu^\Gamma_{xz}}{\pi(x)}=1-\sum_{z\sim x,\,z\in V}\frac{\mu^{\widehat{\Gamma}}_{xz}}{\pi(x)}, & x=y\in V.\end{cases}\tag{4}$$

定义 2.9（子图上的狄利克雷马尔可夫核）。 Γ 的狄利克雷马尔可夫核（关于 Γ），记为 $\mathcal{K}_{\Gamma,\ D}(x,\ y)$，为

$$\mathcal{K}_{\Gamma,D}(x,y)=\mathcal{K}_{\widehat{\Gamma}}(x,y)\mathbb{1}_V(x)\mathbb{1}_V(y)=\begin{cases}\frac{\mu^\Gamma_{xy}}{\pi(x)}, & x\neq y,\ x,y\in V\\ 1-\sum_{z\sim x,z\in\widehat{V}}\frac{\mu^{\widehat{\Gamma}}_{xz}}{\pi(x)}, & x=y\in V,\end{cases}\tag{5}$$

其中若 $x\in V$，则 $\mathbb{1}_V(x)=1$，否则为零。当 $V\neq V$， $\mathcal{K}_{\Gamma,\ D}$ 仅为次马尔可夫核。

Γ.的边界也有两种自然的概念

定义 2.10（子图的边界）。 Γ的（外部）边界 是不属于 Γ 、且在 Γ中有邻居的点的集合,

$$\partial\Gamma=\{y\in\widehat{\Gamma}\setminus\Gamma:\exists x\in\Gamma\text{ s.t. }d_{\widehat{\Gamma}}(x,y)=1\}.$$

相比之下， Γ 的内边界 是 Γ 中位于内部且在 Γ之外有邻居的点集,

$$\partial_I\Gamma=\{x\in\Gamma:\exists y\notin\Gamma\text{ s.t. }d_{\widehat{\Gamma}}(x,y)=1\}.$$

2.3. **图的性质**。 前两个定义是关于子图的几何性质。这些定义的唯一区别在于性质(a)中使用的距离函数。

定义 2.11（一致的）。 图 Γ 的子图 Γ 在 Γ 中是一致的，如果存在常数 $0<c_u,\ C_U<+\infty$，使得对于任意 $x,\ y\in\Gamma$，在 Γ 中， x 与 y 之间存在一条路径$\gamma_{xy}=(x_0=x,\ x_1,\ \ldots,\ x_k=y)$，满足

(a) $k \le C_U d_{\widehat{\Gamma}}(x,y)$
(b) For any $j \in \{0,\dots,k\}$,

$$d_{\widehat{\Gamma}}(x_j, \partial\Gamma) = d_{\widehat{\Gamma}}(x_j, \widehat{\Gamma}\setminus\Gamma) \ge c_u(1+\min\{j,k-j\}).$$

定义 2.12（内一致）。 Γ 的子图 Γ 在 Γ 中是内一致的，如果存在常数 $0 < c_u$， $C_U < +\infty$，使得对于任意 x， $y \in \Gamma$，在 Γ 中， x 与 y 之间存在一条路径$\gamma_{xy} =$（$x_0 = x$， x_1，.. .， $x_k = y$），满足

(a) $k \le C_U d_{\Gamma}(x,y)$
(b) For any $j \in \{0,\dots,k\}$,

$$d_{\widehat{\Gamma}}(x_j, \partial\Gamma) = d_{\widehat{\Gamma}}(x_j, \widehat{\Gamma}\setminus\Gamma) \ge c_u(1+\min\{j,k-j\}).$$

关于相关背景下（内）一致图的更多细节以及进一步的文献参考，请参见 [7] 的第4节。

现在我们介绍若干定义和定理，以便最终定义哈纳克图。

定义 2.13（倍增）。 若存在常数 D，使得对所有 $r > 0$， $x \in \Gamma$，，则称图为倍增的。

$$V(x,2r) \le DV(x,r). \tag{6}$$

定义 2.14（Poincar´e 不等式）。 若存在常数 $C_p > 0$， $\kappa \ge 1$，使得对所有 $r > 0$， $x \in \Gamma$，以及支撑于 $B(x, \kappa r)$ 内的函数，则称 满足*Poincar´e* 不等式。

$$\sum_{y\in B(x,r)} |f(y) - f_B|^2 \pi(y) \le C_p\, r^2 \sum_{y,z\in B(x,\kappa r)} |f(y)-f(z)|^2 \mu_{yz}, \tag{7}$$

其中 f_B 是 f 在球 $B = B(x, r)$ 上的（加权）平均值，即

$$f_B = \frac{1}{V(x,r)} \sum_{y\in B(x,r)} f(y)\,\pi(y).$$

在倍增条件下，带常数 $\kappa > 1$ 的 Poincar´e 不等式（该常数出现在右边的 $B(x, \kappa r)$ 中）等价于带 $\kappa = 1$ 的 Poincar´e 不等式（参见 [1] 的推论 A.51）。

定义 2.15（调和函数）。 函数 $h : \Gamma \to \mathbb{R}$ 关于 $\mathcal{K}$ 是调和的，如果

$$h(x) = \sum_{y\in\Gamma} \mathcal{K}(x,y) h(y) \quad \forall x \in \Gamma. \tag{8}$$

给定 Γ 的一个子集 Ω（通常是一个球），如果 (8) 对 Ω 中的所有点都成立，则 h 在该集合上是调和的；这要求 h 在 $\{v \in \Gamma : \exists \omega \in \Omega \quad v \simeq \omega\} = \Omega \cup \partial$ 上有定义。

由于 $\mathcal{K}(x,y) = 0$，除非 $y \simeq x$，，因此 (8) 中对 $y \in \Gamma$ 的求和可以替换为对 $y \simeq x$. 的求和

定义 2.16（椭圆 Harnack 不等式）。 若存在 $\eta \in$ （0，1） $C_H > 0$，使得对于所有$r > 0$， $x_0 \in \Gamma$，以及 B（x_0， r）上的所有非负调和函数 h，都有：图（Γ， π， μ）满足椭圆 *Harnack* 不等式

$$\sup_{B(x_0,\eta r)} h \le C_H \inf_{B(x_0,\eta r)} h.$$

若图满足截至尺度 $R>0$ 的椭圆 Harnack 不等式，我们称其满足该不等式；若上述定义对 $0<r<R$, 成立，其中常数 C_H 取决于 R.

定义 2.17（离散热方程的解）。 函数 $u:\mathbb{Z}_+\times\Gamma\to\mathbb{R}$是离散热方程的解，如果

$$u(n+1,x)-u(n,x)=\sum_{y\in\Gamma}\mathcal{K}(x,y)[u(n,y)-u(n,x)]\quad\forall n\geq 1,\ x\in\Gamma. \tag{9}$$

给定一个离散时空圆柱 $Q=I\times B$, u 是 Q 上的热方程的解，当且仅当式（9）在此处成立（这要求对每个 $n\in I$, $u(n,\cdot)$ 都在 $\{z\in\Gamma:\exists x\in B,\ z\simeq x\}=B\cup\partial B$上有定义）。

定义 2.18（抛物 Harnack 不等式）。 图 (Γ,π,μ) 满足（离散时间和空间）抛物 ***Harnack*** 不等式，如果：存在 $\eta\in(0,1)$ $0<\theta_1<\theta_2<\theta_3<\theta_4$ 和 $C_{PH}>0$，使得对所有 s, $r>0$, $x_0\in\Gamma$，以及圆柱 $Q=(\mathbb{Z}_+\cap[s,s+\theta_4r^2])\times B(x_0,r)$ 内热方程的每个非负解 u，都有

$$u(n_-,x_-)\leq C_{PH}\,u(n_+,x_+)$$

对所有 $(n_-,x_-)\in Q_-,(n_+,x_+)\in Q_+$ 使得 $d(x_-,x_+)\leq n_+-n_-$, 其中

$$Q_-=(\mathbb{Z}_+\cap[s+\theta_1r^2,s+\theta_2r^2])\times B(x_0,\eta r)$$
$$Q_+=(\mathbb{Z}_+\cap[s+\theta_3r^2,s+\theta_4r^2])\times B(x_0,\eta r).$$

我们称一个图满足抛物 Harnack 不等式直至尺度 $R>0$，如果上述定义对 $0<r<R$, 成立，其中常数 C_{PH} 现在依赖于R。

抛物 Harnack 不等式显然蕴含其椭圆版本。任何具有受控权重的图都在尺度 1 上满足抛物 Harnack 不等式，因而满足直至任意有限尺度 R的抛物 Harnack 不等式。

正如 Saloff-Coste [28] 与 Grigor'yan [11], 首先针对流形所证明的那样，抛物 Harnack 不等式有若干等价刻画。下面给出的该定理的离散版本归功于 Delmotte [8]。

定理 2.1（定理 1.7，见 [8]）。 给定 (Γ,π,μ)（或 $(\Gamma,\mathcal{K},\pi)$），其中 Γ 具有受控权重且 $\mathcal{K}$ 是一致惰性的，下列各项等价：

(a) Γ 满足倍增条件和 ***Poincar´e*** 不等式；***(b)*** Γ 满足抛物 ***Harnack*** 不等式；

(c) Γ满足双侧高斯热核估计，也就是说，存在常数 c_1、c_2、c_3、$c_4>0$，使得对于所有 x、$y\in\Gamma$、$n\geq d(x$、$y)$,

$$\frac{c_1}{V(x,\sqrt{n})}\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{c_3n}\Big)\leq p(n,x,y)\leq\frac{c_3}{V(x,\sqrt{n})}\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{c_4n}\Big). \tag{10}$$

定义 2.19（Harnack图）。 如果（Γ,π,μ）满足定理 2.1 中的任一条件，我们就称 Γ 为一张***Harnack***图。

定义 2.20（ $\approx$的滥用）。 在本文后文中，我们常将诸如 (10) 这样的表达式写成

$$p(n,x,y)\approx\frac{C}{V(x,\sqrt{n})}\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big).$$

$\approx$ 的此类用法应理解为：存在相匹配的上界和下界，且常数 c, C 在上界和下界中取不同的值。在

若连续出现多行，常数可能逐行变化；若一个估计中有多项相加，则 c， C 既可视为不同，也可视为相同（通过对不同的常数取最大值或最小值）。这些常数不依赖于 x， y， n。

定义 2.21 （图上的命中时间与命中概率）。 设 K 是 (Γ, π, μ) 的一个子图。我们定义以下命中时间和命中概率，其中$v \in K$:

- $\tau_K := \min\{n \geq 0 : X_n \in K\}$， K 的（首次）命中时间
- $\psi_K(x) := \mathbb{P}^x(\tau_K < +\infty)$，从 x出发的随机游走在有限时间内命中 K 的概率
- $\psi_K(x, v) := \mathbb{P}^x(X_{\tau_K} = v, \tau_K < +\infty)$，从 x出发的随机游走首次在点 v 命中 K 的概率，
- $\psi_K(n, x, v) := \mathbb{P}^x(X_{\tau_K} = v, \tau_K \leq n)$，首次在点 v 命中 K，且用时小于或等于 n 的概率，
- $\psi'_K(n, x, v) := \psi_K(n, x, v) - \psi_K(n-1, x, v) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_K} = v, \tau_K = n)$，在时刻 n 首次到达 K 的概率。

以下暂留性的概念定义于 [5]; 该论文第2节中给出了例子。

定义 2.22 （一致的 S-暂留性）。设 $(\Gamma, \mathcal{K}, \pi)$ 是一个具有受控权重的连通图，且 K 是 Γ 的子集，使得 $\Gamma := \Gamma \setminus K$ 连通。我们称子图 Γ 为 S-暂留（“生存”暂留），或者称图 Γ 是S-相对于集合 K 暂留，若存在 $x \in \Gamma$ 使得 $\psi_K(x) < 1$. （若不满足此条件，则称 Γ 为 S-常返。）

此外，一致的 S-暂留的暂留相对于K），如果存在 L， $\varepsilon > 0$ 使得 $d(x, K) \geq L$ 蕴含 $\psi_K(x) \leq 1 - \varepsilon$.

一致的 S-暂留性是一项有用的假设，因为我们在 [5] 中证明了，它蕴含子图的狄利克雷热核与诺伊曼热核具有可比性（在适当的其他假设也成立时）。

引理 2.1 ([5])。 假设 Γ 是一个哈纳克图，并且相对于 K 一致的 S-暂留，且 $\Gamma := \Gamma \setminus K$ 是内一致的。那么存在常数 $0 < c$、 $C < +\infty$ ，使得

$$cp_{\Gamma,N}(Cn, x, y) \leq p_{\Gamma,D}(n, x, y) \leq p_{\Gamma,N}(n, x, y). \tag{11}$$

2.4. **书状图**。 下文的切割/粘合构造在 [7]的第 3 节中有详细描述，并提供了大量例子。因此，这里我们给出一个直接的描述。

2.4.1.图的粘合。 从有限个“页”（有时也称为“片”）开始，即图 (Γ_i, π_i, μ^i)，其中 $i = 1, \ldots, l$。在带端流形的设定中，这些页扮演“端”的角色。应将这些页视为满足我们关于受控且一致惰性权重的主要假设的可数无限连通图。

此外，假设我们有粘合“脊柱”（有时称为“粘合集”），(Γ_0, π_0, μ^0)。 这对应于带端流形情形中的中心紧集。**我们允许 Γ_0 不连通**。我们仍然要求 Γ_0上的权重

是适应的、从属的、受控的且一致惰性的，不过我们现在允许完全不连通顶点的权重为零。

按如下方式沿脊柱 Γ_0 粘合各页 Γ_i, $1 \le i \le l$：假设每个 Γ_i 都带有一个标记顶点集（“边缘”）；将该顶点集标记为 G_i.。进一步假设，对于每个 $i \in \{1, \dots, l\}$，脊柱 Γ_0 都包含顶点集 G_i'，该顶点集是 G_i. 的一个副本（注意，G_i' 不必互不相交）。对于每个 $i,$，我们假设 G_i 与 G_i' 之间存在一个识别映射（双射）。此外，该识别映射应满足相容条件：存在常数 c_I, C_I，使得如果 $x \in G_i, x' \in G_i'$ 被识别，则

$$c_I \pi_0(x') \le \pi_i(x) \le C_I \pi_0(x'). \tag{12}$$

方程（12）确保粘合在一起的顶点处的权重相容，并且一致的常数适用于整个图。该条件意味着任意粘合边上的权重也是可比的。按照这些识别映射将各页与脊柱粘合后得到的图称为 Γ.（关于在 $x \in \Gamma_0$ 中由于 Γ_0 不连通而导致 Γ_0 没有邻居的情形，对（12）所作的适当微小修改，见[7] 的注记3.1。）

本文中，我们所说的识别，是指按字面意义将顶点识别为同一个顶点（而非用一条边连接这些顶点）。因此，可以通过定义权重，在粘合图 Γ 上定义随机游走结构

$$\pi(x) = \sum_{i=0}^{l} \pi_i(x) \quad \text{and} \quad \mu_{xy} = \sum_{i=0}^{l} \mu_{xy}^i \quad \forall x, y \in V,$$

这里约定，若 $x \notin V_i$ （ Γ_i的顶点集），则 $\pi_i(x) = 0$；若 $\{x, y\} \notin E_i$ （ Γ_i的边集），则 $\mu_{xy}^i = 0$。

我们要求粘合图 Γ满足以下条件：

A. Γ是连通的。B. 存在一个数 $\alpha > 0$，使得 Γ_0，视为 Γ的子图时，是-连通的；也就是说，， Γ_0 在 Γ中的-邻域是连通的。*C.* 视为 的子图时，对所有，$\dots, l,$ 均有 $\partial_I \Gamma_i = G_i$。D. G_i 与 G_i' 之间的识别符合上述描述，即是一个在权重相容的顶点之间建立的双射。

在这些条件下，(Γ， π， μ) 是一个具有受控且一致惰性权重的简单连通图（ [7] 的引理 3.2）。

注 2.2. 事实上，上述假设 B.（即脊柱 Γ_0 beα-连通）并非必要。我们在此陈述这一假设，是为了与前一篇论文 [7] 中给出的构造保持一致。不过，细心的读者可以验证，该论文中并未在任何地方用到这一假设，而我们在此发展的论证也并不需要它。下面的例7.2和7.3属于脊柱不具备 α-连通性的类别。本文所举的其他例子中，脊柱均为 α-连通，这一事实使我们能够进一步简化所得的热核估计。

2.4.2. 图的切割。 除了将图粘合在一起，我们也可以考虑将图 (Γ， π， μ) 拆分成若干页和一条脊柱。

给定 (Γ， π， μ)，将一组顶点（及其导出子图）记为 Γ_0。从 Γ. 中移除 Γ_0 中的 **顶点**。这将图分裂为若干连通分支，并留下因移除 Γ_0. 中的顶点而产生的尾随边。假设 Γ_0 使得

这将得到有限个连通分支 Γ_1，……，Γ_l，它们均为无限图。我们用顶点对给定的 Γ_i 中的尾随边进行“封帽”，并将这些封帽顶点的集合称为 G_i。于是 G_i 与 Γ_0. 的顶点子集 G_i' 有自然的等同。

在所创建的每一页 Γ_i 上，我们允许一种比仅仅采用所继承的 Neumann 马尔可夫核略为灵活的随机游走结构：我们要求存在常数 C_B, c_B，使得对所有 $x \in \Gamma_i,\ 0 \le i \le l,$

$$c_B\pi(x) \le \pi_i(x) \le C_B\pi(x), \tag{13}$$

并且我们对边权重要求一个类似的不等式。这种灵活性确保可以把一个图切开再重新粘合，从而得到恰好原来的图；参见图2，它首次出现在 [7], 中，由此可了解为何这是必要的。同样，这一切割过程为我们的各页产生满足基本假设的图（见 [7] 的引理 3.3）。

我们对上述切割构造提出如下要求：

a. 如前所述，移除 Γ_0 应产生有限个连通分支，且它们全都是无限的。b. 在 Γ, 中，图 Γ_0 是 α- 连通的（但见注 2.2 ）。c. 集合 Γ_0 应具有如下性质：任一顶点 $x \in \Gamma_0$ 或者（1）其所有邻居也都在 Γ_0 中，或者（2）在 Γ_i 与 Γ_j 中有邻居，且 $i \ne j$ 与$i, j \in \{0, 1, \ldots, l\}$.

上述性质c.确保 $\partial_I\Gamma_i = G_i$，并防止为Γ_0 选择仅被来自单一页的其他顶点包围的顶点，它是粘合操作中性质C.的类似物。

[7] 的例3.5结合图2给出了进一步说明，而 [7] 的第3.4节提供了更多例子。

2.4.3. 关于脊柱的假设。 为了对我们所描述的此类粘合图上的热核作出任何论断，我们需要知道脊柱在某种意义上表现良好。下面给出脊柱行为的两种可能情形。

定义2.23 （固定宽度脊柱）. 假设（Γ, π, μ）具有页 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ 以及脊柱 Γ_0. 。脊柱 Γ_0 具有 $\delta > 0$ 的固定宽度，如果对所有 $v \in \Gamma_0$, 存在$i \in \{1, \ldots, l\}$ 使得 $d\,(v, \Gamma_i) \le \delta$.

定义2.24 （书状图）。 假设 (Γ, π, μ) 有 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ 页，脊柱为 Γ_0. 。对于 $\delta > 0$, 如果对所有 $v \in \Gamma_0$ 以及所有 $1 \le i \le l$, 都有 $d(v, \Gamma_i) \le \delta$., 则称 Γ 是一个 δ-书本状 图（或简称书状图）。

如果 Γ 的脊柱具有固定宽度 δ, 那么脊柱 Γ_0 中的每个顶点到某个 页的距离至多为 δ；不同的脊柱点附近的页可能不同。相比之下，如果 Γ 是一个 δ-书本状图，那么脊柱 Γ_0 中的每个顶点到所有 页的距离至多为 δ。如果 Γ 是一个 δ-书本状图，那么它的脊柱也具有固定宽度 δ。“书本状”一词的由来是脊柱能够接触到所有的页，正如书本的脊柱一样。

本文的主要结果适用于书状图。因此，我们常说“Γ 是一个书状图”，意指 Γ 是一个具有页面 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$和脊柱 Γ_0的图，它满足本节所述的构造，同时也满足 δ-书本状性质。

考虑我们所说的“增广”页通常很有用。

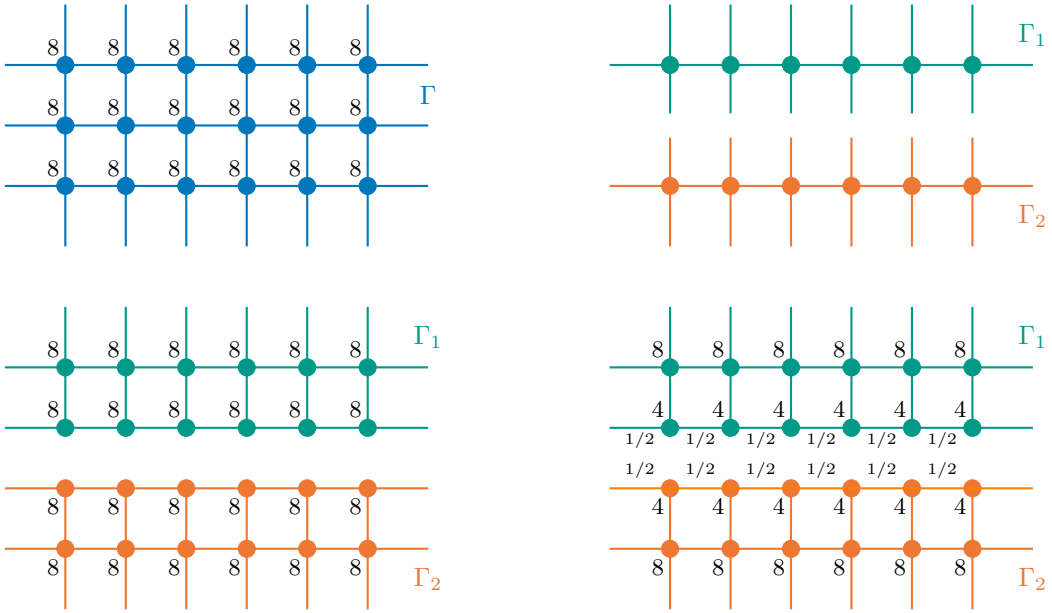


FIGURE 2. 从左上角的 $\mathbb{Z}^2$ 上的惰性简单随机游走开始。图中标出了顶点权重，所有边的权重均为 1。我们移除满足 $y = 0$ 的顶点集，将其切开，得到右上角带有尾随边的两个图。（“移除”的 Γ_0 顶点被视为一个权重均为 0 的非连通集合，图中未予显示。）将尾随边用顶点封口，在这些顶点之间添加边，并进行 Neumann 随机游走，即可得到左下角的一对图，其顶点权重已给出，且所有边权重均为 1。若将左下角的这两个图重新粘合，得到的并非恰好是带有惰性简单随机游走的 $\mathbb{Z}^2$。不过，可以改为按右下角所示的方式切开这些图，其中所有未标记边的权重均为 1。右下角的这两个图可以重新粘合成带有惰性简单随机游走的 $\mathbb{Z}^2$。

定义 2.25 （增广页）。设 (Γ, π, μ) 是一个固定宽度为 δ、具有页 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ 和脊柱 Γ_0 的图。对于每个 $i \in \{1, \ldots, l\}$，与 Γ_i 相关联的增广页 $\widehat{\ }$，记作 Γ_i，定义为

$$\widehat{\Gamma}_i := [\Gamma_i]_\delta \cap (\Gamma_i \cup \Gamma_0),$$

其中 $[\Gamma_i]_\delta := \{y \in \Gamma : d(y, \Gamma_i) \leq \delta\}$ 是 Γ_i 的 δ-邻域

增广页上的随机游走结构 $\widehat{\pi}_i$，$\widehat{\mu}^i$取 π, μ 在 Γ 中的值。若 Γ_i，Γ_0 上的权重与 Γ 的权重并不完全相同（由于相容权重条件），则改为取 Γ_i 与 Γ_0 上的权重（将它们视为与 Γ分离的图）。权重的具体选取不会改变此处所得结果，至多只引起常数的变化。

^若 Γ 是 δ-书本状的，则对所有 $i \in \{1, \dots, l\}$. 有 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_i$。换言之，^增广页 Γ_i 由页 i 连同整条脊柱组成。

2.5. **关键假设**。 现在我们可以陈述主要结果所需的假设。

(B1) (Γ, π, μ) 是一个有 δ 页的书状图，页为 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$，脊柱为 Γ_0。

(B2) 每一页 Γ_i, $1 \le i \le l$ 都是哈纳克图（定义 2.19）。**(B3)** 每一页 Γ_i 都是内一致的（定义 2.12），并且作为增广页 Γ_i（定义 2.25）的子图时是一致的 S-暂留^（定义 2.22）。**(B4)** 每一页 Γ_i, $1 \le i \le l$ 在 Γ. 中是一致的（定义 2.11）

值得在此指出，每一页 Γ_i 都与其增广^版本拟等距 Γ_i （见 [7]的引理 4.1）。由于每一页 Γ_i 都是哈纳克图，这意味着根据 Coulhon 和 Saloff-Coste 的一个结果，每个^增广页 Γ_i 也是哈纳克图 [3,定理 8.3]。

（内）一致性假设的一个重要推论是，我们可以用整个书状图中的距离 $d := d_\Gamma$，替换页 Γ_i 中的距离 $d_i := d_{\Gamma_i}$。

3. Gluing heat kernels

本节旨在构建下一节中推导热核估计所需的主要工具。首先，我们给出一些对假设要求最低的热核粘合抽象估计。然后，在给定(B1)-(B4)的条件下，陈述我们对这些抽象估计中各项的了解。

3.1. **抽象粘合估计**。 下面的定理是 [19]的定理3.5的离散版本，不需要任何假设 (B1)-(B4)。

定理 3.1。 设 U_1, U_2 是(Γ, π, μ) 的两个子图，并满足以下两个条件之一：

(1) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$，使得 $\partial U_1 \cap U_2$ 和 $\partial U_2 \cap U_1$ 也为空 *(2)* $U_2 \subset U_1$.

那么对于所有的 $x \in U_1$、$y \in U_2$ 和 $n \ge d(x, y)$,

(14)
$$p(n, x, y) \le p_{U_1, D}(n, x, y)$$

(15)
$$+ 2 \underbrace{\sum_{v \in \partial U_1} \sum_{w \in \partial U_2} \sup_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \le m \le n} p(m, v, w) \psi_{\partial U_1}(n, x, v) \psi_{\partial U_2}(n, y, w)}_{TERM\ A}$$

(16)
$$+ \underbrace{\sum_{v \in \partial U_1} \sum_{w \in \partial U_2} \sup_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \le m \le n} \psi'_{\partial U_2}(m, y, w) \psi_{\partial U_1}(n, x, v) \sum_{l=d(v,w)}^{n} p(l, v, w)}_{TERM\ B_x}$$

(17)
$$+ \underbrace{\sum_{v \in \partial U_1} \sum_{w \in \partial U_2} \sup_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \le m \le n} \psi'_{\partial U_1}(m, x, v) \psi_{\partial U_2}(n, y, w) \sum_{l=d(v,w)}^{n} p(l, v, w)}_{TERM\ B_y}.$$

and
(18)

$$2p(n,\ x,y) \geq p_{U_1,D}(n,x,y)$$

$$(19)\qquad + \underbrace{2\sum_{v\in\partial U_1}\sum_{w\in\partial U_2}\inf_{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor\leq m\leq n} p(m,v,w)\psi_{\partial U_1}\Big(\Big\lfloor\frac{n}{4}\Big\rfloor,x,v\Big)\psi_{\partial U_2}\Big(\Big\lfloor\frac{n}{4}\Big\rfloor,y,w\Big)}_{TERM\ A}$$

$$(20)\qquad + \underbrace{\sum_{v\in\partial U_1}\sum_{w\in\partial U_2}\inf_{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor\leq m\leq n} \psi'_{\partial U_2}(m,y,w)\psi_{\partial U_1}\Big(\Big\lfloor\frac{n}{4}\Big\rfloor,x,v\Big)\sum_{l=d(v,w)}^{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1} p(l,v,w)}_{TERM\ B_x}$$

$$(21)\qquad + \underbrace{\sum_{v\in\partial U_1}\sum_{w\in\partial U_2}\inf_{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor\leq m\leq n} \psi'_{\partial U_1}(m,x,v)\psi_{\partial U_2}\Big(\Big\lfloor\frac{n}{4}\Big\rfloor,y,w\Big)\sum_{l=d(v,w)}^{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1} p(l,v,w)}_{TERM\ B_y}.$$

命中概率 $\psi_{\partial U_1}(n,\ x,\ v)$ 和 $\psi'_{\partial U_1}(m,\ x,\ v)$ 如定义 2.21 所述。定理 3.1 的证明与 [19]中的连续紧致情形基本相同，并以一系列粘合引理为基础。该证明的完整细节见第一作者博士论文 [4]的附录 A。对于通过旋转抛物面将 $\mathbb{R}^n$ 的两个副本粘合起来的情形， [21], Grigor'yan 和 Ishiwata 使用引理 4.1 作为主要的粘合引理。他们的引理 4.1 可视为 [19] 中引理 3.1 和 3.3 的连续版本，能够处理非紧致（无界集合）上的粘合。由于他们的情形始终只有两个端，只需使用 [19]粘合引理的一个推广；而我们目前考虑的情形包含任意有限多个页，因此需要上述对 [19] 完整粘合定理（定理 3.5）的推广。

虽然定理 3.1 中出现的求和看似是对整个（可能无限的）集合 $\partial U_1, \partial U_2$ 进行的，但实际上，只有在以下条件全部满足时，三个"彩色"项才非零： $d_\Gamma(x,v) \leq n$, $d_\Gamma(y,w) \leq n$ 以及 $d_\Gamma(v,w) \leq n$。因此，所有求和都是有限的，且其中任意两点之间的距离至多为 n 量级。

额外的假设(B1)-(B4)和粘合结构使我们能够估计上述估计式中出现的对象。一般而言，我们应用定理 3.1 时，要么令 U_1, U_2 为不同的页，要么令 U_1 为某一页的邻域，并令U_2 为该页本身。这两种情形对应定理中关于U_1, U_2 的两个条件。

细心的读者可能会担心，上文中对 U_1， U_2 的此类选择未必满足定理对这些集合所给出的条件。例如，若 $U_1 = \Gamma_1$ 且 $U_2 = \Gamma_2$，则可能出现 $\partial\Gamma_1 \subset \Gamma_2$。事实上，在我们的主要例子中，正是通过将一个 $\mathbb{Z}^4$ 的副本与一个 $\mathbb{Z}^5$ 和一个 $\mathbb{Z}^6$ 粘合，并将它们的 x_1轴识别起来，才会出现这种情况。不过，在下文第4节中，我们将看到，只需令 U_1 取为例如 Γ_1 减去脊柱的一个邻域，就能解决这一困难。一般而言，上述粘合定理中出现的这类求和具有相当大的灵活性。因此，不失一般性，假设求和是对仅属于脊柱的点进行的。那么，粘合定理中有两类对象：（1）粘合脊上两点之间的热核，例如 $p(m,\ v,\ w)$，以及

它们的求和；（2）粘合集的命中概率／页的离开概率。我们利用 [7], 中的 Faber-Krahn 不等式得到了脊到脊热核（1）的估计，并在 [5]中得到了命中概率（2）的估计。

3.2. **定理 3.1 中各量的估计**。定理 3.1 提供了一种获得具有匹配上界和下界的热核估计的方法（允许存在某些上确界/下确界）。在本小节中，我们汇总早期论文中的结果，就定理 3.1 中出现的所有对象，利用距离和体积等更具体的量给出双侧估计。

在定理 3.1 中，脊柱到脊柱的热核 $p(m,\ z,\ w)$（其中 $z,\ w \in \Gamma_0$ 出现），以及关于时间变量的 $p(m,\ z,\ w)$ 的有限和。脊柱到脊柱热核的估计已在 [7] 中得到，并总结如下。一般而言，正如 [7], 的第 7 节所讨论的，获得良好的 Γ_0 到 Γ_0 热核估计，尤其是上界估计，是证明关于非书本状图的更一般结果的主要障碍。

对于任意 $v \in \Gamma_0$，定义

$$V_{\min}(v,r) = \min_{1\le i\le l} V_i(v_i,r),$$

其中，每个 v_i 都是 v 在 Γ_i 中的最近点，且 $V_i := V_{\Gamma_i^\circ}$（在 [7], 中，我们给出了 $V_{\min}$ 的一个更复杂的定义。不过，在当前的书状图情形下，$V_{\min}$ 的这两个定义是可比较的。）如 [7], 的第 6.1 节所示，在图为书状图这一假设下，$V_{\min}$（$v,\ r$）是一个倍增函数，并且当 v 固定时，它随 r 增大而增大。

引理 3.1（ [7], 脊柱间热核估计）。设（$\Gamma,\ \mu,\ \pi$）是满足第 *2.5* 节中假设 ***(B1)-(B4)***的书状图。那么对于所有v、$w \in \Gamma_0$ 以及 $m \gg d_\Gamma(v,\ w) + \delta$,

$$p(m,v,w) \approx \frac{C}{V_{\min}(v,\sqrt{m})} \exp\Big(-\frac{d_\Gamma^2(v,w)}{cm}\Big), \tag{22}$$

其中，按照定义 *2.20* 的用法，记号 $\approx$ 的含义有所滥用。

引理 3.2（脊柱间热核估计之和）。设（$\Gamma,\ \mu,\ \pi$）是满足假设***(B1)-(B4)***的书状图。

那么，对于所有 $v \ne w \in \Gamma_0$ 和 $n \gg d_\Gamma(v,w) + \delta$,

$$\begin{aligned}\sum_{l=d_\Gamma(v,w)}^{n} p(l,v,w) &\approx \sum_{l=d_\Gamma(v,w)}^{n} \frac{C}{V_{\min}(v,\sqrt{l})} \exp\Big(-\frac{d_\Gamma^2(v,w)}{cl}\Big) \\ &\approx C\frac{d_\Gamma^2(v,w)}{V_{\min}(v,d_\Gamma(v,w))} \exp\Big(-\frac{d_\Gamma^2(v,w)}{cn}\Big) + \sum_{l=d_\Gamma^2(v,w)}^{n} \frac{C}{V_{\min}(v,\sqrt{l})}.\end{aligned} \tag{23}$$

如果 $v = w$ 和 $n \gg d_\Gamma(v,w) + \delta$, 那么

$$\sum_{l=0}^{n} p(l,v,v) \approx C + \sum_{l=C^*\delta}^{n} \frac{C}{V_{\min}(v,\sqrt{l})}$$

对于某个常数 C^*。（注意 C 取决于 δ。）

引理 3.2 可以用与 [5] 中相同类型的论证来证明（参见推论 3.24 的证明）。证明根据 n 相对于 $d_\Gamma(v,\ w)$ 的大小考虑不同情形，并利用二进分解这一标准技巧来借助倍增函数 $V_{\min}$。如果 $v = w$，那么 $p(0,\ v,\ v) = 1$，事实上，当 l 较小时， $p(l,\ v,\ v)$ 大致为 1；当 l 较大时，可以应用引理 3.1。

如果该图还满足以下体积增长条件，则（23）中只有第一项。

定义3.1（体积增长条件）。 在书状图 (Γ,μ,π) 上，我们称 y 体积增长快于2，若对所有 $1 \le i \le l,$ ，都存在 $\varepsilon_i > 0,$ 使得

$$\frac{V_i(x,R)}{V_i(x,r)} \ge c_i \left(\frac{R}{r}\right)^{2+\varepsilon_i} \quad \forall x \in \Gamma_i,\ R \ge r. \tag{24}$$

特别地，这意味着存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\frac{V_{\min}(v,R)}{V_{\min}(v,r)} \ge c\Big(\frac{R}{r}\Big)^{2+\varepsilon} \quad \forall \nu \in \Gamma_0,\ R \ge r$$

也成立。

令 $\rho_\Gamma(x,\ y) := \max\{1, d_\Gamma(x,\ y)\}$. 若条件 (24) 成立，则估计式 (23) 化简为

$$\sum_{l=d_\Gamma(v,w)}^{n} p(l,v,w) \approx C\frac{\rho_\Gamma^2(v,w)}{V_{\min}(v,d_\Gamma(v,w))}\exp\Big(-\frac{d_\Gamma^2(v,w)}{cn}\Big). \tag{25}$$

当 $n \le d_\Gamma^2(v,\ w)$ 时，这种简化显而易见；对于下界也是如此。在其余情况下，利用 $V_{\min}$ 的倍增性质计算 (23) 中的“尾部”求和。条件 (24) 保证该求和有限。在分子中使用 ρ_Γ 是为了处理 $v = w$ 的情况，使得估计结果为常数而非零。在其他所有情况下， ρ_Γ 和 d_Γ 可以互换。

定理 3.1 中出现的其他对象是命中概率。将 [5]的结果应用于当前情形，可得以下引理。

引理 3.3 (推论 3.23 和 3.24，见 [5])。 设 (Γ,π,μ) 为一个连通图，它具有一致惰性和受控权重。假设(Γ,π,μ) 满足哈纳克条件，且 Γ 是 Γ 的一个内一致子图，并且是一致 S-暂留的。那么，$\forall x \in \Gamma \setminus \partial_I\Gamma,\ v \in \partial\Gamma,\ n \ge d_\Gamma(x,v)$，其中 $\approx$如定义 *2.20* 所述，

$$\psi'_{\partial\Gamma}(n,x,v) \approx \frac{C\pi(v)}{V_\Gamma(x,\sqrt{n})}\exp\Big(-\frac{d_\Gamma^2(x,v)}{cn}\Big) \tag{26}$$

$$\psi_{\partial\Gamma}(n,x,v) \approx \frac{C\pi(v)\rho_\Gamma^2(x,v)}{V_\Gamma(x,d_\Gamma(x,v))}\exp\Big(-\frac{d_\Gamma^2(x,v)}{cn}\Big) + \sum_{m=d_\Gamma^2(x,v)}^{n}\frac{C\pi(v)}{V_\Gamma(x,\sqrt{m})}. \tag{27}$$

此外，如果 V_Γ 满足条件 *(24)*，那么

$$\psi_{\partial\Gamma}(n,x,v) \approx \frac{C\pi(v)\rho_\Gamma^2(x,v)}{V_\Gamma(x,d_\Gamma(x,v))}\exp\Big(-\frac{d_\Gamma^2(x,v)}{cn}\Big). \tag{28}$$

一般而言，我们将在 Γ 为页且 Γ 为增广页或该页的邻域的情形下应用引理 3.3。由于这两种情形看起来有些不同，本引理以相当一般的子图术语表述。

4. General heat kernel estimates

我们现在实施上一节所述的策略，即应用定理 3.1 以及对其中出现的对象的估计。由此得到书状图的主要一般热核估计。

在陈述我们的主要定理之前，我们需要设定一些额外的记号。对于 $1 \le i \le l$，令 $V_i := V_{\Gamma_i}$ 且 $d_i := d_{\Gamma_i}$。若 x，y 并非都属于 Γ_i，则令 $d_i(x,\ y) := +\infty$。此外令 $\rho_i(x,\ y) := \max\{1, d_i(x, y)\}$。

回顾增广页的定义如下 $1 \le i \le l$。也就是说，它们是页与脊柱的并集。对于 $x \in \Gamma_i$，$y \in \Gamma_j$，其中 i 与 j可以相同或不同，定义

$$P_{x,y,n} = \{(v,w) \in \partial\Gamma_i \times \partial\Gamma_j : d(x,v) \le n, d(y,w) \le n, d(v,w) \le n\}.$$

例如，若 $x \in \Gamma_0$，则它对所有 $1 \le i \le l$，都属于 Γ_i，因此 $P_{x,\ y,\ n}$ 的定义依赖于陈述 $x \in \Gamma_i$，用以确定 i。反之，若x 只属于一个页，则 i 的选取必须是包含 x的那个页的指标。

最后，给定四个顶点 v、w、x、y，令

$$d_*^2 := d_\Gamma^2(x,v) + d_\Gamma^2(v,w) + d_\Gamma^2(w,y).$$

由于 $(a+b)^2 \approx a^2 + b^2$ 当 a时，$b \ge 0$，以下结论也成立：

$$d_*^2 \approx \big(d_\Gamma(x,v) + d_\Gamma(v,w) + d_\Gamma(w,y)\big)^2.$$

定理 4.1。假设(Γ, π, μ) 是一个书状图，其页为 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$，脊柱为$\Gamma_0$，且满足假设*(B1)-(B4)*。此外，假设定义*3.1*中的体积增长条件成立。

那么，对于 $x, y \in \Gamma$ 和 $n \gg d_\Gamma(x,y) + d(x,\Gamma_0) + d(y,\Gamma_0) + \delta$，我们有以下热核估计：

(1) 若 $x \in \Gamma_i$，$y \in \Gamma_j$（i，j 可以相同，也可以不同），则我们有 $p(n,x,y)$ 的上界和下界，形式如下：

$$\begin{aligned} &\frac{C}{V_i(x,\sqrt{n})} \exp\Big(-\frac{d_i^2(x,y)}{cn}\Big) \\ &+ \sum_{(v,w)\in P_{x,y,n}} C\Bigg[\frac{1}{V_{\min}(v,\sqrt{n})} \frac{\pi(v)\rho_i^2(x,v)}{V_i(x,d_i(x,v))} \frac{\pi(w)\rho_j^2(y,w)}{V_j(y,d_j(y,w))} \\ &+ \frac{\pi(w)}{V_j(y,\sqrt{n})} \frac{\pi(v)\rho_i^2(x,v)}{V_i(x,d_i(x,v))} \frac{\rho_\Gamma^2(v,w)}{V_{\min}(v,d_\Gamma(v,w))} \\ &+ \frac{\pi(v)}{V_i(x,\sqrt{n})} \frac{\pi(w)\rho_j^2(y,w)}{V_j(y,d_j(y,w))} \frac{\rho_\Gamma^2(v,w)}{V_{\min}(v,d_\Gamma(v,w))}\Bigg] \exp\Big(-\frac{d_*^2}{cn}\Big) \end{aligned} \tag{29}$$

(2) 若 x，y 都靠近脊柱，则*(29)*化简为

$$p(n,x,y) \approx \frac{C}{V_{\min}(x,\sqrt{n})} \exp\Big(-\frac{d_\Gamma^2(x,y)}{cn}\Big). \tag{30}$$

注释4.1. • 我们为了方便起见，采用了体积增长假设 (3.1)，因为定理中的公式已经足够复杂。

即使没有这一假设，我们的方法和证明仍然适用，只需使用上一节给出的完整估计即可。在下面的例 7.7 中，有一页不满足体积增长条件。

- 严格来说，在下界中，集合$P_{x,y,n}$ 应替换为$P(x, y, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor)$，但由于所出现的所有体积的倍增性质，以及可以改变常数 C, c，这并无差别。类似地，在求和内部的各项中使用 n 还是 $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 也无关紧要。
- 在公式中 d 仍然保留而未换成 ρ, 的地方，若需要，总可以替换为 ρ （同样是由于体积倍增以及至多相差常数倍的变化）。
- 若 x （或 y）位于脊柱中，则对 $\{1, \ldots, l\}$中 i 的任意选取，(29)都成立。有勇气的读者可以验证：(29)中的估计与 i的选取无关，并且若 x 与 y 都属于脊柱，则(30)也同样不变。（这在后面各节给出的具体例子中更容易验证。）

证明。 首先，注意估计式（30）恰好就是上文（22）中的脊柱到脊柱热核估计。此外，根据局部抛物型哈纳克不等式，$p(n,\ x,\ y) \approx Cp(cn,\ x^*,\ y^*)$，其中 x^* 和 y^* 分别与 x和 y相距至多一个固定距离。因此，只需证明满足 $d(x,\ \Gamma_0)\ d(y,\ \Gamma_0) > 4.$的 $x,\ \ y,$ 的定理。根据 $x,\ \ y$是否位于不同的页上，分为两种情况。

下面的引理应能让读者放心，估计式（29）对微小变化并不敏感。

引理 4.1。 在（*29*）中，对 $(v, w) \in P_{x,\ y,\ n}$ 求和，可以替换为对以下任一集合求和：

- $\{(v, w) \in [\Gamma_0]_K \times [\Gamma_0]_K :\ \ d(x, v) \le n, d(y, w) \le n, d(v, w) \le n\}$ 其中 K 是任意固定常数（例如 $K = 4$ 或 $K = 10$）
- 对前一项中任意一个集合的任意固定 ε-网的球心求和
- 前两项中的任意一项，但将 n 替换为某个常数 $k > 0$ $\lfloor kn \rfloor$ （特别是$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$）
- 前述任意集合，但将 x、y替换为 x^*、y^*，其中 d_Γ（$x,\ x^*$），d_Γ（$y,\ y^*$）$\le K$。

引理 *4.1* 的证明。 我们证明，对整个K脊柱邻域求和与对该邻域的 ε-网的球心求和等价；由此可直接得到其他结论。

固定 $\varepsilon > 0$，并对 $\{(v,\ w) \in [\Gamma_0]_K \times [\Gamma_0]_K$取一个覆盖：$d(x,\ v) \le n,\ d(y,\ w) \le n,\ d(v,\ w) \le n\}$，由半径为 ε的球构成，且这些半径为 $\frac{\varepsilon}{2}$的球互不相交。由于该图局部一致有限，且每一页均满足体积倍增，这样的覆盖总是存在。

当然，只对 ε-网中球的中心求和，比对脊柱的整个邻域求和要小。另一方面，对于每一对 $(v, w) \in \{(v, w) \in [\Gamma_0]_K \times [\Gamma_0]_K :\ d(x, v) \le n, d(y, w) \le n, d(v, w) \le n\}$，覆盖中都存在一对球 $B(v^*, \varepsilon)\ B(w^*, \varepsilon)$，使得 $v \in B(v^*, \varepsilon)\ w \in B(w^*, \varepsilon)$。由于体积倍增和受控权重，和式中所有带有 $v,\ w$ 的项都可以替换为带有 v^*, w^* 的同一项。此外，每个 (v^*, w^*) 至多对应有限个 (v, w) 对。□

现在我们回到主要证明。

情形 *1*： x、 y 位于不同的页中，且远离粘合集

假设 $x \in \Gamma_i$, $y \in \Gamma_j$，其中 $i \neq j$ 和 $d(x, \Gamma_0)$ $d(y, \Gamma_0) > 4.$。如果脊柱足够厚，使得 $\partial\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ 且 $\partial\Gamma_j \cap \Gamma_i = \emptyset,$，那么我们可以在 $U_1 = \Gamma_i$, $U_2 = \Gamma_j$ 的条件下应用定理 3.1，因为定理的条件 (1) 已满足。如果不满足该条件，则改为应用定理 3.1，其中 $U_1 = \Gamma_i \setminus [\Gamma_0]_4$ 和 $U_2 = \Gamma_j \setminus [\Gamma_0]_4$。在这两种情况下应用定理的区别在于求和所遍历的集合；由上文的引理 4.1 可知，只需考虑第一种情况。

由于 x 和 y 位于不同的页中，因此对于所有 n, $p_{\Gamma_i, D}(n, x, y) = 0$。现在只需估计三个“彩色”项。由于 $V_{\min}$ 是倍增的，在 (22) 中给出的 $p(m, v, w)$ 的脊柱到脊柱热核估计，在对 $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq m \leq n$取上确界或下确界时不会改变。我们关注的命中概率属于 $\psi_{\partial\Gamma_i}(n, x, v)$ 和 $\psi'_{\partial\Gamma_i}(m, x, v)$ 这两种类型。根据引理 3.3，这些概率可以估计，因为由假设 (B3) 可知，每个页 Γ_i 都是增广页 Γ_i. 的内一致且一致 S-$\widehat{}$暂留子图。此外，假设（B2）意味着$\curlywedge\Gamma_i$ 满足哈纳克不等式。另外，由于一致性假设 (B4)，引理 3.3 中出现的、原本应在 Γ_i 或 Γ_i 中取值的距离，也可以改为在整个图 Γ 中取值。

将上一段中的估计代入定理 3.1，可得到各项匹配的上界/下界（第一行按照上界的形式书写，但下界中也有类似的结论）：

$$\begin{aligned}
\text{TERM A} &\approx 2 \sum_{v \in \partial\Gamma_i} \sum_{w \in \partial\Gamma_j} \sup_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq m \leq n} p(m, v, w) \psi_{\partial\Gamma_i}(n, x, v) \psi_{\partial\Gamma_j}(n, y, w) \\
&\approx \sum_{(v,w) \in P_{x,y,n}} \frac{C}{V_{\min}(v, \sqrt{n})} \frac{\pi(v)\, \rho_i^2(x, v)}{V_i(x, d_i(x, v))} \frac{\pi(w)\, \rho_j^2(y, w)}{V_j(y, d_j(y, w))} \exp\Big(- \frac{d_*^2}{cn} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{TERM } B_x &\approx \sum_{v \in \partial\Gamma_i} \sum_{w \in \partial\Gamma_j} \sup_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq m \leq n} \psi'_{\partial U_2}(m, y, w) \psi_{\partial U_1}(n, x, v) \sum_{l=d(v,w)}^{n} p(l, v, w) \\
&\approx \sum_{(v,w) \in P_{x,y,n}} \frac{C\pi(w)}{V_j(y, \sqrt{n})} \frac{\pi(v) \rho_i^2(x, v)}{V_i(x, d_i(x, v))} \frac{\rho_\Gamma^2(v, w)}{V_{\min}(v, d_\Gamma(v, w))} \exp\Big(- \frac{d_*^2}{cn} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{TERM } B_y &\approx \sum_{v \in \partial\Gamma_i} \sum_{w \in \partial\Gamma_j} \sup_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq m \leq n} \psi'_{\partial U_1}(m, x, v) \psi_{\partial U_2}(n, y, w) \sum_{l=d(v,w)}^{n} p(l, v, w) \\
&\approx \sum_{(v,w) \in P_{x,y,n}} \frac{C\pi(v)}{V_i(x, \sqrt{n})} \frac{\pi(w) \rho_j^2(y, w)}{V_j(y, d_j(y, w))} \frac{\rho_\Gamma^2(v, w)}{V_{\min}(v, d_\Gamma(v, w))} \exp\Big(- \frac{d_*^2}{cn} \Big).
\end{aligned}$$

这恰好是（29）第二部分中出现的三项，而（29）的第一项为零，因为 x, y 属于不同的页。

情形 *2*： x、 y 远离同一条脊柱，且位于同一页

假设 x, $y \in \Gamma_i$ 且 $d(x,$ $\Gamma_0)$ $d(y,$ $\Gamma_0) > 4.$ 我们对 $U_2 = \Gamma_i$和 $U_1 = [\Gamma_i]_1$ （ Γ_i的 1-邻域）应用定理 3.1，这些集合满足该$\widehat{}$定理的条件 (2)。只需考虑 $\Gamma_i \supseteq [\Gamma_i]_1$ 的情形（否则，取该页的一个更大邻域，并使用引理 4.1）。接着，由于 Γ_i 是内一致的，且

^在 Harnack图 Γ_i，内部一致地 S-暂留，因此 Γ_i 在 Harnack图 $[\Gamma_i]_1$.内部也是内一致的，且一致地 S-暂留。因此，由引理 2.1，

$$p_{\Gamma_i,D}(n,x,y) \approx C p_{\Gamma_i,N}(cn,x,y) \approx \frac{C}{V_i(x,\sqrt{n})} \exp\Big(-\frac{d_i^2(x,y)}{cn}\Big),$$

因为 Γ_i 本身满足带 Neumann 条件的哈纳克不等式。

估计“多彩”项与第一种情形非常相似。 $\partial\Gamma_i$ 和 $\partial[\Gamma_i]_1$ 的命中概率本质上相同。同样，一致性假设 (B4) 允许用 Γ中的距离替代各页中的距离。因此，

$$\begin{aligned}\text{TERM } A &\approx 2 \sum_{v\in\partial[\Gamma_i]_1} \sum_{w\in\partial\Gamma_i} p(n,v,w)\psi_{\partial[\Gamma_i]_1}(n,x,v)\psi_{\partial\Gamma_i}(n,y,w) \\ &\approx \sum_{(v,w)\in P_{x,y,n}} \frac{C}{V_{\min}(v,\sqrt{n})} \frac{\pi(v)\rho_i^2(x,v)}{V_i(x,d_i(x,v))} \frac{\pi(w)\rho_i^2(y,w)}{V_i(y,d_i(y,w))} \exp\Big(-\frac{d_*^2}{cn}\Big).\end{aligned}$$

为理解第二个近似，注意到像 $d_{\Gamma_i}(x,\ v)$ 这样的量，在将 d_i 延伸到 $[\Gamma_i]_2$ 时是有意义的。此外，由于一致性，所有这类量都可以用 $d_\Gamma(x,\ v)$。 来替代。最后，根据引理 4.1，对求和所涉及的顶点可以用 $P_{x,\ y,\ n}$ 替代。

另外两项的估计方法类似：

$$\begin{aligned}\text{TERM } B_x &\approx \sum_{v\in\partial[\Gamma_i]_1} \sum_{w\in\partial\Gamma_i} \psi'_{\partial\Gamma_i}(m,y,w)\psi_{\partial[\Gamma_i]_1}(n,x,v) \sum_{l=d(v,w)}^{n} p(l,v,w) \\ &\approx \sum_{(v,w)\in P_{x,y,n}} \frac{C\pi(w)}{V_i(y,\sqrt{n})} \frac{\pi(v)\rho_i^2(x,v)}{V_i(x,d_i(x,v))} \frac{\rho_\Gamma^2(v,w)}{V_{\min}(v,d_\Gamma(v,w))} \exp\Big(-\frac{d_*^2}{cn}\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{TERM } B_y &\approx \sum_{v\in\partial[\Gamma_i]_1} \sum_{w\in\partial\Gamma_i} \psi'_{\partial[\Gamma_i]_1}(n,x,v)\psi_{\partial\Gamma_i}(n,y,w) \sum_{l=d(v,w)}^{n} p(l,v,w) \\ &\approx \sum_{(v,w)\in P_{x,y,n}} \frac{C\pi(v)}{V_i(x,\sqrt{n})} \frac{\pi(w)\rho_i^2(y,w)}{V_i(y,d_i(y,w))} \frac{\rho_\Gamma^2(v,w)}{V_{\min}(v,d_\Gamma(v,w))} \exp\Big(-\frac{d_*^2}{cn}\Big).\end{aligned}$$

将上面得到的四项相加，恰好得到 (29)，因为在这种情形下 $i=j$. □

5. Example: The Spine Γ_0 is finite

本节考虑书状图 Γ 的情形，其页为 $\Gamma_1,\dots,\Gamma_l$，其中粘合脊 Γ_0 由有限个顶点组成。

设 $o\in\Gamma_0$ 为一个固定点。（由于脊柱是有限的，其中的所有点实质上都相同。）令 $|x|:=\max\{1,d(x,\Gamma_0)\}$。令 i_x 表示 i 所属页的编号，并令 $V_{i_x}(y,r)$ 表示在页 Γ_{i_x} 中，以 y 为中心、半径为 r 的球的体积。若 x 位于脊柱上，则令 $i_x=0$ 和 $V_{i_x}=V_{\min}$.

推论 5.1。 假设定理 *4.1* 的假设成立。此外，假设粘合脊 Γ_0 是有限的。那么对所有 x、$y\in\Gamma$ 以及充分大的 n,

$$
\begin{aligned}
p(n,x,y) \approx & \frac{C\pi(y)}{V_{i_x}(x,\sqrt{n})} \exp\Big(-\frac{d_{i_x}^2(x,y)}{cn}\Big) \\
& + C\Bigg[\frac{|x|^2|y|^2}{V_{\min}(o,\sqrt{n})V_{i_x}(x,|x|)V_{j_y}(y,|y|)} + \frac{|x|^2}{V_{j_y}(y,\sqrt{n})V_{i_x}(x,|x|)} \\
& + \frac{|y|^2}{V_{i_x}(x,\sqrt{n})V_{j_y}(y,|y|)}\Bigg] \exp\Big(-\frac{(|x|^2+|y|^2)}{cn}\Big).
\end{aligned} \tag{31}
$$

若 x, y 不属于同一页，我们约定$d_{i_x}(x, y) = +\infty$，此时 (31) 的第一项消失。在这种情况下，我们还有 $|x| + |y| \approx d_\Gamma(x, y)$。若 x, y 属于同一页，则 $d_{i_x}(x, y) = d_\Gamma(x, y)$，并且 $|x|+|y|$ 本质上是 x 与 y 之间的距离，但需要经过脊柱 Γ_0.

该推论是定理 4.1 的直接结果；由于 Γ_0 有限，可作显著简化，因此 Γ_0 的所有点均可视为相同，且所有求和均可对 Γ_0. 的全部点进行。这些常数依赖于 Γ_0, 例如其直径与体积。在这种情况下，由更一般的(29)推出脊间热核估计(30)是直接的（并可验证(29)不依赖于脊柱中顶点对页的选取）。

例如，若 $x \in \Gamma_0$, 则 $|x| = 1$ 与 $V_{i_x}(x, |x|) \approx V_{\min}(o,1)$, 为一个常数。在 $x, y \in \Gamma_0$, 这两种情形下，推论中的各项化为

$$
p(n,x,y) \approx \frac{C}{V_{\min}(o,\sqrt{n})} \exp\Big(-\frac{\mathrm{diam}(\Gamma_0)^2}{cn}\Big),
$$

这与脊间热核估计所预期的一致。

推论中的估计是离散情形下的热核估计，与 Grigor'yan 和 Saloff-Coste 的研究中，在紧集上粘合暂态流形时的热核估计相对应；参见 [19]中的定理 4.9 和 5.10。为看出这些估计相同，回想一下，在第一项中，通过改变指数项中的常数，$V_{i_x}(x,\sqrt{n})$可以替换为$V_{i_y}(y,\sqrt{n})$或$\sqrt{V_{i_x}(x,\sqrt{n})V_{i_y}(y,\sqrt{n})}$。根据我们的假设，所有页中的体积增长速度至少与$r^{2+\epsilon}$一样快，因此 [19] 中出现的项 $H(x,t)$可以近似为$V_{i_x}^{|x|^2}(x,|x|)$。最后一个表面上的差异是，在 [19], 中，诸如 $V_{j_y}(y,\sqrt{n})$这样的项写成了$V_{j_y}(o_{j_y},\sqrt{n})$（其中$o_{j_y}$是包含 y的那一页上距离 o最近的点）。不过，由于体积倍增性质，且$|x| = \max\{1, d(o,y)\}$，总可以用一个体积替换另一个体积，只需调整指数项内外的常数。在推论 5.1 中，我们保留以 x和 y 为中心的体积，因为当脊柱不是有限的时，无法再进行前一句所述的替换。

在 [19] 中所作的假设是，每个端都是哈纳克的，且是暂留的（在经典意义上）。让我们将这些假设与本文中的假设进行比较。

若 Γ_0 是有限的，那么假设（B1），即图是书本状的，便自动成立。假设（B2），即各页（端）满足哈纳克条件，也是如此。假设 (B3) 是指每一页都是内一致的，并且在其增广版本中一致地 S暂留于$\widehat{\ }$。由于 Γ_0 是有限的，Γ_i 是暂留的且满足哈纳克条件，并且 $\Gamma_i \setminus \Gamma_0$

对所有 $1 \leq i \leq l$, 一致的 S-暂留性、 S-暂留性和经典暂态性是相同的。（在 [5], 中我们指出，若 K 是有限的，那么 S-暂留性与经典暂态性是相同的。我们本应对此说法更加谨慎，因为从最一般的意义上说，这一说法未必成立，而且我们在 [5]中的定义^ ^高度依赖于 $\Gamma_i \setminus \Gamma_0$ 连通这一假设。不过，就我们在此关注的情形而言， Γ_i 是暂留的且满足哈纳克条件，因此并无困难。）

然而，要求每一页在其增广版本中也满足内一致性，以及假设 (B4) 要求每一页在整个图中一致，这两点都相当微妙。首先，从任意哈纳克图中移除一个有限集，并不一定能保持一致性。这与一种称为相对连通环带 (RCA) 的性质有关，而该性质又与暂留性有关。例如，满足体积增长条件 (3.1) 的哈纳克空间具有 RCA [10, 引理 6.9] （另见 [22,定理 1.6], ，该定理还包含一个容量条件）。鉴于这些参考文献，要确定从一个暂留哈纳克图中移除一个有限集后，所得图是否自动具有（内）一致性，似乎是个微妙的问题。我们不打算为回答此问题而可能进行冗长的迂回论证，而是向读者说明如下：此处所作的假设与 [19]中的假设或许并不完全相同，但二者十分接近。此外，如果我们只考虑推论 5.1 中那样的有限脊柱，就可以忽略一致性假设，并在用到这些假设的地方改用其他论证，诉诸脊柱的有限性。然而，由于本文主要关注的是允许脊柱为无限的情形，因此一致性假设很方便。

[19] 的结果也涵盖了某些端可以是常返的情形，前提是至少有一个端是暂留的。此类情形可通过使用适当的h 变换来处理，从而回到所有端均为暂留的情形。若只要求一页具有一致的 S-暂留性，要对这一情形作一般性描述会颇具挑战，因为存在一些集合虽具有 S-暂留性，却并非一致暂留。可能不存在能够将图变为一致S-暂留图的 h变换；事实上，（一致） S-暂留性与经典暂态性之间的差异意味着，我们必须更仔细地考虑适当的 h变换是否存在。不过，若脊柱有限，这些困难便不复存在，因而可以采用一般的 h 变换技巧。我们将在例 7.6 和 7.7 中这样做。

6. 粘合页面 ZDi 沿着脊柱 Zk

“书本状”图的典型例子，是将格点页面粘合在一个低维格点脊柱上。也就是说, (Γ, μ, π) 是一个由页面 $\Gamma_1 = \mathbb{Z}^{D_1}$、.....、 $\Gamma_l = \mathbb{Z}^{D_l}$ 构成的书本状图，其脊柱 $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^k$ 与每个页面的前 k个坐标对齐。我们在所有图上都采用惰性简单随机游走。

设 $D_{\min} = \min_{1 \leq i \leq l} D_i$. 对任意 $x \in \Gamma$, 令 D_x 表示x 所属页的维数，其中 i_x 表示该页的指标。令 $|x| := \max\{1, d(x, \Gamma_0)\}$,并令 $d_+(x, y)$表示 x 与 y 之间的最小距离，其中路径必须经过粘合脊 Γ_0. （若 x 属于脊柱，则可任意选取i_x 。）

对于这个例子，我们有如下具体的热核估计。

推论 6.1。 设(Γ, μ, π) 为上述具有页 $\mathbb{Z}^{D_1}, \ldots, \mathbb{Z}^{D_l}$ 和脊柱 $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^k$ 的书状图。假设 $D_{\min} \geq k + 3$.

那么，对于所有 x、 $y \in \Gamma$ 和 $n \gg d(x,\Gamma_0) + d(y,\Gamma_0) + 1$,

$$p(n,x,y) \approx \frac{C}{n^{\frac{D_x}{2}}} \exp\Big(-\frac{d_{i_x}^2(x,y)}{cn}\Big) + C\Bigg[\frac{1}{n^{\frac{D_{\min}}{2}}\,|x|^{D_x-k-2}\,|y|^{D_y-k-2}} + \frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}}\,|x|^{D_x-k-2}} + \frac{1}{n^{\frac{D_x}{2}}\,|y|^{D_y-k-2}}\Bigg] \exp\Big(-\frac{d_+^2(x,y)}{cn}\Big). \tag{32}$$

推论 6.1 由将定理 4.1 应用于本例子而得出。具体做法的细节相当复杂，并在下文的证明中给出。

与上一节一样，也很容易验证 (32) 可化简为更简单的脊柱到脊柱估计 (30)。

证明。 在此设定下，定理 4.1 中出现的许多量都可以容易地计算出来。对所有 $x \in \Gamma_i,\ 1 \le i \le l$, 我们有 $V_i(x,r) \approx r^{D_i}$ ，并且对所有 $v \in \Gamma_0.$ ，有 $V_{\min}(v,r) \approx r^{D_{\min}}$。此外，由于全局权重函数 π 是一致有界的，我们可以将其所有出现都视为常数。正如我们在定理 4.1 的证明中所见，一致性假设 (B4) 允许将任意页中的距离替换为 Γ 中的全局距离。

与定理 4.1 的证明中一样，我们可以将问题归结为顶点$x,\ y$ 远离脊柱的情形。同样，我们有两种情形。

情形 *1*： x、 y 位于不同的页中，且远离粘合脊 Γ_0

这是主要情形。在这一特定设置下，由于任意页的边界都是 $\mathbb{Z}^k$, $P(x,y,n) = \{(v,w) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^k$ 的一个副本： $d(x,v) \le n, d(y,w) \le n, d(v,w) \le n\}$.根据定理 4.1 中的估计式 (29),

$$p(n,x,y) \approx \sum_{(v,w)\in P_{x,y,n}} C\Bigg[\frac{1}{n^{\frac{D_{\min}}{2}}\,d(x,v)^{D_x-2}\,d(y,w)^{D_y-2}} + \frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}}\,d(x,v)^{D_x-2}\,d(v,w)^{D_{\min}-2}} + \frac{1}{n^{\frac{D_x}{2}}\,d(y,w)^{D_y-2}\,d(v,w)^{D_{\min}-2}}\Bigg] \exp\Big(-\frac{d_*^2}{cn}\Big), \tag{33}$$

其中 $d_*^2 = d^2(x,v) + d^2(v,w) + d^2(w,y)$。

假设 $x \in \Gamma_i \setminus [\Gamma_0]_4$ 和 $v \in \partial\Gamma_i.$。我们声称 $d(x,v) \approx |x| + d(v_x,v)$，其中回顾一下 $|x| := \max\{1, d(x,\Gamma_0)\}$ ，且 v_x 是 $\partial\Gamma_i$ 中的一个顶点，使 $\min_{v\in\partial\Gamma_i} d(x,v) = d(x,\Gamma_0)$ 取到最小值（若这样的顶点不止一个，任选其一）。在这个特定情形下， $|x| = d(x,\Gamma_0)$。上界由三角不等式得出，因为 $d(x,v) \le d(x,v_x) + d(v_x,v) = |x| + d(v_x,v)$。下界则由以下事实得出：根据 v_x 的定义， $|x| = d(x,v_x) \le d(x,v)$，并且

$d(v_x,\ v) \le d(v_x,\ x) + d(x,\ v) \le 2d(x,\ v)$，利用三角不等式以及再次利用 v_x 的定义。因此，(33) 变为

(34)

$$p(n,x,y) \approx \sum_{(v,w)\in P_{x,y,n}} C\Bigg[\frac{1}{n^{\frac{D_{\min}}{2}}\left[|x|+d(v_x,v)\right]^{D_x-2}\left[|y|+d(w_y,w)\right]^{D_y-2}} + \frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}}\left[|x|+d(v_x,v)\right]^{D_x-2} d(v,w)^{D_{\min}-2}} + \frac{1}{n^{\frac{D_x}{2}}\left[|y|+d(w_y,w)\right]^{D_y-2} d(v,w)^{D_{\min}-2}}\Bigg] \cdot \exp\left(-\frac{d_*^2}{cn}\right).$$

在计算上述二重和时，上界与下界需要不同的论证。

上界：上界的主要思想是，对集合$P_{x,y,n}$的限制可以忽略，我们可以转而考虑对$(v,w) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^k$求和。此外，由于三角不等式，

$$d(x,y) \le d(x,v) + d(v,w) + d(w,y),$$

并且，由于$(a+b)^2 \approx a^2+b^2$，指数项中的项 d_*^2 可以替换为$d^2(x,y)$。

我们在下面的引理中汇集一些微积分事实。

引理 6.1. 假设 $a \ge 1$与 $A,\ D \ge k+3$. 令 $d(\cdot,\cdot)$ 表示格点 $\mathbb{Z}^k$ 中两个点之间的距离（或格点 $\mathbb{Z}^K$的某个加厚版本中的距离）。则存在常数 c_1、c_2、$c_3>0$ （与 a无关），使得

$$\sum_{v'\in\mathbb{Z}^k} \frac{1}{[a+d(v^*,v')]^{D-2}} \le \frac{c_1}{a^{D-k-2}}, \qquad \forall v^* \in \mathbb{Z}^k \tag{35}$$

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}^k} \frac{1}{[1+d(v,w)]^{D-2}} \le c_2, \qquad \forall v \in \mathbb{Z}^k \tag{36}$$

$$\sum_{v\in\mathbb{Z}^k} \frac{1}{(a+d(v',v))^{D-2}} \sum_{w\in\mathbb{Z}^k} \frac{1}{[1+d(v,w)]^{A-2}} \le \frac{c_3}{a^{D-k-2}}. \tag{37}$$

引理 *6.1* 的证明。 由于情形 $k=0$ 已在上一节讨论过，我们可以假设 $k \ge 1$。

我们先证明 (35)。安排 $\mathbb{Z}^k$ 使得 v^* 为原点，且 $d(v^*,\ v') = |v_1'| + \cdots + |v_k'|$，其中 $v' = (v_1', \ldots, v_k')$。则

$$\sum_{v'\in\mathbb{Z}^k} \frac{1}{[a+d(v^*,v')]^{D-2}} = \sum_{v_1'\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{v_k'\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left[a+|v_1'|+\cdots+|v_k'|\right]^{D-2}}. \tag{38}$$

当我们沿每个坐标求和时，其余坐标保持固定，因此只需考虑一维求和。在此情形下，

$$\begin{aligned}\sum_{v'\in\mathbb{Z}}\frac{1}{[a+|v'|]^{D-2}} &= 2\sum_{v'=0}^{\infty}\frac{1}{[a+v']^{D-2}} \le \frac{2}{a^{D-2}}+\int_0^{\infty}\frac{2dx}{(a+x)^{D-2}}\\ &\le \frac{2}{a^{D-2}}+\int_a^{\infty}\frac{2du}{u^{D-2}} = \frac{2}{a^{D-2}}+\Big[-\frac{2}{(D-3)u^{D-3}}\Big]_a^{\infty}\\ &\le \frac{2}{a^{D-2}}+\frac{2}{(D-3)a^{D-3}} \le \frac{c}{a^{D-3}},\end{aligned}$$

其中我们用到了 $a\ge 1$，而 c 是一个常数（依赖于 D）。

在方程（38）上反复使用这一计算，即可得到所需的估计 e（35）：

$$\sum_{v'\in\mathbb{Z}^k}\frac{1}{[a+d(v^*,v')]^{D-2}} \le \sum_{v'_1\in\mathbb{Z}}\cdots\sum_{v'_{k-1}\in\mathbb{Z}}\frac{c}{[a+|v'_1|+\cdots+|v'_{k-1}|]^{D-3}} \le \frac{c_1}{a^{D-k-2}}.$$

现在证明（36）。属于 v 的 $\mathbb{Z}^k$ 的副本不必完全相同，但对于任意 $v\in\mathbb{Z}^k$，都存在 w_v，位于 $\mathbb{Z}^k$ 的“w”副本中，使得它与该副本之间的距离最小。我们有 $d(v,\ w)\approx d(v,\ w_v)+d(w_v,\ w)$，并且根据书本状图假设（B1），我们知道 $0\le d(v,\ w_v)\le\delta$。（36）中的“$1+d(v,\ w)$”考虑了 $v=w_v.$ 的情形。然后，通过缩小分母并使用（35），即可得到所需结果：

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}^k}\frac{1}{[1+d(v,w)]^{D-2}} \le \sum_{w\in\mathbb{Z}^k}\frac{1}{[1+d(w_v,w)]^{D-2}} \le c_2.$$

不等式（37）可通过先将（36）应用于内层求和，再将（35）应用于外层求和得到。□

根据引理 4.1，由于 x 与 y 属于不同的页，我们不妨假设这些求和已排列成使得 $v\ne w$。然后将引理 6.1 应用于 (34)，即得

$$\begin{aligned}p(n,x,y)\le C\Bigg[&\frac{1}{n^{\frac{D_{\min}}{2}}\,|x|^{D_x-k-2}\,|y|^{D_y-k-2}}+\frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}}\,|x|^{D_x-k-2}}\\ &+\frac{1}{n^{\frac{D_x}{2}}\,|y|^{D_y-k-2}}\Bigg]\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big).\end{aligned}\tag{39}$$

在此情形下，$d(x,y)=d_+(x,y)$，且 $d_{i_x}(x,y)=+\infty,$ 因此 (32) 的第一项为零，而该估计与 (39) 相符。

<u>下界：对于下</u>界，一个关键想法是舍弃求和中任何不起作用的项。我们将看到，仅考察某个“窗口”中的项，就能得到与上文所得上界相匹配的下界。具体而言，我们只考虑粘合脊上分别与$x,\ y,$相距 $d(x,y)$这一尺度（或更近）的 $v,\ w$。

完整的求和范围是集合 $P_{x,\ y,\ \lfloor\frac{n}{4}\rfloor}$，因为这是下界。我们只考虑该集合的一个子集，并称之为“窗口”。给定分别位于不同页中的 $x,\quad y$，令 $v_x,\quad w_y$ 表示在 Γ_0 中分别距离 $x,\ y$最近的点。选取一条连接 x 和 $y.$ 的测地路径。由于 $x,\quad y$ 位于不同页中，这条测地路径必定同时穿过 $\partial\Gamma_{i_x}$ 和 $\partial\Gamma_{i_y}$，因此我们可以选取顶点 $v_g\in\partial\Gamma_{i_x},\quad w_g\in\partial\Gamma_{i_y}$

使得 $d(x,\ y) = d(x,\ v_g) + d(v_g,\ w_g) + d(w_g,\ y)$。（我们使用下标 g 来暗指“测地线”。）

定义$W_{x,y,K} := \{v \in \Gamma_{i_x} = \mathbb{Z}^k\colon\ d(v, v_g) \le Kd(x,y)\}$, 其中 K 为固定常数。我们经常考虑 $K = 4$。集合$W_{y,x,K}$ 的定义与此类似。

集合$W_{x,y,4}$ 具有如下性质：它包含 v_x，因为

$$d(v_x, v_g) \le d(v_g, x) + d(x, v_x) \le 2d(x,y).$$

此外，若$v \in W_{x,y,4}$ 则

$$d(x,v) \le d(x,v_x) + d(v_x,v) \le d(x,y) + 4d(x,y) \le 5d(x,y).$$

若$v \in W_{x,y,4}$ 且$w \in W_{y,x,4}$, 则

$$d(v,w) \le d(v,v_g) + d(v_g,w_g) + d(w_g,w) \le 9d(x,y).$$

因此，在 $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \ge 9d(x,y)$的条件下，可得$W_{x,y,4} \times W_{y,x,4} \subseteq P_{x,y\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$。（这是定理中假设 $n \gg d(x,y)$起作用的一处。）

在集合 $W_{x,\ y,\ 4} \times W_{y,\ x,\ 4}$ 上，所有距离 $d(x,\ v)$ $d(v,\ w)$ $d(y,\ w)$ 均受 $d(x,\ y)$ 的控制，因此我们可以再次将指数项中的距离和 替换为 $(,\ y)$。

现在我们需要一个用于下界的引理 6.1 的类似结果。

引理 6.2。令 K, K 为固定常数，并令 $W_{x,\ y,\ K}$ 如上定义。假设 $0 \le a \le Kd(x,y)$ 且 $D \ge 3 + k$. 那么存在一个与 a 无关的常数 $c_4 > 0$，使得

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^k : d(v,v') \le Kd(x,y)} \frac{1}{[a + d(v',v)]^{D-2}} \ge \frac{c_4}{a^{D-k-2}}, \quad \forall v' \in \mathbb{Z}^k. \tag{40}$$

证明。在 $\mathbb{Z}^k$ 上安排坐标系，使 v' 为原点，且$d(v,\ v') = |v_1| + \cdots + |v_k| \le Kd(x,\ y)$。因此，对所有 $1 \le i \le k.$，都有 $|v_i| \le Kd(x,\ y)$。若能证明一维下界，引理即得证。

$$\sum_{v=0}^{Kd(x,y)} \frac{1}{[a+v]^{D-2}} \ge \frac{c}{a^{D-3}} \tag{41}$$

对于某个常数 $c > 0.$，在每次重复一维求和时，我们可能需要稍微调整 $K,\ K$。

为证明（41），需要考虑两种情况。

(*)情形 $a \le Kd(x,y)$:

在这种情况下,

$$\sum_{v=0}^{Kd(x,y)} \frac{1}{(a+|v|)^{D-2}} = \sum_{v=0}^{a} \frac{1}{(a+|v|)^{D-2}} + \sum_{v=a+1}^{Kd(x,y)} \frac{1}{(a+|v|)^{D-2}} \ge \sum_{v=0}^{a} \frac{1}{(a+|v|)^{D-2}}$$

$$\ge \sum_{v=0}^{a} \frac{1}{2^{D-2}\, a^{D-2}} = \frac{c_4 a}{a^{D-2}} = \frac{c_4}{a^{D-3}}.$$

(**) 情形 $Kd(x,y) \le a \le Kd(x,y)$：

~ ~在此情形下，对于某个 k 的值（其有上界/下界），有 $a \approx d(x,y)$ 和 $ka = Kd(x,y)$。因此，由于 $a \le a + |v| \le (K+1)a$,

$$\sum_{v=0}^{Kd(x,y)} \frac{1}{(a+|v|)^{D-2}} \ge \sum_{v=0}^{\tilde{k}a} \frac{c}{a^{D-2}} = \frac{c_4}{a^{D-3}}.$$

□

利用该引理，我们将 (34) 的第一项估计为

$$\begin{aligned}
\text{TERM } A &\approx \sum_{(v,w)\in P_{x,y,\lfloor \frac{n}{4}\rfloor}} \frac{C}{n^{\frac{D_{\min}}{2}} \left[|x| + d(v_x,v)\right]^{D_x-2} \left[|y| + d(w_y,w)\right]^{D_y-2}} \\
&\ge \sum_{(v,w)\in W_{x,y,4}\times W_{y,x,4}} \frac{C}{n^{\frac{D_{\min}}{2}} \left[|x| + d(v_x,v)\right]^{D_x-2} \left[|y| + d(w_y,w)\right]^{D_y-2}} \\
&\ge \frac{C}{n^{\frac{D_{\min}}{2}} |x|^{D_x-k-2} |y|^{D_y-k-2}}.
\end{aligned}$$

为处理来自初始项 B_x 以及项 B_y的那些项，我们考察略有不同的窗口。对于 $v \in W_{x,\,y,\,4}$，令 w_v 表示 $\partial\Gamma_{i_y}$ 中到 v 的最近点。由于 v 位于脊柱中，且 w_v 也是脊柱中的一个点，但靠近某一特定页，脊柱的 δ-书本状性质蕴含 $d(v,\ w_v) \le \delta$。于是

$$\begin{aligned}
d(w_v,w_g) &\le d(w_v,v) + d(v,v_g) + d(v_g,w_g) \le \delta + 4d(x,y) + d(x,y) \\
&\le (5+\delta) d(x,y),
\end{aligned}$$

其中 v_g, w_g 是 x 与 y 之间一条最短（测地线）路径上的点，如 $W_{x,\,y,\,C}$ 的定义中所示。因此 $w_v \in W_{y,\,x,\,5+\delta}$。再次假设 $n \gg d(x,\ y)$，则 $\{(v,\ w) \in W_{x,\,y,\,4} \times W_{y,\,x,\,5+\delta}\} \subseteq P_{x,\,y,\,\lfloor \frac{n}{4}\rfloor}$。于是

$$\begin{aligned}
\text{TERM } B_x &\approx \sum_{(v,w)\in P_{x,y,\lfloor \frac{n}{4}\rfloor}} \frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}} [|x| + d(v_x,v)]^{D_x-2}\, d(v,w)^{D_{\min}-2}} \\
&\ge \frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}}} \sum_{v\in W_{x,y,4}} \frac{1}{[|x| + d(v_x,v)]^{D_x-2}} \sum_{w\in W_{y,x,5+\delta}} \frac{1}{d(v,w)^{D_{\min}-2}} \\
&\ge \frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}}} \sum_{v\in W_{x,y,4}} \frac{1}{[|x| + d(v_x,v)]^{D_x-2}} \frac{1}{d(v,w_v)^{D_{\min}-2}} \\
&\ge \frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}}\, \delta^{D_{\min}-2}\, |x|^{D_x-k-2}} = \frac{1}{n^{\frac{D_y}{2}}\, |x|^{D_x-k-2}},
\end{aligned}$$

这里我们首先将对 $P_{x,y,\lfloor \frac{n}{4}\rfloor}$ 的求和范围缩小到给定的窗口，然后利用了对于所有 $v \in W_{x,y,4,}$, $w_v \in W_{y,x,5+\delta}$ 这一事实，最后结合脊柱的 δ-书本状性质和引理 6.2。

同样的推理也可应用于（34）的最后一项:

$$\begin{aligned}
\text{TERM } B_y &\approx \frac{C}{n^{\frac{D_x}{2}} \left[|y| + d(w_y,w)\right]^{D_y-2} d(v,w)^{D_{\min}-2}} \\
&\ge \frac{C}{n^{\frac{D_x}{2}} |y|^{D_y-k-2}}.
\end{aligned}$$

将这三项合并，得到一个下界，其形式与上界（39）完全相同，这与推论中的估计相符。情形 *2*： x， y 位于同一页上，且远离粘合脊 Γ_0

这些论证与不同页情形的论证非常相似。应用定理 4.1 中的估计 (29)，并回顾 $D_x = D_y$，即得

$$p(n,x,y) \approx \frac{C}{n^{\frac{D_x}{2}}} \exp\Big(-\frac{d_{i_x}^2(x,y)}{cn}\Big) + \sum_{(v,w)\in P_{x,y,\lfloor \frac{n}{4}\rfloor}} C\Bigg[\frac{1}{n^{\frac{D_{\min}}{2}}\, d(x,v)^{i_x-2}\, d(y,w)^{i_x-2}} + \frac{1}{n^{\frac{D_x}{2}}\, d(x,v)^{i_x-2}\, d(v,w)^{D_{\min}-2}} + \frac{1}{n^{\frac{D_x}{2}}\, d(y,w)^{i_x-2}\, d(v,w)^{D_{\min}-2}}\Bigg] \cdot \exp\left(-\frac{[d^2(x,v)+d^2(v,w)+d^2(y,w)]}{cn}\right).$$

第一项恰好是 (32) 的第一项。对于上界，显然指数项的分子由 $d_+(x,y)$, 控制，因为该量可视为在 x 与 y 之间所有经过 v 和 w 的路径上取最小值（也可能出现 $v=w$）。通过重复情形 1 中用于计算这些和的相同论证，即可得到所需的上界。

对于下界，我们再次采用只考察某个“窗口”内各项的想法。取一条连接 x 与 y、经过 Γ_0 并达到 $d_+(x,y)$ 的路径。则对某个 $v_g \in \Gamma_0$.，有 $d_+(x,y) = d(x,v_g) + d(v_g,y)$。然后定义 $W_x^+{}_{,y,K} := \{v \in \partial\Gamma_{i_x} : d(v,v_g) \le K d_+(x,y)$。注意 $|x|$, $|y|$ 由 d_+ 控制。利用窗口 W^+ 重复情形 1 的下界论证，便得到相同形式的界。□

注释 6.1. 考虑将有限个维数至少为三的格点通过一个点粘合起来。这种情形的一种连续类比，是将流形通过一个紧集粘合起来；Grigor'yan 和 Saloff-Coste 在 [19]中对此作了描述。在 [27], 中，定理 1.7 给出了通过狄利克雷型将 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^{d'}$ 经由一个紧集（点）粘合后的大时间估计。此外，将有限个维数至少为四的格点通过一条直线粘合起来，可以看作是在上一句所述情形上再乘以一个维度（依此类推）。推论 6.1 的结果与连续情形中的这些结果相吻合（见 [19] 的第 1.2 节和第 4.5 节，以及 [21] 中结合 $\alpha = 0$的定理 1.1）。

注释 6.2. 除了与 [19, 21, 27], 预期的结果相吻合之外，推论 6.1 的结果还具有足够的稳健性，能够容许某些会破坏维数约化论证的扰动。例如，我们的推论也适用于页和脊柱仅与格拟等距的情形。脊柱 Γ_0 也不必具有如此精确的对称性。下文将描述一种更一般的、由非严格格格粘合而成的结构，在这种结构下推论 6.1 仍然成立。

如上所述，令 k 为粘合脊柱的维数， D_1, ..., D_l 为大于或等于 $k+3$ 的正整数，表示 l 页的维数。令 M = 为 $\{D_1,\dots,D_l\}$. 的最大值。考虑页 Γ_1, ..., Γ_l，使得对于所有 $1 \le i \le l$， Γ_i 都与 $\mathbb{Z}^{D_i}$ 拟等距，如下所述。

定义 6.1 （拟等距）**.** 设 (M_1,d_1,π_1) 与 (M_2,d_2,π_2) 为两个度量测度空间。我们称 M_1 与 M_2 是拟等距 的，如果存在函数Φ: $M_1 \to M_2$ 使得

(1) 存在 $\varepsilon > 0$ ，使得 Φ 的像的 ε-邻域等于 M_2.(2) 存在常数 a, b ，使得

$$a^{-1} d_1(x,y) - b \le d_2(\Phi(x), \Phi(y)) \le a d_1(x,y) + b \quad \forall\, x, y \in M_1.$$

(3) 存在一个常数 $C_q > 0$ ，使得

$$\frac{1}{C_q} \pi_1(x) \le \pi_2(\Phi(x)) \le C_q \pi_1(x).$$

我们称这样的函数 Φ 为拟等距。

在这种情况下，定义粘合脊柱更为微妙。在 $\mathbb{R}^M$，取一个维数为 k 的（可能是仿射）子空间；称之为 S. Fix ε_s， $\varepsilon_r > 0$.要构造 Γ_0，按如下步骤进行。首先取 S， $N(S, \varepsilon_s)$ 的 邻域。然后取 $(, \varepsilon_s)$ 中点的一个离散子集。若 中的两个顶点（元素）之间的距离小于 ，就用一条边连接它们，从而将 构成一个图（也记作 ）；这里的距离是指它们在 中的距离。我们要求 满足：作为一个图，它与 $(, \varepsilon_s)$拟等距。

与第 3 节一样，为了描述粘合，我们需要 Γ_0 与 Γ_i. 的子集之间的识别映射（双射）。我们还要求所有此类子集都与 $N(S, \varepsilon_S)$ 拟等距。

尽管上述描述有些复杂，推论 6.1 的证明基本上仍保持不变。在与方格格点拟等距的页上，体积和距离只会相差一个常数倍（该常数取决于拟等距常数）。根据引理 4.1，对 $\mathbb{Z}^k$ 或其子集求和的计算具有足够的灵活性，因此，即使对仅与 $\mathbb{Z}^k$ 拟等距的脊柱求和，整体性质也不会改变。（事实上，正如下界论证所示，所有重要项都只来自求和中的一小部分。在这个新的拟等距情形下，重要窗口中仍必须有足够多的点，才能使计算成立（至于常数的变化，我们一开始就没有追踪）。

7. 更多例子

本节中，我们将探讨定理 4.1 的更多应用。

例子 7.1. 考虑一个书状图，其页为 (Γ_i, μ^i, π_i) $1 \le i \le l$。令$\Gamma_i = \mathbb{Z}^{D_i}$ 和 (μ^i, π_i) 描述 $\mathbb{Z}^{D_i}$ 上的惰性简单随机游走。换言之，$\mu^i \equiv 1$ ，且 π_i 是格点 $\mathbb{Z}^{D_i}$ 的度的两倍。固定一个整数 $k \ge 0$ 和一条脊柱 $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^k$，并假设 $D_{\min} \ge k + 3$。我们给出一种在各页上构造另一种随机游走结构的方法，

对于每个 $1 \le i \le l$，固定 $\alpha_i > 0$。定义 $\psi_i(x) = (1 + |x|)^{\alpha_i}$，其中 $|x| = d(x, \Gamma_0)$。考虑由下式给出的图（Γ_i， $\widetilde{\mu}^i$， $\widetilde{\pi}_i$）：

$$\widetilde{\pi}_i(x) = \pi_i(x)\psi_i(x), \qquad \widetilde{\mu}^i_{xy} = \mu^i_{xy} \min\{\psi_i(x), \psi_i(y)\}.$$

这些权重受到控制且是一致惰性的，因此公式 (2) 定义了 Γ_i 上的一个~马尔可夫核 K 。这就是众所周知的 Metropolis 链，例如参见 [9] 的例 6.1。在（Γ_i， $\widetilde{\mu}^i$， $\widetilde{\pi}_i$）上的随机游走倾向于避免朝粘合脊 Γ_0 移动。

考虑沿着Γ_0将这些带有新随机游走结构的页进行粘合。图的底层几何结构没有改变，因此粘合图仍然是

书本状的，并且关于脊柱的一致性假设仍然成立。每一页（Γ_i、$\widetilde{\mu}^i$、$\widetilde{\pi}_i$）仍可通过类似于 [18]中的论证满足哈纳克条件；事实上，正如其中所见，α_i也可以取为负值。由于整个页的体积变大了（如 $\widetilde{\pi}_i \geq \pi_i$ 因 α_i 为正而增大），脊柱 $\mathbb{Z}^k$ 在每一页中甚至具有更强的一致 S-暂留性。因此，该例满足我们的假设，定理 4.1以及上文讨论的所有方法仍然适用。不过，像第6节中那样进行计算会变得更加复杂。

例 7.2（通过两个任意点粘合 $\mathbb{Z}^4$ 和 $\mathbb{Z}^5$ 的一个副本）。事实上，正如注 2.2 中所提到的，脊柱为 α-连通这一假设并非必要。考虑下面这个相对简单的例子。

令 $\Gamma_1 = \mathbb{Z}^4$ 进行惰性简单随机游走，并选取两点 o_1，$o_2 \in \mathbb{Z}^4$。将 Γ_1 与带有惰性简单随机游走的第二页 $\Gamma_2 = \mathbb{Z}^5$ 粘合，具体做法是识别点 $o_1 \in \mathbb{Z}^4$ 和 $(o_1, 0) \in \mathbb{Z}^5$，以及点 $o_2 \in \mathbb{Z}^4$ 和 $(o_2, 0) \in \mathbb{Z}^5$。（为简便起见，我们令 $\mathbb{Z}^5$ 点的最后一个坐标为零，但这并非必要。）这就构造出了一个脊柱为 $\Gamma_0 = \{o_1, o_2\}$ 的书状图。脊柱是有限的，但如果将点 o_1，o_2 不断移得更远，$\alpha := d_\Gamma(o_1, o_2)$ 可能趋于无穷大。

尽管我们不再希望应用推论 5.1 的推理——该推论明确将脊柱视为具有固定且不变的直径——但该推论的结论仍然成立。

例如，若 $x \in \mathbb{Z}^4$，$y \in \mathbb{Z}^5$，则对所有充分大的 n，

$$p(n,x,y) \approx C\left[\frac{1}{n^{5/2}|x|^2} + \frac{1}{n^2|y|^3}\right] \exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big),$$

其中 $|x| := \max\{1, d(x, \Gamma_0)\}$。量 α 并未显式出现在该估计中，但它是隐式存在的。例如，若 x、y 都比 o_2更接近 o_1，则在定理 4.1 中出现的求和计算里，来自对 (o_1, o_1) 的项最大，从而基本上可以忽略第二个点。另一方面，若设 $d(x, \Gamma_0) = o_1$ 且 $d(y, \Gamma_0) = o_2$，则 x 与 y 之间的一条测地路径仍必须包含 o_1 或 o_2。不失一般性，假设它包含 o_1，从而 $d(x,y) = d(x,o_1) + d(o_1,y)$。于是$\alpha = d(o_1,o_2) \leq d(o_1,x) + d(x,y) + d(y,o_2) \leq 3d(x,y)$，也就是说，粘合集中两点之间的距离由 $d(x,y)$ 控制，而来自对 (o_1,o_2) 的项将占主导。

根据类似的论证，如果 x，$y \in \mathbb{Z}^5$ 那么当 n 充分大时，

$$\begin{aligned} p(n,x,y) \approx{}& \frac{C}{n^{5/2}} \exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big) \\ &+ C\left[\frac{1}{n^2|x|^3|y|^3} + \frac{1}{n^{5/2}|x|^2} + \frac{1}{n^{5/2}|y|^3}\right] \exp\Big(-\frac{d_+^2(x,y)}{cn}\Big). \end{aligned}$$

与前一种情况一样，α 的值可能由 $d_+(x, y)$ 控制（再次考虑一条连接 x 和 y 且至少经过 o_1，o_2之一的最短路径）。另一方面，x，y可能都比 o_2更接近比如说 o_1，在这种情况下，α 就不太重要了，因为涉及 o_2 的项可以忽略（它们会被总和中的其他项压过）。

对于 x 和 y的其他位置，也可以给出类似的估计。当然，这个例子可以推广到维数各异的更多页，也可以推广到在有限个点上粘合（这些点之间的距离可能越来越远）。

例7.3 （通过稀疏直线粘合格点）。 考虑前一个例子中的情形，其中页面 $\mathbb{Z}^4$ 和 $\mathbb{Z}^5$ 采用惰性简单随机游走。现在我们希望考虑在一个逐渐变得稀疏的无限点集上进行粘合。例如，取第一坐标为 2^n、其余坐标均为零的点，其中 n为某个正数，由此得到稀疏直线。在这种情况下，定理 4.1 仍然适用，也仍可以考虑第6节中给出的“窗口”式论证，以判断脊柱上的哪些点应在最终求和中“计入”。然而，哪些点“计入”将很大程度上取决于 x 和 y的位置，以及 n。此外，第6节中依赖于点列成线的微积分论证不再成立。要将定理 4.1 中的估计改写成更易读的形式，需要付出相当大的工作，而且还会涉及许多种情况。

如果在点分布均匀性较低的稀疏直线上进行粘合，或者在稀疏高维格点上进行粘合（前提是页的维数足够大），定理 4.1 仍然成立。然而，要写出更具体的估计就更加棘手了。

例7.4 （通过半直线粘合两张 $\mathbb{Z}^4$）。 考虑两个带有惰性简单随机游走的格点$\mathbb{Z}^4$ 副本。将每个副本中 x_4轴的非负部分识别起来。在这种情况下，我们有两页，每页都是 $\mathbb{Z}^4$的一个副本，而 Γ_0 是一条半直线。这个粘合图满足假设(B1)-(B4)以及额外的体积增长条件 (24)，因此定理 4.1 适用。事实上，在这种情形下计算更具体估计的过程与推论 6.1 中的基本相同，只是现在 (32) 中出现的量 $|x|$，$|y|$ 表示 x，y 到 x_4半轴的距离（而不是仅到 x_4轴的距离）。计算 d_+时也会涉及这一差异。尽管这个估计与 (32) 的形式 相同，但其中各项的计算方式不同。特别是，如果 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$，其中 x_4很大且为负数，那么在半直线上粘合时的 $|x|$ 远大于在线上粘合时的值。

这个例子可以推广为通过 $\mathbb{Z}^{D_1}, \dots, \mathbb{Z}^{D_l}$ 维半格进行粘合，即将由最后 k 个坐标组成、且最后一个坐标为正的半格识别起来。同样，为使假设 (B3) 成立，必须满足 $\min_{1\le i\le l} D_i \ge k+3$。此外，估计结果仍与推论 6.1 中的形式相同。

上述段落的结论同样适用于沿加厚的半格进行粘合，或沿与半格拟等距的更一般集合进行粘合的情形。

例 7.5 （通过二维锥粘合格）. 考虑在一份 $\mathbb{Z}^2$ 中取一组对应于某个锥的点。例如，在 $\mathbb{R}^2$中取一个张角为 α 的锥, , 然后取位于该锥内部的格点。考虑 l 个满足 $D_i \ge 5$ （对所有 $1 \le i \le l$）的格 $\mathbb{Z}^{D_i}$，并将最后两个坐标轴上选定的锥内点识别起来。这将得到一个书状图，其中$\Gamma_i = \mathbb{Z}^{D_i}$，且 Γ_0 为所选锥。再一次，我们可以应用定理 4.1 以及推论 6.1 中的推理，得到形式为 (32) 的热核估计，其中距离需作适当解释。（注意，第6节中的论证表明，求和的整体特征仅由某个特定窗口内的项决定。在任何这样的窗口中，锥内都有足够多的点，因此求和的整体近似不变。）

例7.6 ($\mathbb{Z}^D$ 带有半直线尾部)。 考虑将格点 $\mathbb{Z}^D$ 与 $D \ge 3$ 粘合到半直线 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 上，通过识别它们的原点，并在每个页

面上采用惰性简单随机游走。所得的图（Γ， $\mathcal{K}$， π）呈书本状，但 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是 S-常返的，因此不满足假设 (B3)。然而，通过使用 Doob 的 h-变换，我们可以将这个例子转化为一个确实类似于我们的假设的例子。本例扩展了 [7], 的例 7.8，该例使用 h-变换技术确定：如果 o 是原点，那么

$$p(n,o,o) \approx \frac{C}{n^{3/2}}.$$

与该例子中一样，我们在 Γ 上构造一个正调和函数 h。由于$D \geq 3$， $\mathbb{Z}^D$ 存在格林函数 $G_{\mathbb{Z}^D}(x,\ o) = \sum_n p_{\mathbb{Z}^D}(n,\ x,\ o)$，其中 o 是原点。格林函数在 $\mathbb{Z}^d \setminus \{o\}$，上是调和的，在整个 $\mathbb{Z}^3$，上是超调和的，在原点处取有限值，并且可以近似为

$$G_{\mathbb{Z}^d}(x,o) \approx \begin{cases} \frac{1}{|x|^{D-3}}, & x \neq o \\ \sum_n \frac{1}{n^{D/2}}, & x = o. \end{cases}$$

回忆一下， $|x|$ 是 x 到粘合脊柱的距离，因此在此情形下 $|x| = d(x,\ o)$。注意，$G_{\mathbb{Z}^d}(x,\ o)$ 随 $|x| \to \infty$ 变化。半直线上的所有调和函数都是线性的。

选择 $a > 0$ 使得

$$h(x) = \begin{cases} 1 + G_{\mathbb{Z}^D}(x,o), & x \in \mathbb{Z}^D \setminus \{o\} \\ 1 + G_{\mathbb{Z}^D}(o,o), & x = o \\ ax + 1 + G_{\mathbb{Z}^D}(o,o), & x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{cases}$$

是 $\mathbb{Z}^D$ 上具有 $Z_{\geq 0}$ 尾部的调和函数。这样的值 $a > 0$ 存在，因为 $G_{\mathbb{Z}^D}$ 是超调和的。

考虑 $(\Gamma,\ \mathcal{K},\ \pi)$ 的 h-变换，记作 $(\Gamma_h,\ \pi_h,\ \mu_h)$，其中

$$\begin{aligned} &\Gamma_h = \Gamma \text{ (as graphs)} \\ &\pi_h(x) := h^2(x)\pi(x) \quad \forall x \in \Gamma \\ &\mathcal{K}_h(x,y) = \frac{1}{h(x)}\mathcal{K}(x,y)h(y) \quad \forall x,y \in \Gamma. \end{aligned}$$

h-变换图（$\Gamma_h,\ \pi_h,\ \mu_h$）具有受控权重，并且是一致惰性的，因为（$\Gamma,\ \mathcal{K},\ \pi$）满足这些假设，且 h 是调和的。原书状图上的热核通过公式与 h-变换图相关联

$$p_\Gamma(n,x,y) = h(x)h(y)p_{\Gamma_h}(n,x,y).$$

利用 h-变换从常返空间转到暂留空间的技术已得到充分研究。由此可知，若 Γ 具有哈纳克页，那么 Γ_h，也具有哈纳克页，而且改变权重不会改变（内在）一致性。由 [5] 的定理 2.9 还可知， Γ_h 的各页是一致的 S-暂留，因为现在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 页中的体积表现得如同 $\mathbb{Z}^3$.上的体积

由于 Γ_0 是有限的，推论 5.1 适用于图 $(\Gamma_h,\ \mathcal{K}_h,\ \pi_h)$。一般而言，令$V_{i_x,\ h}$ 表示 x 相对于 π_h所属页的体积。那么：

$$
\begin{aligned}
p_\Gamma(n,x,y) = h(x)h(y)p_{\Gamma_h}(n,x,y) &\approx \frac{Ch(x)h(y)}{V_{i_x,h}(x,\sqrt{n})}\exp\Big(-\frac{d^2_{i_x}(x,y)}{cn}\Big)\\
&+ Ch(x)h(y)\Bigg[\frac{|x|^2|y|^2}{V_{\min,h}(o,\sqrt{n})V_{i_x,h}(x,|x|)V_{j_y,h}(y,|y|)}\\
&+ \frac{|x|^2}{V_{j_y,h}(y,\sqrt{n})V_{i_x,h}(x,|x|)} + \frac{|y|^2}{V_{i_x,h}(x,\sqrt{n})V_{j_y,h}(y,|y|)}\Bigg]\\
&\cdot \exp\Big(-\frac{(|x|^2+|y|^2)}{cn}\Big).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

若 $x\in\mathbb{Z}^d$，则 $h(x)\approx 1$ 和 $V_{i_x,\ h}(x,\ r)\approx r^d$。若 $x\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，则 $h(x)\approx|x|$ 和$V_{i_x,\ h}(x,\ r)\approx r(|x|+r)^2$. 因此 $V_{\min,\ h}(o,\ \sqrt{n})\approx n^{3/2}$。注意，对于半直线尾部上的点，$|x|=x$。

根据 $x,\ \ y$ 所在的页，一般估计式 (42) 可简化为下文所示。我们只写出了有贡献的项；在某些情况下，我们利用体积倍增性质，并调整指数项中的常数，将各项改写成不同形式。这些结果与 [19] 在 $d=3$ （流形）情形下的例 6.11，以及 [27] （狄利克雷型）情形下的定理 1.1 中的连续情形结果相符。

(1) 如前所述,

$$p(n,o,o)\approx\frac{C}{n^{3/2}}.$$

(2) 如果 $x,\ \ y\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ （两者均位于半直线尾部），

$$
\begin{aligned}
p(n,x,y) &\approx \frac{C|x||y|}{\sqrt{n}\,(|x|+\sqrt{n})^2}\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big)\\
&\approx \frac{C|x||y|}{\sqrt{n}(|x|+\sqrt{n})(|y|+\sqrt{n})}\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big)
\end{aligned}
$$

(3) 如果 $x,\ \ y\in\mathbb{Z}^d$ （两者均位于格点中）

$$
\begin{aligned}
p(n,x,y) &\approx \frac{C}{n^{D/2}}\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big)\\
&+ \frac{C}{n^{3/2}|x|^{D-2}|y|^{D-2}}\exp\Big(-\frac{(|x|^2+|y|^2)}{cn}\Big)
\end{aligned}
$$

(4) 如果 $x\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ \ y\in\mathbb{Z}^d$ （不同页的情况）

$$
\begin{aligned}
p(n,x,y) &\approx C\Bigg[\frac{1}{n^{D/2}}+\frac{|x|}{\sqrt{n}\,(|x|+\sqrt{n})^2|y|^{D-2}}\Bigg]\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big)\\
&\approx C\Bigg[\frac{1}{n^{D/2}}+\frac{|x|}{n^{3/2}|y|^{D-2}}\Bigg]\exp\Big(-\frac{(|x|^2+|y|^2)}{cn}\Big)
\end{aligned}
$$

(5) 如果 x 位于一页，而 $y = o$, （反之亦然），那么如果$x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，情况（2）和（4）都会给出

$$p(n,x,o) \approx \frac{C|x|}{n^{3/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big).$$

反之，若 $x \in \mathbb{Z}^d$，则情形 (3) 和 (4) 均得到

$$p(n,x,o) \approx C\left[\frac{1}{n^{D/2}} + \frac{1}{n^{3/2}|x|^{D-2}}\right] \exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big).$$

例 7.7 （通过一点将 $\mathbb{Z}^D$ 与 $\mathbb{Z}^2$ 粘合）。考虑两页， $\Gamma_1 = \mathbb{Z}^D$ 带有$D \geq 3$ 和 $\Gamma_2 = \mathbb{Z}^2$, 二者都采用惰性简单随机游走。通过将这两个格的原点识别为同一点，构造粘合图 Γ；将这个共同的原点记为 o.。与前一个例子一样，粘合图 $(\Gamma, \mathcal{K}, \pi)$ 满足假设 (B1)、(B2) 和 (B4)，但不满足假设 (B3)，因为对于任意有限顶点集， $\mathbb{Z}^2$ 都是 S-常返的。

令 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[p_{\mathbb{Z}^2}(n,o,o) - p_{\mathbb{Z}^2}(n,o,x)]$。这是 $\mathbb{Z}^2 \setminus \{o\}$ 上的一个调和函数，且已知 $g(x) \approx \log(|x|)$, 其中 $|x|$ 表示 x 到原点 o 的距离。（例如参见 Spitzer [29] 或 Lawler 和 Limic 第 6 [23] 章。）

与上一个例子一样，可以选择 $a > 0$ 使得

$$h(x) = \begin{cases} 1 + G_{\mathbb{Z}^D}(x,o), & x \in \mathbb{Z}^D \setminus \{o\} \\ 1 + G_{\mathbb{Z}^D}(o,o), & x = o \\ ag(x) + 1 + G_{\mathbb{Z}^D}(o,o), & x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{o\} \end{cases}$$

是粘合图 Γ上的调和函数。

h-变换（Γ_h, $\mathcal{K}_h$, π_h）满足假设(B1)-(B4)。注意，对于 $x \in \mathbb{Z}^2$, $V_{i_x,\, h}(x,\ r) \approx r^2 \log^2(1 + |x| + r)$。假设 (B3) 现在得到满足，这一点可由 [5], 的定理 2.9 得出；并且在 [7], 的例子 7.9 中，我们发现

$$p(n,o,o) \approx \frac{C}{n \log^2(1+n)}.$$

注意，$(\Gamma_h, \mathcal{K}_h, \pi_h)$ 不满足体积增长条件 (24)，因为在 $\mathbb{Z}^2$ 页中，体积增长如 2 的某次幂乘以对数的平方。因此，我们无法直接应用定理 4.1 或推论 5.1。不过，我们可以毫无困难地将定理 4.1 证明中的思路应用于定理 3.1 的抽象粘合公式。

利用第3.2节中的估计和上面的中心界，我们得到：

$$p_h(n,o,o) \approx \frac{C}{n\log^2(1+n)}$$

$$\sum_{l=0}^{n} p(l,o,o) \approx C$$

$$\psi'_{\partial\Gamma_1,h}(n,x,o) \approx \frac{C}{n^{D/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big)$$

$$\psi'_{\partial\Gamma_2,h}(n,x,o) \approx \frac{C}{n\log^2(1+|x|+\sqrt{n})} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big)$$

$$\psi_{\partial\Gamma_1,h}(n,x,o) \approx \frac{C}{|x|^{D-2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big)$$

$$\psi_{\partial\Gamma_2,h}(n,x,o) \approx \frac{C}{\log^2(1+|x|} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big) + \Big(\frac{C_1}{\log(1+|x|)} - \frac{C_2}{\log(1+n)}\Big)_+$$

$$h(x) \approx 1 \ \forall x \in \mathbb{Z}^D; \qquad h(x) \approx \log(1+|x|) \ \forall x \in \mathbb{Z}^2$$

在 $\psi_{\partial_2}(n,\ x,\ o)$ 的第二项中，可以乘以 $\exp(-|x|^2/cn)$，也可以不乘；由于这一项来自求和中 $|x|^2 \le n$，的那部分，因此指数项很大。

将这些估计代入定理 3.1，根据 x 和 y 的位置，可得以下热核估计：

(1) 上文提到的中心估计为

$$p(n,o,o) \approx \frac{C}{n\log^2(1+n)}.$$

(2) 若 $x,\ y \in \mathbb{Z}^2$,

$$p(n,x,y) \approx \frac{C\log(1+|x|)\log(1+|y|)}{n\log(1+|x|+\sqrt{n})\log(1+|y|+\sqrt{n})} \exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big).$$

这里分母写作 $\sqrt{V_{i_x,\ h}(x,\ \sqrt{n})V_{i_y,\ h}(x,\ \sqrt{n})}$；然而，由于 $(\mathbb{Z}^2,\ \pi_h,\ \mu_h)$ 是一个具有倍增体积函数的哈纳克图，因此可以将分母替换为 $V_{i_x}(x,\ \sqrt{n}) \approx n\log^2(1+|x|+\sqrt{n})$ 或 $V_{i_y}(y,\ \sqrt{n}) \approx n\log^2(1+|y|+\sqrt{n})$，只需相应调整指数项内外未写出的常数。

(3) 如果 $x,y \in \mathbb{Z}^D$,

$$p(n,x,y) \approx \frac{C}{n^{D/2}} \exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{cn}\Big) + \frac{C}{n\log^2(1+n)|x|^{D-2}|y|^{D-2}} \exp\Big(-\frac{(|x|^2+|y|^2)}{cn}\Big).$$

(4) 若 $x \in \mathbb{Z}^2, y \in \mathbb{Z}^D$,

$$p(n,x,y) \approx C\Big[\frac{\log(1+|x|)}{n\log^2(1+n)|y|^{D-2}} + \frac{1}{n^{D/2}}\Big(\frac{1}{\log(1+|x|)} + \Big(1-\frac{\log(1+|x|)}{\log(1+n)}\Big)_+\Big)\Big] \exp\Big(-\frac{(|x|^2+|y|^2}{cn}\Big)$$

(5) 假设 x 位于同一页，而 $y=o$. 如果 $x\in\mathbb{Z}^2$ 和 $y=o$，那么由 (2) 和 (4) 可得

$$p(n,x,o)\approx\frac{C\log(1+|x|)}{n\log^2(1+|x|+\sqrt{n})}\exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big)$$
$$\approx\frac{C\log(1+|x|)}{n\log^2(1+n)}\exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big).$$

虽然乍看之下这两个估计可能并不相同，但指数项弥补了其中的差异；回想一下，(2) 有几种等价的写法。

若 $x\in\mathbb{Z}^D$ 和 $y=o$， 则 (3) 和 (4) 给出

$$p(n,x,o)\approx C\left[\frac{1}{n\log^2(1+n)|x|^{D-2}}+\frac{1}{n^{D/2}}\right]\exp\Big(-\frac{|x|^2}{cn}\Big).$$

同样，这些估计与 Grigor'yan 和 Saloff- Coste 的连续情形结果（ [19]中的例6.14）以及 Ooi 的结果（ [27]中的定理 1.6）相符。

注7.1。 正如我们在前两个例子中所看到的，我们的方法能够处理具有 S-常返页的图，前提是我们能够在粘合图上构造一个全局调和函数 h，使得变换后图的所有页都一致地 S-暂留。我们考察的两个具体例子都很简单，因此这一点相当容易做到。然而，一般而言，证明这种 h 存在且具有所需性质是个更难的问题。尤其是，正如我们在前一篇论文 [5], 中所证明的，存在一些 S-暂留但并非一致暂留的图。

例如，考虑这样一种图：其中一页是 S暂留的，但并非一致的，而所有其他页都是一致的 S暂留。这幅图在经典意义下应当是暂留的，因此所有调和函数都大致为常数。因此，不可能使用 h变换得到一个所有页都一致地 S暂留的图。

于是可以想象，在更一般的情形下，要证明一个 S常返页的h变换是一致地 S暂留的，会有多么困难。

为了对具有可能并非一致的 S暂留页的一般图得到估计，需要更深入地理解可能的调和函数 h以及 S暂留性（或者或许需要采用不同的暂留性假设）。

References

[1] Martin T. Barlow。《 *Random walks and heat kernels on graphs* 438 *London Math-*》, *ematical Society Lecture Note Series* 2017
[2] 的体积。剑桥大学出版社，剑桥，*Ann. Probab.*。[3] Zhen-Qing Chen 和 Shuwen Lou。关于一些变维数空间上的布朗运动。´，47(1):213–269，2019。´Thierry Coulhon 和 Laurent Saloff-Coste。无穷远处等距的黎曼´流形。 `，11(3):687–726，1995。*Rev. Mat. Iberoamericana*
Emily Dautenhahn。《[4] 》。博士论文，康奈尔大学，2024。
*Heat kernel estimates on glued spaces*Emily Dautenhahn 和 Laurent Saloff-Coste。命中概率与一致[5] 暂留子图。 *S*，29：论文编号80，共33页，2024。 *Electron. J. Probab.*Emily Dautenhahn 和 Laurent Saloff-Coste。带混合边界条件的带端流形上的热核估计。[6] ，33(3):651–699，2025。 *Comm. Anal. Geom.*Emily Dautenhahn 和 Laurent Saloff-Coste。粘合图上的 Faber-Krahn 不等式与热核估[7] 计。 *Electron. J. Probab.*，31，2026。

[8] Thierry Delmotte。图上的抛物 Harnack 不等式与马尔可夫链估计。*Rev. Mat. Iberoamericana*, 15(1):181–232，1999。[9] Persi Diaconis、Kelsey Houston-Edwards 和 Laurent Saloff-Coste。有限马尔可夫链的分析-几何方 *ALEA Lat. Am. J.*法及其在拟平稳性中的应用。*Probab. Math. Stat.*[10] ，17(2):901–991，2020。 3*G* Anthony Graves-McCleary 和 Laurent Saloff-Coste。分形型空间中的边界 Harnack原理与 *Math. Nachr.*原理。[11] ，298(11):3554–3575，2025。 *Mat. Sb.*Alexander Grigor' yan。非紧黎曼流形上的热方程。[12] ，182 1 55( ): –87，1991。 *J. Math. Pures Appl. (9)*Alexander Grigor'yan、Satoshi Ishiwata 和 Laurent Saloff-Coste。抛物流形连通和上的热核估计。[13] ，113:155–194，2018。 *Analysis and partial differential equations on manifolds*Alexander Grigor'yan、Satoshi Ishiwata 和 Laurent Saloff-Coste。带端流形上的几何分析。载于 *fractals andgraphs Adv. Anal. Geom.*，第3卷 [2021] ，第325–343页。De Gruyter，柏林，[14] ©2021。´Alexander Grigor'yan、Satoshi Ishiwata 和 Laurent Saloff-Coste。带端流形上的 Poincar *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*é 常数。[15] ，126(6):1961–2012，2023。 *Math. Res. Lett.*Alexander Grigor'yan 和 Laurent Saloff-Coste。黎曼[16] 流形连通和上的热核。 *Comm. Pure Appl. Math.*，6(3-4):307–321，1999。[17] Alexander Grigor'yan 和 Laurent Saloff-Coste。紧集外部的狄利克雷热核。 *J. Math. Pures Appl. (9)*，55(1):93–133，2002。[18] Alexander Grigor'yan 和 Laurent Saloff-Coste。黎曼流形上布朗运动的命中概率。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，81(2):115–142，2002。[19] Alexander Grigor'yan 和 Laurent Saloff-Coste。Harnack不等式的稳定性结果。

Ann. ,

Inst. Fourier (Grenoble) 59 5 1917 1997, 2009

55(3):825–890，2005。[20] Alexander Grigor'yan 和 Laurent Saloff-Coste。带端流形上的热核。 *Nonlinear Anal.*，( ): –。[21] Alexander Grigor'yan 和 Laurent Saloff-Coste。Faber-Krahn 不等式的外科手术及其在热核界中的应用。

$\mathbb{R}^n$ *Global and Stochastic Analysis* 2 1 29 65, ,

2012

131:243–272，2016。[22] Alexander Grigor?yan 和 Satoshi Ishiwata。旋转曲面上两个 *Analysis and partial differential equations on manifolds*副本的连通和上的热核估计。，( ): –。 *fractals and*Tim Jaschek 和 Mathav Murugan。快速体积增长与容量估计的几何含义。载于 *graphs Adv. Anal. Geom.* [2021] ，第3卷[23] ，第183–199页。De Gruyter，柏林， *Random walk: a modern introduction*©2021。*Cambridge Studies in Advanced Mathematics*Gregory F. Lawler 和 Vlada Limic。《[24] 》，*Electron. J. Probab.*第123卷。剑桥大学出版社，剑桥，2010。[25] Liping Li 和 Shuwen Lou。变维数空间上的扭曲布朗运动。 *Stochastic Process. Appl.* 129 6 2086 2129, 2019 ，27：论

文编号72，共32页，2022。[26] Shuwen Lou。变维数空间上的带漂移布朗运动。 *Illinois J. Math.*，( ): –。[27] Shuwen Lou。变维数空间上扭曲布朗运动模型的显式热核。 *Tohoku Math. J. (2)*，65(2):287–312，2021。[28] Takumu Ooi。变维数空间上的热核估计。

´ *Internat. Math.* , 74 2

Res. Notices 2 27

165 194，2022 ( ): –。[29] Laurent Saloff-Coste。关于 Poincar *Principles of random walk*é、Sobolev 和 Harnack 不等式的注记。，( ): –38，1992。Frank Spitzer。《》，第34卷。Springer Science & Business Media，2013。

Department of Mathematics and Statistics, Murray State University

Department of Mathematics, Cornell University