arXiv:2603.04629v1 [math.FA] 4 Mar 2026

推广Arias-de-Reyna空间的一类新的函数空间

˘ JAN MOLDAVCUK

Abstract. 本论文研究一个重排不变准巴拿赫空间$QA_{\varphi,\ \psi}$ 的结构与性质，该空间推广了阿里亚斯-德雷纳结合傅里叶级数逐点几乎处处收敛性研究而引入的经典空间 QA 。我们给出$QA_{\varphi,\ \psi}$ 的基本性质，并探讨$QA_{\varphi,\ \psi}$ 与其他重排不变巴拿赫空间之间的关系。

1. Introduction

傅里叶分析中最基本的问题之一，是刻画 $[0,1]$ 上关于勒贝格测度 λ的全体可积函数中傅里叶级数几乎处处收敛者所构成的空间。尽管这一问题已受到一个多世纪的关注，但至今仍未解决。

柯尔莫哥洛夫的经典反例 [6] 表明，存在 L^1中的函数，其傅里叶级数几乎处处发散。另一方面，亨特 [5] 证明，对于 L^p 中满足 $p > 1$的函数，傅里叶级数几乎处处收敛。这一结果促使数学家寻找介于 L^1 与L^p之间、且几乎处处收敛成立的函数空间。

多年来，关于这个问题已经有许多研究成果。我们列举其中一些 [1, 8, 7]。1996年，安东诺夫 [1] 得出了一个重要结果，推广了其中许多成果。该结果指出，在空间 $L\log\ L\log\log\log\ L$ 中，几乎处处收敛成立。

几年后，即2002年，阿里亚斯-德雷纳 [2] 定义了一个对数凸的重排不变准巴拿赫空间 QA，使得

$$L\log\ L\log\log\log\ L \subset QA$$

该空间具有几乎处处收敛性质。这一结果提出了一个新的候选空间，迄今为止，它是几乎处处收敛成立的最大重排不变空间的最佳候选。Carro、Masty-lo 和 Rodr´ ıguez-Piazza 在论文 [4]中研究了该空间更深层的结构。

现在我们给出空间 QA的定义：

日期：2026年3月6日。2020 年数学主题分类。46E30。关键词和短语。重排不变准巴拿赫空间、洛伦兹空间、Banach 包络、基本函数。本研究得到捷克科学基金会资助项目 23-04720S 和 26-21107S 的支持。1

定义1. 我们称定义在 $[0,1]$ 上的可测函数 f 属于 QA i f

$$\|f\|_{QA} = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(1+\log n)\|f_n\|_1 \log\left(\frac{e\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}\right) : |f| \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ a.e., } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^\infty,\, f_n \ge 0\right\}$$

是有限的。

在本论文中，我们引入一个更一般的空间族，记为$QA_{\varphi,\psi}$，它以 QA 为特例。我们的目标是研究这些空间的基本结构，并理解它们与经典重排不变空间的关系，从而推广 [4]中已得到的结果。

定义2. 设 $\psi\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$与 $\varphi\colon\ [0,1] \to [0,\infty)$为仅在原点处为零的凹的非递减函数。空间$QA_{\varphi,\psi}$ 由 $[0,1]$ 上所有满足下述条件的可测函数 f 组成

$$\|f\|_{\varphi,\psi} = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty \varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right) : |f| \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ a.e., } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^\infty,\, f_n \ge 0\right\}$$

是有限的（其中按约定$0_{\,0} := 0$ ）。

首先可以观察到，取 $\varphi(t) = t\log(e/t)$、 $t \in (0,1]$ 以及 $\psi(n) = 1+\log\, n$, $n \in \mathbb{N}$ 时，我们得到$QA_{\varphi,\psi} = QA$，因此引入$QA_{\varphi,\psi}$ 可视为一种有意义的推广。由于我们所考虑的是一个广泛的函数空间类，关于对数凸性的信息会丢失，但重排不变拟巴拿赫性质仍然保持。这一观察，连同空间$QA_{\varphi,\psi}$的其他基本性质，构成我们第一个主要结果定理 1的内容。

定理 1. *(i)* $QA_{\varphi,\psi}$ 是一个重排不变拟*Banach*空间。

(ii) $L^\infty \hookrightarrow QA_{\varphi,\psi} \hookrightarrow L^1$. *(iii)* 简单函数在$QA_{\varphi,\psi}$ 中稠密。*(iv)* $QA_{\varphi,\psi} = L^\infty$ 当且仅当 $\varphi(0_+) \neq 0$。

(v) $QA_{\varphi,\psi} = L^1$ 当且仅当 $\varphi \asymp \mathrm{id}$。

(i) 和 (iii) 中的结果已在 [4] 中针对空间 QA 这一特殊情形得到证明。这里我们证明，它们在我们的广义情形下也成立。我们还证明了 (ii) 中空间 $QA_{\varphi,\psi}$的极端情形刻画，即 (iv) 和 (v)。

为了深入研究 $QA_{\varphi,\psi}$ 的结构及其与洛伦兹空间的关系，尤其是最优嵌入，我们需要对函数 φ 和 ψ的增长要求加以限制。下文中，我们假设定理 1 中的情形 (iv) 和

(v) 不会出现。我们假设存在常数 $c \in (0,1), C \in [1,\infty)$，以及 $p \in (0,1]$，使得

$$\frac{\varphi(t)}{t^c} \text{ is non-decreasing on } (0,p], \tag{1}$$

以及对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi(n^2) \le C\psi(n). \tag{2}$$

在这些假设下，我们引入函数 τ，它在刻画洛伦兹空间嵌入 $QA_{\varphi,\,\psi}$ 方面发挥核心作用。我们定义

$$\tau(t) = \begin{cases} \varphi(t)\psi\left(\overline{\log}\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)\right) & \text{if } t \in (0,1], \\ 0 & \text{if } t = 0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\overline{\log} t = 1 + \log^+ t,\ t > 0$。现在我们可以陈述第二个主要结果 .

定理 2. *(i)* 设 X 是一个基本函数为 φ_X的重排不变巴拿赫空间，使得

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{\varphi_X(t)}{\tau(t)} = 0,$$

则$QA_{\varphi,\psi}$ 不包含 X。

(ii) 若 存在 $t_0 \le 1$ 使得 τ 是 $[0,t_0]$上的非递减函数，则

$$\Lambda_{\widetilde{\tau}} \hookrightarrow QA_{\varphi,\psi},$$

其中 $\widetilde{\tau}$ 是与函数 τ等价的凹函数。

(iii) $QA_{\varphi,\psi} = \Lambda_\varphi$ *if and only if* $\psi \asymp 1$ *on* $[1,\infty)$.

本定理给出了由 τ 生成的洛伦兹空间在嵌入到 $QA_{\varphi,\psi}$ 时关于基本函数意义下的最优性。特别地，定理 2 的结果给出了一大类不包含于 $QA_{\varphi,\psi}$的重排不变巴拿赫空间。定理 2 的 (i) 与 (ii) 部分在 QA情形下的特例已在 [4], 中建立，由此得到主要结果：空间 $L\log L\log\log\log L$ 在基本函数意义下是包含于 QA的最大重排不变巴拿赫空间。作为结果 (iii) 的推论，我们得到 $\psi \asymp 1$ 在 $[1,\infty)$ 上既是空间 $QA_{\varphi,\psi}$可赋范性的必要条件，也是充分条件。此外，在第 4 节中，我们证明即使没有附加假设 (1) 和 (2)，结果 (iii) 中从右到左的蕴含仍然成立。

论文结构如下。第 2 节回顾巴拿赫函数空间理论中的一些基本定义和性质。第 3 节研究空间 $QA_{\varphi,\,\psi}$ 的内部结构。在本节中，我们给出定理 1 证明中的 (i)、(ii)、(iii) 部分，以及 (iv) 和 (v) 中蕴含关系 ($\Leftarrow$) 的证明。在第 4 节，我们观察到，空间 $QA_{\varphi,\,\psi}$ 的巴拿赫包络是洛伦兹空间 Λ_φ。根据这一观察，我们完成定理 1 其余部分的证明，即 (iv) 和 (v) 中的 ($\Rightarrow$)。我们还证明，有一大类洛伦兹空间嵌入$QA_{\varphi,\,\psi}$。第 5 节给出定理 2 的证明。我们还针对函数 φ、 ψ 的不同取值，给出空间 $QA_{\varphi,\,\psi}$ 及其相应函数 τ 的例子。

2. Preliminaries

本章回顾巴拿赫函数空间理论中的一些基本定义和结果。我们的主要参考文献是 Bennett、Sharpley [3,第 I、II 章]和 [4]。

在本文中，所有函数空间均定义在区间 $[0,1]$ 上。我们用 λ 表示 $[0,1]$, 上的勒贝格测度，用 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p = L^p([0,1],\lambda)$ 上的范数，其中 $1 \le p \le \infty$。可测函数之间的所有等式和不等式均理解为几乎处处（a.e.）成立。若 f 和 g 是实值函数，则符号 $f \asymp g$ 表示存在常数 $C, c > 0$ 使得 $Cg \le f \le cg$，也就是说， f 和 g 是等价的。

设 X 是一个实向量空间。泛函 $\|\cdot\|_X\colon X \to [0,\infty)$ 若满足以下条件，则称为拟范数:

(1) $\|x\|_X = 0$ 当且仅当 $x = 0$, (2) 对于 $a \in \mathbb{R}, x \in X$， $\|ax\|_X = |a|\|x\|_X$,
(3) 存在常数 $C \ge 1$ ，使得对于 $x, y \in X$，有 $\|x+y\|_X \le C(\|x\|_X+\|y\|_X)$。

若条件 (3) 在 $C = 1$ 下成立，则 $\|\cdot\|_X$称为范数。偶对 $(X, \|\cdot\|_X)$ 称为（拟）赋范空间。若该空间完备，则称为（拟）巴拿赫空间。

（拟）巴拿赫格 X（在 $([0,1],\lambda)$ 上）是一个（拟）巴拿赫空间 X，它是可测函数的子空间，并且满足:

(1) 存在 $u \in X$ ，使得 $u > 0$ 几乎处处,
(2) 若 $|f| \le |g|$ 几乎处处，其中 $g \in X$ 且 f 是可测函数，则 $f \in X$ 且$\|f\|_X \le \|g\|_X$。

设 f 为可测函数。函数 f 的分布函数 λ_f 由下式给出

$$\lambda_f(s) = \lambda\{x \in [0,1] : |f(x)| > s\}, \qquad s \in [0,\infty).$$

f 的递减重排是由下式定义的函数 f^*

$$f^*(t) = \inf\{s \in [0,\infty) : \lambda_f(s) \le t\}, \qquad t \in [0,\infty).$$

若对于任意 $f \in X$ 和 g ，以及满足 $\lambda_f = \lambda_g$ 的可测函数，均有 $g \in X$ 和 $\|f\|_X = \|g\|_X$，则称（拟）巴拿赫格 X 为重排不变（r.i.）（拟）巴拿赫空间 X。

重排不变（拟）巴拿赫空间的基本函数定义为 $\varphi_X(t) = \|\chi_A\|_X$，其中 A 是满足 $\lambda(A) = t$ 的可测集， $t \in [0,1]$。

若非递减函数 $\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty)$ 满足 $\varphi(0) = 0$ 且 $\varphi(t) > 0$，对所有 $t \in (0,1]$ 且 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 (0,1). 上非递增），则称其为拟凹函数。

注意，拟凹函数 φ等价于其最小凹主函数$\widetilde{\varphi}$，更准确地说， $\widetilde{\varphi} \le 2\varphi \le 2\widetilde{\varphi}$ 在 $[0,1]$ 上成立。若 $\phi\colon [0,1] \to [0,\infty)$ 不是拟凹函数，但等价于某个仅在原点处取零的凹非递减函数， $\widetilde{\ }$则将此函数记为 ϕ。

设 φ：$[0,1] \to [0,\infty)$ 是一个仅在原点处取零的凹非递减函数。洛伦兹空间 Λ_φ 由所有满足下述条件的可测函数 f 组成：

$$\|f\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^1 f^*(s)\mathrm{d}\varphi(s) < \infty.$$

由于 φ 非负、单调不减且为凹函数，因此上文定义中的黎曼–斯蒂尔切斯积分可以改写为

$$\|f\|_{\Lambda_\varphi} = \|f\|_\infty \varphi(0_+) + \int_0^1 f^*(s)\varphi'(s)\mathrm{d}s.$$

洛伦兹空间是一个重排不变巴拿赫空间，其基本函数等于 φ。

设 X 和 Y 为（拟）赋范空间。若 X 且从 X 到 Y 的自然包含映射是连续的，则称 Y 嵌入于 $X \subset Y$，也就是说，存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|x\|_Y \le C\|x\|_X\,, \qquad x \in X.$$

记作 $X \hookrightarrow Y$。若 $X \hookrightarrow Y$ 和 $Y \hookrightarrow X$ 均成立，则记作 $X = Y$。

注意，若 φ：$[0,1] \to [0,\infty)$ 是一个凹的、非递减函数，且仅在原点处取零，则

$$L^\infty \hookrightarrow \Lambda_\varphi \hookrightarrow L^1.$$

我们还提到，任意一个由 $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$ 构成、其 A_j 为两两不交集且满足 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ 的简单函数，都可以改写为以下形式

$$s = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{B_k}, \tag{4}$$

其中 b_k 为正且 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n$，更准确地说，$b_k = a_k - a_{k+1}$ 满足$a_{n+1} = 0$ 且 $B_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$。于是

$$\|s\|_{\Lambda_\varphi} = \sum_{k=1}^n b_k \varphi(\lambda(B_k)).$$

3. Basic Properties

除非另有说明，我们假设函数 φ 和 ψ 满足定义2中给出的条件。

在 [2] 和 [4], 中，空间 QA 使用了不同的定义。以下引理给出了空间 $QA_{\varphi,\psi}$ 的一个等价定义；由此我们可以看出，文献中使用的空间 QA 的两种定义是等价的。本文中，我们将交替使用空间 $QA_{\varphi,\psi}$ 的这两种定义，而不再特别说明。

引理 3. 设 f 为可测函数。则

$$\|f\|_{\varphi,\psi} = \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \psi(n)\|f_n\|_\infty \varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right) : f = \sum_{n=1}^\infty f_n \ \ a.e., \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty\right\}.$$

证明. 记

$$A_f = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right) : f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n \text{ a.e.}, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^\infty\right\}.$$

我们通过证明$\|f\|_{\varphi,\psi}=A_f$、$\|f\|_{\varphi,\psi}\le A_f$ 和 $A_f\le\|f\|_{\varphi,\psi}$ 来完成证明。我们先从$\|f\|_{\varphi,\psi}\le A_f$ 开始。若 $A_f=\infty$，则无需证明。设 f 是一个可测函数，满足 $A_f<\infty$。令 $\varepsilon>0$，我们选取 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^\infty$ 使得 $f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 且

$$A_f\le\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)<A_f+\varepsilon.$$

设 $g_n=|f_n|$，则 $|f|=|\sum_{n=1}^{\infty}f_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}g_n$、$g_n\ge0$ 且

$$\|f\|_{\varphi,\psi}\le\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|g_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|g_n\|_1}{\|g_n\|_\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)<A_f+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，即可得到该不等式。

另一方面，我们将证明 $A_f\le\|f\|_{\varphi,\psi}$。不妨设 $f\in QA_{\varphi,\psi}$，否则无需证明。给定 $\varepsilon>0$，我们选取 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^\infty$, $f_n\ge0$ ，使得 $|f|\le\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 且

$$\|f\|_{\varphi,\psi}\le\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)<\|f\|_{\varphi,\psi}+\varepsilon.$$

由 φ 的凹性可知，$^{\varphi}{}_{(t)}\ t$ 在 $(0,1]$, 上单调不增。因此，$x\varphi\left(\frac{a}{x}\right)$ 在 $[a,\infty$ 上单调不减。我们可以假设 $|f|=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$，因为对于给定的 $g,h\in L^\infty, 0\le g\le h$，$x\varphi(\frac{\|g\|_1}{x})$ 在 $[\|g\|_1,\infty)$ 上单调不减，因此

$$\|g\|_\infty\varphi\left(\frac{\|g\|_1}{\|g\|_\infty}\right)\le\|h\|_\infty\varphi\left(\frac{\|g\|_1}{\|h\|_\infty}\right)\le\|h\|_\infty\varphi\left(\frac{\|h\|_1}{\|h\|_\infty}\right). \tag{5}$$

Then

$$|f|=\sum_{n=1}^{\infty}f_n=\sum_{n=1}^{\infty}(f_n|_{\{f\ge0\}}+f_n|_{\{f<0\}})=\sum_{n=1}^{\infty}f_n|_{\{f\ge0\}}+\sum_{n=1}^{\infty}f_n|_{\{f<0\}}=f^+ + f^-.$$

因此

$$f=f^+-f^-=\sum_{n=1}^{\infty}f_n|_{\{f\ge0\}}-\sum_{n=1}^{\infty}f_n|_{\{f<0\}}=\sum_{n=1}^{\infty}(f_n|_{\{f\ge0\}}-f_n|_{\{f<0\}}).$$

定义 $g_n=(f_n|_{\{f\ge0\}}-f_n|_{\{f<0\}})$，则 $g_n\in L^\infty$, $f=\sum_{n=1}^{\infty}g_n$ 和 $|g_n|=f_n$，因为 $f_n\ge0$。我们得到

$$A_f\le\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|g_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|g_n\|_1}{\|g_n\|_\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)<\|f\|_{\varphi,\psi}+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，即可得到所需的不等式。 □

命题 4. $QA_{\varphi,\psi}$ 是一个拟巴拿赫格。

证明。显然，$\|f\|_{\varphi,\psi} \geq 0$对于 $f \in QA_{\varphi,\psi}$成立；若 $f = 0$，则通过对所有 $n \in \mathbb{N}$选取 $f_n \equiv 0$，可得$\|f\|_{\varphi,\psi} = 0$。若$\|f\|_{\varphi,\psi} = 0$，则对于给定的 $\varepsilon > 0$，我们可以找到 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$, $f_n \geq 0$使得 $|f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$并且

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\|f_n\|_{\infty}\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_{\infty}}\right) < \varepsilon.$$

应用 单调收敛定理，并利用 φ的凹性，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\varphi(1)\psi(1)} &> \frac{1}{\varphi(1)\psi(1)}\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_{\infty}\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_{\infty}}\right) \geq \frac{1}{\varphi(1)}\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_{\infty}\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_{\infty}}\right)\\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_{\infty}\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_{\infty}} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_1 \geq \|f\|_1 \geq 0.\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，我们得出 $\|f\|_1 = 0$，这意味着 $f = 0$。

等式$\|af\|_{\varphi,\ \psi} = |a|\|f\|_{\varphi,\ \psi}$直接由定义得出 .

假设 $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$， $f_i \in QA_{\varphi,\ \psi}$， $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。给定 $\varepsilon > 0$，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，若 $n \in \mathbb{N}$，或若 $i \in \mathbb{N}$ $n = \infty$，我们都可以找到 $\{f_{i,j}\}_{j=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$，使得 $|f_i| \leq \sum_{j=1}^{\infty} f_{i,\ j}$， $f_{i,\ j} \geq 0$，并且

$$\|f_i\|_{\varphi,\psi} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\psi(j)\|f_{i,j}\|_{\infty}\varphi\left(\frac{\|f_{i,j}\|_1}{\|f_{i,j}\|_{\infty}}\right) < \begin{cases}\|f_i\|_{\varphi,\psi} + \frac{\varepsilon}{2^{2i-n}(2^n-1)} & \text{if } n \in \mathbb{N},\\ \|f_i\|_{\varphi,\psi} + \frac{\varepsilon}{2^{2i}} & \text{if } n = \infty.\end{cases}$$

于是$|f| \leq \sum_{i=1}^{n}|f_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} f_{i,\ j}$，因此

$$\|f\|_{\varphi,\psi} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\psi(\sigma(i,j))\|f_{i,j}\|_{\infty}\varphi\left(\frac{\|f_{i,j}\|_1}{\|f_{i,j}\|_{\infty}}\right),$$

其中

$$\sigma : \begin{cases}\{1, \ldots, n\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \text{if } n \in \mathbb{N},\\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \text{if } n = \infty,\end{cases}$$

是一个双射。我们可以取平移后的配对函数

$$\sigma(i,j) = \begin{cases}2^{i-1}(2j-1) & \text{if } i < n,\\ 2^{i-1}j & \text{if } i = n.\end{cases}$$

由凹函数 ψ 的次可加性可得

$$\psi(\sigma(i,j)) \leq \psi(2^{i-1}(2j-1)) \leq 2^{i-1}\psi(2j-1) \leq 2^{i-1}\psi(2j) \leq 2^i\psi(j).$$

因此

$$\begin{aligned}\|f\|_{\varphi,\psi} &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\psi(\sigma(i,j))\|f_{i,j}\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_{i,j}\|_1}{\|f_{i,j}\|_\infty}\right)\\ &\le \sum_{i=1}^{n}2^i\sum_{j=1}^{\infty}\psi(j)\|f_{i,j}\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_{i,j}\|_1}{\|f_{i,j}\|_\infty}\right)\\ &< \sum_{i=1}^{n}2^i\|f_i\|_{\varphi,\psi}+\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，对于 $n=2$，我们得到拟三角不等式

$$\|f_1+f_2\|_{\varphi,\psi}\le 4(\|f_1\|_{\varphi,\psi}+\|f_2\|_{\varphi,\psi}),\qquad f_1,f_2\in QA_{\varphi,\psi}. \tag{6}$$

设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset QA_{\varphi,\psi}$ 是 $QA_{\varphi,\psi}$ 中的一个柯西序列。我们选取一个子序列$\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$，使得 $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_{\varphi,\psi}\le 4^{-k}$ 对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均成立。然后，由于上述不等式适用于 $n=\infty$，我们有

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})\right\|_{\varphi,\psi}\le\sum_{k=1}^{\infty}2^k\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_{\varphi,\psi}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty.$$

因此，$f_{n_j}=\sum_{k=1}^{j-1}(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})+f_{n_1}$ 在 $QA_{\varphi,\psi}$ 中收敛，这意味着 f_n在 $QA_{\varphi,\psi}$ 中收敛，因此 $QA_{\varphi,\psi}$ 是一个完备空间。

第一个格条件显然成立，因为 $L^\infty\subset QA_{\varphi,\psi}$。设 $g\in QA_{\varphi,\psi}$，且 f 是一个满足 $|f|\le|g|$ 的可测函数。取 $\{g_n\}_{n=1}^\infty\subset L^\infty$、$g_n\ge 0$，使得 $|f|\le|g|\le\sum_{n=1}^\infty g_n$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|g_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|g_n\|_1}{\|g_n\|_\infty}\right)<\infty.$$

那么显然 $f\in QA_{\varphi,\ \psi}$ 且 $\|f\|_{\varphi,\ \psi}\le\|g\|_{\varphi,\ \psi}$，这证明了格性质。 □

下面利用命题 4 证明定理 1 的大部分内容，具体而言是 (i)、(ii)、(iii)，以及 (iv) 和 (v) 中的一个蕴含关系（⇐）。定理 1 其余部分的证明将在第 4 节给出。

定理 *1* 第一部分的证明。(ii) 设 $f\in L^\infty$，则显然

$$\|f\|_{\varphi,\psi}\le\psi(1)\|f\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty}\right)\le\varphi(1)\psi(1)\|f\|_\infty, \tag{7}$$

这证明了 $L^\infty\hookrightarrow QA_{\varphi,\ \psi}$。

令 $f\in QA_{\varphi,\ \psi}$ 和 $\varepsilon>0$。我们找到 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset L^\infty$，$f_n\ge 0$，使得 $|f|\le\sum_{n=1}^\infty f_n$并且

$$\|f\|_{\varphi,\psi}\le\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)<\|f\|_{\varphi,\psi}+\varepsilon.$$

应用单调收敛定理并利用 φ的凹性，我们得到

$$\|f\|_{\varphi,\psi}+\varepsilon>\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)\geq\psi(1)\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_\infty\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\varphi(1)$$
$$=\varphi(1)\psi(1)\left\|\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right\|_1\geq\varphi(1)\psi(1)\|f\|_1.$$

由于 ε 是任意的，我们得到所需的连续包含

$$\|f\|_1\leq\frac{1}{\varphi(1)\psi(1)}\|f\|_{\varphi,\psi},\qquad f\in QA_{\varphi,\psi}.\tag{8}$$

(i) $QA_{\varphi,\psi}$ 是拟巴拿赫格这一事实已在命题 4中得到证明。设$f\in QA_{\varphi,\psi}$ 且 g 是满足 $\lambda_f=\lambda_g$的可测函数。根据Calder´on定理 [3, III.定理 2.11] ，存在线性算子 $T:L^1\to L^1$ ，使得$T|_{L^\infty}:\ L^\infty\to L^\infty$,

$$\|T\|_{L^1\to L^1}=\sup\{\|Tx\|_1:\|x\|_1\leq1\}\leq1,$$
$$\|T\|_{L^\infty\to L^\infty}=\sup\{\|Tx\|_\infty:\|x\|_\infty\leq1\}\leq1$$

且 $g=Tf$。

设 $\varepsilon>0$，我们找到 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得 $f=\sum_{n=1}^\infty f_n$ 且

$$\|f\|_{\varphi,\psi}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)<\|f\|_{\varphi,\psi}+\varepsilon.$$

则对于 $k\in\mathbb{N}$ 和 $Tf_n\in L^\infty$， $T(\sum_{n=1}^k f_n)=\sum_{n=1}^k Tf_n$。与 (5) 类似，由于 $x\varphi\left(\frac{\|Tf_n\|_1}{x}\right)$ 是 $[\|Tf_n\|_1,\infty)$ 上的非递减函数，对每个 $n\in\mathbb{N}$ 均成立，并利用不等式 $\|Tf_n\|_1\leq\|Tf_n\|_\infty\leq\|f_n\|_\infty$ 和 $\|Tf_n\|_1\leq\|f_n\|_1$，我们得到

$$\|Tf_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|Tf_n\|_1}{\|Tf_n\|_\infty}\right)\leq\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right).$$

因此

$$\left\|\sum_{n=k+1}^{\infty}Tf_n\right\|_{\varphi,\psi}\leq\sum_{n=k+1}^{\infty}\psi(n)\|Tf_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|Tf_n\|_1}{\|Tf_n\|_\infty}\right)$$
$$\leq\sum_{n=k+1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)\to0,$$

and

$$\left\|f-\sum_{n=1}^{k}f_n\right\|_{\varphi,\psi}\leq\sum_{n=k+1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)\to0.$$

由此，根据（8）并结合上述不等式，

$$\begin{aligned}\left\|g-\sum_{n=1}^{\infty}Tf_n\right\|_1 &\le \left\|Tf-\sum_{n=1}^{k}Tf_n\right\|_1+\left\|\sum_{n=k+1}^{\infty}Tf_n\right\|_1\\ &\le \left\|f-\sum_{n=1}^{k}f_n\right\|_1+\left\|\sum_{n=k+1}^{\infty}Tf_n\right\|_1\\ &\le \frac{1}{\varphi(1)\psi(1)}\left(\left\|f-\sum_{n=1}^{k}f_n\right\|_{\varphi,\psi}+\left\|\sum_{n=k+1}^{\infty}Tf_n\right\|_{\varphi,\psi}\right)\to 0.\end{aligned}$$

因此 $g=\sum_{n=1}^{\infty}Tf_n$，我们得出结论

$$\begin{aligned}\|g\|_{\varphi,\psi} &\le \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|Tf_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|Tf_n\|_1}{\|Tf_n\|_\infty}\right)\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)<\|f\|_{\varphi,\psi}+\varepsilon.\end{aligned}$$

由此得到 $g\in QA_{\varphi,\ \psi}$，且由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们得到

$$\|g\|_{\varphi,\psi}\le\|f\|_{\varphi,\psi}.$$

反向应用 Calder´on 定理（对函数 g），得到

$$\|f\|_{\varphi,\psi}=\|g\|_{\varphi,\psi},$$

这表明 $QA_{\varphi,\ \psi}$ 是一个重排不变拟Banach空间。

(iii) 设 $f\in QA_{\varphi,\ \psi}$。我们选取 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^\infty$ 使得 $f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right)<\infty.$$

我们定义 $g_n=\sum_{j=1}^{n}f_j\in L^\infty$。则

$$\|f-g_n\|_{\varphi,\psi}\le\sum_{j=n+1}^{\infty}\psi(j)\|f_j\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_j\|_1}{\|f_j\|_\infty}\right)\to 0.$$

设 $\varepsilon>0$，我们找到 $n_0\in\mathbb{N}$，使得 $\|f-g_{n_0}\|_{\varphi,\psi}<\varepsilon$。由于简单函数集在 L^∞ 中稠密，我们找到一个简单函数 s，使得 $\|g_{n_0}-s\|_\infty<\varepsilon$。则由 (6) 和 (7),

$$\|f-s\|_{\varphi,\psi}\le 4(\|f-g_{n_0}\|_{\varphi,\psi}+\varphi(1)\psi(1)\|g_{n_0}-s\|_\infty)<4(1+\varphi(1)\psi(1))\varepsilon.$$

因此简单函数集在$QA_{\varphi,\psi}$中稠密。

(iv) ($\Leftarrow$) 只需证明 $QA_{\varphi,\psi}\hookrightarrow L^\infty$。由于 $\varphi(0_+)\ne 0$，我们在 $\varphi\asymp 1$ 上有 $0,1]$,，因此可以假设

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & \text{if } t\in(0,1],\\ 0 & \text{if } t=0.\end{cases}$$

令 $f \in QA_{\varphi,\psi}$，我们选取 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$ 使得 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\|f_n\|_{\infty} < \infty.$$

Then

$$\|f\|_{\infty} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{\psi(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\|f_n\|_{\infty},$$

因此，对两边取下确界，得到 $QA_{\varphi,\ \psi} \hookrightarrow L^{\infty}$。

(v) ($\Leftarrow$) 我们可以假设 $\varphi(t) = t, t \in [0,1]$。首先，我们将证明 $\|\cdot\|_{\varphi,\ \psi}$ 是一个范数。设 f, $g \in QA_{\varphi,\ \psi}$，且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$, f_n, $g_n \geq 0$，使得 $|f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 且 $|g| \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_n$。那么 $|f+g| \leq |f| + |g| \leq \sum_{n=1}^{\infty}(f_n + g_n)$，因此

$$\|f+g\|_{\varphi,\psi} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\|f_n + g_n\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\|f_n\|_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\|g_n\|_1.$$

由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是任意的，我们得到 $\|\cdot\|_{\varphi,\ \psi}$ 是一个范数。

设 $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ 是 $[0,1]$, 上的一个简单函数，其中集合 A_j 两两不相交。于是

$$\|s\|_{\varphi,\psi} \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i\chi_{A_i}\|_{\varphi,\psi} \leq \sum_{i=1}^{n} \psi(1)\|a_i\chi_{A_i}\|_1 = \psi(1)\|s\|_1.$$

由 (iii) 可知，简单函数集在$QA_{\varphi,\ \psi}$中稠密，因此对于所有 $\varepsilon > 0$ 和 $f \in QA_{\varphi,\ \psi}$，我们都可以找到一个简单函数 s，使得 $\|f-s\|_{\varphi,\ \psi} < \varepsilon$。于是由 (8) 也有$\psi(1)\|f-s\|_1 < \varepsilon$，因此由 (8) 和三角不等式

$$\psi(1)\|f\|_1 \leq \|f\|_{\varphi,\psi} \leq \|s\|_{\varphi,\psi} + \varepsilon \leq \psi(1)\|s\|_1 + \varepsilon \leq \psi(1)\|f\|_1 + 2\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，我们得到

$$\psi(1)\|f\|_1 \leq \|f\|_{\varphi,\psi} \leq \psi(1)\|f\|_1, \qquad f \in QA_{\varphi,\psi}.$$

由于简单函数集在 L^1 中稠密，且是 $QA_{\varphi,\ \psi}$ 的子集，因此 $QA_{\varphi,\ \psi}$ 在 L^1 中稠密。令 $f \in L^1$，则由稠密性可得 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset QA_{\varphi,\ \psi}$，使得 $f_n \to f$ 属于 L^1。于是 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 L^1 中的柯西序列，并且由上述不等式可知，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是$QA_{\varphi,\ \psi}$中的柯西序列。根据命题 4，$QA_{\varphi,\ \psi}$ 是一个拟巴拿赫格，因此 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $QA_{\varphi,\ \psi}$ 中收敛，记其极限为 $g \in QA_{\varphi,\ \psi}$。于是由 (8) 和三角不等式，

$$\|f-g\|_1 \leq \|f-f_n\|_1 + \frac{1}{\psi(1)}\|f_n - g\|_{\varphi,\psi} \to 0,$$

因此 $f = g$ 这就证明了 $QA_{\varphi,\ \psi} = L^1$。 □

4. Embeddings between the Lorentz spaces and $QA_{\varphi,\ \psi}$

本节将介绍洛伦兹空间与空间$QA_{\varphi,\ \psi}$之间的联系。由此，我们完成定理 1 证明的其余部分。我们先讨论空间$QA_{\varphi,\ \psi}$ 嵌入其中的洛伦兹空间。

定理5. 成立：$QA_{\varphi,\ \psi} \hookrightarrow \Lambda_\varphi$ 其范数小于或等于 $\overset{1}{\psi}{}_{1()}$。 ——

证明。 以下事实已在 [4, 命题 2.2] 中证明：若 $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ 是一个非递减凹函数，且 $\varphi(0) = 0$，则对于所有满足 $f \neq 0$ 的 $f \in L^\infty$ ，有

$$\|f\|_{\Lambda_\varphi} \le \|f\|_\infty \varphi\left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty}\right). \tag{9}$$

设 $f \in QA_{\varphi,\ \psi}$ 和 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty$ 满足 $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$。则

$$\|f\|_{\Lambda_\varphi} \le \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_{\Lambda_\varphi} \le \frac{1}{\psi(1)} \sum_{n=1}^\infty \psi(n)\|f_n\|_\infty \varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right).$$

证明完毕。 □

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个对偶空间能够分离点的拟赋范空间，则 X 上的麦基范数 $\|\cdot\|^c$ 定义为

$$\|x\|^c = \inf\{\alpha > 0 :\ x \in \alpha\,\mathrm{conv}(B_X)\}, \qquad x \in X,$$

其中，conv (B_X) 是单位球的凸包。$(X, \|\cdot\|^c)$ 的完备化记为 $\widehat{X}$，称为 X 的巴拿赫包络。我们将证明，空间 $QA_{\varphi,\psi}$ 的巴拿赫包络等于洛伦兹空间 Λ_φ。

定理 6. 我们有等式

$$\widehat{QA_{\varphi,\psi}} = \Lambda_\varphi.$$

证明. 由于 $QA_{\varphi,\psi} \hookrightarrow \Lambda_\varphi$，且 Λ_φ 的对偶能够分离点，因此 $QA_{\varphi,\psi}$ 的对偶也能够分离点。上述连续包含给出

$$\|f\|_{\Lambda_\varphi} \le \frac{1}{\psi(1)}\|f\|^c_{\varphi,\psi}, \qquad f \in QA_{\varphi,\psi}. \tag{10}$$

我们断言反向不等式也成立。对于任意一个具有形式 (4) 的简单函数 $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$，有

$$\begin{aligned}\|s\|^c_{\varphi,\psi} &\le \sum_{j=1}^n a_j \|\chi_{A_j}\|^c_{\varphi,\psi} \le \sum_{j=1}^n a_j \|\chi_{A_j}\|_{\varphi,\psi} \le \sum_{j=1}^n a_j \psi(1)\|\chi_{A_j}\|_\infty \varphi\left(\frac{\|\chi_{A_j}\|_1}{\|\chi_{A_j}\|_\infty}\right)\\ &= \psi(1)\sum_{j=1}^n a_j \varphi(\lambda(A_j)) = \psi(1)\|s\|_{\Lambda_\varphi}.\end{aligned}$$

根据定理 1(iii) 以及 $\|\cdot\|^c_{\varphi,\psi} \le \|\cdot\|_{\varphi,\psi}$，简单函数的集合在 $(QA_{\varphi,\psi}, \|\cdot\|^c_{\varphi,\psi})$ 中稠密，因此对所有 $\varepsilon > 0$ 和 $f \in QA_{\varphi,\psi}$，我们可以找到一个简单函数 s，使得 $\|f - s\|^c_{\varphi,\psi} < \varepsilon$。于是由 (10) 亦有 $\psi(1)\|f - s\|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon$，从而由 (10)

以及三角不等式

$$\frac{1}{\psi(1)}\|f\|^c_{\varphi,\psi} \le \frac{1}{\psi(1)}\|s\|^c_{\varphi,\psi} + \frac{\varepsilon}{\psi(1)} \le \|s\|_{\Lambda_\varphi} + \frac{\varepsilon}{\psi(1)} \le \|f\|_{\Lambda_\varphi} + \frac{2\varepsilon}{\psi(1)}.$$

由于 ε 是任意的，我们得到所需的不等式，因此

$$\|f\|^c_{\varphi,\psi} = \psi(1)\|f\|_{\Lambda_\varphi}, \qquad f \in QA_{\varphi,\psi}.$$

简单函数集在 Λ_φ 中稠密（见 [3, II.定理 5.5]）。由于简单函数集是 $QA_{\varphi,\,\psi}$, $QA_{\varphi,\,\psi}$ 的子集，故在 Λ_φ 中稠密。因此， Λ_φ =(Λ_φ, $\psi(1)\|\cdot\|_{\Lambda_\varphi}$) 是 ($QA_{\varphi,\,\psi}$, $\|\cdot\|^c_{\varphi,\,\psi}$) 的所需完备化。□

作为定理 6 的推论，我们便得到定理 1 证明的其余部分，即 (iv) 和 (v) 中的 (⇒)。

定理 *1* 的证明，第二部分。 (iv) (⇒) 令 $QA_{\varphi,\,\psi} = L^\infty$，则由定理 6 得 $\Lambda_\varphi = L^\infty$。因此

$$\varphi(t) = \varphi_{\Lambda_\varphi}(t) \asymp \varphi_{L^\infty}(t) = 1, \qquad t \in (0,1],$$

因此 $\varphi(0_+) \neq 0$。

(v) (⇒) 与上一部分类似，利用定理 6，我们得到 $\varphi(t) \asymp t, t \in (0,1]$. □

从现在起，我们假设 $\varphi(0_+) = 0$ 且 $\varphi \not\asymp \mathrm{id}$。因此我们得到， φ 在 $[0,1]$, $\varphi'_+(0) = \infty$ 上连续，并且存在零点的一个邻域，在该邻域内 φ 严格凹。在下一个命题中，我们构造一族嵌入空间 $QA_{\varphi\text{中的洛伦兹空间},\,\psi}$。

命题7。 对于每个序列 $s = \{s_n\}_{n=1}^\infty \in (0,1]^{\mathbb{N}}$,

$$\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}} \hookrightarrow QA_{\varphi,\psi},$$

其中 φ_s 是定义在 $[0,1]$ 上的拟凹函数，定义如下

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \max\{s_n, t\} \dfrac{\varphi(s_n)}{s_n} \psi(n) \right\} & \text{if } t \in (0,1], \\ 0 & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

证明。 显然 φ_s 是 $[0,1]$上的拟凹函数。我们观察到，若 $f \in L^\infty$ 连同$f \neq 0$ 与 $n \in \mathbb{N}$，则 φ 的凹性蕴含

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty \varphi\left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty}\right) &= \|f\|_\infty \max\left\{1, \frac{\|f\|_1}{s_n\|f\|_\infty}\right\} \min\left\{1, \frac{s_n\|f\|_\infty}{\|f\|_1}\right\} \varphi\left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty}\right) \\ &\le \|f\|_\infty \max\left\{1, \frac{\|f\|_1}{s_n\|f\|_\infty}\right\} \varphi\left(\min\left\{1, \frac{s_n\|f\|_\infty}{\|f\|_1}\right\} \frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty}\right) \\ &\le \|f\|_\infty \max\left\{1, \frac{\|f\|_1}{s_n\|f\|_\infty}\right\} \varphi(s_n) \\ &= \max\{s_n\|f\|_\infty, \|f\|_1\} \frac{\varphi(s_n)}{s_n}. \end{aligned}$$

注意到，对所有 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$，成立

$$\max\{a+b, c+d\} \le \max\{a, c\} + \max\{b, d\}.$$

因此，对于形如 (4) 的每个简单函数 $h = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i} \in L^\infty$，我们有

$$\begin{aligned}
\|h\|_{\varphi,\psi} \le \psi(1)\|h\|_\infty \varphi\left(\frac{\|h\|_1}{\|h\|_\infty}\right) &\le \psi(1)\max\{s_n\|h\|_\infty, \|h\|_1\}\frac{\varphi(s_n)}{s_n} \\
&\le \max\left\{ s_n \sum_{i=1}^{m} \|a_i\chi_{A_i}\|_\infty, \sum_{i=1}^{m} \|a_i\chi_{A_i}\|_1 \right\} \frac{\varphi(s_n)}{s_n}\psi(n) \\
&\le \sum_{i=1}^{m} \max\{s_n\|a_i\chi_{A_i}\|_\infty, \|a_i\chi_{A_i}\|_1\}\frac{\varphi(s_n)}{s_n}\psi(n) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i \max\{s_n, \lambda(A_i)\}\frac{\varphi(s_n)}{s_n}\psi(n).
\end{aligned}$$

因此

$$\|h\|_{\varphi,\psi} \le \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_s(\lambda(A_i)) \le \sum_{i=1}^{m} a_i \widetilde{\varphi_s}(\lambda(A_i)) = \|h\|_{\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}}.$$

设 $f \in \Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}$。由于简单函数集在 $\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}$ 中稠密（见 [3, II.定理5.5]），我们可找到一列简单函数 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$，使得 $f_j \to f$ 属于 $\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}$。那么 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}$ 中的柯西序列，并且由上述不等式，$\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 也是 $QA_{\varphi,\,\psi}$ 中的柯西序列。根据命题 4，$QA_{\varphi,\,\psi}$ 是一个拟巴拿赫格，因此 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $QA_{\varphi,\,\psi}$ 中收敛，记其极限为 $g \in QA_{\varphi,\,\psi}$。那么根据 $\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}} \hookrightarrow L^1$，其范数不大于 $K > 0$，并且由 (8)，

$$\|f-g\|_1 \le K\|f-f_j\|_{\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}} + \frac{1}{\varphi(1)\psi(1)}\|f_j - g\|_{\varphi,\psi} \to 0,$$

因此 $f = g$。然后由 (6) 可得

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\varphi,\psi} &\le 4\|f-f_j\|_{\varphi,\psi} + 4\|f_j\|_{\varphi,\psi} \le 4\|f-f_j\|_{\varphi,\psi} + 4\|f_j\|_{\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}} \\
&\le 4\|f-f_j\|_{\varphi,\psi} + 4\|f_j - f\|_{\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}} + 4\|f\|_{\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}}.
\end{aligned}$$

对两边取极限，即得所需的连续包含。 □

由于借助下确界对 φ_s 进行隐式定义，前一个命题在应用中并不容易使用。下面的命题表明，在序列 s满足某些条件时，函数 φ_s 等价于函数 α_s，后者可以明确表示为一个涉及 φ 和 ψ的乘积。

命题8。设 $s:\ [1,\infty) \to (0,1]$ 是一个递减函数，满足

(i) 极限$_{x\to\infty}{}^{s}$（x）$= 0$，*(ii)* 极限$_{x\to\infty}{}^{\varphi}$（$s$（$x$））$\psi$（$x$）$= 0$，*(iii)* 存在 $x_0 \ge 1$，使得 （$\varphi \circ s$）ψ 是 $[x_0, \infty)$ 上的非增函数，

(iv) 存在常数 $C>0$，使得 $\varphi(s(n+1))\le C\varphi(s(n))$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。则 $\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}}=\Lambda_{\widetilde{\alpha_s}}$，其中

$$\alpha_s(t)=\begin{cases}\varphi(t)\psi(s^{-1}(t)) & if\ t\in(0,1],\\ 0 & if\ t=0.\end{cases}$$

证明。对所有 $n\in\mathbb{N}$，记 $s_n=s(n)$。于是 $s_n\searrow 0$，且 $\lim_{n\to\infty}\varphi(s_n)\psi(n)=0$。对所有$t\in[s_{k+1},s_k)$，$k\ge 1$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_s(t)&=\inf_{n\ge1}\max\{s_n,t\}\frac{\varphi(s_n)}{s_n}\psi(n)\\&=\min\left\{\inf_{1\le n\le k}\max\{s_n,t\}\frac{\varphi(s_n)}{s_n}\psi(n),\inf_{n>k}\max\{s_n,t\}\frac{\varphi(s_n)}{s_n}\psi(n)\right\}\\&=\min\left\{\inf_{1\le n\le k}s_n\frac{\varphi(s_n)}{s_n}\psi(n),\inf_{n>k}t\frac{\varphi(s_n)}{s_n}\psi(n)\right\}\\&=\min\left\{\inf_{1\le n\le k}\varphi(s_n)\psi(n),t\frac{\varphi(s_{k+1})}{s_{k+1}}\psi(k+1)\right\}.\end{aligned}$$

由于 $\lim_{x\to\infty}\varphi(s(x))\psi(x)=0$，且 $(\varphi\circ s)\psi$ 是 $[x_0,\infty)$上的非增函数，因此存在 $m_0\in\mathbb{N}$、$m_0\ge x_0$，使得 $\{\varphi(s_m)\psi(m)\}_{m=m_0}^{\infty}$ 是非增的，并且对所有 $m\ge m_0$，$\varphi(s_m)\psi(m)\le\inf_{1\le n<m_0}\varphi(s_n)\psi(n)$。我们找到 $C_1>0$，使得对所有$m<m_0$，都有

$$\inf_{1\le n\le m}\varphi(s_n)\psi(n)\le\varphi(s_m)\psi(m)\le C_1\inf_{1\le n\le m}\varphi(s_n)\psi(n).$$

那么，要么 $k\ge m_0$，此时 $\inf_{1\le n\le k}\varphi(s_n)\psi(n)=\varphi(s_k)\psi(k)$；要么 $k<m_0$，根据上述不等式，$\inf_{1\le n\le k}\varphi(s_n)\psi(n)\asymp\varphi(s_k)\psi(k)$。因此

$$\begin{aligned}\varphi_s(t)&=\min\left\{\inf_{1\le n\le k}\varphi(s_n)\psi(n),t\frac{\varphi(s_{k+1})}{s_{k+1}}\psi(k+1)\right\}\\&\asymp\min\left\{\varphi(s_k)\psi(k),t\frac{\varphi(s_{k+1})}{s_{k+1}}\psi(k+1)\right\}\\&=\min\left\{s_k\frac{\varphi(s_k)}{s_k}\psi(k),t\frac{\varphi(s_{k+1})}{s_{k+1}}\psi(k+1)\right\}.\end{aligned}$$

由 ψ 的次可加性，我们有

$$\begin{aligned}\min\left\{s_k\frac{\varphi(s_k)}{s_k}\psi(k),t\frac{\varphi(s_{k+1})}{s_{k+1}}\psi(k+1)\right\}&\le t\frac{\varphi(s_{k+1})}{s_{k+1}}\psi(k+1)\le Ct\frac{\varphi(s_k)}{s_k}\psi(2k)\\&\le 2Ct\frac{\varphi(s_k)}{s_k}\psi(k),\end{aligned}$$

and

$$\min\left\{s_k\frac{\varphi(s_k)}{s_k}\psi(k),t\frac{\varphi(s_{k+1})}{s_{k+1}}\psi(k+1)\right\}\ge t\frac{\varphi(s_k)}{s_k}\psi(k).$$

因此

$$\varphi_s(t) \asymp t\frac{\varphi(s_k)}{s_k}\psi(k) \asymp t\frac{\varphi(t)}{t}\psi(k) \asymp \varphi(t)\psi(s^{-1}(t)).$$

□

推论1. 若 $\psi \asymp 1$ 在 $[1,\infty)$上，则$QA_{\varphi,\ \psi} = \Lambda_\varphi$。

证明. 不失一般性，我们可以假设 $\psi \equiv 1$ 在 $[1,\infty)$上。取$s(x) = \frac{1}{x}$， $x \in [1,\infty)$。则$\lim_{x\to\infty} s(x) = \lim_{x\to\infty} \varphi(s(x)) = 0$， $\varphi \circ s$是 $[1,\infty)$上的非增函数，且对所有 $n \in \mathbb{N}$，成立

$$\frac{\varphi(s(n+1))}{s(n+1)} = (n+1)\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \le 2n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = 2\frac{\varphi(s(n))}{s(n)}.$$

由命题8，我们得到 $\Lambda_{\widetilde{\varphi_s}} = \Lambda_\varphi$。因此，结合定理5与命题7，我们得到所求等式。□

5. Comparison to rearrangement-invariant Banach spaces

在本节中，我们假设(1)和(2)成立。为完整起见，我们重述这些假设。假设存在常数 $c \in (0,1), C \in [1,\infty)$以及 $p \in (0,1]$，使得

$$\frac{\varphi(t)}{t^c} \text{ is non-decreasing on } (0,p],$$

且对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi(n^2) \le C\psi(n).$$

命题 9. 对于每个 $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 2$，都存在一个由 $[0,1]$ 中两两不交的可测集组成的序列 $\{A_j\}_{j=1}^{2N}$，使得对于满足 $a_j = \frac{1}{2N\varphi(\lambda(A_j))}$ 的 $f = \sum_{j=1}^{2N} a_j\chi_{A_j}$，有

$$\|f\|_{\varphi,\psi} \ge \frac{2^c-1}{8}\psi(N).$$

证明. 定义 $\gamma(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$, $t \in (0,1]$。由 φ 的凹性可知， γ 是一个非增函数，满足 $\gamma(0_+) = \varphi'_+(0) = \infty$。我们可以找到 $\mu_1 \in (0, \frac{p}{2}]$，使得 φ 在 $(0,\mu_1]$上严格凹。于是 γ 在 $(0,\mu_1]$上递减，特别地， γ 可逆。显然，对于$x \ge 1$,

$$\gamma\left(\frac{1}{x}\right) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \le x\varphi(1) \le x\gamma(\mu_1),$$

因此

$$1 \ge x\gamma^{-1}(x\gamma(\mu_1)).$$

因此，对于 $1 \le x_1 < x_2$，我们有

$$\begin{aligned} x_2\gamma(\mu_1) &= \frac{x_2}{x_1}\gamma(\gamma^{-1}(x_1\gamma(\mu_1))) = \frac{\varphi(\gamma^{-1}(x_1\gamma(\mu_1)))}{\frac{x_1}{x_2}\gamma^{-1}(x_1\gamma(\mu_1)))} \ge \frac{\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\gamma^{-1}(x_1\gamma(\mu_1))\right)}{\frac{x_1}{x_2}\gamma^{-1}(x_1\gamma(\mu_1)))} \\ &= \gamma\left(\frac{x_1}{x_2}\gamma^{-1}(x_1\gamma(\mu_1))\right), \end{aligned}$$

从而

$$x_2\gamma^{-1}(x_2\gamma(\mu_1)) \le x_1\gamma^{-1}(x_1\gamma(\mu_1)),$$

因此， $x\gamma^{-1}(x\gamma(\mu_1))$ 在 $[1,\infty$ 上是非递增的，从而对于 $x \in [1,\infty)$， $x\gamma^{-1}(x\gamma(\mu_1))$ $\le p$。令 $N \in \mathbb{N}$、 $N \ge 2$，并定义如下正序列 $\{\mu_j\}_{j=1}^{2N}$：

$$\mu_{j+1} = \gamma^{-1}\left(\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}\gamma(\mu_j)\right). \tag{11}$$

注意，序列 $\{\mu_j\}_{j=1}^{2N}$ 定义良好，因为 $N^3\psi(N) \ge 2\psi(1)$，因此

$$\gamma(\mu_{j+1}) = \left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}\gamma(\mu_j) \ge 2\gamma(\mu_j) = \frac{\varphi(\mu_j)}{\frac{\mu_j}{2}} \ge \frac{\varphi\left(\frac{\mu_j}{2}\right)}{\frac{\mu_j}{2}} = \gamma\left(\frac{\mu_j}{2}\right).$$

Thus

$$\begin{aligned} \mu_{j+1} &\le \frac{\mu_j}{2}, \\ \mu_1 &\le \frac{p}{2} \le \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

我们定义

$$a_j = \frac{1}{2N\varphi(\mu_j)}, \qquad 1 \le j \le 2N.$$

利用（12），我们可以找到 $[0,1]$ 中可测的两两不交集 A_1，……， A_{2N}，使得对于所有 $1 \le j \le 2N$，$\lambda(A_j) = \mu_j$。我们证明 $f = \sum_{j=1}^{2N} a_j\chi_{A_j}$ 就是所需的函数。令 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$， $f_n \ge 0$ 满足 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$，那么只需证明

$$\frac{2^c-1}{8}\psi(N) \le \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_{\infty}\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_{\infty}}\right).$$

现在，令 $g_N = \sum_{n=N}^{\infty} f_n$。由于根据定理5有 $g_N \in \Lambda_{\varphi}$，因此分为两种情况。情况1： $\|g_N\|_{\Lambda_{\varphi}} \ge \frac{2^c-1}{8}$，则由（9）可得，

$$\frac{2^c-1}{8}\psi(N) \le \psi(N)\|g_N\|_{\Lambda_{\varphi}} \le \sum_{n=N}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_{\Lambda_{\varphi}} \le \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_{\infty}\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_{\infty}}\right).$$

情况2： $\|g_N\|_{\Lambda_{\varphi}} < \frac{2^c-1}{8}$，那么对于 $1 \le j \le 2N$ 和 $1 \le l \le N-1$，我们定义集合

$$B_{j,l} = \left\{x \in A_j : f_l(x) > \frac{a_j}{2N}\right\}$$

and

$$B_{j,N} = \left\{x \in A_j : g_N(x) > \frac{a_j}{2}\right\}.$$

那么 $A_j = \bigcup_{l=1}^{N} B_{j,\ l}$，因为

$$A_j \supset \bigcup_{l=1}^{N} B_{j,l} = \left\{ x \in A_j : f_1(x) > \frac{a_j}{2N} \vee \cdots \vee f_{N-1}(x) > \frac{a_j}{2N} \vee g_N(x) > \frac{a_j}{2} \right\}$$
$$\supset \left\{ x \in A_j : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) > \frac{2N-1}{2N} a_j \right\} = \left\{ x \in A_j : \sum_{j=1}^{2N} a_j \chi_{A_j}(x) > \frac{2N-1}{2N} a_j \right\}$$
$$= A_j.$$

令 J为满足 $\lambda(B_{j,N}) \geq \frac{\mu_j}{2}$ 的 j 的集合。对于所有 $j \in J$，选取 $B_j \subset B_{j,N}$，使得 $\lambda(B_j) = \frac{\mu_j}{2}$。设 $g = \sum_{j\in J} \frac{a_j}{2} \chi_{B_j}$。于是，由于 $a_{j+1} \geq a_j$，若$J = \{j_k\}_{k=1}^{s}$，则 $j_1 < \cdots < j_s$，

$$g^*(t) = \sum_{l=1}^{s} \frac{a_{j_l}}{2} \chi_{[h_{j_l}, h_{j_l} + \frac{\mu_{j_l}}{2})}(t),$$

其中 $h_{j_l} = h_{j_{l+1}} + \frac{\mu_{j_{l+1}}}{2}$且 $h_{j_s} = 0$。由 (12) 得，

$$h_{j_l} = \frac{\mu_{j_{l+1}}}{2} + \cdots + \frac{\mu_{j_s}}{2} \leq \frac{\mu_{j_l}}{4} + \frac{\mu_{j_l}}{8} + \cdots + \frac{\mu_{j_l}}{2^{s-l}} \leq \frac{\mu_{j_l}}{2}.$$

由于对于所有 $0 < h \leq t \leq \frac{p}{4}$，由 φ 的凹性及 (1)，

$$\varphi(t+h) - \varphi(h) = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(h)}{t} t \geq \frac{\varphi(2t) - \varphi(t)}{t} t = (2t)^c \frac{\varphi(2t)}{(2t)^c} - \varphi(t) \geq (2^c - 1)\varphi(t),$$

我们得到

$$\|g\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^1 g^*(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \sum_{l=1}^{s} \frac{a_{j_l}}{2} \left(\varphi\left(h_{j_l} + \frac{\mu_{j_l}}{2} \right) - \varphi(h_{j_l}) \right)$$
$$\geq \sum_{l=1}^{s} \frac{a_{j_l}}{2} (2^c - 1) \varphi\left(\frac{\mu_{j_l}}{2} \right) \geq \sum_{l=1}^{s} \frac{2^c - 1}{4} a_{j_l} \varphi(\mu_{j_l}) = \frac{s}{N} \frac{2^c - 1}{8}.$$

由此，根据 $g_N \geq g$，我们得到

$$\frac{2^c - 1}{8} > \|g_N\|_{\Lambda_\varphi} \geq \|g\|_{\Lambda_\varphi} \geq \frac{s}{N} \frac{2^c - 1}{8},$$

从而 $s < N$。

另一方面，若 $j \in \{1, \ldots, 2N\} \setminus J$，则 $\lambda(\bigcup_{l=1}^{N-1} B_{j,l}) > \frac{\mu_j}{2}$，因此存在 $l = l(j)$，使得 $\lambda(B_{j,l}) > \frac{\mu_j}{2N}$。由于 $\{1, \ldots, 2N\} \setminus J$的基数大于 N，且仅有 $N-1$ l' 个，故存在 $j, k \in \{1, \ldots, 2N\} \setminus J$,$j < k$，它们对应同一个 $l = l(j) = l(k)$，并且

$$\lambda(B_{j,l}) > \frac{\mu_j}{2N}, \qquad \lambda(B_{k,l}) > \frac{\mu_k}{2N}.$$

Then

$$f_l \geq f_l \chi_{B_{j,l}} + f_l \chi_{B_{k,l}} > \frac{a_j}{2N} \chi_{B_{j,l}} + \frac{a_k}{2N} \chi_{B_{k,l}}.$$

因此，由 (5) 及 φ 的凹性,

$$\begin{aligned}\|f_l\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_l\|_1}{\|f_l\|_\infty}\right) &\geq \frac{a_k}{2N}\varphi\left(\frac{\frac{a_j\lambda(B_{j,l})+a_k\lambda(B_{k,l})}{2N}}{\frac{a_k}{2N}}\right) \geq \frac{1}{4N^2\varphi(\mu_k)}\varphi\left(\frac{a_j\frac{\mu_j}{2N}+a_k\frac{\mu_k}{2N}}{\frac{1}{2N\varphi(\mu_k)}}\right)\\ &= \frac{1}{4N^2\varphi(\mu_k)}\varphi\left(\frac{\frac{\varphi(\mu_k)}{\varphi(\mu_j)}\mu_j+\mu_k}{2N}\right) \geq \frac{1}{8N^3\varphi(\mu_k)}\varphi\left(\frac{\varphi(\mu_k)}{\varphi(\mu_j)}\mu_j\right)\\ &\geq \frac{2^c-1}{8N^3}\frac{\mu_j}{\varphi(\mu_j)}\gamma\left(\frac{\varphi(\mu_k)}{\varphi(\mu_j)}\mu_j\right) \geq \frac{2^c-1}{8N^3}\frac{\mu_j}{\varphi(\mu_j)}\gamma\left(\frac{\varphi(\mu_{j+1})}{\varphi(\mu_j)}\mu_j\right).\end{aligned}$$

由于 $x\gamma^{-1}(x\gamma(\mu_1)) \leq p$，并且 $x\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1)) \leq p$，对于 $x\in[1,\infty)$，由 (1) 我们得到,

$$\frac{\varphi(x\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1)))}{(x\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1)))^c} \geq \frac{\varphi(\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1)))}{(\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1)))^c},$$

因此

$$\varphi(x\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1))) \geq x^c\varphi(\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1))),$$

从而

$$\gamma(x\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1))) \geq x^{c-1}\gamma(\gamma^{-1}(x^j\gamma(\mu_1))) = x^{c+j-1}\gamma(\mu_1),$$

由此推出

$$x\gamma_c^{-1}(x^j\gamma(\mu_1))) \leq \gamma^{-1}(x^{c+j-1}\gamma(\mu_1)).$$

通过选取 $x=\left(N^3\frac{\psi_{(N)}}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}$ 并利用 (11)，我们得到

$$\begin{aligned}\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}\gamma^{-1}\left(\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{j}{c}}\gamma(\mu_1))\right) &\leq \gamma^{-1}\left(\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{1+\frac{j-1}{c}}\gamma(\mu_1)\right),\\ \left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}\gamma^{-1}\left(\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{j-1}{c}}\gamma(\mu_2)\right) &\leq \gamma^{-1}\left(\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{1+\frac{j-2}{c}}\gamma(\mu_2)\right),\\ &\vdots\\ \left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}\gamma^{-1}\left(\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}\gamma(\mu_j)\right) &\leq \gamma^{-1}\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\gamma(\mu_j)\right),\\ \left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}\mu_{j+1} &\leq \gamma^{-1}\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\gamma(\mu_j)\right),\\ \gamma\left(\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)^{\frac{1}{c}}\mu_{j+1}\right) &\geq N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\gamma(\mu_j),\\ \gamma\left(\frac{\varphi(\mu_{j+1})}{\gamma(\mu_j)}\right) &\geq N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\gamma(\mu_j).\end{aligned}$$

因此

$$\|f_l\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_l\|_1}{\|f_l\|_\infty}\right) \geq \frac{2^c-1}{8N^3}\frac{\mu_j}{\varphi(\mu_j)}\gamma\left(\frac{\varphi(\mu_{j+1})}{\varphi(\mu_j)}\mu_j\right) \geq \frac{2^c-1}{8}\frac{\psi(N)}{\psi(1)},$$

因此

$$\frac{2^c-1}{8}\psi(N)\le\psi(1)\|f_l\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_l\|_1}{\|f_l\|_\infty}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\|f_n\|_\infty\varphi\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty}\right).$$

□

命题 10。 设 X 是一个重排不变巴拿赫空间，使得 $X\hookrightarrow QA_{\varphi,\psi}$ 的范数小于或等于 K。令 $\{\omega_N(X)\}_{N=1}^{\infty}$ 为由 $\omega_N(X)=\sup_{1\le j\le 2N}\frac{\varphi_X(\mu_j)}{\varphi(\mu_j)}$ 定义的序列，其中 $\{\mu_j\}_{j=1}^{2N}$ 的定义与式 (11) 中的类似，但 μ_1 小于或等于式 *(11)* 中相应的值。则

$$\inf_{N\ge 2}\frac{\omega_N(X)}{\psi(N)}\ge\frac{2^c-1}{8K}.$$

证明。 设 $f=\sum_{j=1}^{2N}a_j\chi_{A_j}$ 为在命题 9 的证明中构造的函数。由于 f 是一个简单函数， f 属于 X。由命题 9 可知，对所有 $N\in\mathbb{N}, N\ge 2$,

$$\begin{aligned}\frac{2^c-1}{8}\psi(N)&\le\left\|\sum_{j=1}^{2N}a_j\chi_{A_j}\right\|_{\varphi,\psi}\le K\left\|\sum_{j=1}^{2N}a_j\chi_{A_j}\right\|_X\le K\sum_{j=1}^{2N}a_j\|\chi_{A_j}\|_X\\&=K\sum_{j=1}^{2N}\frac{\|\chi_{A_j}\|_X}{2N\varphi(\mu_j)}=\frac{K}{2N}\sum_{j=1}^{2N}\frac{\varphi_X(\mu_j)}{\varphi(\mu_j)}\le K\omega_N(X),\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

现在我们回顾函数 τ 的定义。定义

$$\tau(t)=\begin{cases}\varphi(t)\psi\left(\overline{\log}\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)\right) & \text{if } t\in(0,1],\\ 0 & \text{if } t=0,\end{cases}$$

其中 $\overline{\log}\,t=1+\log^+ t, t>0$。利用前面的命题，我们现在可以证明第二个主要结果——定理 2。

定理 *2* 的证明。(i) 定义 $\gamma(t)=\varphi(t)\,t$, $t\in(0,1]$。对所有 $t\in[0,1]$，记 $\varphi_X(t)=\varphi(t)\phi(t)$，其中

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\phi(t)}{\psi(\overline{\log}\,\gamma(t))}=0.$$

给定 $\varepsilon>0$，我们可以找到 $\delta>0$，使得对于所有 $t\in(0,\delta]$，都有 $\phi(t)<\varepsilon\psi(\log\gamma(t))$。取 $N\in\mathbb{N}$、$N\ge 2$ 以及在命题 9 的证明中构造的序列 $\{\mu_j\}_{j=1}^{2N}$，其中 $\mu_1\le\delta$。于是我们有

$$\phi(\mu_j)<\varepsilon\psi(\overline{\log}\,\gamma(\mu_j)),\quad 1\le j\le 2N.$$

根据 μ_j 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\log}\,\gamma(\mu_j) &\le \frac{1}{c}\overline{\log}\left(N^3\frac{\psi(N)}{\psi(1)}\right)+\overline{\log}\,\gamma(\mu_{j-1}) \le \frac{4}{c}\overline{\log}\,N+\overline{\log}\,\gamma(\mu_{j-1})\\ &\le\cdots\le \frac{4(j-1)}{c}\overline{\log}\,N+\overline{\log}\,\gamma(\delta)\le \frac{8N}{c}\overline{\log}\,N+\overline{\log}\,\gamma(\delta)\le N^2\end{aligned}$$

当 N 足够大时。因此，利用 (2)，

$$\phi(\mu_j)<\varepsilon\psi(\overline{\log}\,\gamma(\mu_j))\le\varepsilon\psi(N^2)\le C\varepsilon\psi(N).$$

由此可得

$$\omega_N(X)=\sup_{1\le j\le 2N}\frac{\varphi_X(\mu_j)}{\varphi(\mu_j)}=\sup_{1\le j\le 2N}\phi(\mu_j)\le C\varepsilon\psi(N).$$

Thus

$$\inf_{N\ge 2}\frac{\omega_N(X)}{\psi(N)}\le C\varepsilon.$$

因此，命题 10 表明 $QA_{\varphi,\,\psi}$ 不包含 X。

(ii) 令 γ 和 μ_1 与命题 9 的证明中相同。由于 $\gamma(0_+)=\infty$，我们可找到 $\delta\in(0,\min\{t_0,\mu_1\}]$，使得对于 $t\in(0,\delta]$，有 $\gamma(t)\ge 1$。令 $s(x)=\gamma^{-1}(e^{x-1})$，则 s 是定义在 $[\log\,\gamma(\delta)\ \infty)$ 上的递减函数。只需证明 s 满足命题 8 关于 $[\log\,\gamma(\delta)\ \infty)$ 的条件，因为这样一来，$\tau=\alpha_s\asymp\varphi_s$ 在 $[0,\delta]$ 上成立，进而 $\tau\asymp\varphi_s$ 在 $[0,1]$ 上成立。

显然，$\lim_{x\to\infty}s(x)=0$ 且 $\tau\circ s=(\varphi\circ s)\psi$ 在 $[\log\,\gamma(\delta)\ \infty)$ 上是非增函数。根据 γ的定义，在 $[\gamma(\delta)\ \infty)$ 上有，

$$\gamma\left(\frac{\varphi(1)}{x}\right)\le\frac{x}{\varphi(1)}\varphi\left(\frac{\varphi(1)}{x}\right)\le x,$$

因此

$$\frac{\varphi(1)}{x}\ge\gamma^{-1}(x).$$

由于 $\varphi(1)e^{1-x}(x+1)^{\frac{1}{c}}\to 0$，对于 $x\to\infty$，我们可以找到 $x_0\ge\log\,\gamma(\delta)$，使得 $\varphi(1)e^{1-x}(x+1)^{\frac{1}{c}}\le p$，对所有 $x\ge x_0$均成立。因此，根据 ψ 的次可加性和式 (1)，对于 $x\ge x_0$，有

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma^{-1}(e^{x-1}))\psi(x)&\le\varphi(\varphi(1)e^{1-x})\psi([x]+1)\le\varphi(\varphi(1)e^{1-x})([x]+1)\psi(1)\\ &\le\varphi(\varphi(1)e^{1-x})((x+1)^{\frac{1}{c}})^c\psi(1)\\ &\le\varphi(\varphi(1)e^{1-x}(x+1)^{\frac{1}{c}})\psi(1)\to 0,\end{aligned}$$

其中，$[x]$ 是取整函数。因此，$\lim_{x\to\infty}\varphi(s(x))\psi(x)=0$。显然，对于 $n\in\mathbb{N}$，$n\ge\overline{\log}\,\gamma(\delta)$，

$$\frac{\varphi(s(n+1))}{s(n+1)}=\gamma(\gamma^{-1}(e^n))=ee^{n-1}=e\gamma(\gamma^{-1}(e^{n-1}))=e\frac{\varphi(s(n))}{s(n)},$$

证明至此完成。

(iii) 其中一个蕴含关系由推论1得出。设 $QA_{\varphi,\psi} = \Lambda_{\varphi}$。则由定理 2(i)，我们得到

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{1}{\psi\left(\overline{\log}\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)\right)} \neq 0.$$

由于

$$\lim_{t\to 0_+} \overline{\log}\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right) = \infty,$$

我们有 $\psi \asymp 1$ 在 $[1,\infty)$。 □

我们通过给出函数 τ 在 φ和 ψ的各种取值下的例子，来结束这篇论文。

例1。 对于 $\alpha \in (0,1]$ 和 β， $\gamma \in [0,1]$，定义

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{\alpha}\left(\overline{\log}\,\frac{1}{t}\right)^{\beta} & \text{if } t \in (0, \min\{1, e^{1-\frac{\beta}{\alpha}}\}], \\ e^{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } t \in (\min\{1, e^{1-\frac{\beta}{\alpha}}\}, 1], \\ 0 & \text{if } t = 0, \end{cases}$$

and

$$\psi(t) = \begin{cases} (\overline{\log}\, t)^{\gamma} & \text{if } t \in [1,\infty), \\ t & \text{if } t \in [0,1). \end{cases}$$

我们回顾一下，选择 $\alpha = \beta = \gamma = 1$ 对应于阿里亚斯-德雷纳空间 QA。选择 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 0$ 得到空间 L^1，因此我们在此不予考虑。于是，在区间 $[0,1]$, 上，我们有

$$\tau(t) \asymp \begin{cases} t^{\alpha}\left(\overline{\log}\,\frac{1}{t}\right)^{\beta}\left(\overline{\log}\,\overline{\log}\,\frac{1}{t}\right)^{\gamma} & \text{if } \alpha < 1, \\ t\left(\overline{\log}\,\frac{1}{t}\right)^{\beta}\left(\overline{\log}\,\overline{\log}\,\overline{\log}\,\frac{1}{t}\right)^{\gamma} & \text{if } \alpha = 1,\ \beta \neq 0. \end{cases}$$

Acknowledgments

作者谨感谢 Lenka Slav´ıkov´a 提出的许多宝贵意见和建议。

References

[1] N. Yu. Antonov。傅里叶级数的收敛性。载于第二十届函数论研讨会论文集（莫斯科，*1995*），第2卷，第187–196页，1996年。[2] J. Arias-de Reyna。傅里叶级数的逐点收敛。伦敦数学学会期刊（*2*），65(1)：139–153，2002年。[3] 科林·贝内特和罗伯特·夏普利。算子插值，纯粹与应用数学第129卷。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1988年。[4] M. J. Carro、M. Masty-l o和L. Rodr´ ıguez-Piazza。几乎处处收敛的傅里叶级数。傅里叶分析与应用杂志，18(2)：266–286，2012年。[5] 理查德·A·亨特。论傅里叶级数的收敛性。载于正交展开及其连续类比（会议论文集，爱德华兹维尔，伊利诺伊州，*1967*），第235–255页。南伊利诺伊大学出版社，卡本代尔，伊利诺伊州，1968年。

[6] Andrey Kolmogoroff。几乎处处发散的傅里叶–勒贝格级数。*Fundamenta Mathematicae*，4(1)：324–328，1923年。[7] Per Sj¨olin。Paley不等式与Walsh–傅里叶级数几乎处处收敛。*Ark. Mat.*，7：551–570，1969年。[8] Fernando Soria。论Carleson–Sj¨olin的一个外推定理及其在傅里叶级数几乎处处收敛中的应用。*Studia Math.*，94(3)：235–244，1989年。

Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic电子邮箱地址：jan.moldavcuk486@student.cuni.cz