Prepared for submission to JHEP

arXiv:2603.04619v1 [hep-th] 4 Mar 2026

Chern-Simons自然边界与黑洞熵

Griffen Adams 和 Gerald V. Dunne

物理系，康涅狄格大学，斯托尔斯，康涅狄格州，*06269-3046*
电子邮件：griffen.adams@uconn.edu,gerald.dunne@uconn.edu

Abstract: 超渐近级数的复苏延拓方法揭示了一种新对应： q级数用于计数超对^称黑洞中四分之一BPS态的简并度，而 Z 不变量则属于一类三维定向反转流形上的陈-西蒙斯理论。

目录

1 引言 1
2 超对称黑洞中的BPS 态计数 4
3 陈-西蒙斯 Z 四纤维化塞弗特同调球面上的不变量 8
4 结论 16
A 权的对偶 $3/2$假 theta 函数 17
A.1 单个假 theta 函数的对偶 18
A.2 两个假 theta 函数对偶的组合 20

目录

1 引言

自然边界是由奇点构成的稠密闭屏障，它们在物理理论中的存在引发了计算和概念上的问题。已知自然边界存在于许多物理系统中，例如统计物理 [1–4]，超共形场论 [5]，规范理论 [6–8]，墙穿越现象 [9–11] 以及场论散射振幅 [12, 13]。最近有人提出 [8, 14, 15]，复苏可以带来一种超越解析延拓的新型唯一延拓，它适用于重求和超渐近级数，而非解析函数。这种方法利用了超渐近级数在分析运算下的刚性 [16–18]，，这一特性被称为“关系的保持”。复苏延拓这一思想已成功应用于穿越陈-西蒙斯（CS）理论中的自然边界 [8, 14, 15]。CS 理论是一种定义在三维流形 $\mathcal{M}_3$上的拓扑量子场理论，其拓扑不变量 $Z(\mathcal{M}_3; q)$可自然地表示为 q-级数，其中 $q = e^{-\hbar}$， $\hbar$ 是陈-西蒙斯耦合参数。 $Z(\mathcal{M}_3; q)$不变量为陈-西蒙斯理论 [19–21]提供了非微扰完备化。在已知情形下， $Z(\mathcal{M}_3; q)$不变量在单位圆 $|q| = 1$上呈现自然边界。对于某些流形 $\mathcal{M}_3$， $Z(\mathcal{M}_3; q)$不变量与Ramanujan的Mock Theta函数相关联，从而直接建立起量子场论与数论之间的联系，具体而言，是与拟模形式理论之间的联系 [7, 22–30]。这是一个丰富的研究领域，揭示了量子场论、拓扑学、数论和表示论 [6, 7, 31]之间的深刻联系。

研究量子场论（QFT）中自然边界穿越现象的动机，是为了更深入地理解量子场论费曼路径积分的微妙之处，尤其是规范理论 [32]。对于 CS 理论，自然边界问题尤为值得关注，因为三维流形发生定向反转时，$\mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_3$，陈-西蒙斯作用量会改变符号。因此，从物理角度看，我们会预期定义良好的 CS 路径积分应满足以下条件：

$$\int \mathcal{D}A \, \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{\mathcal{M}_3} \mathcal{L}_{CS}(A)\right] \stackrel{?}{=} \int \mathcal{D}A \, \exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{\overline{\mathcal{M}_3}} \mathcal{L}_{CS}(A)\right] \tag{1.1}$$

由于 $Z(\mathcal{M}_3; q)$ 不变量可用路径积分表示，因此我们预期，$\overline{\mathcal{M}_3}$ 及其定向反转 $\mathcal{M}_3$的 Z 不变量之间存在如下关系：

$$\widehat{Z}(\mathcal{M}_3; q^{-1}) = \widehat{Z}\left(\overline{\mathcal{M}_3}; q\right) \tag{1.2}$$

其中，$\widehat{Z}(\mathcal{M}_3; q^{-1})$ 是对 $\widehat{Z}(\mathcal{M}_3; q)$ 在单位圆之外的适当延拓。这是一种极强的边界穿越条件，它关联了单位圆 $|q| = 1$的内部与外部，并对陈-西蒙斯路径积分提出了非平凡的检验。

这一思路已在多种三维流形 [6–8, 14, 19]上得到探讨。通过显式计算发现，当 $\mathcal{M}_3$ 是低阶塞弗特同调球时，例如 $\Sigma(2, 3, 5)$ 或 $\Sigma(2,3, 7)$，CS $Z(\mathcal{M}_3; q)$ 不变量可以用假θ函数表示（粗略地说，这类函数类似 θ 函数，但存在许多“空缺”：求和范围受某些数论同余条件限制） [33]。随后，边界穿越将 CS 理论在定向反转后的流形 $\mathcal{M}_3$ 上的 $Z(\mathcal{M}_3; q)$ 不变量与某些 mock theta 函数联系起来（粗略地说，这类函数类似 θ 函数，具有整数系数，并满足某些增长条件）。$Z(\mathcal{M}_3; q)$ 不变量值得关注，因为这些整数系数是某些超共形场论中 BPS 态的简并度，而这些场论通过 $3d$-$3d$ 对应与 CS 理论相关 [7, 19, 34]。图 1 以示意方式呈现了这一情形。

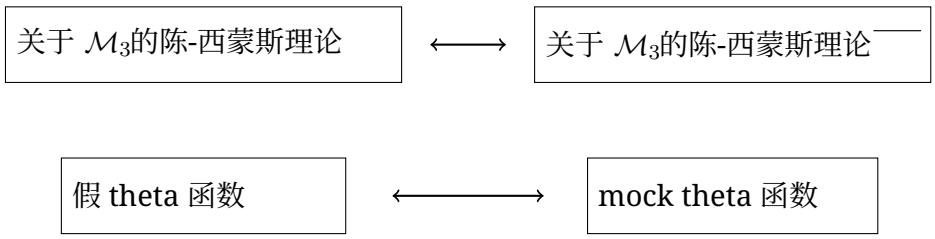

图 1。自然边界两侧的符号表示，通过 $q \to 1/q$ 相关联。

这些结果极其令人鼓舞，但也相当令人费解，因为只有一类有限的 Ramanujanmockθ函数，其边界穿越可以被

用闭式 q级数表达式实现。另一方面，从物理角度的预期来看，式（1.1）中的对应关系应该具有更广泛的适用性。这意味着，我们或许可以从这里了解到有关规范理论路径积分的一些潜在有趣之处。

这正是论文 [8, 14, 15] 最初的研究动机。在自然边界一侧（“单侧”）存在一般的三维流形族 $\mathcal{M}_3$ ，对于这些流形，$\sim Z(\mathcal{M}_3; q)$ 不变量可以表示为假θ函数的特殊线性组合 [6, 7, 19, 35, 36]。然而，目前尚无已知的一般闭式表达式，能够描述给定的假θ函数如何穿越自然边界。只有一类有限的、非常特殊的假θ函数线性组合，其显式表达式为人所知。文献 [8, 14, 15]，提出了一种基于复苏延拓思想的数值方法，以填补这一空白。在已知 mock theta 表达式的情形下 [30], ，这种数值方法能够给出已知的 q 级数。此外，文献 [14] 证明，该方法还可应用于已知情形之外；例如，可用于任意一个权重为 $1/2$ 的假θ函数。作为这一结果的应用，可以为一大类三纤维化的塞弗特同调球上的 CS 理论穿越自然边界，即 $\Sigma(p_1, p_2, p_3)$，其中 p_j 两两互素，从而拓展文献 [6, 7, 19] 研究过的已知例子 $\Sigma(2, 3, 5)$ 或 $\Sigma(2, 3, 7)$。由此得到的对偶 q 级数具有整数值系数，其增长率呈现物理上预期的 Cardy 型行为 [15, 37, 38]。此外，它们与特殊拟雅可比形式的拟模系数一致 $\mathcal{Q}_M$；这些形式出现于文献 [11] 的附录 A.1 中，其中 $M = p_1p_2p_3$。

本文将复苏延拓方法推广到一类新的三维流形，即具有 4 个奇异纤维的塞弗特流形，$\mathcal{M}_3 = \Sigma(p_1, p_2, p_3, p_4)$。这些流形由取整数值的 $p_k (k = 1, \ldots\ldots, 4)$ 定义；当 p_k 为素数时，它们具有特别有趣的拓扑性质和数论性质。对于这些流形，CS Z 不变量已构造为权重为 $1/2$和权重为 $3/2$ [35]的假θ函数的特定线性组合。复苏方法从三个主要方向扩展了这一分析：

1. 我们将权重为 $3/2$ 的贡献推广到 Chung 的 Z 不变量，使其成为一组向量值假θ函数，$\widehat{Z}^{[j]}$；我们提出将其识别为缺陷 $\widehat{Z}$ 不变量，如[6]所示。新的指标 $j = 1, \ldots\ldots, D$，其中 $D = \frac{1}{8}\prod_{k=1}^{4}(p_k - 1)$。

2. 复苏延拓将这一假 theta 函数的向量值集合穿过自然边界，产生一个 mock theta 函数向量，其中每个函数都具有整数值系数。我们建议将这些认定为反向定向流形 $M_3 = \Sigma(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 上 CS 理论的新 $\widehat{Z}^{[j]}(\mathcal{M}_3, q)$ 不变量。

3. 当 Seifert 参数 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 为互异素数时，所得的 mock theta 函数具有额外的算术结构。对于最简单的例子 $\Sigma(2, 3, 5, 7)$，其中 $D = 6$，我们发现，穿越边界后的 6 维对偶 q级数，恰好与 Dabholkar、Murthy 和 Zagier（DMZ）在其开创性分析 [11] 中发现的 q级数一致。该分析研究了超对称黑洞中四分之一 BPS 态简并度计数里的拟模对称性，这些黑洞的荷与 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$相关。我们

需要强调的是，DMZ 研究的是一个与陈-西蒙斯理论中的定向反转截然不同的问题，所采用的技术也完全不同。这一新的对应关系表明，这两个物理系统之间可能存在深层得多的联系。

本文的主要结果如下：我们构造了与$\widehat{Z}^{[j]}$不变量 $j = 1$、.....6相关的对偶 q级数，其中 CS 理论定义在 $\mathcal{M}_3 = \Sigma(2, 3, 5, 7)$上，并证明它们与特殊拟雅可比形式 $\mathcal{Q}_{210}$ 的六个独立 q级数系数相吻合。该拟雅可比形式源于对某个特定超对称黑洞的四分之一BPS态简并度的计数。DMZ 指出，这些 $\mathcal{Q}_M$ 是拟雅可比形式理论中的重要构建模块。在黑洞背景下，当指标 M 是偶数个或奇数个素数 [11]的乘积时， $\mathcal{Q}_M$ 之间存在重要区别。当 M 含有偶数个素因子时，q级数是“最优的”（定义见下文），并有助于计数“永生”的单中心黑洞；而当 M 含有奇数个素因子时，只有有限种情况中 q级数是最优的。我们展示了如何利用复苏延拓，为任意具有素数 p_i的四纤维化塞弗特流形构造向量值 $\widehat{Z}^{[j]}$ 不变量，并猜想这些不变量与其他一些和 $\mathcal{Q}_{p_1p_2p_3p_4}$相关的超对称黑洞实例的简并度计数有关。下方的图 2 对此作了示意性表示。

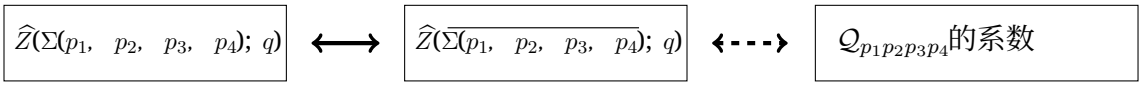

图 2。本文为表1第一行中的对应关系补充了一条额外的联系。左侧的双向箭头表示，两侧的 $\widehat{Z}^{[j]}$ 不变量在$q \to 1/q$下相互关联。右侧的虚线箭头表示，陈-西蒙斯 $\widehat{Z}^{[j]}$不变量与 q级数系数$h_{(M,\ell_j)}$ 之间存在精确匹配；这些系数来自黑洞一侧对 $\mathcal{Q}_M$ 在（2.8）中的分解，其中 $M = p_1p_2p_3p_4$。

2 超对称黑洞中的 BPS 态计数

我们首先回顾 [11, 39] 中与本文最相关的结果：$\mathcal{Q}_M$ 特殊拟雅可比形式，它们是 $\mathcal{N} = 4$ 超对称 $4d$ 理论中四分之一 BPS 二磁单极子配分函数的构造基元。该理论由 II 型弦理论在一个 $K3$ 曲面与一条椭圆曲线 [40] 的乘积上紧化得到。完整配分函数 $\mathcal{Z}$ 是一个称为权重 10 Igusa 尖点形式的对象 $\Phi_{10}(\tau, z, \sigma)$ 的倒数；该形式依赖于三个化学势 (σ, τ, z)，它们分别与三个 T 对偶不变量荷 (m, n, ℓ) 共轭。这里， m 和 n 分别对应磁荷和电荷，而 ℓ 是绕数荷。配分函数具有傅里叶分解，

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\Phi_{10}(\tau, z, \sigma)} = \sum_{m=-1}^{\infty} \psi_m(\tau, z) e^{2\pi i\, m\, \sigma}. \tag{2.1}$$

乘以拉马努金判别式函数进行适当重标度后[1]， $\Delta(\tau)$，展开式中的系数$\varphi_m(\tau,z) \sim \Delta(\tau)\psi_m(\tau,z)$是权重为 2 的雅可比形式（见展开式 2.1），并且关于 z 亚纯。雅可比形式是一个函数 $\varphi(\tau,z)$: $\mathbb{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 它按如下方式变换： [11, 26]

$$\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{\frac{2\pi imcz^2}{c\tau+d}}\varphi(\tau,z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

$$\varphi(\tau,z+\lambda\tau+\mu) = e^{-2\pi im(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\varphi(\tau,z), \quad \lambda,\tau\in\mathbb{Z} \tag{2.2}$$

其中 m 是雅可比形式的级， k 是权。模对称是这些黑洞问题的基础 [26, 41, 42]。

在 [11] 中证明， $\varphi_m(\tau,z)$ 存在一种典范分解，可分为极点项 $\varphi_m^P(\tau,z)$，它包含了 z中的所有极点；以及在 z中有限的项 $\varphi_m^F(\tau,z)$:

$$\varphi_m(\tau,z) = \varphi_m^F(\tau,z) + \varphi_m^P(\tau,z) \tag{2.3}$$

这种分解对黑洞计数问题具有物理诠释：极点项的傅里叶系数计数多中心黑洞的简并度，而有限项的系数计数不朽单中心黑洞。极性部分$\varphi_m^P(\tau,z)$可用数论因子和一个初等Appell-Lerch和表示（见 [11]中的公式 (1.2)–(1.3)）。这个 Appell-Lerch和展现了“墙穿越”现象：将其按 $y=e^{2\pi iz}$的幂展开时，其傅里叶系数是 q级数（其中 $q=e^{2\pi i\tau}$），当化学势穿越模空间中的边缘稳定性壁时，级数系数会发生跳变 [9–11, 44]。从物理上说，这描述了穿越模空间中的这些壁时，多中心黑洞衰变为半BPS态 [43]。相应地，(2.3) 中有限部分 $\varphi_m^F(\tau,z)$ 的模对称遭到破坏：它们是“拟模”的，而非真正的模形式。拟模意味着模性遭到“弱”破坏，并且可以通过添加一个称为“影子”的非全纯函数来恢复 [11, 27, 28]。这是“全纯反常”的一个例子，即生成函数的模性与全纯性之间的竞争。影子提供了模完备化，但代价是破坏全纯性。对于 [11],中的所有例子，影子都是权为 $1/2$或 $3/2$的模形式。

由于拟雅可比形式（2.2）的周期性性质，（2.3）中的有限部分可进一步分解为关于θ函数的和

$$\varphi_m^F(\tau,z) = \sum_{\substack{\ell\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}\\(\ell,m)=1}} H_{(m,\ell)}(\tau)\,\vartheta_{m,\ell}(\tau,z) \tag{2.4}$$

其中，θ函数定义为

$$\vartheta_{m,\ell}(\tau,z) := \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv\ell \mod 2m}} q^{r^2/4m}y^r, \qquad q=e^{2\pi i\tau},\ y=e^{2\pi iz} \tag{2.5}$$

[1]判别式函数用戴德金η函数 $\eta(\tau)$ 定义为 $\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24}$。

这一展开层次的最后一步（见（2.1）–（2.3）–（2.4））是，系数$H_{(m,\ell)}(\tau)$（见（2.4））是具有 q-级数展开的拟模形式

$$H_{(m,\ell)}(\tau) = q^{-\ell^2/(4m)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m,\ell)} q^n \tag{2.6}$$

展开式（2.6）的物理意义在于，整数值系数 $A_n^{(m,\ell)}$（2.6）枚举了 $4d$ 理论中四分之一BPS态的简并度。构造分解（2.3）时存在歧义，因为可以在极性部分中加上任意一个权重和指标相同的弱雅可比形式，而不影响其定义极性结构；这反过来会改变有限部分 φ_m^F。通过对 最优性施加 $H_{(m,\ell)}$条件，可以消除这一歧义，使每个权重和指标对应唯一的形式。该条件限制系数 $A_n^{(m,\ell)}$的增长“尽可能缓慢” [11, 39]:

$$A_n^{(m,\ell)} \sim e^{\pi\sqrt{\Delta}/m} \quad , \quad n \to \infty \qquad (\Delta := 4mn - \ell^2) \tag{2.7}$$

这一最优性也对伞形月光计划 [45–48], 十分重要，并在 [39]中得到了进一步发展和完善。此外，我们将在下一节看到，这一增长条件（2.7）在陈-西蒙斯背景下有其物理解释，而且指数中的因子可以用最小的陈-西蒙斯鞍点作用量表示：见（3.28）。

的一个关键结果是 [11] 将形式 φ_m^{F}（τ， z）分解为特殊拟雅可比形式 $\mathcal{Q}_M$（τ， z，这些形式具有theta分解

$$\mathcal{Q}_M = \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{Z}/2M\mathbb{Z} \\ (\ell,M)=1}} h_{(M,\ell)}(\tau)\vartheta_{M,\ell}(\tau,z), \qquad h_{(M,\ell)}(\tau) = q^{-\ell^2/(4m)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(M,\ell)} q^n \tag{2.8}$$

形式 $\mathcal{Q}_M$ 的theta 系数 $h_{(M,\ell)}(\tau)$ 的权重取决于M的算术性质。当 M具有奇数个素因子时，$\mathcal{Q}_M$具有权重为 $1/2$ 的mock 模系数 $h_{(M,\ell)}(\tau)$，只有在有限种情况下才能将其选为最优，这些情况与Ramanujan的Mock Theta函数有关。当 M 具有偶数个素因子时， $\mathcal{Q}_M$具有权重为 $3/2$ 的mock 模系数 $h_{(M,\ell)}(\tau)$。在后一种情况下，相应的$\mathcal{Q}_M(\tau, z)$是权重为2的特殊拟雅可比形式，并在（2.3）中有限部分的分解中出现为

$$\varphi_m^F(\tau,z) = \frac{1}{2^{\omega(m)-1}} \sum_{\substack{M|m \\ \mu(M)=+1}} \mathcal{Q}_M \big| \mathcal{V}_{2,m/M}^{(M)} \tag{2.9}$$

这里 $\omega(m)$ 表示 m的素因子个数，而 $\mu(M) = +1$ 表示 M 具有 偶数个 互异素因子。符号 $\mathcal{V}_{2,\ t}^{m}$ 指的是第 4 节中描述的一种类黑克算子 [11], ，它根据整数 $h_{(M,\ell)}$ 的算术性质混合拟模形式 M、 m 和 t的系数。

ℓ_0	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-2	13	28	34	49	46	71	59	83	77	102	87	121
11	0	9	21	27	36	41	51	44	75	62	62	82	104
13	0	6	17	17	35	20	49	31	57	36	77	32	94
17	0	4	12	16	22	19	43	17	40	50	41	27	87
19	0	3	11	12	23	14	37	17	43	28	45	30	77
23	0	1	7	4	20	-1	32	3	30	10	50	-16	63

表 1。函数 $a_n^{(M,\ell)}$的 q级数部分 $h_{(M,\ell)}(\tau)$ 在 $\mathcal{Q}_M(\tau,z)$ 中的 theta分解，见（2.8），其中 $M=2*3*5*7=210$。前 13 个系数列于此表。这些系数取自 [11]中的表4。

通过显式计算，[11], DMZ 发现 $\mathcal{Q}_1$ 是最优的；当 M 是两个互异素数的乘积时，他们发现 $\mathcal{Q}_6$、$\mathcal{Q}_{10}$、$\mathcal{Q}_{14}$和 $\mathcal{Q}_{15}$ 也同样是最优的，即满足判别式界 $\Delta:=4mn-\ell^2\geq -1$。由此可知，在分解（2.8）中，每个 theta系数都具有如下性质： $h_{(M,\ell)}(\tau)\sim q^{-1/(4M)}$ 当 $q\to 0$。这意味着系数的增长速度尽可能慢，同时符合拟模结构。此外，DMZ 通过实验发现，对于 $\mathcal{Q}_M$，当 M 是两个互异素数的乘积，且不超过 $M=2*97=194$时，这种最优性仍然成立。

这促使 DMZ 考虑 $\varphi_{210}^F(\tau,z)$ 的分解，其中 $m=2*3*5*7$ =210 是由四个互异素数相乘得到的最小乘积，并且出现了新的结构，使得最优性不再那么明确。对于 $m=210$，分解（2.9）包含 $\mathcal{Q}_M$，其中 $M=210$，其形式如下：

$$\begin{aligned}8\,\varphi_{210}^F(\tau,z)=\mathcal{Q}_1\,|\,\mathcal{V}_{2,210}^{(1)}+\mathcal{Q}_6\,|\,\mathcal{V}_{2,35}^{(6)}+\mathcal{Q}_{10}\,|\,\mathcal{V}_{2,21}^{(10)}+\mathcal{Q}_{14}\,|\,\mathcal{V}_{2,15}^{(14)}\\ +\mathcal{Q}_{15}\,|\,\mathcal{V}_{2,14}^{(15)}+\mathcal{Q}_{21}\,|\,\mathcal{V}_{2,10}^{(21)}+\mathcal{Q}_{35}\,|\,\mathcal{V}_{2,6}^{(35)}+\mathcal{Q}_{210}\end{aligned}\tag{2.10}$$

值得注意的是，在进行了一项“颇为棘手”的计算——求一个极大矩阵的核——之后，DMZ 得出了一个令人惊讶的结果： $\mathcal{Q}_{210}$ 也是最优的。具体而言，他们找到了 6 个不同的傅里叶系数 $h_{(210,\ell_0)}(\tau)$，以 $\ell_0\in\{1,11,13,17,19,23\}$ 为标记；它们是满足 gcd(ℓ_0,210) $=1$ 的前 6 个数。所有不超过 210 且满足 gcd(ℓ, 210) $=1$ 的其他 ℓ 值，都可通过对称性与这六个 ℓ_0 值联系起来。[11] 中的表4列出了傅里叶系数 $h_{(210,\ell)}(\tau)$ 的 q-级数部分的系数，其中 $\mathcal{Q}_{210}$；这里将其重现为表 1，以供参考。这意味着，有限部分 $\varphi_m^F(\tau,z)$ 的傅里叶系数实际上组合成一个向量值拟模形式（此处为 $M=210$，由 6 个拟模形式构成的向量），其中每个分量的系数都满足最优增长性质 (2.7)。

在下一节中，我们将说明，在 $\mathcal{Q}_M(\tau, z)$ 的 theta 分解 (2.8) 中出现的同一组 q-级数，对于表 1], 中所示的 $M = 2 * 3 * 5 * 7 = 210$ [，正是 Seifert流形的定向反转 $\mathcal{M}_3 = \Sigma$ (2, 3, 5, 7) 上陈-西蒙斯理论的 $\sim Z(\mathcal{M}_3, q)$ 不变量；该 Seifert流形有四个奇异纤维 $\mathcal{M}_3 = \Sigma$ (2, 3, 5, 7)。这表明，超对称黑洞的态计数问题与定向反转三维流形上的陈-西蒙斯理论拓扑不变量之间存在更深层的物理联系。正如我们将在下一节所述，这也提供了一种独立的新方法来计算这些 q-级数。为完整起见，我们还将在附录A中说明，如何利用复苏延拓求出 $\mathcal{Q}_1|\mathcal{V}_2^{(1)}$,$_{2p}$ 在 p 为奇数时的系数，以及 $\mathcal{Q}_{p_1p_2}$ 在 p_1, p_2 为互异素数时的系数。这些涵盖了 (2.9)-(2.10) 中除 $\mathcal{Q}_m$ 以外的所有其他项。

3 C ^ern-西蒙斯 Z 不变量：4-纤维化塞弗特同调球 s

在本节中，我们将 [14]中提出的数值重求和延拓方法扩展^到一类新的流形。我们应用复苏延拓，将 $Z(\Sigma(p_1, p_2, p_3, p_4); q)$不变量映射为其反向定向对应物。在陈-西蒙斯背景下，$q = e^{-\hbar}$，其中 $\hbar$ 是陈-西蒙斯耦合。过程概述如下：

^1. 确定 $\Sigma(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 的 Z 不变量中的权重 $3/2$ 贡献，其计算见 [35]。2. 注意，所得的假θ函数组合可表示为特定莫德尔-博雷尔积分组合的超渐近级数分解的实部，该分解位于斯托克斯线 $\hbar < 0$ 上。计算这些积分的虚部，以^确定其他假 theta 组合；我们建议将其识别为 Z缺陷不变量，这些不变量在 [6] 中引入。这样便将 $\widehat{Z}$ 有效扩展为一个不变量向量 $\widehat{Z}^{[j]}$ ，从而捕捉模 $SL(2, \mathbb{Z})$变换的全部效应。3. 将斯托克斯线上的超渐近级数分解表示为实部与虚部的唯一分解；该分解在模 S 变换下具有自对偶性。

4. 根据重求和超渐近级数关系保持的基本性质，当旋转越过自然边界回到$\hbar > 0$时，施加相同的超渐近级数结构。随后，可以应用 [14] 中的数值算法，计算对偶 q级数的整数系数；我们将其识别为反向定向流形$\Sigma(p_1, p_2, p_3, p_4)$的$\widehat{Z}^{[j]}$ 不变量中的权重 $3/2$ 贡献。

---

^具有四个奇异纤维的塞弗特流形的 Z 不变量可以表示为权重 $1/2$ 和权重 $3/2$ 假θ函数的线性组合，

$$\widehat{Z}\left(\Sigma(p_1, p_2, p_3, p_4); q\right) := \widehat{Z}_{3/2}(q) + \widehat{Z}_{1/2}(q), \qquad q = e^{-\hbar} \tag{3.1}$$

$$= \sum_{s=0}^{7} (-1)^s \left(\Phi_p^{(R_s)}(q) - R_s \Psi_p^{(R_s)}(q)\right) \tag{3.2}$$

R_s （3.2）中的量是整数值指标，定义见下文（3.17）。式（3.2）中的构件是假θ函数 $\Phi_p^{(a)}$（q）和 $\Psi_p^{(a)}$（q），其权重分别为 $3/2$ 和 $1/2$:

$$\Phi_p^{(a)}(q) := \sum_{n=0}^{\infty} n\,\varphi_{2p}^{(a)}(n)\,q^{n^2/4p}, \qquad \varphi_{2p}^{(a)}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv \pm a \mod 2p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\Psi_p^{(a)}(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2p}^{(a)}(n)\,q^{n^2/4p}, \qquad \psi_{2p}^{(a)}(n) = \begin{cases} \pm 1 & \text{if } n \equiv \pm a \mod 2p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.4}$$

权重为 $3/2$ 的假 theta 函数将是我们工作的主要研究对象。利用这些函数的周期性，我们可以将讨论限制在 $1 \le a \le p-1$，$\Phi_p^{(a)}($ q q $=$ $) = \Phi_p^{(-a)}(\,)(\,)$。参数 $\Phi_p^{(a+2p)}$ q

$$p := p_1 p_2 p_3 p_4 \tag{3.5}$$

是指定该塞弗特流形的 4 个不同素数的乘积。

在 [14] 中提出的重求和解析延拓方法 Z 可以构造 取向反转的 塞弗特流形 $\Sigma(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$ 的不变量，前提是已知特定假θ函数组合的完整 S-变换。一般而言，这些假θ函数组合按向量值拟模形式变换，因此，写出 S-变换的关键步骤是确定具体的假θ函数向量。[14] 中的方法正是为此而开发的：它们确定了莫德尔-博雷尔积分的一种自然解析延拓，其在斯托克斯线上的超渐近级数分解会产生 q 和 $\tilde{q}$ 级数，而这些级数可与假θ函数对应起来。

我们首先定义一族莫德尔-博雷尔积分

$$K_{(p,a)}(\hbar) = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{p\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \int_0^\infty dx\, x\, e^{-p\,x^2/\hbar} \frac{\cosh\left[(p-a)x\right]}{\sinh\left[px\right]} \tag{3.6}$$

$$= \frac{p}{\pi^2} \int_0^\infty dx\, x\, e^{-p\,\hbar\,x^2/\pi^2} \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x) - \cos(a\pi/p)} \tag{3.7}$$

它们与 [14] 中的那些类似，只是在被积函数中额外乘上因子 x，并采用相应的 $\left(\frac{p\pi}{\hbar}\right)^{3/2}$ 因子代替 $\left(\frac{p\pi}{\hbar}\right)^{1/2}$。这里，$p$ 与 a 为正整数，且 $1 \le a \le p-1$。这些积分已对 $\mathrm{Re}(\hbar) > 0$ 定义，此时积分为实数。这是位于自然边界内部的区域，其中 $|q| < 1$。对偶表达式（3.7）由（3.6）经傅里叶变换 [8, 14]，并利用基本恒等式

$$e^{-x^2/t} = \sqrt{\frac{t}{\pi}} \int_0^\infty dv\, e^{-v^2\,t/4}\, \cos(v\,x) \tag{3.8}$$

小 x展开，即（3.6）式积分中三角因子的展开，自然生成小 $\hbar$ 展开，亦即 $K_{(p,a)}$（$\hbar$）的展开；而（3.7）式中的对偶积分则自然生成大$\hbar$ 展开。有趣的是，**小、大** $\hbar$ 展开都是阶乘发散的，这反映了这些积分相应的超渐近级数表示涉及

关于 $q = e^{-\hbar}$ 及其模对偶 $\widetilde{q} = e^{-\pi^2/\hbar}$的非微扰展开。参见下文（3.22）和（3.25）。

在分析超越级数结构时，最丰富的信息来源位于斯托克斯线。此处斯托克斯线为负实轴 $\hbar < 0$ [8, 14]，因此为构造超渐近级数，我们将积分旋转到斯托克斯线。由（3.6）-（3.7）中积分的形式可见，三角博雷尔变换在 x中是亚纯的，因此在旋转到 $\hbar < 0$ 时，（3.7）中的对偶积分产生 q的幂次实级数，而（3.6）中的积分产生 $\widetilde{q}$的幂次纯虚级数，分别至多差一个整体有理幂 q与 $\widetilde{q}$。我们可以从上方或下方趋近斯托克斯线，从而定义 $\hbar < 0$ 与 $\epsilon \to 0$的解析延拓积分，

$$K^{(\pm)}_{(p,a)}(\hbar) = \mp\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{p\pi}{\hbar}\right)^{3/2} ie^{\pm i\epsilon}\int_0^\infty dx\,(\mp ie^{\pm i\epsilon}x)\,e^{-p(\mp ie^{\pm i\epsilon}x)^2/\hbar}\frac{\cos\left[(p-a)(e^{\pm i\epsilon}x)\right]}{\sin\left[p(e^{\pm i\epsilon}x)\right]} \tag{3.9}$$

对偶表达式亦然。实部和虚部通过对斯托克斯线上方与下方的旋转积分取平均而得到，

$$\mathrm{Re}\left[K_{(p,a)}(\hbar<0)\right] = \frac{1}{2}\left(K^{(+)}_{(p,a)}(\hbar) - K^{(-)}_{(p,a)}(\hbar)\right) \tag{3.10}$$

$$\mathrm{Im}\left[K_{(p,a)}(\hbar<0)\right] = -\frac{i}{2}\left(K^{(+)}_{(p,a)}(\hbar) + K^{(-)}_{(p,a)}(\hbar)\right) \tag{3.11}$$

这些可化简为直接的留数计算 [8, 14]。对于偶数 p 和 a，实部所产生的 q级数就是假θ函数 $\Phi_p^{(a)}(1/q)$，而虚部则是若干其他指标为 p的假θ函数的线性组合，它是模对偶量的倒数的函数： $1/\widetilde{q}$为构造这一表达式，我们注意到，出现在权重 $3/2$ 对$\sim Z(\Sigma(p_1、\ p_2、\ p_3、\ p_4)$中的假θ函数线性组合； $1/q)$

$$\widehat{Z}_{3/2}\left(\Sigma(p_1,p_2,p_3,p_4);\frac{1}{q}\right) = \sum_{s=0}^{7}(-1)^s\Phi_p^{(R_s)}\left(\frac{1}{q}\right) \tag{3.12}$$

可由在 $\hbar < 0$ 处经解析延拓的 Mordell-博雷尔积分的线性组合的实部得到。注意，我们将该不变量视为 $1/q$ 的函数，因为我们研究的是区域 $\hbar < 0$。我们还将自变量缩放为 $1/q^2$，这在积分中体现为将 p 和 a 缩放两倍。这只是为了方便，以简化积分分析及后续的数值计算。

$$\sum_{s=0}^{7}(-1)^s\Phi_p^{(R_s)}\left(\frac{1}{q^2}\right) = \mathrm{Re}\left[\sum_{s=0}^{7}(-1)^s K_{(2p,2|R_s|)}(\hbar)\right] \tag{3.13}$$

$$:= \mathrm{Re}\left[L_{(p,j^*)}(\hbar)\right] \tag{3.14}$$

此处， R_s的 8 种可能取值由 $p\left(\sum_{i=1}^4 \frac{\epsilon_i}{p_i}\right)$ 给出，其中 $\prod_{i=1}^4\epsilon_i = （-1）^s$：参见 [35]中的脚注 16。为了使积分的超渐近级数分解在 $\hbar \to$下自对偶

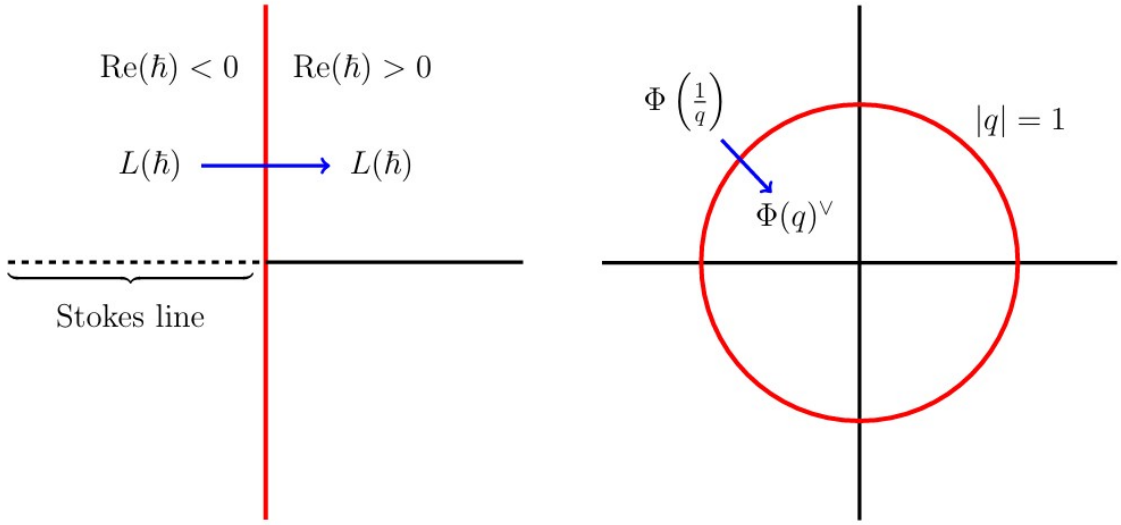

图 3。 $\hbar$ （左）和 $q = e^{-\hbar}$ （右）复平面。假 theta 函数在 Re($\hbar$) $= 0$ 处的自然边界（分隔左右半平面）以及 $|q| = 1$（界定单位圆）以红线表示。将积分从 Re($\hbar$) < 0 解析延拓至 Re($\hbar$) > 0 时，边界处不会遇到障碍；这使 q 级数在越过单位圆、从 $|q| > 1$ 到 $|q| < 1$ 时也得以延拓，从而得到对偶 q 级数函数 $\Phi(q)^\vee$。

$\pi^2/\hbar$（它交换 q 与 $\widetilde{q}$），我们认识到，必须考虑一个 向量 的莫德尔-博雷尔积分的解析延拓，其中各项的实部构成一个假θ函数向量，这些函数恰好包含相应虚部中出现的那些函数。这就是指标 j^* 在 $L_{(p,j^*)}$ （$\hbar$）中出现的原因——它表示积分向量（或假θ函数）中的特殊项，对应于$\widehat{}$流形的纯 Z 不变量，由 Chung 构造 [35]。

另一种变量 $\widetilde{q}$ 与 $j \neq j^*$ 可由斯托克斯线 $\hbar < 0$ 上的表达式确定。注意到虚部 是若干假 theta 函数特殊组合的和，但取值点为 $\widetilde{q}$ 而非 q:

$$\mathrm{Im}\left[L_{(p,j^*)}(\hbar)\right] = \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{j=1}^{D} M_{j^*j} \Phi_p^{[j]}\left(\frac{1}{\widetilde{q}^2}\right), \quad \Phi_p^{[j]}(q) := \sum_{s=0}^{7} (-1)^s \Phi_p^{(R_s^{[j]})}(q) \tag{3.15}$$

这里 D 是整数

$$D = \frac{1}{8} \prod_{i=1}^{4} (p_i - 1) \tag{3.16}$$

它编码了假 theta 函数和积分向量的长度。新的假θ函数组合 $\Phi_p^{[j]}$（3.15）依赖于一组新的指标 $R_s^{[j]}$、 $j = 1$、.....、 D，它们推广了 R_s （3.13）–（3.14）中的指标。这些可用于构造完整的

D维积分向量 $L_{(p,j)}(\hbar)$，方式与 $L_{(p,j^*)}$ $(\hbar)$ 类似。这些整数值指标定义如下：

$$R_s^{[j]} = p\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{\ell_i\epsilon_i}{p_i}\right), \qquad \prod_{i=1}^{4}\epsilon_i = (-1)^s, \quad j = 1,\ldots,D \tag{3.17}$$

并且取决于一个四维格矢量 $\vec{\ell}^{[j]} = (\ell_1^{[j]}, \ \ell_2^{[j]}, \ \ell_3^{[j]}, \ \ell_4^{[j]}) \in \mathbb{Z}^4$。给定一个Seifert流形时，这些格矢量的构造见 [23]。这些格矢量编码了假θ函数的上指标、(3.15)中的 $R_s^{[j]}$，以及陈-西蒙斯作用量：

$$\text{Chern Simons actions}: \qquad \Delta_j = r_j^2/4p \tag{3.18}$$

这里，r_j :=min$_s\{|R_s^{[j]}|\}$ 是与所有 p_i互素的前 D 个整数。陈-西蒙斯作用量Δ_j 也是相应假θ函数组合$\Phi_p^{[j]}(q)$的首项幂。

例如，对于最简单的指标为互异素数的四纤维塞弗特同调球， $\Sigma(2,\ 3,\ 5,\ 7)$，根据(3.16)，其有 $D = 6$，我们得到6个格矢量：

$$\begin{aligned} &\vec{\ell}^{[1]} = (1,1,2,3), \quad \vec{\ell}^{[2]} = (1,1,2,2), \quad \vec{\ell}^{[3]} = (1,1,1,3) \\ &\vec{\ell}^{[4]} = (1,1,1,2), \quad \vec{\ell}^{[5]} = (1,1,2,1), \quad \vec{\ell}^{[6]} = (1,1,1,1) \end{aligned} \tag{3.19}$$

这些已按递增的陈-西蒙斯作用量排序：

$$\Delta_j \in \frac{1}{840}\{1^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2\} \tag{3.20}$$

请注意， $r_j \in \{1, 11, 13, 17, 19, 23\}$ 正是作为 ℓ_j 出现于特殊伪雅可比形式 $\mathcal{Q}_{210}$之分解中的那些整数；见表1的第一列。这是陈-西蒙斯边界穿越问题与黑洞态计数问题之间可能存在联系的第一个明确迹象 [11]，（上一节已作描述）。

式（3.15）中假 theta 函数的组合现于 q处求值，它们在旋转到 $\hbar < 0$时是莫德尔-博雷尔积分向量的实部：

$$\text{Re}\left[L_{(p,j)}(\hbar)\right] = \Phi_p^{[j]}\left(\frac{1}{q^2}\right), \quad L_{(p,j)}(\hbar) := \sum_{s=0}^{7}(-1)^s K_{(2p,2|R_s^{[j]}|)}(\hbar), \quad j = 1,\ldots,D \tag{3.21}$$

它们具有与（3.15）类似的虚部分解。通过计算向量所包含的 $L_{(p,j)}$（$\hbar$）的虚部，并按 $\Phi_p^{[j]}$（$1/\widetilde{q}^2$）的首项幂分组，便可提取混合矩阵 M_{jk}的精确形式，该矩阵一般由三角因子 sin（$a\pi/p$）构成，对应于 a 的整数值，这些值依赖于 j 以及 k。

综上，我们已经构造出 Mordell-Borelin 积分向量 $L_{(p,j)}(\hbar)$ 在斯托克斯线上的完整超渐近级数分解，其表达形式是由（3.15）中定义的假 theta 函数组成的线性组合：

$$L_{(p,j)}(\hbar) = \Phi_p^{[j]}\left(\frac{1}{q^2}\right) + i\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2}\sum_{k=1}^{D}M_{jk}\Phi_p^{[k]}\left(\frac{1}{\widetilde{q}^2}\right) \tag{3.22}$$

这个斯托克斯线分解是唯一的，因为它是将积分向量 $L_{(p,j)}(\hbar)$ 分解为实部和虚部的超渐近级数分解。请注意，实部和虚部涉及完全相同的假 theta 组合 $\Phi_p^{[j]}$，但分别以 q 及其模对偶 $\widetilde{q}$ 的形式表示。因此，分解与模 S 变换的一致性意味着，混合矩阵 M_{jk} 恰好就是这些积分在模 S 变换 $\hbar \to \pi^2/\hbar$ 下行为中的同一个混合矩阵：

$$L_{(p,j)}(\hbar) = \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{k=1}^{D} M_{jk} L_{(p,k)}\left(\frac{\pi^2}{\hbar}\right) \tag{3.23}$$

虽然这些表达式是在斯托克斯线上推导出来的，$\hbar < 0$由于这是唯一的超渐近级数分解，因此我们预期，在自然边界的另一侧也会有相同形式的超渐近级数分解，其中 $\mathrm{Re}(\hbar) > 0$。这里我们援引超渐近级数的“关系保持原理” [14], ，其依据是超渐近级数极强的结构刚性 [16–18]。具体而言，混合矩阵必须相同，$\Phi_p^{[j]}$的有理指数也必须保持不变，即使跨越自然边界亦然。

鉴于 $\hbar \to \pi^2/\hbar$ 关系（3.23）对所有 $\hbar \in \mathbb{C}$都成立，可复苏函数的关系保持原理确定了以对偶 q级数 $\Phi_p^{[j]}(q)^\vee$表示的分解的许多解析性质。关键在于，超渐近级数分解为 q 和 $\widetilde{q}$ 级数的形式得以保持，而对偶 q级数与其假 theta 对应项具有相同的整体有理幂，

$$\Phi_p^{[j]}(q)^\vee = q^{-\Delta_j} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p,j)} q^n, \qquad \Delta_j = \frac{r_j^2}{4p}. \tag{3.24}$$

从物理角度来说，我们预期 $a_n^{(p,j)}$在一个整体归一化因子之外应为整数，因为它们应当编码 BPS 态的计数。不过，我们在数值计算过程中并未强制这一点：$a_n^{(p,j)}$的结果具有极高精度的整数性，正如权重1/2分析在 [14, 15]中所示。

除了保持有理指数 Δ_j 不变，我们还必须保持相同的混合矩阵，以及 $\widetilde{q}$ 项之外的整体因子 $(\pi/\hbar)^{3/2}$。这促使我们在自然边界的另一侧也对莫德尔-博雷尔积分向量 $L_{(p,j)}(\hbar)$ 作如下超渐近级数分解，其中 $\hbar > 0$:

$$L_{(p,j)}(\hbar) = \Phi_p^{[j]}\left(q^2\right)^\vee + \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{k=1}^{D} M_{jk} \Phi_p^{[k]}\left(\widetilde{q}^2\right)^\vee \qquad , \qquad \hbar > 0 \tag{3.25}$$

式（3.25）的左边涉及莫德尔-博雷尔积分，可以将其计算到极高精度。右边涉及相同的 $\Phi^\vee$，分别在 q^2 和 $\widetilde{q}^2$ 处求值。因此，可以在自对偶点 $a_n^{(p,j)}$（3.24）附近拟合系数 $\hbar = \pi$，其中 $q = \widetilde{q}$。这是一个灵敏的匹配条件，我们利用它进行数值求解，得到高阶的 a_n ，精度极高。该算法在 [14],

文中对具有三个奇异纤维的塞弗特流形实施了这一过程。本文也采用了相同的拟合策略。

从 (3.22) 到 (3.25的转变，实现了从 $\hbar \to -\hbar$，或 $q \to 1/q$，对超渐近级数结构的复苏延拓，有效地穿越了权重 自然边界。其权重 $3/2$假θ函数给出了一组自然候选项，作为权重 $3/2$ 对 $\widehat{Z}^{[j]}$ 四纤维定向反转塞弗特流形不变量的贡献。

例如，与定向反转的四纤维化塞弗特流形 Σ(2，3，5，7) 相关联的对偶 q 级数为：

$$
\begin{aligned}
\Phi^{[1]}_{210}(q)^\vee &= 4\,q^{-1/840}\left(2-13q-28q^2-34q^3-49q^4-46q^5-71q^6-59q^7+\dots\right)\\
\Phi^{[2]}_{210}(q)^\vee &= 4\,q^{-121/840}\left(-9q-21q^2-27q^3-36q^4-41q^5-51q^6-44q^7+\dots\right)\\
\Phi^{[3]}_{210}(q)^\vee &= 4\,q^{-169/840}\left(-6q-17q^2-17q^3-35q^4-20q^5-49q^6-31q^7+\dots\right)\\
\Phi^{[4]}_{210}(q)^\vee &= 4\,q^{-289/840}\left(-4q-12q^2-16q^3-22q^4-19q^5-43q^6-17q^7+\dots\right)\\
\Phi^{[5]}_{210}(q)^\vee &= 4\,q^{-361/840}\left(-3q-11q^2-12q^3-23q^4-14q^5-37q^6-17q^7+\dots\right)\\
\Phi^{[6]}_{210}(q)^\vee &= 4\,q^{-529/840}\left(-q-7q^2-4q^3-20q^4+q^5-32q^6-3q^7+\dots\right)
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

首先请注意，(3.26) 中的有理指数就是 (3.20) 中的陈-西蒙斯作用量，其中 r_j 值 $\{1,11,13,17,19,23\}$ 与黑洞态计数分析中表 $\ell_0\,1$ 第一列的值 一致 [11]。

此外，比较 q级数（3.26）与 q级数系数，见表1，我们看到 $\Phi^{[j]}_{210}(q)^\vee$ 与系数$h_{(210,r_j)}(\tau)$（属于最优拟雅可比形式 $\mathcal{Q}_{210}$）之间存在显著关系。事实上，我们有

$$
\Phi^{[j]}_{210}(q)^\vee = -4\,h_{(210,r_j)}(\tau), \quad q=e^{2\pi i\tau},\ \tau\in\mathbb{H}
\tag{3.27}
$$

^这给出了权 $3/2$ 对所提出的 Z 陈-西蒙斯理论不变量的贡献（在 Σ(2，3，5，7）上）与特殊伪雅可比形式 $\mathcal{Q}_{210}$ 之间的显式关系；该形式用于 $4d$ $\mathcal{N}=4$ 理论 [11], 的黑洞微观态计数问题，如前一节所综述。

在 [15], 中，利用复苏边界穿越法得到的对偶 q级数的系数增长已针对权 $1/2$情形进行了分析，为研究相应 $\mathcal{N}=2$ $3d$ 理论 [37, 38]中的底层三维卡迪公式提供了一种新方法。[15] 的方法可直接推广到权 $3/2$ q级数 $\Phi^{[j]}_p(q)$：

$$
a_n^{(p,j)} \sim e^{\pi\sqrt{16\Delta_1(n-\Delta_1)}} \quad , \quad n\to\infty
\tag{3.28}
$$

其中 $\Delta_j = r_j^2/(4p)$，如式（3.20）所示。我们的数值结果证实了这种大阶增长形式。此外，这种增长行为与式（2.7）中黑洞分析的大阶增长形式相符。见图 4。由于这些是“最优”的，增长较为缓慢，但我们也发现，正如附录 C [15]中对次主导修正的分析所预期的那样，随着 j增大，离散程度也更大。

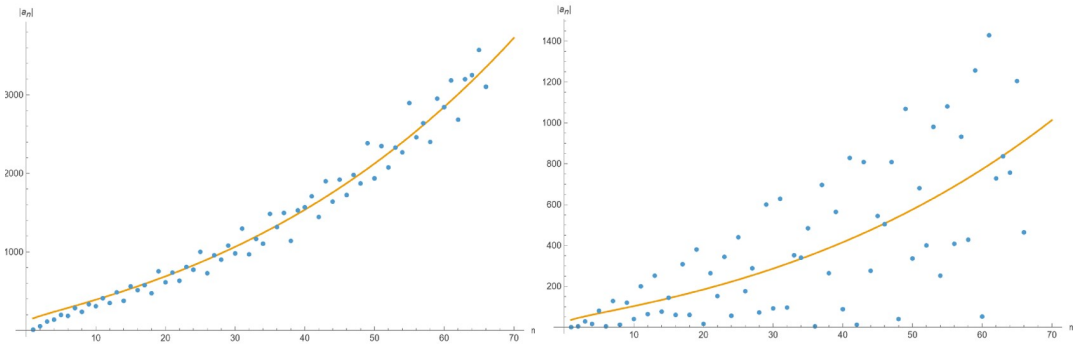

图4。 $a_n^{(210,j)}$的系数随 $j=1$ （左）和 $j=6$ （右）的变化。 $j=6$ 情形下系数的离散程度更大，这是因为次主导修正的相对大小较大；这些修正会随着 j 增大而增大。

我们的方法可应用于具有 4 个奇异纤维的更一般的塞弗特同调球， $\Sigma(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$，但受数值精度限制。例如，我们记录了当 p_k 为 4 个互异素数，且 p 在式（3.5）中取次小值时，我们的过程所得的结果；对应的塞弗特流形为 $\Sigma(2,\ 3,\ 5,\ 11)$。此处 $p=330$ 且 $D=10$，陈-西蒙斯作用量为：

$$\Delta_j \in \frac{1}{1320}\{1^2,7^2,13^2,17^2,19^2,23^2,29^2,31^2,47^2,49^2\} \tag{3.29}$$

按照 [23], 中构造格向量的方法，我们得到以下10个线性无关的向量，它们给出假 theta 指标（3.17）：

$$\vec{\ell}^{[1]}=(1,1,1,4),\quad \vec{\ell}^{[2]}=(1,1,2,5),\quad \vec{\ell}^{[3]}=(1,1,2,3),\quad \vec{\ell}^{[4]}=(1,1,2,2),\quad \vec{\ell}^{[5]}=(1,1,1,1)$$
$$\vec{\ell}^{[6]}=(1,1,2,4),\quad \vec{\ell}^{[7]}=(1,1,1,5),\quad \vec{\ell}^{[8]}=(1,1,1,3),\quad \vec{\ell}^{[9]}=(1,1,2,1),\quad \vec{\ell}^{[10]}=(1,1,1,2)$$

这些数据使我们能够构造满足 $\hbar\to\pi^2/\hbar$关系式（3.23）的莫德尔-博雷尔积分的精确组合。利用这些数据，我们提取斯托克斯线上的超越级数结构，并援引该超越级数结构在自然边界另一侧的保持性。展开系数随后由（3.25）中的非单一超渐近级数分解，通过在自对偶点 $q=e^{-\pi}$附近采用相同的数值拟合程序得到。我们得到如下对偶 q级数 $\Phi_{330}^{[j]}(q)^\vee$，其中 $j=1,\ \ldots\ldots,\ 10$：

$$\Phi_{330}^{[1]}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-1/1320}\left(10-27q-62q^2-82q^3-109q^4-69q^5-221q^6-83q^7+\ldots\right) \tag{3.30}$$
$$\Phi_{330}^{[2]}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-49/1320}\left(-54q-119q^2-123q^3-203q^4-177q^5-236q^6-234q^7+\ldots\right) \tag{3.31}$$
$$\Phi_{330}^{[3]}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-169/1320}\left(-41q-86q^2-82q^3-158q^4-148q^5-190q^6-146q^7+\ldots\right) \tag{3.32}$$
$$\Phi_{330}^{[4]}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-289/1320}\left(-25q-49q^2-85q^3-94q^4-89q^5-128q^6-139q^7+\ldots\right) \tag{3.33}$$
$$\Phi_{330}^{[5]}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-361/1320}\left(2q-28q^2-6q^3-59q^4+28q^5-137q^6+54q^7+\ldots\right) \tag{3.34}$$

$$\Phi^{[6]}_{330}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-529/1320}\left(-40q - 81q^2 - 136q^3 - 121q^4 - 212q^5 - 188q^6 - 228q^7 + \ldots\right) \tag{3.35}$$

$$\Phi^{[7]}_{330}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-841/1320}\left(-15q - 58q^2 - 63q^3 - 136q^4 - 46q^5 - 187q^6 - 142q^7 + \ldots\right) \tag{3.36}$$

$$\Phi^{[8]}_{330}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-961/1320}\left(-7q - 52q^2 - 29q^3 - 104q^4 - 51q^5 - 163q^6 - 32q^7 + \ldots\right) \tag{3.37}$$

$$\Phi^{[9]}_{330}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-2209/1320}\left(-9q^2 - 14q^3 - 68q^4 - 3q^5 - 71q^6 - 56q^7 + \ldots\right) \tag{3.38}$$

$$\Phi^{[10]}_{330}(q)^\vee = \frac{4}{3}q^{-2401/1320}\left(-5q^2 - 35q^3 - 23q^4 - 70q^5 - 63q^6 - 48q^7 + \ldots\right) \tag{3.39}$$

我们已计算至 $n = 45$ 个系数，并确认其与主导渐近增长率（2.7）相符。受这些结果启发，我们提出如下猜想：

猜想 3.40 令 $\Phi^{[j]}_p(q)^\vee$ 为一组拟模形式向量，它在 $q \to 1/q$ 下与假 *theta* 函数的线性组合 $\Phi^{[j]}_p(q)$对偶。该组合定义于 (3.15)，并与 $\Sigma(p_1, p_2, p_3, p_4)$的 $\widehat{Z}$不变量相关，其中 $p = p_1p_2p_3p_4$；令 $h_{(p,r_j)}(q)$ 为特殊伪雅可比形式 $\mathcal{Q}_p$的 *theta* 分解系数。那么，在 q-级数的层面上，以下关系成立，

$$\Phi^{[j]}_p(q)^\vee = C\, h_{(p,r_j)}(q) \tag{3.41}$$

其中 $C \in \mathbb{Q}$ 是一个归一化常数。

最后，为结束本节，我们提出一些值得未来研究的总结性评论与观察：

1. 在我们计算的两个例子中，各有一个 q-级数，其系数并未像向量中的其他 q-级数那样遵循通常的同号模式。在这两种情况下，该 q-级数都是原始的无缺陷 $\widehat{Z}$ 不变量*without defects* $\Phi^{[j^*]}_p(q)^\vee$的对偶。

2. 由定理 9.2 在 DMZ 中的一个推论，函数 $\mathcal{Q}_M$，其中 $M = p_1p_2p_3p_4$，总可以被选取为具有最优增长。因此，对偶 q-级数 $\Phi^{[j]}_p(q)^\vee$，被等同于 $\mathcal{Q}_M$ 的傅里叶系数，对所有 $p = p_1p_2p_3p_4$ 也将具有最优增长，其系数按（3.28）增长。通过将 $\mathcal{Q}_M$ 等同于权 $3/2$ 贡献$\widehat{}$之于 Z 不变量，我们可以利用最优性，对四纤维 Seifert 同调球的有效中心荷作出一般性陈述——见 [15, 38]。

3. 在 [35]，中，已求得 N 纤维情形下 Seifert 同调球的表达式，它们由权 $1/2$ 与 $3/2$ 假 theta 函数及其导数的组合给出。因此，原则上，利用本文的方法以及 [14]，复苏延拓可以$\widehat{}$用于计算 Seifert 同调球的 Z 不变量，这些同调球具有 N 纤维。

4 结论

在这项工作中，我们将 [8, 14] 关于穿越 Chern-Simons自然边界进行复苏延拓的结果，扩展到了新的一类三维流形：具有四个奇异纤维的 Seifert 同调球面。

，这类流形比其三纤维对应物具有更丰富的拓扑与算术$\widehat{}$结构，并且其 Z 不变量由以下两者共同构成：$\widehat{}$权为 1/2 和 3/2 的假 θ 函数。我们将 Chung 的 Z 不变量 [35] 推广为一个不变量的$\widehat{Z}^{[j]}$ 向量，并推导出其在模 $SL(2,\ \mathbb{Z})$变换下的完整结构。这一策略与 [14, 15] 中针对具有三个奇异纤维的 Seifert 流形上的权为 1/2 的假 θ 函数所采用的方法类似。本文着重研究新的权 3/2 贡献，发现了斯托克斯线上的完整向量值假 theta 函数结构；该结构可表示为莫德尔-博雷尔积分的唯一超渐近级数分解，其实部和虚部均以$q = e^{-\hbar}$ 及其模对偶 $\widetilde{q} = e^{-\pi^2/\hbar}$表示。根据关系保持原理，从斯托克斯线穿越自然边界的复苏延拓确定了一个对偶 q级数向量，我们将其识别为定向反转的四纤维 Seifert 流形上陈-西蒙斯理论的缺陷拓扑不变量。

在包含 4 个不同素数 Seifert 参数的最简单例子中，我们得到了一个令人惊讶的结果：反向定向流形上由此产生的 6 个新 q-级数，恰好与在另一种物理背景下发现的 6 q-级数完全一致；该背景涉及对超对称黑洞中四分之一BPS态的计数 [11]。这揭示了陈-西蒙斯拓扑不变量与特殊拟雅可比形式 $\mathcal{Q}_p$ 之间的新对应关系，而这些形式是通过弦紧化获得的 $4d\ \mathcal{N} = 4$ 理论中计数四分之一 BPS 二磁单极子的关键构件。边界穿越方法可推广至其他具有 4 个纤维的塞弗特流形上的陈-西蒙斯理论；我们推测，这为计算这些超对称黑洞的简并度提供了一种新方法。未来的工作将进一步分析这一对偶与对应关系网络的细节。

致谢：本材料基于美国能源部科学办公室高能物理办公室资助的研究工作，资助编号为 DE-SC0010339。¨作者感谢 O. Costin、S. Gukov 和 O. Oner 的讨论与评论。

权重为 $3/2$ 的假 theta 函数的对偶

在本附录中，我们将证明，分解（2.10）中出现的所有拟雅可比形式，都可以表示为在 q 下与假θ函数对偶的级数。在 $q \to 1/q$。具体而言，我们将证明，$\mathcal{Q}_1|\mathcal{V}_2^{(1)}$ 、$_{2p}$的强全纯 theta 系数，即出现在 φ_{2p}^F（τ、z）分解中的那些系数，可以表示为单个权 $3/2$ 假θ函数的对偶，其复苏块结构与 [14]中研究的权 $1/2$假θ函数类似。接下来，我们将证明，对于 $\mathcal{Q}_{p_1p_2}$，当 p_1 和 p_2为互异素数时，其 theta 系数可以表示为两个权 q假θ函数组合的对偶级数，所用方法与第3节类似，但算术性质更简单。

A.1 单个假 theta 函数的对偶

我们在第3节中观察到，式（ $K_{(p,a)}(\hbar)$ 中的莫德尔-博雷尔积分3.6）可以解析延拓至其斯托克斯线 $\hbar<0$，并在该处分解为唯一的实部和虚部，且可用权 $3/2$ 假θ函数 $\Phi_p^{(a)}(q)$ 表示，这些函数定义于式（3.3）中。对于奇数 p（本节仅讨论这种情况）和偶数 a，它们的虚部是关于 $\tilde{q}$ 的假θ函数之和，其上指标全为偶数，这表明我们可以针对给定的 p 构造一个在 $\hbar\to\pi^2/\hbar$ 下自对偶的向量：

$$K_{(p,2j)}(\hbar)=\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}M_{jk}\,K_{(p,2j)}\left(\frac{\pi^2}{\hbar}\right),\quad j=0,\dots,\frac{p-1}{2}\tag{A.1}$$

尽管这种结构使我们能够应用复苏延拓并求出对偶 q级数，但它遗漏了上指标为奇数的假θ函数， $\Phi_p^{(2j+1)}(q)$。相应博雷尔积分 $K_{(p,2j+1)}(\hbar$的虚部涉及在 $\Phi_p^{(2j+1)}$处取值的 $\hbar\to\hbar+ip\pi$，其作用于 $q^{-a^2/4p}\Phi_p^{(a)}(q$的整数次幂上，结果为 $q\to-q$。这种结构与复苏循环块中的结构非常相似，见 [14]。受此启发，我们引入莫德尔-博雷尔积分这一类：

$$J_{(p,a)}(\hbar)==\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{p\pi}{\hbar}\right)^{3/2}\int_0^\infty dx\,x\,e^{-px^2/\hbar}\frac{\sinh\left[(p-a)x\right]}{\cosh\left[px\right]}\tag{A.2}$$

利用这些积分，我们可以定义构成复苏块的积分向量：

$$L^{(A)}_{(p,j)}(\hbar)\;=\;K_{(p,2j)}(\hbar),\qquad j=0,...,\frac{p-1}{2}\tag{A.3}$$

$$L^{(B)}_{(p,j)}(\hbar)\;=\;J_{(2p,2j+1)}(\hbar)+(-1)^{\frac{p-1}{2}+n}J_{(2p,2p-2j-1)}(\hbar),\qquad j=0,...,\frac{p-1}{2}\tag{A.4}$$

$$L^{(C)}_{(p,j)}(\hbar)\;=\;K_{(p,2j+1)}(\hbar),\qquad j=0,...,\frac{p-1}{2}\tag{A.5}$$

$$L^{(D)}_{(p,j)}(\hbar)\;=\;J_{(p,2j)}(\hbar),\qquad j=0,...,\frac{p-1}{2}\tag{A.6}$$

对于所有奇数 p，这些向量中的每一个都满足关于 $\hbar\to\pi^2/\hbar$的模关系，类似于（A.1）。集合 A 和 B 是自对偶的，也就是说，它们在$\hbar\to\pi^2/\hbar$作用下变换为自身；集合 C 和 D 则彼此混合：

$$L^{(A,B)}_{(p,j)}(\hbar)\;=\;\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}M^{(A,B)}_{jk}\,L^{(A,B)}_{(p,k)}(\pi^2/\hbar)\tag{A.7}$$

$$L^{(C)}_{(p,j)}(\hbar)\;=\;\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}M^{(C)}_{jk}\,L^{(D)}_{(p,k)}(\pi^2/\hbar)\tag{A.8}$$

其中的混合矩阵 $M^{(\bullet)}$，满足 $\bullet\in\{A,B,C\}$，取决于 p，且其矩阵元是简单的三角函数。通过对（3.6）、（A.2）以及进行留数计算，得到的超渐近级数展开

它们各自的对偶具有如下形式

$$L^{(A)}_{(p,j)}(\hbar) = \epsilon_j \Phi^{(2j)}_p\left(\frac{1}{q}\right) + i\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} M^{(A)}_{jk} \epsilon_k \Phi^{(2k)}_p\left(\frac{1}{\widetilde{q}}\right), \quad \epsilon_j = \begin{cases} 1, & j > 0 \\ 2, & j = 0 \end{cases} \tag{A.9}$$

$$L^{(B)}_{(p,j)}(\hbar) = \Phi^{(2j+1)}_p\left(\frac{i}{\sqrt{q}}\right) + i\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} M^{(B)}_{jk} \Phi^{(2k)}_p\left(\frac{i}{\sqrt{\widetilde{q}}}\right) \tag{A.10}$$

$$L^{(C)}_{(p,j)}(\hbar) = \Phi^{(2j+1)}_p\left(\frac{1}{q}\right) + i\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} M^{(C)}_{jk} \Phi^{(2k)}_p\left(-\frac{1}{\widetilde{q}}\right) \tag{A.11}$$

注意，（$M^{(\bullet)}$ 中的矩阵 A.9）-（A.11）与下文中的矩阵相同：它们出现在 $\hbar \to \pi^2/\hbar$（A.7）-（A.8）中莫德尔-博雷尔积分的变换律里。实际上，这些矩阵是通过留数计算得到的。为避免符号繁杂，对假θ函数自变量所作的变量替换只作用于提出 q的有理幂后得到的整数幂级数。例如，

$$\Phi^{(2)}_3(q) = q^{1/12}(1 + 5q^2 + 7q^4 + \dots) \implies \Phi^{(2)}_3(iq) = q^{1/12}(1 - 5q^2 + 7q^4 + \dots) \tag{A.12}$$

这些积分及其超渐近级数表达式同样保持关系不变，从而为我们提供了一种求解对偶 q-级数 $\Phi^{(a)}_p(q)^\vee$ 的方法。对于 $\hbar > 0$，超渐近级数表达式具有如下形式

$$L^{(A)}_{(p,j)}(\hbar) = \epsilon_j \Phi^{(2j)}_p(q)^\vee + \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} M^{(A)}_{jk} \epsilon_k \Phi^{(2k)}_p(\widetilde{q})^\vee, \quad \epsilon_j = \begin{cases} 1, & j > 0 \\ 2, & j = 0 \end{cases} \tag{A.13}$$

$$L^{(B)}_{(p,j)}(\hbar) = \Phi^{(2j+1)}_p(i\sqrt{q})^\vee + \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} M^{(B)}_{jk} \Phi^{(2k)}_p\left(i\sqrt{\widetilde{q}}\right)^\vee \tag{A.14}$$

$$L^{(C)}_{(p,j)}(\hbar) = \Phi^{(2j+1)}_p(q)^\vee + \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} M^{(C)}_{jk} \Phi^{(2k)}_p(-\widetilde{q})^\vee \tag{A.15}$$

值得注意的是，这个复苏块的结构与在此研究的第一个复苏块的结构完全相同 [14]对于权重 1/2 的假 θ 函数而言，除了权重因子（$\pi/\hbar$）$^{3/2}$而非（$\pi/\hbar$）$^{1/2}$。

当 $p = 1$时，集合 A 和 C 中的积分，除一个归一化因子外，与 $\mathbb{H}^2$ [49]上的旋量和标量对角热核中出现的积分相同。完整的超渐近级数表达式集合（A.15）见于 Watson 关于类数生成函数的研究。事实上，对偶的 q级数：

$$\Phi^{(0)}_1(q)^\vee = \frac{1}{4}\left(1 - 2q - 4q^2 - 5q^3 - \dots\right) \tag{A.16}$$

$$\Phi^{(0)}_1(q)^\vee = -4q^{-1/4}\left(q^2 + 2q^4 + 3q^6 + 3q^8 + \dots\right) \tag{A.17}$$

与类数生成函数 $\mathcal{U}(q)$ 和 $\mathcal{J}(q^2)$ 成比例，比例因子为常数，见[50]。

对于更大的奇数 p，我们发现，孪生的 q 级数 $\Phi_p^{(a)}(q)^\vee$ 与拟雅可比形式 $\mathcal{Q}_1|\mathcal{V}_2^{(1)}$，$2p$ 相关。令 $\mathcal{Q}_1|\mathcal{V}_2^{(1)}$，$2p$ 的 theta 系数为 $h_\ell(q)$ $\ell = 0, \ldots .. 2p$。例如，对于 $p = 3$，我们发现，来自 [11] 的所有 $h_\ell(q)$ 都可以用如下的 $\Phi_3^{(a)}$ 表示：

$$h_0(q) = -\frac{1}{2}(\Phi_3^{(0)}(q^{1/2})^\vee + \Phi_3^{(0)}(-q^{1/2})^\vee) \tag{A.18}$$

$$h_1(q) = -\frac{1}{2}\Phi_3^{(1)}(-iq)^\vee \tag{A.19}$$

$$h_2(q) = -\frac{1}{2}(\Phi_3^{(2)}(q^{1/2}) + \Phi_3^{(2)}(-q^{1/2})) \tag{A.20}$$

$$h_3(q) = -\frac{1}{2}\Phi_3^{(3)}(-iq)^\vee \tag{A.21}$$

$$h_4(q) = -\frac{1}{2}q^{1/2}(\Phi_3^{(2)}(q^{1/2}) - \Phi_3^{(2)}(-q^{1/2})) \tag{A.22}$$

$$h_5(q) = q\,h_1(q) \tag{A.23}$$

$$h_6(q) = -\frac{1}{2}q^{3/2}(\Phi_3^{(0)}(q^{1/2}) - \Phi_3^{(0)}(-q^{1/2})) \tag{A.24}$$

进一步研究表明，这是一种普遍现象： $\mathcal{Q}_1|\mathcal{V}_2^{(1)}$，$2p$ 的 theta 系数可以与上指标为偶数的孪生 q 级数 $\Phi_p^{(a)}(q)^\vee$ 交替对应，而上指标为奇数的 $\Phi_p^{(a)}(q)^\vee$ 则可用 q 和 $-q$ 的交替组合表示。我们已将这一结论验证至 $p = 13$，为每个 q 级数计算了约 $n = 40$ 个系数，结果与 $\mathcal{Q}_1|\mathcal{V}_2^{(1)}$，$2p$ 的 q 级数系数完全吻合。根据 [11] 的第 4 节所述，这些系数可通过对 $\mathcal{Q}_1$ 的系数取指定的线性组合来计算。

A.2 两个假 theta 函数的组合的对偶

这里我们展示如何求出$\mathcal{Q}_{p_1p_2}$的 theta 系数，它们出现在φ_m^F的分解中，见（2.9），其中 m是偶数个素数的乘积。这些是由权为q的两个假θ函数组合所构成的对偶 3/2级数。该构造远比第3节所述的方法简单，而指标为 $p = p_1p_2$ 时需要以下莫德尔-博雷尔积分向量：

$$N_{(p,j)}(\hbar) = \frac{1}{2}\left(K_{(2p_1p_2,2r_j)}(\hbar) - K_{(2p_1p_2,2\overline{r_j})}(\hbar)\right), \quad j = 1, \ldots, D \tag{A.25}$$

其中 $K_{(p,a)}(\hbar)$ 定义于（3.6）。这里，r_j 是前 $D = \frac{1}{2}(p_1 - 1)(p_2 - 1)$ 个与 p_1 互素的整数，而 p_2是小于 p 且满足 $r_j^2 \equiv {r_j}^2$ 模 $4p$的唯一整数。这些积分的构造恰好使其在 $\hbar \to \pi^2/\hbar$下满足对偶关系：

$$N_{(p,j)}(\hbar) = \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2} M_{jk}\, N_{(p,j)}(\pi^2/\hbar), \quad j = 1, \ldots, D \tag{A.26}$$

其中， M_{jk} 是混合矩阵，取决于指标 p 和r_j。继续到斯托克斯线 $\hbar < 0$，我们得到唯一的 q 级数超渐近级数分解为实部和虚部：

$$N_{(p,j)}(\hbar) = \overline{\Phi}_p^{[j]}\left(\frac{1}{q^2}\right) + i\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2}\sum_{k=1}^{D} M_{jk}\overline{\Phi}_p^{[j]}\left(\frac{1}{\widetilde{q}^2}\right) \tag{A.27}$$

其中我们使用简写记号

$$\overline{\Phi}_p^{[j]}(q) = \Phi_p^{(r_j)}(q) - \Phi_p^{(\overline{r_j})}(q) \tag{A.28}$$

矩阵 M 见式（A.27），它与 $\hbar \to \pi^2/\hbar$ 关系式（A.26）中出现的矩阵相同，实际计算中通过留数计算构造。由于这些积分具有前文所述的解析性质和复苏性质，我们可以在保持关系不变的条件下运用唯一延拓，从而得到 $\hbar > 0$的超渐近级数表达式：

$$N_{(p,j)}(\hbar) = \overline{\Phi}_p^{[j]}\left(q^2\right)^{\vee} + \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{3/2}\sum_{k=1}^{D} M_{jk}\overline{\Phi}_p^{[j]}\left(\widetilde{q}^2\right)^{\vee} \tag{A.29}$$

我们以（p_1， p_2） = (2，3)为例进行说明，其中 $D = 1$。实施数值算法后得到 q-级数展开式

$$\overline{\Phi}_6^{[1]}(q)^{\vee} = \frac{1}{3}q^{-1/12}(1 - 35q - 130q^2 - 273q^3 - 595q^4 - 1001q^5 - \dots) \tag{A.30}$$

除去整体因子 -4外，这与拟模形式$h_{(6,1)}(q)$的 q-级数展开式相符；该形式是特殊伪雅可比形式 $\mathcal{Q}_6$ 在 [11]中的（唯一）theta 系数。我们已验证一般关系

$$\overline{\Phi}_{p_1p_2}^{[j]}(q)^{\vee} = -4h_{(p_1p_2,r_j)}(q) \tag{A.31}$$

该关系对 DMZ 附录 A.1 中的所有示例 $\mathcal{Q}_{p_1p_2}$ 均成立 [11], ，其中 $h_{(p_1,p_2,r_j)}(q)$ 是特殊伪雅可比形式 $\mathcal{Q}_{p_1p_2}$的 j^{th} theta 系数。

值得注意的是，积分 $N_{(6,1)}(\hbar)$ 在其超渐近级数展开中含有 $\mathcal{Q}_6$ 的伪模系数 $h_{(6,1)}$，它可化为 [8]，第 5.5 节中的积分 $T_{-1}^{(-)}(\hbar)$，该积分是描述 $N = -1$ 扭结小手术极限的双重标度极限中的领头博雷尔积分。

参考文献

[1] Baxter, R.J., 硬六边形模型中的罗杰斯–拉马努金恒等式。《统计物理学杂志》26, 427–452 (1981).[2] George E. Andrews，硬六边形模型与罗杰斯–拉马努金型恒等式，PNAS 78 (9) 5290-5292 (1981).

[3] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy 和 E. Barouch, 《二维伊辛模型的自旋-自旋关联函数：标度区域中的精确理论》, 《物理评论B辑》13, 316-374 (1976).[4] W. P. Orrick, B. G. Nickel, A. J. Guttmann 和 J. H. H. Perk, 《二维伊辛磁化率的临界行为》, 《物理评论快报》86, 4120-4123 (2001), arXiv:cond-mat/0009059。[5] Alexander Berkovich, Barry M. McCoy, William P. Orrick, 多项式恒等式、指标与 N=1 超共形模型 SM(2,4v) 的对偶性, 1995。《统计物理学杂志》, 第 83 卷, 第 5/6 期, 1996, arXiv:hep-th/9507072。[6] Miranda C. N. Cheng, Ioana Coman, Piotr Kucharski, Davide Passaro 和 Gabriele Sgroi。《三维模性再探》。arXiv:2403.14920v3。[7] M. C. N. Cheng, S. Chun, F. Ferrari, S. Gukov 和 S. M. Harrison, 《三维模性》, 《高能物理学杂志》10, 010 (2019), arXiv:1809.10148 [hep-th].[8] Ovidiu Costin, Gerald V. Dunne, Angus Gruen 和 Sergei Gukov。《经由复苏桥走向另一侧》。arXiv:2310.12317 [hep-th].[9] D. Gaiotto, G. W. Moore 和 A. Neitzke, 《墙穿越、Hitchin系统与WKB近似》, 《数学进展》234, 239-403 (2013), arXiv:0907.3987 [hep-th].[10] D. Gaiotto, G. W. Moore 和 A. Neitzke, 《通过三维场论实现四维墙穿越》, 《数学物理通讯》299, 163-224 (2010), arXiv:0807.4723[hep-th].[11] Atish Dabholkar, Sameer Murthy 和 Don Zagier。《量子黑洞、墙穿越与拟模形式》, arXiv:1208.4074v2[12] S. Mizera, 《散射振幅的自然边界》, 《SciPost物理》14, 第5期, 101 (2023), arXiv:2210.11448 [hep-th].[13] S. Caron-Huot, M. Giroux, H. S. Hannesdottir 和 S. Mizera, 《超越散射振幅的穿越》, 《高能物理学杂志》04, 060 (2024), arXiv:2310.12199 [hep-th]..[14] Griffen Adams, Ovidiu Costin, Gerald V. Dunne, Sergei Gukov 和 O˘guz Oner。《定向反转与Chern-Simons自然边界》, 《高能物理学杂志》08 (2025) 154, arXiv:2505.14441[hep-th]..[15] Griffen Adams, Ovidiu Costin, Gerald V. Dunne, Sergei Gukov 和 O˘guz Oner。《 c_{eff} 从斯托克斯线上的复苏出发》, 《高能物理学杂志》02, 075 (2026), arXiv:2508.10112 [hep-th].[16] O. Costin, 《渐近性与Borel可求和性》（Chapman Hall）。[17] Jean ´Ecalle。《复苏函数》, I、II、III。奥赛数学出版物, 1981。[18] David Sauzin, 可复苏函数与分裂问题, RIMS讲义录, (2006), 1493, 第48-117页。[19] S. Gukov, M. Marino 和 P. Putrov, 《复Chern-Simons理论中的复苏》, arXiv:1605.07615 [hep-th].[20] S. Gukov, P. Putrov 和 C. Vafa, 《五膜与三维流形同调》, 《高能物理学杂志》07, 071 (2017), arXiv:1602.05302 [hep-th]。

[21] S. Gukov、D. Pei、P. Putrov 和 C. Vafa，《BPS谱与三维流形不变量》，J. Knot Theor. Ramifications 29，第02期，2040003（2020），arXiv:1701.06567 [hep-th]。[22] Ruth Lawrence 和 Don Zagier。《三维流形的模形式与量子不变量》，Asian J. Math. 3（1999）93–108。[23] Kazuhiro Hikami。《量子不变量、模形式与格点》，International Mathematics Research Notices，第2005卷，第3期，2005年，121–154页，arXiv:math-ph/0409016。[24] Kazuhiro Hikami。《量子不变量、模形式与格点 II》，Journal of Mathematical Physics, 47(10)，文章102301（2006）[25] J. E. Andersen 和 W. E. Misteg˚ard，《Seifert纤维同调球的量子不变量复苏分析》，J. Lond. Math. Soc. 105，第2期，709–764（2022），arXiv:1811.05376[math.DG]。[26] A. Folsom，《数论、拓扑学与数学物理中的量子Jacobi形式》，《数学科学研究》（2019）6:25。[27] Sander Zwegers。《Mock Theta函数》。博士论文，乌得勒支大学，2002年，电子版 arXiv:0807.4834。[28] Don Zagier。《Ramanujan的Mock Theta函数及其应用》 /d'apr`es Zwegers 和 Bringmann-Ono/, S´eminaire Bourbaki， $60^{`}$ eme ann´ee，2007–2008， $n^{\circ}986$，《Ast´erisque》326（2009），法国数学学会，143–164页。[29] G. N. Watson，《最终问题：关于Mock Theta函数的论述》，Journal of the London Mathematical Society，s1-11: 55–80（1936）。[30] B. Gordon 和 R. J. McIntosh。《经典 Mock Theta函数综述》。载于《分拆、q级数与模形式》，《数学发展》丛书第23卷，95–143页。Springer，2012年。[31] M. C. N. Cheng、S. Chun、B. Feigin、F. Ferrari、S. Gukov、S. M. Harrison 和 D. Passaro，《三维流形与VOA特征标》，《数学物理通讯》405，第2期，44（2024），arXiv:2201.04640 [hep-th]。[32] E. Witten，《量子力学路径积分的新视角》，Surveys in differential geometry 15，345–420（2010），arXiv:1009.6032 [hep-th]。[33] Kathrin Bringmann 和 Caner Nazaroglu，《假 theta 函数模性质的框架》，《数学科学研究》6，30（2019），arXiv:1904.05377 [math.NT][34] Hee-Joong Chung、Tudor Dimofte、Sergei Gukov 和 Piotr Sulkowski，《3d-3d对应再探》，高能物理学杂志 04（2016）140，arXiv:1405.3663 [hep-th][35] Hee-Joong Chung。《Seifert流形的BPS不变量》。高能物理学杂志 03，113（2020），arXiv:1811.08863v3。[36] Sergei Gukov 和 Ciprian Manolescu，《纽结补空间的二变量级数》，Quantum Topol. 12（2021），第1期，1–109页[37] Sergei Gukov 和 Mrunmay Jagadale c_{eff} 理论，Int. J. Mod. Phys. A 39，第33期，2446012（2024），arXiv:2308.05360 [hep-th]。

[38] S. Harichurn、M. Jagadale、D. Noshchenko 和 D. Passaro，《c_{eff} 源于手术与模性》，arXiv:2508.10087 [hep-th]。[39] M. C. N. Cheng 和 J. F. R. Duncan，《最优模拟雅可比 theta 函数》，《数学进展》372，107284（2020），arXiv:1605.04480 [math.NT]。[40] Dijkgraaf、Robbert、Verlinde、Erik 和 Verlinde、Herman，《在 N $= 4$ 弦理论中计数二电子》，《核物理B》484（1997）543–561，arXiv:hep-th/9607026。[41] A. Sen，《极端黑洞与基本弦态》，《现代物理快报A》10，2081–2094（1995），arXiv:hep-th/9504147。[42] A. Sen，《黑洞熵函数、吸引子与微观态的精确计数》，《广义相对论与引力》40，2249–2431（2008），arXiv:0708.1270 [hep-th]。[43] M. C. N. Cheng 和 E. Verlinde，《垂死的二电子不计数》，高能物理学杂志 09（2007）070，arXiv:0706.2363 [hep-th]。[44] M. Alim、B. Haghighat、M. Hecht、A. Klemm、M. Rauch 和 T. Wotschke，《多重M5膜的墙穿越全纯反常与模拟模性》，《数学物理通讯》339，第3期，773–814（2015），arXiv:1012.1608 [hep-th]。[45] M. C. N. Cheng、J. F. R. Duncan 和 J. A. Harvey，《Umbral Moonshine》，《数论物理通讯》08，101–242（2014），arXiv:1204.2779 [math.RT]。[46] M. C. N. Cheng、J. F. R. Duncan 和 J. A. Harvey，《 Umbral Moonshine 与 Niemeier 格》，《数学科学研究》 2014，1:3，arXiv:1307.5793 [math.RT][47] J. A. Harvey，《Ramanujan对弦理论、黑洞与月光的影响》，《哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》（2020）378（2163）：20180440，arXiv:1909.11477 [hep-th]。[48] S. M. Harrison、J. A. Harvey 和 N. M. Paquette，《Snowmass白皮书：月光》，arXiv:2201.13321 [hep-th]。[49] Gerald V. Dunne。《双曲空间上热核的Borel求和与解析延拓》，第10章，167–189页，Peter Suranyi纪念文集（世界科学出版社，2022），arXiv:2109.03897 [hep-th]。[50] G. N. Watson。《类数的生成函数》。《数学汇编》，第1卷（1935），39–68页。