一种用于图像处理应用的单元平均非分离渐进式多元加权本质无振荡（WENO）方法

Inmaculada Garcés[a]、Pep Mulet[a]、Juan Ruiz-Álvarez[b]、Chi-Wang Shu[c]、Dionisio F. Yáñez[a]

[a]瓦伦西亚大学数学系，数学学院，西班牙瓦伦西亚[b]卡塔赫纳理工大学应用数学与统计系，西班牙卡塔赫纳[c]美国罗得岛州普罗维登斯布朗大学应用数学系

arXiv:2603.04633v1 [math.NA] 4 Mar 2026

摘要

精确高效的重构技术对于多分辨率分析和图像压缩至关重要，尤其是在数据以单元平均值形式表示时。本文提出一种专为单元平均值数据设计的非分离渐进式多元加权本质无振荡（WENO）格式，并将其用于数字图像处理。该方法通过一种适用于单元平均值情形的非线性 WENO 重构，扩展了 Harten 多分辨率框架。与经典 WENO 格式不同，即使最大模板受到间断影响，渐进策略仍可递归地恢复高阶精度。该方法在光滑区域具有高阶精度，同时在间断附近保持稳定、无振荡的特性。我们还给出了关于该方法相容性和逼近性质的理论结果。最后，本文展示了针对分段光滑函数和数字图像开展的若干数值实验，以说明该方法的性能，并验证其相较于同阶线性拉格朗日重构的有效性。

关键词：WENO，非线性重构，精度阶，高精度插值

1. 引言。二维单元平均设置下的哈滕多分辨率

近年来，若干非线性技术，例如最初为双曲型偏微分方程（PDE）的数值近似而开发的加权本质无振荡（WENO）算法 [10], ，通过增强方法的特定性质得到了改进。这些改进包括更好的间断检测、单调性分析以及更高的精度阶。此外，WENO方法已扩展至更高维设置。

特别是， [16], 中提出了一种新的渐进式 WENO 格式，可在任意点进行插值，这与只能在中点进行插值的经典WENO方法不同。此外，随着求值点远离间断，这种渐进式方法能够达到越来越高的精度。该方法的核心思想是使用艾特肯–内维尔方法（见 [9]）在每个阶段计算最优权重（见 [2]），然后通过递归算法将其替换为非线性权重。

为验证该方法的性质，研究人员开展了若干学术测试，所用示例中的数据被视为未知函数在一系列节点处的取值。本文旨在将这些思路拓展至数字图像压缩领域。为此，我们将数据视为函数的单元平均值。具体而言，设 $f\colon \Omega = [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ 是一个可积的未知函数，即 $f \in L^1(\Omega)$，并设 $h_\ell = 1/2^\ell$。那么，我们的数据为

$$\bar{f}^\ell_{i,j} = \frac{1}{|\Omega^\ell_{i,j}|}\int_{\Omega^\ell_{i,j}} f(x,y)dxdy, \qquad i,j = 1,\dots,2^\ell,$$

*第一、第二、第五和第六作者获得了由西班牙科学与创新部/西班牙国家研究署/10.13039/501100011033 资助的项目 PID2023-146836NB-I00 的支持。第四作者获得了美国国家科学基金会项目 DMS-2309249 的支持。电子邮箱地址：Inmaculada.Garces@uv.es（Inmaculada Garcés）、pep.mulet@uv.es（Pep Mulet）、juan.ruiz@upct.es（Juan Ruiz-Álvarez）、chi-wang_shu@brown.edu（Chi-Wang Shu）、dionisio.yanez@uv.es（Dionisio F. Yáñez）

其中 $\Omega_{i,\ j}^{\ell}=[(i-1)h_\ell,ih_\ell]\times[(j-1)h_\ell,jh_\ell]$ 且 $|\Omega_{i,\ j}^{\ell}|=h_\ell^2$。为此，我们采用近年来已应用于工业领域的 Harten 多分辨率（MR）[11]，（例如，参见 [6]）。多分辨率框架通过对可用数据进行重构和离散化的算子，建立相邻两个分辨率层级 $\ell-1$ 和 ℓ 之间的关系。具体而言，从层级 $\ell-1$ 的数据出发，我们使用重构算子对这些值进行插值

$$\mathcal{R}_{\ell-1}:\mathbb{R}^{2^{\ell-1}\times 2^{\ell-1}}\to L^1(\Omega),$$

例如，可以采用分段多项式拉格朗日插值器 [11]，

$$(\mathcal{R}_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1})(x,y)=\mathcal{I}(x,y;\bar{f}^{\ell-1}),$$

其中 $\bar{f}^{\ell-1}=\{\bar{f}_{i,j}^{\ell-1}\}_{i,\ j=1}^{2^{\ell-1}}$ 表示第 $\ell-1$ 层的单元平均数据。或者，也可以使用针对单元平均值情形调整的非线性插值技术，例如渐进式 WENO 方法 [16]。

通过施加以下条件构造插值函数 $\mathcal{I}$：

$$|\Omega_{i,j}^{\ell-1}|^{-1}\int_{\Omega_{i,j}^{\ell-1}}\mathcal{I}(x,y;\bar{f}^{\ell-1})dxdy=|\Omega_{i,j}^{\ell-1}|^{-1}\bar{f}_{i,j}^{\ell-1}=|\Omega_{i,j}^{\ell-1}|^{-1}\int_{\Omega_{i,j}^{\ell-1}}f(x,y)dxdy,\quad i,j=1,\dots,2^{\ell-1},$$

最后，我们计算　　通过离散化重构函数 $\mathcal{I}$，得到数值 $\bar{f}^{\ell}$ 的近似，因此

$$\tilde{f}_{i,j}^{\ell}=(\mathcal{D}_\ell(\mathcal{R}_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1}))_{i,j}:=|\Omega_{i,j}^{\ell}|^{-1}\int_{\Omega_{i,j}^{\ell}}\mathcal{I}(x,y;\bar{f}^{\ell-1})dxdy,\quad i,j=1,\dots,2^{\ell}.$$

总而言之，我们有两个算子：抽取和预测，它们由前文介绍的两个算子复合构造而成：

$$\mathcal{D}_\ell^{\ell-1}\bar{f}^{\ell}=\mathcal{D}_{\ell-1}\mathcal{R}_\ell\bar{f}^{\ell},\quad \mathcal{P}_{\ell-1}^{\ell}\bar{f}^{\ell-1}=\mathcal{D}_\ell\mathcal{R}_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1},$$

在此特定情况下作为离散化算子：

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_\ell^{\ell-1}\bar{f}^{\ell})_{i,j}&=h_{\ell-1}^{-2}\int_{\Omega_{i,j}^{\ell-1}}\mathcal{I}(x,y,\bar{f}^{\ell})d(x,y)=\frac{1}{4}\sum_{k_1,k_2=-1}^{0}h_\ell^{-2}\int_{\Omega_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell}}\mathcal{I}(x,y,\bar{f}^{\ell})d(x,y)\\&=\frac{1}{4}\sum_{k_1,k_2=-1}^{0}\bar{f}_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell},\end{aligned}$$

由积分的线性性得到的表达式，以及

$$\Omega_{i,j}^{\ell-1}=\bigcup_{k_1,k_2=-1}^{0}\Omega_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell}.$$

还需注意，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{k_1,k_2=-1}^{0}\tilde{f}_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell}&=\frac{1}{4}\sum_{k_1,k_2=-1}^{0}h_\ell^{-2}\int_{\Omega_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell}}\mathcal{I}(x,y,\bar{f}^{\ell-1})d(x,y)=h_{\ell-1}^{-2}\int_{\Omega_{i,j}^{\ell-1}}\mathcal{I}(x,y,\bar{f}^{\ell-1})d(x,y)\\&=\bar{f}_{i,j}^{\ell-1},\end{aligned}$$

那么，若将误差记为 $e^\ell=\bar{f}^\ell-\tilde{f}^\ell$，则得到

$$(\mathcal{D}_\ell^{\ell-1}e^{\ell})_{i,j}=\frac{1}{4}\sum_{k_1,k_2=-1}^{0}e_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell}=\frac{1}{4}\sum_{k_1,k_2=-1}^{0}\bar{f}_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell}-\frac{1}{4}\sum_{k_1,k_2=-1}^{0}\tilde{f}_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell}=0.$$

因此，若我们写作 $d_1^{\ell-1}=\{e_{2i-1,2j-1}^{\ell}\}_{i=1}^{2^{\ell-1}}$，$d_2^{\ell-1}=\{e_{2i,2j-1}^{\ell}\}_{i=1}^{2^{\ell-1}}$，$d_3^{\ell-1}=\{e_{2i-1,2j}^{\ell}\}_{i=1}^{2^{\ell-1}}$，则可得到以下双射：

$$\bar{f}^{\ell}\equiv\{\bar{f}^{\ell-1},d_1^{\ell-1},d_2^{\ell-1},d_3^{\ell-1}\}.$$

重复这一过程数次后，我们便得到矩阵 $\bar{f}^{\ell}$ 的多分辨率表示。

由于离散化算子取决于应用的性质——即图像处理——多分辨率框架中的主要目标是设计合适的重构算子。传统上，人们使用分段线性插值来实现这一目的，将其作为重构算子 $\mathcal{R}_{\ell}$ （例如，参见 [11]）。然而，这种线性方法在间断附近容易产生吉布斯现象，从而显著降低重构质量。为了解决这一问题，过去几十年间人们提出了各种非线性策略。其中，本质无振荡（ENO）方法 [11, 12, 13, 19] 或加权本质无振荡（WENO）方法 [3, 10, 17] 是避免间断附近伪振荡的开创性技术。

在 ENO 方法的基础上，人们开发了 WENO 技术，通过组合多个插值模板并自适应地计算权重 [3, 10, 17]，以提高精度和稳健性。这些非线性方法已被证明能够有效保留间断附近的尖锐特征，同时在光滑区域保持高阶精度。与经典 WENO 格式不同，经典 WENO 格式在最大模板受到间断污染时有效阶数可能降低，而渐进策略会递归地扩大模板，使这种情况下也能恢复高阶精度。

在本文中，我们提出一种方法，使最初为点值数据框架开发的插值格式能够适用于单元平均值情形。在此表述的基础上，我们融入上述加权本质无振荡策略，以便将多分辨率框架应用于数字图像压缩问题。

本文结构如下：第 2 节旨在建立点值离散与单元平均值之间的联系，从而为这类数据提出一种新的渐进式方法。此外，如果所构造的算子满足某些条件，我们还将证明其在单元平均值情形下的一些性质。第 3 节回顾笛卡尔网格上的线性方法和经典WENO方法。下一节中，我们介绍二维（以及类似的多维）新渐进式方法，并说明如何通过递归算法获得插值器。第 5 节明确给出一个阶数为 $r = 3$ 的示例，以说明该算法和方法的简洁性；对于任意 r，情况完全类似。第 6 节展示函数单元平均值以及数字图像压缩的一些数值实验。最后一节给出若干结论并展望未来工作。

2. 从点值插值到单元平均值插值

本节介绍一种基于点值离散数据插值、对单元平均值进行插值的方法。该方法的构造假设节点等距分布，且位于正方形 $[0,1]^2$ 内。推广到 $\mathbb{R}^2$ 中的任意其他正方形，方法类似。因此，我们假设 $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ 是一个未知函数，且 $f \in L^1([0,1]^2)$，我们认为数据为

$$\bar{f}_{i,j}^{\ell-1} = h_{\ell-1}^{-2} \int_{\Omega_{i,j}^{\ell-1}} f(x,y)dxdy, \quad i,j = 1,\dots,2^{\ell-1} = \frac{1}{h_{\ell-1}},$$

其中 $\Omega_{i,\ j}^{\ell-1} = [x_{i-1}^{\ell-1}, x_i^{\ell-1}] \times [y_{j-1}^{\ell-1}, y_j^{\ell-1}]$、$x_i^{\ell-1} = ih_{\ell-1}$、$y_j^{\ell-1} = jh_{\ell-1}$，我们希望计算以下量的近似：

$$\bar{f}_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell} = h_{\ell}^{-2} \int_{\Omega_{2i+k_1,2j+k_2}^{\ell}} f(x,y)dxdy, \quad k_1,k_2 = -1,0.$$

现在我们将注意力集中在 $k_1 = 0$、$k_2 = 0$ 的情形，其余情形类似。

显然，如果我们定义原函数（见 [11]），$F\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ 为

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(s,t)dsdt, \tag{1}$$

我们有

$$\bar{f}_{i,j}^{\ell-1} = \frac{1}{h_{\ell-1}^2}\big(F(x_i^{\ell-1}, y_j^{\ell-1}) - F(x_{i-1}^{\ell-1}, y_j^{\ell-1}) - F(x_i^{\ell-1}, y_{j-1}^{\ell-1}) + F(x_{i-1}^{\ell-1}, y_{j-1}^{\ell-1})\big), \tag{2}$$

以及

$$F_{i,j}^{\ell-1} := F(x_i^{\ell-1}, y_j^{\ell-1}) = h_{\ell-1}^2 \sum_{s,t=1}^{i,j} \bar{f}_{s,t}^{\ell-1}. \tag{3}$$

因此，我们得到了数据与原函数 F 的点值离散之间的关系。现在，我们使用线性或非线性方法计算满足以下条件的插值器 $\mathcal{I}$：

$$\mathcal{I}(x_i^{\ell-1}, y_j^{\ell-1}; F^{\ell-1}) = F_{i,j}^{\ell-1}, \quad i,j = 1,\dots,2^{\ell-1}, \tag{4}$$

以及 $\mathcal{I} \in \mathcal{C}^2([0,1]^2)$（我们可以放宽这一条件），并将重构算子定义为：

$$(\mathcal{R}_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1})(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathcal{I}(x,y;F^{\ell-1}). \tag{5}$$

我们假设，若 $(x^*, y^*) \in [0,1]^2$，则存在 $s > 2$ 使得

$$\mathcal{I}(x^*, y^*; F^{\ell-1}) - F(x^*, y^*) = O(h_{\ell-1}^s).$$

根据式 (2)、$x_{2i}^\ell = x_i^{\ell-1}$ 和 $y_{2j}^\ell = y_j^{\ell-1}$，利用这些条件可得

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{2i,2j}^\ell - h_\ell^{-2}\int_{x_{2i-1}^\ell}^{x_{2i}^\ell}\int_{y_{2j-1}^\ell}^{y_{2j}^\ell} \frac{\partial}{\partial x\partial y}\mathcal{I}(x,y;F^{\ell-1})dxdy =& h_\ell^{-2}\big(F(x_{2i}^\ell, y_{2j}^\ell) - F(x_{2i-1}^\ell, y_{2j}^\ell) - F(x_{2i}^\ell, y_{2j-1}^\ell) + F(x_{2i-1}^\ell, y_{2j-1}^\ell)\big) \\
& - h_\ell^{-2}\big(\mathcal{I}(x_{2i}^\ell, y_{2j}^\ell; F^{\ell-1}) - \mathcal{I}(x_{2i-1}^\ell, y_{2j}^\ell; F^{\ell-1}) \\
& \quad - \mathcal{I}(x_{2i}^\ell, y_{2j-1}^\ell; F^{\ell-1}) + \mathcal{I}(x_{2i-1}^\ell, y_{2j-1}^\ell; F^{\ell-1})\big) \\
=& O(h_{\ell-1}^{s-2}).
\end{aligned}$$

显然，由于维数的影响，如果使用这一技术时不增加任何其他条件，逼近阶会降至 $(s-2)$。一个最明显的例子是基于 $(2s-1)\times(2s-1)$ 个单元进行多项式插值，即使用原函数 F 时有 $2s \times 2s$ 个点，见式 (1)。在这种情况下，我们得到$O(h^{2s-2})$，而众所周知，预期精度阶应为 $O(h^{2s-1})$。因此，我们引入以下定义，以构造具有最优精度阶的重构算子。

定义 1. 一个算子

$$\mathcal{R}_{\ell-1} : \mathbb{R}^{2^{\ell-1}\times 2^{\ell-1}} \to L^1([0,1]^2)$$

定义为

$$\mathcal{R}_{\ell-1}(\bar{f}^{\ell-1})(x,y) = \sum_{(i_1,i_2)\in I} a_{i_1,i_2}(x,y)\bar{f}_{i_1,i_2}^{\ell-1},$$

若对所有$(i_1,i_2) \in I$，存在一个常数 $K > 0$ 使得：$I \subseteq \{1,\dots,2^{\ell-1}\}^2$, $\bar{f}^{\ell-1} = \{\bar{f}_{i,j}^{\ell-1}\}_i^{2^{\ell-1}},\ _{j=1}$和 $a_{i_1,\ i_2} \in L^1([0,1]^2)$，则该算子是单元一致的

1. $\int_\Upsilon \sum_{(i_1,i_2)\in I} |a_{i_1,i_2}(x,y)| \le K$对所有紧 $\Upsilon \subseteq [0,1]^2$均成立。*2.*
$h_{\ell-1}^{-2}\int_{\Omega_i^{\ell-1},j} \mathcal{R}_{\ell-1}(\bar{f}^{\ell-1})(x,y)dxdy = \bar{f}_i^{\ell-1},_j, \quad i,j = 1,\dots,2^{\ell-1}$ *3.*
$h_\ell^{-2}\int_{\Omega_{2i+k_1,2j+k_2}^\ell} \mathcal{R}_{\ell-1}(\bar{p}^{\ell-1})(x,y)dxdy = \bar{p}_{2i+k_1,2j+k_2}^\ell, \quad \forall p \in \Pi_N$。

其中 $k_1,\ k_2 = -1,\ 0,\ N \in \mathbb{N}$且 Π_N表示总次数小于或等于 N的二元多项式。

因此，我们可以证明以下受 [14]中提出的理论启发的命题。

命题2.1。设 $f \in \mathcal{C}^{N+1}([0,1]^2)$。如果 $\mathcal{R}_{\ell-1}$ 是单元一致的，那么

$$\left|\bar{f}_{2i+k_1,2j+k_2}^\ell - h_\ell^{-2}\int_{\Omega_{2i+k_1,2j+k_2}^\ell} \mathcal{R}_{\ell-1}(\bar{f}^{\ell-1})(x,y)dxdy\right| = O(h_{\ell-1}^{N+1}),$$

其中 $k_1,\ k_2 = -1,\ 0$。

证明。

由 $f \in \mathcal{C}^{N+1}(\Omega)$ 可知，存在 $(\xi_1, \xi_2) \in [0,1]^2$，使得

$$f(x,y) = T(x,y) + \sum_{s+t=N+1} \frac{1}{s!\,t!} \frac{\partial^{s+t} f}{\partial x^s \partial y^t}(\xi_1, \xi_2)\, x^s y^t,$$

其中 $T \in \Pi_N$。注意，如果 $(i_1, i_2) \in \{1, \ldots, 2^{\ell-1}\}^2$

$$\left|\bar{T}^{\ell-1}_{i_1,i_2} - \bar{f}^{\ell-1}_{i_1,i_2}\right| = \left| h_{\ell-1}^{-2} \int_{\Omega^{\ell-1}_{i_1,i_2}} (T(x,y) - f(x,y)) dxdy \right| = O(h_{\ell-1}^{N+1}).$$

不失一般性，设 $k_1 = k_2 = 0$，其余情况类似，则

$$\begin{aligned}
&\left| \bar{f}^{\ell}_{2i,2j} - h_\ell^{-2} \int_{\Omega^{\ell}_{2i,2j}} \mathcal{R}_{\ell-1}(\bar{f}^{\ell-1})(x,y) dxdy \right| = \left| h_\ell^{-2} \int_{\Omega^{\ell}_{2i,2j}} \left(f(x,y) - \sum_{(i_1,i_2)\in I} a_{i_1,i_2}(x,y) \bar{f}^{\ell-1}_{i_1,i_2} \right) dxdy \right| \\
&= \left| h_\ell^{-2} \int_{\Omega_{2i,2j}} \left(T(x,y) + \sum_{s+t=N+1} \frac{1}{s!\,t!} \frac{\partial^{s+t} f}{\partial x^s \partial y^t}(\xi_1, \xi_2)\, x^s y^t - \sum_{(i_1,i_2)\in I} a_{i_1,i_2}(x,y) \bar{f}^{\ell-1}_{i_1,i_2} \right) dxdy \right| \\
&= \left| h_\ell^{-2} R h_\ell^{N+3} + h_\ell^{-2} \int_{\Omega^{\ell}_{2i,2j}} \left(\sum_{(i_1,i_2)\in I} a_{i_1,i_2}(x,y) \bar{T}^{\ell-1}_{i_1,i_2} - \sum_{(i_1,i_2)\in I} a_{i_1,i_2}(x,y) \bar{f}^{\ell-1}_{i_1,i_2} \right) dxdy \right| \\
&\le h_\ell^{-2} |R| h_\ell^{N+3} + \left| h_\ell^{-2} \int_{\Omega^{\ell}_{2i,2j}} \left(\sum_{(i_1,i_2)\in I} a_{i_1,i_2}(x,y) (\bar{T}^{\ell-1}_{i_1,i_2} - \bar{f}^{\ell-1}_{i_1,i_2}) \right) dxdy \right| \\
&\le h_\ell^{-2} |R| h_\ell^{N+3} + h_\ell^{-2} \int_{\Omega^{\ell}_{2i,2j}} \left(\sum_{(i_1,i_2)\in I} |a_{i_1,i_2}(x,y)| \left| \bar{T}^{\ell-1}_{i_1,i_2} - \bar{f}^{\ell-1}_{i_1,i_2} \right| \right) dxdy \\
&\le h_\ell^{-2} |R| h_\ell^{N+3} + K h_{\ell-1}^{N+1} \\
&= (2^{-(N+1)} |R| + K) h_{\ell-1}^{N+1}.
\end{aligned}$$

这里，R 表示泰勒展开的余项，而 K 是定义 1 中的非负常数。■

命题 2.2. 设 $\mathcal{I}(x, \quad y;\ F^{\ell-1})$ 是一个满足式 (4) 中所施加条件的插值器，其定义为

$$\mathcal{I}(x, y; F^{\ell-1}) = \sum_{(i_1,i_2)\in I} \tilde{a}_{i_1,i_2}(x,y) \bar{f}^{\ell-1}_{i_1,i_2},$$

（注意，$F^{\ell-1} \equiv \bar{f}^{\ell-1}$）与 $\tilde{a}_{i_1,\ i_2} \in \mathcal{C}^2\ ([0,1]^2)$，且

$$\mathcal{I}(x, y; P^{\ell-1}) = P(x,y), \quad \forall\, P \in \Pi_{N+1},$$

则该算子

$$(\mathcal{R}_{\ell-1} \bar{f}^{\ell-1})(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathcal{I}(x, y; F^{\ell-1}),$$

是单元一致的。

证明。定义（1）的第一和第二个条件显然成立。我们通过 $k_1 = k_2 = 0$证明第三个条件（其余情况类似），因此令 $p \in \Pi_N$ 并且

$$P(x,y) = \int_0^x \int_0^y p(s,t) ds dt$$

那么 $P \in \Pi_{N+1}$ 并且它满足

$$
\begin{aligned}
h_\ell^{-2} \int\limits_{\Omega^\ell_{2i,2j}} \mathcal{R}_{\ell-1}(\bar{p}^{\ell-1})(x,y)dxdy &= h_\ell^{-2} \int_{\Omega^\ell_{2i,2j}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathcal{I}(x,y;P^{\ell-1})dxdy \\
&= h_\ell^{-2}(\mathcal{I}(x_{2i},y_{2j};P^{\ell-1}) - \mathcal{I}(x_{2i-1},y_{2j};P^{\ell-1}) - \mathcal{I}(x_{2i},y_{2j-1};P^{\ell-1}) + \mathcal{I}(x_{2i-1},y_{2j-1};P^{\ell-1})) \\
&= h_\ell^{-2}(P(x_{2i},y_{2j}) - P(x_{2i-1},y_{2j}) - P(x_{2i},y_{2j-1}) + P(x_{2i-1},y_{2j-1})) \\
&= h_\ell^{-2} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \int_{y_{2j-1}}^{y_{2j}} p(s,t)dsdt \\
&= \bar{p}^\ell_{2i,2j}.
\end{aligned}
$$

■

式 (5) 中给出的点值数据与单元平均值数据的重构算子之间的关系，使我们能够使用现有的经典方法以及发表于 [16] 的新方法。此外，我们也可以使用其他技术，例如径向基函数（RBF）、单位分解法或非线性单位分解法（PUM）（参见例如 [5, 7, 18]），但我们的目标集中于在数字图像压缩的背景下应用新颖的渐进式 WENO-$2r$ 格式。为此，下一节专门回顾该格式，重点讨论两个变量，尽管将其推广到更高维情形可以在没有显著困难的情况下实现。

3. 笛卡尔网格上的双变量线性拉格朗日插值与非线性 WENO 方法

本节简要概述了数据分布在笛卡尔网格上这一背景下的双变量拉格朗日插值问题，并发展了 [4] 中引入的双变量 WENO 格式。特别地，我们重点讨论 $[0,1]^2$ 中的插值。本节还给出了将第 4 节提出的新 WENO-$2r$ 算法推广到多变量情形所需的基本组成部分。

3.1. 双变量线性插值

假设在 $[0,1]^2$ 中有一个等距网格，记为 $\{(ih_\ell, jh_\ell)\}_{i,\ j=0}^{2^\ell}$ 其中 $h_\ell = 2^{-\ell}$，并设未知函数f： $[0,1]^2 \to \mathbb{R}$；我们将数据视为该函数在笛卡尔网格各点处的取值

$$f^\ell_{i,j} = f(ih_\ell, jh_\ell), \quad 0 \le i,j \le 2^\ell.$$

令 $r \in \mathbb{N}$，并令 $(i_0, j_0) \in \{r, 2^\ell - r\}^2$ 表示近似所围绕的参考索引，定义中心模板：

$$\mathcal{S}^{2r}_{\mathbf{0}} = \{(i_0 - r)h_\ell, \dots, (i_0 + r - 1)h_\ell\} \times \{(j_0 - r)h_\ell, \dots, (j_0 + r - 1)h_\ell\}. \tag{6}$$

于是，问题在于确定一个关于每个变量次数为 $2r-1$（即总次数为 $4r-2$）的双变量多项式，该多项式由单变量拉格朗日多项式的张量积构成，并满足：

$$p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{S}^{2r}_{\mathbf{0}},$$

其唯一解为

$$p^{2r-1}_{\mathbf{0}}(x,y) = \sum_{i=i_0-r}^{i_0+r-1} \sum_{j=j_0-r}^{j_0+r-1} f(ih, jh) L_i(x) L_j(y),$$

其中，拉格朗日多项式基为：

$$L_\kappa(x) = \prod_{k=\kappa_0-r, k\neq\kappa}^{\kappa_0+r-1} \left(\frac{x - kh_\ell}{\kappa h_\ell - k h_\ell} \right), \quad \kappa = \kappa_0 - r, \dots, \kappa_0 + r - 1, \quad \kappa = i, j.$$

为了计算误差，我们使用 [4] 中证明的结果：如果 $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*) \in [0,1]^2$，且 $f \in \mathcal{C}^{4r}(\mathbb{R}^2)$，那么插值误差为：

$$E(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) - p^{2r-1}_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}^*) = O(h^{2r}_\ell). \tag{7}$$

3.2. 笛卡尔网格上的双变量 *WENO* 插值

在本小节中，我们重新讨论 [4] 中介绍的 WENO 插值多项式；其核心思想是采用通常用于构造一维 WENO 格式的相同要素。

我们考虑希望逼近该函数的点

$$\mathbf{x}^* = (x^*, y^*) \in \{(i_0 - 1/2, j_0 - 1/2)h_\ell, (i_0, j_0 - 1/2)h_\ell, (i_0 - 1/2, j_0)h_\ell\} \subset [0,1]^2,$$

我们构造较低次数插值多项式的凸组合， r，令 $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ 并定义

$$p_0^{2r-1}(\mathbf{x}^*) = \sum_{\mathbf{k}\in\{0,1,\ldots,r-1\}^2} C_{\mathbf{k}}^r p_{\mathbf{k}}^r(\mathbf{x}^*),$$

其中 $C_{\mathbf{k}}^r = C_{k_1}^r C_{k_2}^r$ 是最优权重，其显式公式在 [3] 中给出 ：

$$C_k^r = \frac{1}{2^{2r-1}}\binom{2r}{2k+1}, \quad k = 0, \cdots, r-1. \tag{8}$$

多项式 $p_{\mathbf{k}}^r$ 在节点处进行插值

$$\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^r = \{(i_0 + k_1 - r)h_\ell, \ldots, (i_0 + k_1 + r)h_\ell\} \times \{(j_0 + k_2 - r)h_\ell, \ldots, (j_0 + k_2 + r)h_\ell\} = \mathcal{S}_{k_1}^r \times \mathcal{S}_{k_2}^r.$$

最优权重 随后由非线性权重取代，如下式所定义 [16]

$$\omega_{\mathbf{k}}^r(\mathbf{x}^*) = \frac{\alpha_{\mathbf{k}}^r(\mathbf{x}^*)}{\sum_{\mathbf{l}\in\{0,\ldots,r-1\}^2}\alpha_{\mathbf{l}}^r(\mathbf{x}^*)}, \text{ with } \alpha_{\mathbf{k}}^r(\mathbf{x}^*) = \frac{C_{\mathbf{k}}^r(\mathbf{x}^*)}{(\epsilon + I_{\mathbf{k}}^r)^t}, \tag{9}$$

其中， $I_{\mathbf{k}}^r$ 为光滑度指标，并满足以下条件：

P1 无间断区域内光滑度指标的阶数为 h^2，即 ，

$$I_{\mathbf{k}}^r = O(h_\ell^2) \text{ if } f \text{ is smooth in } \mathcal{S}_{\mathbf{k}}^r.$$

P2 无间断区域内两个光滑度指标之间的距离为 h_ℓ^{r+1} ，即，设 $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ 和 $\mathbf{k}' = (k_1', k_2')$ 满足 $\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^r$ 和$\mathcal{S}_{\mathbf{k}'}^r$ 均无间断，则

$$I_{\mathbf{k}}^r - I_{\mathbf{k}'}^r = O(h_\ell^{r+1}).$$

P3 当模板 $\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^r$ 受到间断影响时，则：

$$I_{\mathbf{k}}^r \nrightarrow 0 \text{ as } h_\ell \to 0 \ (\equiv \ell \to \infty).$$

所设计的光滑度指标是将 [16] 中的指标调整为适用于本问题中单元平均值数据的形式。参数 ϵ 和 t 的选取分别是为了避免除以零，以及在光滑区域达到最高阶精度。在 [3], 中，下一定理在参数固定的条件下得到了证明。

定理 3.1。 设 $\mathbf{x}^* \in \{(i_0^\ell - 1/2, j_0^\ell - 1/2)h_\ell, \ (i_0^\ell, j_0^\ell - 1/2)h_\ell, \ (i_0^\ell - 1/2, j_0^\ell)h_\ell\}$，双变量 *WENO* 插值多项式

$$\mathcal{I}^{2r-1}(\mathbf{x}^*; f) = \sum_{\mathbf{k}\in\{0,1,\ldots,r-1\}^2} \omega_{\mathbf{k}}^r p_{\mathbf{k}}^r(\mathbf{x}^*) \tag{10}$$

其中 $\omega_{\mathbf{k}}^r$, $\mathbf{k} \in \{0, 1, \ldots, r-1\}^2$ 由式 (9)定义，光滑度指标为 $I_{\mathbf{k}}^r$, $\mathbf{k} \in \{0, 1, \ldots, r-1\}^2$ 满足 ***P1***、***P2***、***P3***; $\epsilon = h^2$ 和 $t = \frac{1}{2}(r+1)$ 满足：

$$f(\mathbf{x}^*) - \mathcal{I}^{2r-1}(\mathbf{x}^*; f) = \begin{cases} O(h^{2r}), & \textit{at smooth regions,} \\ O(h^{r+1}), & \textit{if, at least, one stencil lies in a smooth region.} \end{cases}$$

在以下章节中，我们回顾 [16], 中提出的渐进式 WENO 方法，重点讨论两个变量的情形，并在区间中点进行插值。

4. 新的渐进式双变量 WENO 方法

该方法旨在当间断与最大模板相交时，仍达到尽可能高的精度阶。为此，我们采用艾特肯–内维尔算法[9]的二维版本。该过程从一个次数为 $2r-1$的多项式开始，并将其分解为 4 个次数为$2r-2$的多项式。由此得到线性多项式权重，随后将其替换为取决于间断位置的非线性权重。接着重复这一过程：将 4 个次数为 $2r-2$ 的多项式进一步分解为次数为 $2r-3$的多项式，依此类推。在每个阶段，非线性权重都会识别不受间断影响的模板，随后利用这些模板进行近似。为清晰起见，本节仅介绍 $r=3$的情形，因为推广到一般的 r 可依此类推。

因此，我们考虑 $[0,1]^2$ 中由 $\{(x_i^\ell,y_j^\ell)=(ih_\ell,jh_\ell)\}_{i,\ j=0}^{2^\ell}$ 定义的均匀网格，其中 $h_\ell=2^{-\ell}$ 且 $(i_0,j_0)\in\mathbb{N}^2$ 满足 $0\le i_0-2,j_0-2$ 和 $i_0+1,j_0+1\le 2^\ell$。我们建立最大的模板

$$\mathcal{S}^6_{(0,0)}=\{x^\ell_{i_0-3},x^\ell_{i_0-2},x^\ell_{i_0-1},x^\ell_{i_0},x^\ell_{i_0+1},x^\ell_{i_0+2}\}\times\{y^\ell_{j_0-3},y^\ell_{j_0-2},y^\ell_{j_0-1},y^\ell_{j_0},y^\ell_{j_0+1},y^\ell_{j_0+2}\}.$$

我们计算多项式在点 $\mathbf{x}^*\in\{(i_0-1/2,j_0-1/2)h_\ell$、$(i_0,j_0-1/2)h_\ell$、$(i_0-1/2,j_0)h_\ell\}$ 处的取值：

$$p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*),\quad \mathbf{j}_1=(j_1^{(1)},j_2^{(1)})\in\{0,1,2\}^2,$$

它们是用于构造每个多项式 $\mathcal{S}^3_{(l_1,l_2)}$ 的模板，其中 $l_j=0$,1,2 和 $j=1$,2，见图1；也就是说，为了计算 $p^3_{(0,0)}$，我们将使用这些点

$$\mathcal{S}^4_{(0,0)}=\{x^\ell_{i_0-3},x^\ell_{i_0-2},x^\ell_{i_0-1},x^\ell_{i_0}\}\times\{y^\ell_{j_0-3},y^\ell_{j_0-2},y^\ell_{j_0-1},y^\ell_{j_0}\},$$

对于 $p^3_{(1,0)}$

$$\mathcal{S}^4_{(1,0)}=\{x^\ell_{i_0-2},x^\ell_{i_0-1},x^\ell_{i_0},x^\ell_{i_0+1}\}\times\{y^\ell_{j_0-3},y^\ell_{j_0-2},y^\ell_{j_0-1},y^\ell_{j_0}\},$$

对于 $p^3_{(0,1)}$

$$\mathcal{S}^4_{(0,1)}=\{x^\ell_{i_0-3},x^\ell_{i_0-2},x^\ell_{i_0-1},x^\ell_{i_0}\}\times\{y^\ell_{j_0-2},y^\ell_{j_0-1},y^\ell_{j_0},y^\ell_{j_0+1}\},$$

对于 $p^3_{(1,1)}$

$$\mathcal{S}^4_{(1,1)}=\{x^\ell_{i_0-2},x^\ell_{i_0-1},x^\ell_{i_0},x^\ell_{i_0+1}\}\times\{y^\ell_{j_0-2},y^\ell_{j_0-1},y^\ell_{j_0},y^\ell_{j_0+1}\},$$

对于 $p^3_{(l_1,l_2)}$ 其中 $l_j=1$、2 和 $j=1$、2。我们指出，用于计算 $p^4_{(0,0)}$ 的模板是上述模板的并集，即 $\mathcal{S}^4_{(0,0)}$、$\mathcal{S}^4_{(1,0)}$、$\mathcal{S}^4_{(0,1)}$、$\mathcal{S}^4_{(1,1)}$。因此，借助艾特肯-内维尔公式，我们将 $p^4_{\mathbf{j}_0}$、$\mathbf{j}_0=(j_1^{(0)},j_2^{(0)})\in\{0,1\}^2$（其模板如图2所示）表示为三次多项式的求值之和（图3）。

$$\begin{aligned}
p^4_{(0,0)}(\mathbf{x}^*)&=\sum_{\mathbf{j}_1\in\{0,1\}\times\{0,1\}}C^3_{(0,0),\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*),\quad p^4_{(1,0)}(\mathbf{x}^*)=\sum_{\mathbf{j}_1\in\{1,2\}\times\{0,1\}}C^3_{(1,0),\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*),\\
p^4_{(0,1)}(\mathbf{x}^*)&=\sum_{\mathbf{j}_1\in\{0,1\}\times\{1,2\}}C^3_{(0,1),\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*),\quad p^4_{(1,1)}(\mathbf{x}^*)=\sum_{\mathbf{j}_1\in\{1,2\}\times\{1,2\}}C^3_{(1,1),\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*),
\end{aligned}\tag{11}$$

with

$$C^3_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}=C^3_{(j_1^{(0)},j_2^{(0)}),(j_1^{(1)},j_2^{(1)})}(\mathbf{x}^*)=C^3_{j_1^{(0)},j_1^{(1)}}(x^*)C^3_{j_2^{(0)},j_2^{(1)}}(y^*),\ \mathbf{j}_0\in\{0,1\}^2,\ \mathbf{j}_1\in\mathbf{j}_0+\{0,1\}^2,$$

其中 C^3_{k,k_1}、$k=0$、1、$k_1=k+\{0,1\}$（见 [2]）为

$$C^3_{0,0}(x^*)=\frac{x^*-x^\ell_{i_0+1}}{x^\ell_{i_0-3}-x^\ell_{i_0+1}},\quad C^3_{0,1}(x^*)=1-C^3_{0,0}(x^*),\quad C^3_{1,1}(x^*)=\frac{x^*-x^\ell_{i_0+2}}{x^\ell_{i_0-2}-x^\ell_{i_0+2}},\quad C^3_{1,2}(x^*)=1-C^3_{1,1}(x^*).\tag{12}$$

现在，我们在式 (11) 中将线性权重替换为非线性权重：

$$\tilde\omega^3_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)=\frac{\tilde\alpha^3_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)}{\sum_{\mathbf{l}\in\mathbf{j}_0+\{0,1\}^2}\tilde\alpha^3_{\mathbf{j}_0,\mathbf{l}}(\mathbf{x}^*)},\quad\text{where}\quad\tilde\alpha^3_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)=\frac{C^3_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)}{(\epsilon+I^3_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1})^t},\quad\mathbf{j}_0\in\{0,1\}^2,\mathbf{j}_1\in\mathbf{j}_0+\{0,1\}^2,$$

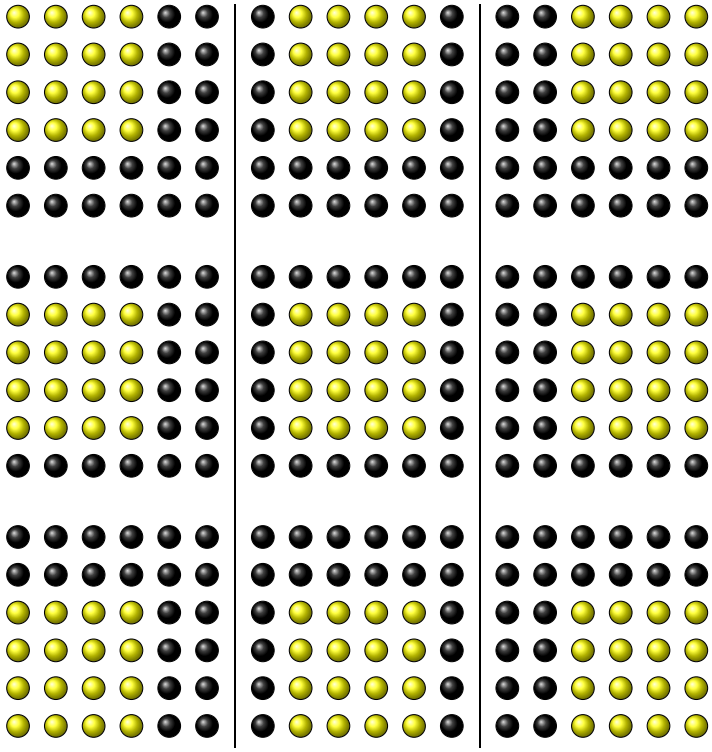


图1：用于得到 $p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)$，$\mathbf{j}_1 \in \{0,1,2\}^2$的模板。每种不同颜色标识九个候选 4×4 模板之一，这些模板在全局 6×6 定义域内进行空间平移，遵循经典的双变量 WENO 框架 [4]。

and

$$I^3_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1} = I^3_{\mathbf{j}_1},\ \mathbf{j}_0 \in \{0,1\}^2,\ \mathbf{j}_1 \in \mathbf{j}_0 + \{0,1\}^2,$$

其中 $I^3_{\mathbf{j}_1}$ 为满足性质 **P1**、**P2** 和 **P3** 的光滑度指标。我们得到近似：

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^4_{(0,0)}(\mathbf{x}^*) &= \sum_{\mathbf{j}_1\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \tilde{\omega}^3_{(0,0),\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*), \quad \tilde{p}^4_{(1,0)}(\mathbf{x}^*) = \sum_{\mathbf{j}_1\in\{1,2\}\times\{0,1\}} \tilde{\omega}^3_{(1,0),\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*),\\
\tilde{p}^4_{(0,1)}(\mathbf{x}^*) &= \sum_{\mathbf{j}_1\in\{0,1\}\times\{1,2\}} \tilde{\omega}^3_{(0,1),\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*), \quad \tilde{p}^4_{(1,1)}(\mathbf{x}^*) = \sum_{\mathbf{j}_1\in\{1,2\}\times\{1,2\}} \tilde{\omega}^3_{(1,1),\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*).
\end{aligned} \tag{13}$$

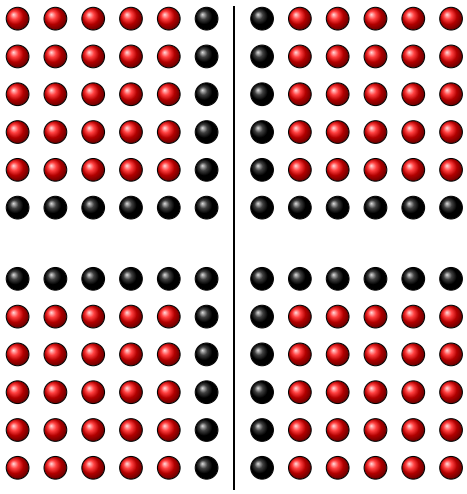


图2：用于得到 $p^4_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*)$ 的模板，$\mathbf{j}_0 \in \{0,1\}^2$。红色和黑色突出显示了递归艾特肯–内维尔过程第一阶段产生的四个不同中间模板，它们构成了通向最终 5 次重构的过渡。

现在，我们希望将 $p^5_{(0,0)}(\mathbf{x}^*)$ 表示为近似值 $p^4_{(0,0)}(\mathbf{x}^*)$、$p^4_{(0,1)}(\mathbf{x}^*)$、$p^4_{(1,0)}(\mathbf{x}^*)$、$p^4_{(1,1)}(\mathbf{x}^*)$ 的凸组合。注意，所使用的模板为

$$\mathcal{S}^5_{(0,0)} = \{x^\ell_{i_0-3}, x^\ell_{i_0-2}, x^\ell_{i_0-1}, x^\ell_{i_0}, x^\ell_{i_0+1}\} \times \{y^\ell_{j_0-3}, y^\ell_{j_0-2}, y^\ell_{j_0-1}, y^\ell_{j_0}, y^\ell_{j_0+1}\}$$

当 $p^4_{(0,0)}$ 时；

$$\mathcal{S}^5_{(1,0)} = \{x^\ell_{i_0-2}, x^\ell_{i_0-1}, x^\ell_{i_0}, x^\ell_{i_0+1}, x^\ell_{i_0+2}, \} \times \{y^\ell_{j_0-3}, y^\ell_{j_0-2}, y^\ell_{j_0-1}, y^\ell_{j_0}, y^\ell_{j_0+1}\}$$

当 $p^4_{(1,0)}$ 时；

$$\mathcal{S}^5_{(0,1)} = \{x^\ell_{i_0-3}, x^\ell_{i_0-2}, x^\ell_{i_0-1}, x^\ell_{i_0}, x^\ell_{i_0+1}\} \times \{y^\ell_{j_0-2}, y^\ell_{j_0-1}, y^\ell_{j_0}, y^\ell_{j_0+1}, y^\ell_{j_0+2}\}$$

当 $p^4_{(0,1)}$ 时；

$$\mathcal{S}^5_{(1,1)} = \{x^\ell_{i_0-2}, x^\ell_{i_0-1}, x^\ell_{i_0}, x^\ell_{i_0+1}, x^\ell_{i_0+2}\} \times \{y^\ell_{j_0-2}, y^\ell_{j_0-1}, y^\ell_{j_0}, y^\ell_{j_0+1}, y^\ell_{j_0+2}\},$$

当 $p^4_{(1,1)}$ 时。再次强调，用于计算 $p^5_{(0,0)}$ 的模板 $\mathcal{S}^6_0$ 是这些模板的并集。因此，在算法的最后阶段，对于 $r = 3$，5 次多项式按如下方式展开：

$$p^5_{(0,0)}(\mathbf{x}^*) = \sum_{\mathbf{j}_0 \in \{0,1\}^2} C^4_{(0,0),\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*) p^4_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*), \tag{14}$$

with

$$C^4_{(0,0),(0,0)}(\mathbf{x}^*) = C^4_{0,0}(x^*)C^4_{0,0}(y^*), \quad C^4_{(0,0),(1,0)}(\mathbf{x}^*) = C^4_{0,1}(x^*)C^4_{0,0}(y^*),$$
$$C^4_{(0,0),(0,1)}(\mathbf{x}^*) = C^4_{0,0}(x^*)C^4_{0,1}(y^*), \quad C^4_{(0,0),(1,1)}(\mathbf{x}^*) = C^4_{0,1}(x^*)C^4_{0,1}(y^*),$$

其中

$$C^4_{0,0}(x^*) = \frac{x^* - x^\ell_{i_0+2}}{x^\ell_{i_0-3} - x^\ell_{i_0+2}}, \quad C^4_{0,1}(x^*) = 1 - C^4_{0,0}(x^*), \tag{15}$$

并通过同时修改非线性权重和四次多项式近似来建立新的近似

$$\tilde{\mathcal{I}}^5(\mathbf{x}^*; f) := \tilde{p}^5_{(0,0)}(\mathbf{x}^*) = \sum_{\mathbf{j}_0 \in \{0,1\}^2} \tilde{\omega}^4_{(0,0),\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*) \tilde{p}^4_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*), \tag{16}$$

其中 $\tilde{p}^4_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*)$ 由式 (13) 得到，且

$$\tilde{\omega}^4_{(0,0),\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*) = \frac{\alpha^4_{(0,0),\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*)}{\sum_{\mathbf{l}\in\{0,1\}^2} \alpha^4_{(0,0),\mathbf{l}}(\mathbf{x}^*)}, \quad \text{where} \quad \alpha^4_{(0,0),\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*) = \frac{C^4_{(0,0),\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*)}{(\epsilon + I^4_{(0,0),\mathbf{j}_0})^t}, \quad \mathbf{j}_0 \in \{0,1\}^2,$$

光滑度指标定义如下：

$$I^4_{(0,0),(0,0)} = I^3_{(0,0)}, \quad I^4_{(0,0),(0,1)} = I^3_{(0,2)}, \quad I^4_{(0,0),(1,0)} = I^3_{(2,0)}, \quad I^4_{(0,0),(1,1)} = I^3_{(2,2)},$$

其中 $I^3_{\mathbf{j}_0}$、$\mathbf{j}_0 \in \{0,1,2\}^2$ 是满足性质 **P1**、**P2** 和 **P3** 的光滑度指标。现在，我们确定

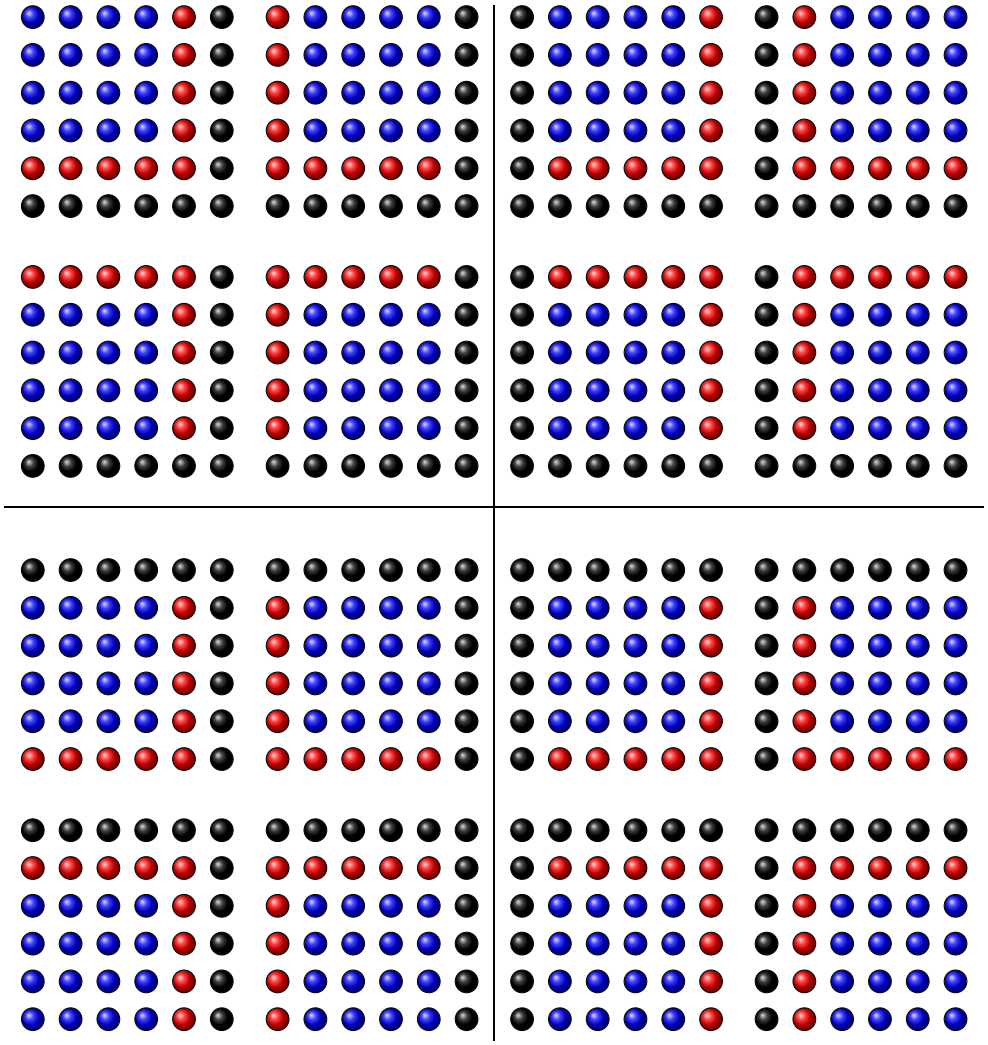


图3： $p^3_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{x}^*)$、$\mathbf{j}_1 \in \mathbf{j}_1 + \{0,1\}^2$ 的每个模板对 $p^4_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}^*)$、$\mathbf{j}_0 \in \{0,1\}^2$近似的贡献。红色和蓝色展示了四个特定的三次模板（如图1所示）如何通过递归组合与重叠，构造出一个单一的四次模板（如图2所示）。

一般情况下的迭代过程， [16]:

$$\tilde{p}^r_{\mathbf{j}_{r-2}}(\mathbf{x}^*) = p^r_{\mathbf{j}_{r-2}}(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{j}_{r-2} = \{0,\dots,r-1\}^2,$$

$$\tilde{p}^{\ell+1}_{\mathbf{j}_{2r-\ell-3}}(\mathbf{x}^*) = \sum_{\mathbf{j}_{2r-\ell-2} \in \mathbf{j}_{2r-\ell-3}+\{0,1\}^2} \tilde{\omega}^\ell_{\mathbf{j}_{2r-\ell-3},\mathbf{j}_{2r-\ell-2}}(x^*)\tilde{p}^\ell_{\mathbf{j}_{2r-\ell-2}}(x^*), \quad \ell = r,\dots,2r-2,\ \mathbf{j}_{2r-\ell-3} \in \{0,\dots,2r-2-\ell\}^2,$$

对于 $\ell = r$、.....、$2r-2$，以及 $\mathbf{k} \in \{0,\dots,2r-2-\ell\}^2$ 和 $\mathbf{k}_1 \in \mathbf{k} + \{0,1\}^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}(\mathbf{x}^*) &= \left(\frac{\tilde{\alpha}^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}}{\tilde{\alpha}^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}} + \tilde{\alpha}^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}+(1,0)} + \tilde{\alpha}^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}+(0,1)} + \tilde{\alpha}^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}+(1,1)}}\right)(\mathbf{x}^*), \\ \tilde{\alpha}^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}(\mathbf{x}^*) &= \frac{C^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}(\mathbf{x}^*)}{(\epsilon + I^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})^t}, \quad \mathbf{k}_1 \in \mathbf{k} + \{0,1\}^2, \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $I^{\ell}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}$ 是由以下公式确定的光滑度指标:

$$I^{\ell}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}=\begin{cases} I^{r}_{\mathbf{k}}, & \text{if } \mathbf{k}_1=\mathbf{k},\\ I^{r}_{\mathbf{k}+(\ell-(r-1),0)}, & \text{if } \mathbf{k}_1=\mathbf{k}+(1,0),\\ I^{r}_{\mathbf{k}+(0,\ell-(r-1))}, & \text{if } \mathbf{k}_1=\mathbf{k}+(0,1),\\ I^{r}_{\mathbf{k}+(\ell-(r-1),\ell-(r-1))}, & \text{if } \mathbf{k}_1=\mathbf{k}+(1,1), \end{cases} \tag{18}$$

be中 $I^{r}_{\mathbf{k}}$, 且具有 h $0\le k_1,k_2\le r-1$, 光滑 h性　　d指标满足　f这些 h性质　　$\mathbf{P1}$, $\mathbf{P^{2,}}$ 一个d $\mathbf{P}$ **3**。因此，二元渐进WENO逼近为

$$\tilde{\mathcal{I}}^{2r-1}(\mathbf{x}^*;f)=\tilde{p}^{2r-1}_{(0,0)}(\mathbf{x}^*).$$

5. r = $r=3$ 时的新型不可分离单元平均WENO方法

本节将给出我们在应用中使用的非线性滤波器的公式。这个思路很容易推广到任意 $(2r-1)^2$ 个单元；但为阐明相关概念，我们在此插入本节。由于单元等间距，滤波器更容易计算。先来看 $r=3$ 的情形，其中使用了 5 个数据单元。一维情形下:

$$(\mathcal{P}^{\ell}_{\ell-1}\bar{f}^{\ell})_{2i-1}=\frac{1}{128}[-3,22,128,-22,3][\bar{f}^{\ell-1}_{i-2},\bar{f}^{\ell-1}_{i-1},\bar{f}^{\ell-1}_{i},\bar{f}^{\ell-1}_{i+1},\bar{f}^{\ell-1}_{i+2}]^T=\mathbf{v}^5_0\bar{\mathbf{f}}^{\ell-1}_{i-2:i+2}.$$

若记 $\mathbf{w}^5_0=\frac{1}{128}[3,-22,128,22,-3]$，则

$$(\mathcal{P}^{\ell}_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1})_{2i}=\mathbf{w}^5_0\bar{\mathbf{f}}^{\ell-1}_{i-2:i+2}.$$

显然，利用对称性，我们只需处理 $\mathbf{v}^5_0$, ; $\mathbf{w}^5_0$ 的情形类似。现在很容易看出,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^5_0&=C^4_{0,0}\mathbf{v}^4_0+C^4_{0,1}\mathbf{v}^4_1=\frac{C^4_{0,0}}{64}[-3,17,55,-5,0]+\frac{C^4_{0,1}}{64}[0,5,73,-17,3]\\&=C^4_{0,0}(C^3_{0,0}\mathbf{v}^3_0+C^3_{0,1}\mathbf{v}^3_1)+C^4_{0,1}(C^3_{1,1}\mathbf{v}^3_1+C^3_{1,2}\mathbf{v}^3_2)\\&=C^4_{0,0}\left(C^3_{0,0}\left[-\frac{1}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},0,0\right]+C^3_{0,1}\left[0,\frac{1}{8},1,-\frac{1}{8},0\right]\right)+C^4_{0,1}\left(C^3_{1,1}\left[0,\frac{1}{8},1,-\frac{1}{8},0\right]+C^3_{1,2}\left[0,0,\frac{11}{8},-\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right]\right).\end{aligned}$$

我们在一维中进行的这种分解，可以借助克罗内克积推广到任意维度。这里，我们特别关注 $n=2$ 的情形，此时利用向量积可以得到所需的滤波器。我们将其表示为张量积形式，以便在二维中应用这些滤波器，从而得到

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}^{\ell}_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1})_{2i-1,2j-1}&=\frac{1}{16384}\begin{bmatrix}9&-66&-384&66&9\\-66&484&2816&-484&-66\\-384&2816&16384&-2816&-384\\66&-484&-2816&484&66\\9&-66&-384&66&9\end{bmatrix}.*\begin{bmatrix}\bar{f}^{k-1}_{i-2,j-2}&\bar{f}^{k-1}_{i-2,j-1}&\bar{f}^{k-1}_{i-2,j}&\bar{f}^{k-1}_{i-2,j+1}&\bar{f}^{k-1}_{i-2,j+2}\\\bar{f}^{k-1}_{i-1,j-2}&\bar{f}^{k-1}_{i-1,j-1}&\bar{f}^{k-1}_{i-1,j}&\bar{f}^{k-1}_{i-1,j+1}&\bar{f}^{k-1}_{i-1,j+2}\\\bar{f}^{k-1}_{i,j-2}&\bar{f}^{k-1}_{i,j-1}&\bar{f}^{k-1}_{i,j}&\bar{f}^{k-1}_{i,j+1}&\bar{f}^{k-1}_{i,j+2}\\\bar{f}^{k-1}_{i+1,j-2}&\bar{f}^{k-1}_{i+1,j-1}&\bar{f}^{k-1}_{i+1,j}&\bar{f}^{k-1}_{i+1,j+1}&\bar{f}^{k-1}_{i+1,j+2}\\\bar{f}^{k-1}_{i+2,j-2}&\bar{f}^{k-1}_{i+2,j-1}&\bar{f}^{k-1}_{i+2,j}&\bar{f}^{k-1}_{i+2,j+1}&\bar{f}^{k-1}_{i+2,j+2}\end{bmatrix}\\&=(\mathbf{v}^5_0)^T(\mathbf{v}^5_0).*\bar{\mathbf{f}}^{\ell-1}_{i-2:i+2,j-2:j+2},\end{aligned}$$

即为定义于两个方阵 A、$B\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 上的乘积 $.*$

$$A.*B=\sum_{i,j=1}^{N}A_{i,j}B_{i,j}.$$

此时，通过采用二维艾特肯公式，我们得到分解

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_0^5)^T(\mathbf{v}_0^5) =&(C_{0,0}^4\mathbf{v}_0^4 + C_{0,1}^4\mathbf{v}_1^4)^T(C_{0,0}^4\mathbf{v}_0^4 + C_{0,1}^4\mathbf{v}_1^4)\\
=&C_{0,0}^4C_{0,0}^4(\mathbf{v}_0^4)^T\mathbf{v}_0^4 + C_{0,1}^4C_{0,0}^4(\mathbf{v}_1^4)^T\mathbf{v}_0^4 + C_{0,0}^4C_{0,1}^4(\mathbf{v}_0^4)^T\mathbf{v}_1^4 + C_{0,1}^4C_{0,1}^4(\mathbf{v}_1^4)^T\mathbf{v}_1^4\\
=&C_{0,0}^4C_{0,0}^4((C_{0,0}^3\mathbf{v}_0^3 + C_{0,1}^3\mathbf{v}_1^3)^T(C_{0,0}^3\mathbf{v}_0^3 + C_{0,1}^3\mathbf{v}_1^3)) + C_{0,1}^4C_{0,0}^4((C_{1,1}^3\mathbf{v}_1^3 + C_{1,2}^3\mathbf{v}_2^3)^T(C_{0,0}^3\mathbf{v}_0^3 + C_{0,1}^3\mathbf{v}_1^3))\\
&+ C_{0,0}^4C_{0,1}^4((C_{0,0}^3\mathbf{v}_0^3 + C_{0,1}^3\mathbf{v}_1^3)^T(C_{1,1}^3\mathbf{v}_1^3 + C_{1,2}^3\mathbf{v}_2^3)) + C_{0,1}^4C_{0,1}^4(C_{1,1}^3\mathbf{v}_1^3 + C_{1,2}^3\mathbf{v}_2^3)^T(C_{1,1}^3\mathbf{v}_1^3 + C_{1,2}^3\mathbf{v}_2^3))\\
=&C_{0,0}^4C_{0,0}^4(C_{0,0}^3C_{0,0}^3(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_0^3 + C_{0,1}^3C_{0,0}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_0^3 + C_{0,0}^3C_{0,1}^3(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_1^3 + C_{0,1}^3C_{0,1}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3)\\
&+ C_{0,1}^4C_{0,0}^4(C_{1,1}^3C_{0,0}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_0^3 + C_{0,0}^3C_{1,2}^3(\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_0^3 + C_{1,1}^3C_{0,1}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3 + C_{0,1}^3C_{1,2}^3(\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_1^3)\\
&+ C_{0,0}^4C_{0,1}^4(C_{0,0}^3C_{1,2}^3(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_2^3 + C_{0,1}^3C_{1,1}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3 + C_{0,0}^3C_{1,1}^3(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_1^3 + C_{1,2}^3C_{0,1}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_2^3)\\
&+ C_{0,1}^4C_{0,1}^4(C_{1,1}^3C_{1,1}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3 + C_{1,1}^3C_{1,2}^3(\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_1^3 + C_{1,1}^3C_{1,2}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_2^3 + C_{1,2}^3C_{1,2}^3(\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_2^3),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

with

$$
C_{0,0}^4 = C_{0,1}^4 = \frac{1}{2}, \quad C_{0,0}^3 = C_{1,2}^3 = \frac{3}{8}, \quad C_{0,1}^3 = C_{1,1}^3 = \frac{5}{8}.
$$

$$
(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_0^3 = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 & 0 & 0\\ -4 & 16 & 20 & 0 & 0\\ -5 & 20 & 25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_1^3 = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -8 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 32 & -4 & 0\\ 0 & 5 & 40 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_2^3 = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -11 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 44 & -16 & 4\\ 0 & 0 & 55 & -20 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3 = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 8 & -1 & 0\\ 0 & 8 & 64 & -8 & 0\\ 0 & -1 & -8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_2^3 = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 11 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 88 & -32 & 8\\ 0 & 0 & -11 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_2^3 = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 121 & -44 & 11\\ 0 & 0 & -44 & 16 & -4\\ 0 & 0 & 11 & -4 & 1 \end{bmatrix}.
$$

如上述矩阵所示，目标是避免使用靠近间断的节点。因此，我们按照以下方式，将公式（19）中的线性权重替换为非线性权重:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_0^5)^T(\mathbf{v}_0^5) =&\tilde{\omega}_{(0,0),(0,0)}^4(\tilde{\omega}_{(0,0),(0,0)}^3(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_0^3 + \tilde{\omega}_{(0,0),(1,0)}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_0^3 + \tilde{\omega}_{(0,0),(0,1)}^3(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_1^3 + \tilde{\omega}_{(0,0),(1,1)}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3)\\
&+ \tilde{\omega}_{(0,0),(1,0)}^4(\tilde{\omega}_{(1,0),(1,0)}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_0^3 + \tilde{\omega}_{(0,1),(0,2)}^3(\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_0^3 + \tilde{\omega}_{(1,0),(1,0)}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3 + \tilde{\omega}_{(0,1),(1,2)}^3(\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_1^3)\\
&+ \tilde{\omega}_{(0,0),(0,1)}^4(\tilde{\omega}_{(0,1),(0,2)}^3(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_2^3 + \tilde{\omega}_{(0,1),(1,1)}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3 + \tilde{\omega}_{(1,0),(2,0)}^3(\mathbf{v}_0^3)^T\mathbf{v}_2^3 + \tilde{\omega}_{(1,0),(2,1)}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_2^3)\\
&+ \tilde{\omega}_{(0,0),(1,1)}^4(\tilde{\omega}_{(1,1),(1,1)}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_1^3 + \tilde{\omega}_{(1,1),(1,2)}^3(\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_1^3 + \tilde{\omega}_{(1,1),(1,2)}^3(\mathbf{v}_1^3)^T\mathbf{v}_2^3 + \tilde{\omega}_{(1,2),(1,2)}^4(\mathbf{v}_2^3)^T\mathbf{v}_2^3),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

with

$$
\tilde{\omega}_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}^3 = \frac{\tilde{\alpha}_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}^3}{\sum_{\mathbf{l}\in\mathbf{j}_0+\{0,1\}^2}\tilde{\alpha}_{\mathbf{j}_0,\mathbf{l}}^3}, \quad \text{where} \quad \tilde{\alpha}_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}^3 = \frac{C_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}^3}{(\epsilon + I_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}^3)^t}, \quad \mathbf{j}_0 \in \{0,1\}^2, \mathbf{j}_1 \in \mathbf{j}_0 + \{0,1\}^2,
$$

其中

$$
I_{\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1}^3 = I_{\mathbf{j}_1}^3, \quad \text{with} \quad \mathbf{j}_1 \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2),(1,2),(2,1)\},
$$

and

$$
\tilde{\omega}_{(0,0),\mathbf{j}_0}^4 = \frac{\alpha_{(0,0),\mathbf{j}_0}^4}{\sum_{\mathbf{l}\in\{0,1\}^2}\alpha_{(0,0),\mathbf{l}}^4}, \quad \text{where} \quad \alpha_{(0,0),\mathbf{j}_0}^4 = \frac{C_{(0,0),\mathbf{j}_0}^4}{(\epsilon + I_{(0,0),\mathbf{j}_0}^4)^t}, \quad \mathbf{j}_0 \in \{0,1\}^2,
$$

是

$$
I_{(0,0),(0,0)}^4 = I_{(0,0)}^3, \quad I_{(0,0),(0,1)}^4 = I_{(0,2)}^3, \quad I_{(0,0),(1,0)}^4 = I_{(2,0)}^3, \quad I_{(0,0),(1,1)}^4 = I_{(2,2)}^3.
$$

现在，为了计算光滑度指标，我们依据式 (2) 和式 (3) 中给出的关系，从而可以使用 [4] 中的公式对其进行求值。因此，光滑度指标可计算如下：

$$I^3_{\mathbf{k}} = \sum_{\substack{(m,n)\in\{0,1,2\}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{\partial^{n+m+2}}{\partial x^{m+1}\partial y^{n+1}} \mathcal{I}_{k_1,k_2}(x,y;F^{\ell-1})dxdy.$$

其中，$\in \{0,1,2\}^2$ 和 $\mathcal{I}_{k_1,\,k_2}(x,y;\,F^{\ell-1})$ 是相应的插值函数。我们根据数据的线性组合，计算这些光滑度指标的显式表达式。因此，由于我们仅使用这些值，新方法的计算代价与经典WENO相近。该过程很容易扩展到任意次数 r，不过为简洁起见，我们重点说明 $r=3$。

6. 数值实验

本节将介绍一系列数值实验，旨在比较线性重构与基于新提出的非可分单元平均WENO-2r方法的非线性重构在 $r=3$ 方面的表现（见第5节）。首先，我们将两种方法应用于一组具有不同类型间断的测试函数，以评估哪种方法效果更好。为补充这一分析，我们还使用彩色数字图像进行图像压缩实验，以便在实际场景中观察并评估各方法的压缩能力。

6.1. 函数的单元平均

我们将分析并比较线性方法和非线性方法在处理具有间断的函数时的表现。由于数据以单元平均值表示，如上一节所述，我们将数据视为：

$$\bar{f}^{\ell}_{i,j} = \frac{1}{h_\ell^2}\int_{x^\ell_{i-1}}^{x^\ell_i}\int_{y^\ell_{j-1}}^{y^\ell_j} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{21}$$

其中 ℓ 为分辨率层，h_ℓ^2 表示网格步长，$\Omega^{\ell}_{i,\,j}=[x^\ell_{i-1},x^\ell_{i+1}]\times[y^\ell_{j-1},y^\ell_j]$ 为相应的计算单元。因此，每个$\bar{f}^{\ell}_{i,\,j}$ 表示 f 在单元$\Omega^{\ell}_{i,\,j}$上的平均值。

第 ℓ 层重构的精度在离散 ℓ^2 范数中评估，定义为

$$E_2 = \left\|(\mathcal{P}^\ell_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1})_{i,j} - \bar{f}^\ell_{i,j}\right\|_2 = \left(h_\ell^2\sum_{i,j=1}^{2^\ell}\left|(\mathcal{P}^\ell_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1})_{i,j} - \bar{f}^\ell_{i,j}\right|^2\right)^{1/2}, \tag{22}$$

其中$\bar{f}^{\ell}_{i,\,j}$表示第 ℓ层的精确单元平均数据，$(\mathcal{P}^\ell_{\ell-1}\bar{f}^{\ell-1})_{i,\,j}$表示使用线性预测器或WENO 预测器从第 $\ell-1$ 层延拓到第 ℓ层所得到的重构单元平均值。该单元平均ℓ^2 误差给出了精确场与重构场之间均方偏差的全局度量，并与多分辨率表示的守恒表述相一致。

我们将使用 $L=1$ 作为抽取和预测的分辨率级别，并进行不含细节的多分辨率计算，以便比较线性方法和非线性方法；也就是说，我们只将分辨率降低一级，并基于该级别进行预测，而不存储任何误差。

首先，我们考虑函数

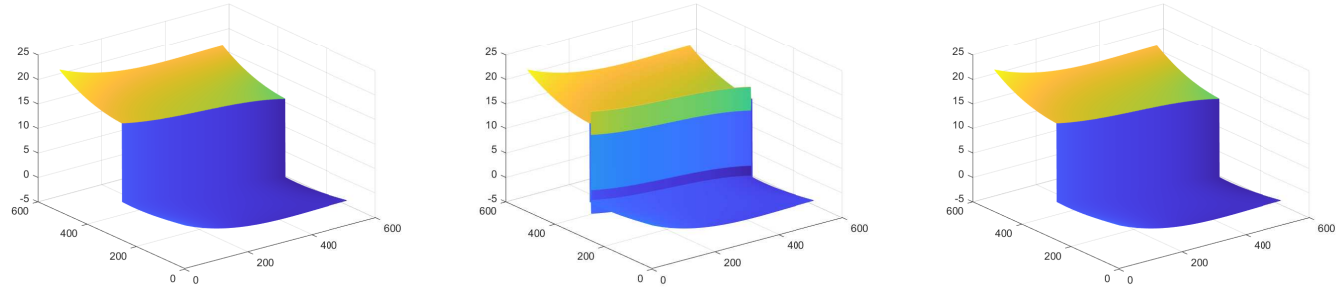
$$g(x,y) = x^3 - y^3 + 2.1\,x^2y^2 + x^2 - 0.1\,y^2 - y + x - 0.01\,xy + 1, \tag{23}$$

其定义在定义域 $[-1,1]^2$ 上。数值实验在包含 512×512 个计算单元的均匀网格上进行。数据以单元平均值的形式表示，见式（21）。

为了在定义域中引入受控不连续性，通过在定义域下半部（沿着直线 $y=0$）加上一个常数，定义一个修改后的函数：

$$\tilde{g}(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & y<0, \\ g(x,y)+C, & y\geq 0, \end{cases} \tag{24}$$

其中， $C = 16$ 是所选跳跃的数量级。此配置可用于分析线性方法和加权本质无振荡（WENO）方法在光滑区域以及存在间断时的表现。



(a) (b) (c)

图 4：定义在定义域 $[-1,1]^2$ 上的多项式测试函数 (24) 的三维表示。子图 **(a)** 展示了原始函数，其在定义域下半部存在幅度为 $C = 16$ 的间断。子图 **(b)** 和 **(c)** 分别展示了采用线性预测格式和 WENO-2D预测格式得到的重构曲面。

图 4 展示了定义在正方形区域 $[-1,1]^2$ 上的测试多项式函数 (24)，以及其降采样版本和采用两种预测方法得到的重构结果：线性方法和新的渐进式双变量 WENO 方法。可以看出，线性方法能够充分重现光滑区域，但在跳跃区域表现出明显的数值扩散；而加权本质无振荡（WENO）格式能够更好地保留间断的形状和高度，避免边缘周围出现伪振荡。此外，线性格式得到的离散 ℓ^2 范数误差（式 (22)）为 $E_2^{\mathrm{LIN}} = 4.2171\text{e-}01$，而加权本质无振荡（WENO）方法得到的误差为 $E_2^{\mathrm{WENO}} = 1.8473\text{e-}05$。这些结果证实，加权本质无振荡（WENO）格式在光滑区域精度没有显著损失的情况下，更能保留间断。

现在，我们研究具有嵌入式间断的二维曲面重构。我们选取与 [16], 中所示相同的例子，该函数：

$$h(x,y) = \begin{cases} e^{x+y}\cos(x-y), & x+y \le 0, \\ e^{x+y}\cos(x-y)+1, & x+y > 0. \end{cases} \tag{25}$$

定义在正方形区域 $[-1,1]^2$ 上，并由光滑的指数余弦项与沿直线$x + y = 0$的跳跃组成。这一设置使我们能够评估存在间断时线性与非线性重构格式的表现。

定义域的右上三角区域存在单位跳跃，因此可以评估不同重构格式在处理间断的同时，保持光滑区域精度的能力。

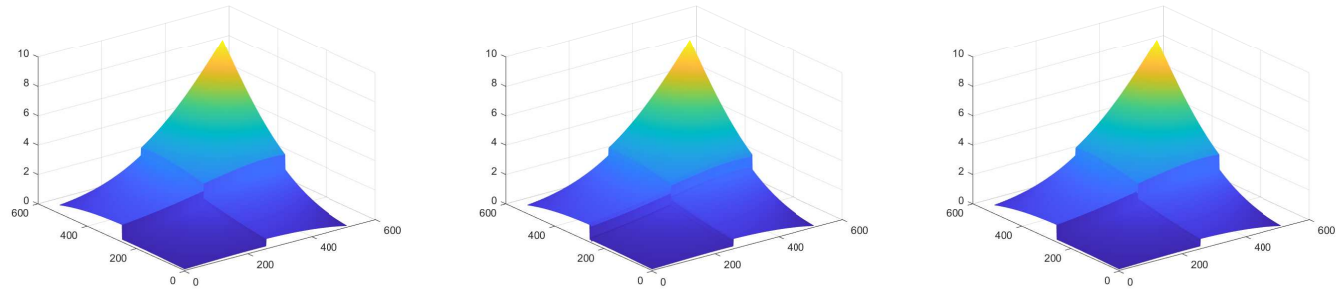
如图5所示，线性重构能够捕捉曲面的光滑趋势，但会使间断显著变模糊。相比之下，WENO-2D重构能够准确保留跳跃，同时在光滑区域保持较高的保真度。这证实了加权本质无振荡格式在处理兼具光滑与间断特征的曲面时具有更优越的能力。

计算所得误差表明，WENO 重构能够在不损害连续区域精度的情况下，最大限度地减小间断附近的偏差（$E_2^{\mathrm{LIN}} = 2.9468\text{e-}02$，而 WENO 重构的误差为 $E_2^{\mathrm{WENO}} = 7.8814\text{e-}03$）。

最后，我们分析经典二维Franke函数 [8] 的重构，该函数经修改后包含沿一条直线的间断。定义域为正方形 $[-1,1]^2$，间断既可以是水平的，也可以是垂直的。该设置使我们能够评估线性与非线性重构格式在函数值发生突变时的性能。

修正的 Franke 函数定义为

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y), & \ell(x,y) < 0, \\ 1 + f_1(x,y), & \ell(x,y) \ge 0, \end{cases} \tag{26}$$



(a) (b) (c)

图5：$[-1,1]^2$上曲面 (25) 的三维表示。子图（**a**）显示将曲面降采样至一半分辨率后的结果。子图（**b**）展示使用线性格式得到的重构，而子图（**c**）展示使用渐进式 WENO-2D 方法得到的重构。WENO 重构保留了沿 $x+y=0$ 的间断，而线性格式则平滑了跳跃。

其中

$$f_1(x,y)=\frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{4}-\frac{(9y-2)^2}{4}}+\frac{3}{4}e^{-\frac{(9x+1)^2}{49}-\frac{(9y+1)}{10}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{(9x-7)^2}{4}-\frac{(9y-3)^2}{4}}-\frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}.$$

且 $\ell(x,y)$ 表示定义该间断的直线：

$$\ell(x,y)=\begin{cases}y, & \text{for a horizontal line at } y=0,\\ x, & \text{for a vertical line at } x=0.\end{cases}$$

如图6所示，线性重构未能准确捕捉间断，导致跳跃处的过渡被平滑。相比之下，WENO 重构在光滑区域保持高精度的同时，保留了间断的尖锐性。这表明非线性格式在处理具有局部突变的曲面时具有更强的能力。

ℓ^2 范数测得的误差证实了这一现象：对于两种间断情况，线性格式产生的误差均为 $E_2^{\mathrm{LIN}}=2.6357\text{e-}02$；而对于水平间断，WENO 重构的误差为 $E_2^{\mathrm{WENO}}=1.2795\text{e-}02$，对于垂直间断则为 $E_2^{\mathrm{WENO}}=3.8177\text{e-}06$。这些结果凸显了 WENO 类格式在重构含间断曲面方面的优越性能。

总而言之，当间断为水平时，WENO 预测器显著降低了 ℓ^2 误差。对于垂直跳跃，WENO 仍优于线性预测器，但改进幅度较小，这可能是模板方向效应所致。

测试函数对应的误差值汇总于表6.1中。

函数	Case	E_2^{LIN}	E_2^{WENO}
g	–	4.2171e-01	1.8473e-05
h	–	2.9468e-02	7.8814e-03
f	水平圆盘。	2.6357e-02	1.2795e-02
f	垂直圆盘。	2.6357e-02	3.8177e-06

表1：使用线性和 WENO 重构对三个测试函数得到的离散 ℓ^2 误差。

6.2. 数字图像压缩

本小节旨在使用线性和非线性两种方法，评估多分辨率背景下重构的保真度。为此，我们测量非零系数个数（NNZ），以及 ℓ^1 和 ℓ^2 离散范数下的全局重构误差；这两种范数将在下文定义。

除非另有说明，在几乎所有数值测试中，我们都采用以下参数：$L=4$，指定多分辨率层级的数量；$\varepsilon_L=30$，截断常数；我们仅存储小于或等于此值的误差。当分辨率降低一个层级时，此值减半。还有尺寸 $N=512$，表示输入矩阵的维数。令 $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 为原始图像，我们使用离散范数 ℓ^p 测量误差，其中 $p=1,\ 2$ 定义如下：

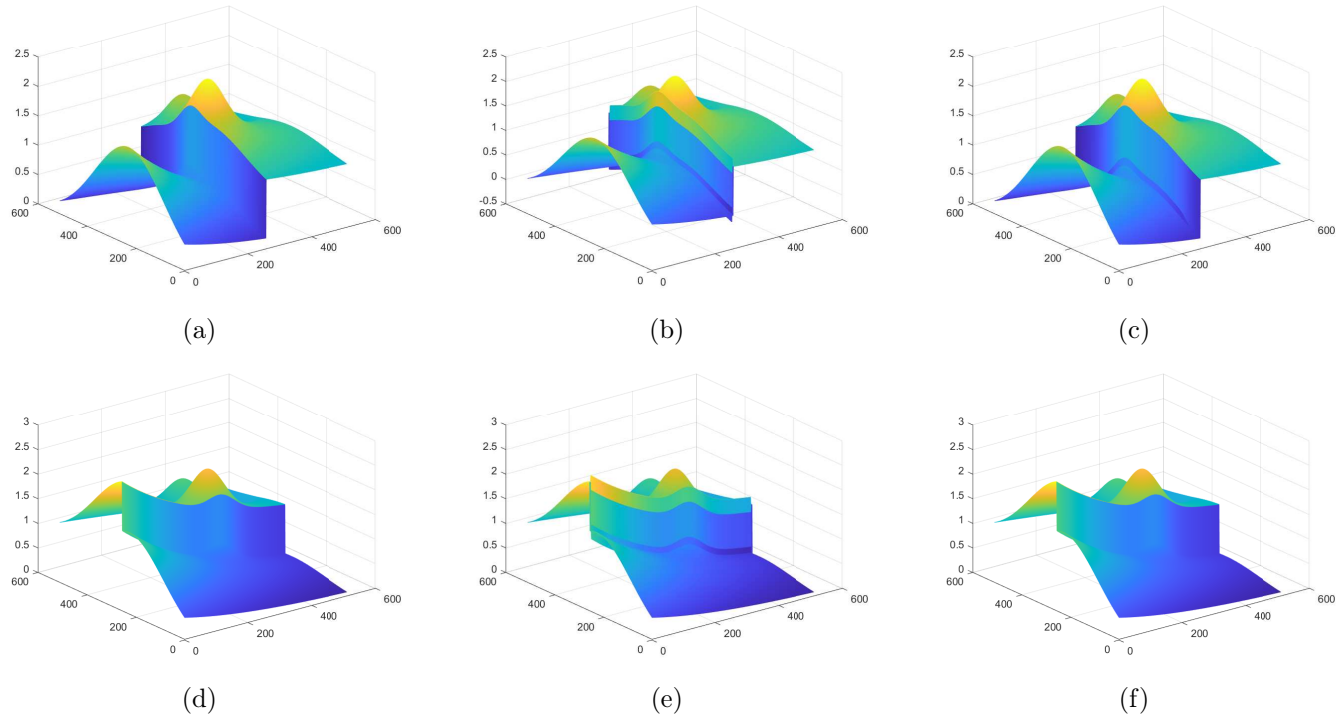


图6：带有直线间断的修正的 Franke 曲面（26）的三维可视化。顶行（子图 (a)–(c)）对应于沿 $y = 0$ 的水平跳跃：(a) 原始曲面（水平间断），(b) 使用线性预测器的重构（跳跃被平滑），以及 (c) 使用渐进式 WENO 方法的重构（保留边缘）。底行（子图 (d)–(f)）对应于沿 $x = 0$ 的垂直跳跃：(d) 原始曲面（垂直间断），(e) 线性重构，以及 (f) WENO 重构。

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \left| \tilde{A}_{i,j} - A_{i,j} \right|, \tag{27}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} \left(\tilde{A}_{i,j} - A_{i,j} \right)^2}, \tag{28}$$

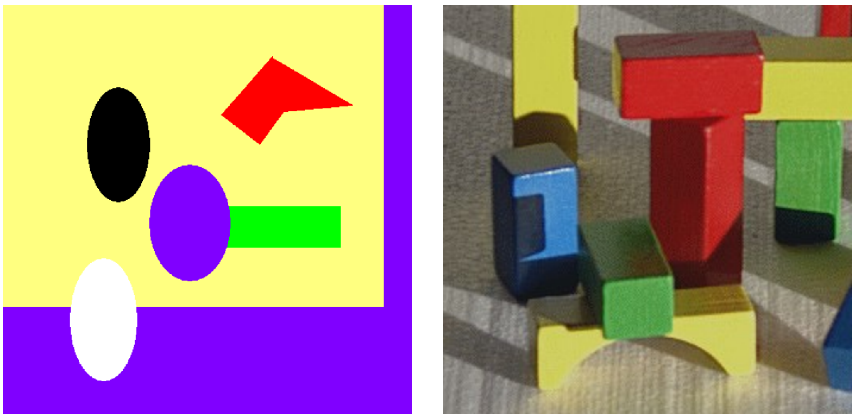
其中， A 是对用户指定的层级 L 和 ε_L应用多分辨率处理后得到的图像。对于彩色图像，我们不分别报告各个通道（R、G 和 B）的结果，而是将所有通道的非零系数个数相加，计算总非零系数个数；E_1 和 E_2 的平均重构误差为

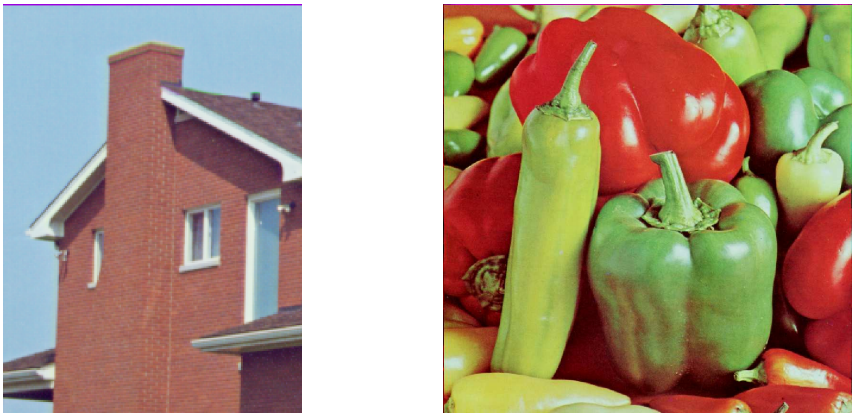
$$\mathbf{E}_i = \left(\mathbf{E}_i^R + \mathbf{E}_i^G + \mathbf{E}_i^B \right) /3, \quad i = 1, 2. \tag{29}$$

需要注意的是，我们不将数字图像表示为单个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$，而是引入额外维度来表示颜色。这样便得到三个大小为 $N \times N$ 的独立矩阵，分别对应构成数码照片的三个原色通道。图7展示了将在我们的实验中使用的原始 RGB 彩色图像。

我们首先分析图7中展示的第一幅图像。这幅图像被称为$Geometric$，是我们研究的起点。此前， [1], 已对该图像进行分析，并指出由于存在锐利边缘和几何图案，其结构特征对重建方法而言尤其具有挑战性。在我们的研究中，原始图像表示为大小为 $256 \times 256 \times 3$的张量，同时保留RGB 颜色通道。

乍一看，图8并未显示所比较的两种重建方法之间存在明显差异。即使放大图像中的特定区域，这些差异仍然很细微，难以





(c) (d)

图7：原始版本的彩色图像（RGB）**(a)** *Geometric*；**(b)** 方块；**(c)** *Red house*；**(d)** 辣椒。

通过视觉察觉。为更清楚地了解这两种方法之间的差异，表2汇总了得出结论所需的信息。

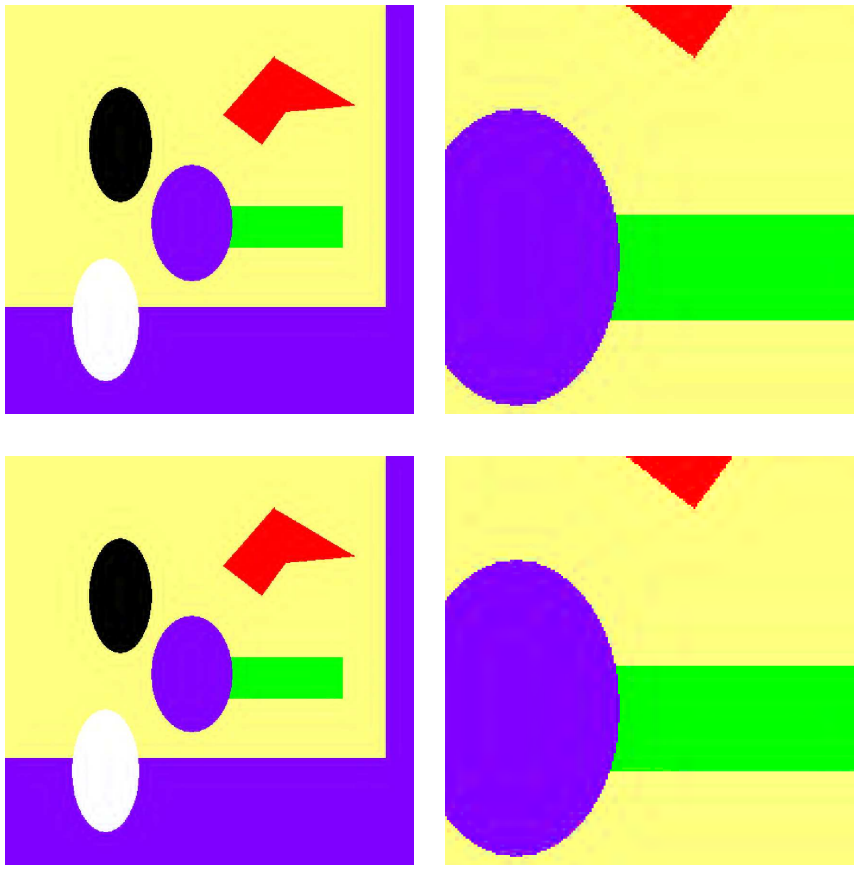
	$\varepsilon_L = 5$			$\varepsilon_L = 10$			$\varepsilon_L = 20$			$\varepsilon_L = 30$		
方法	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**
LIN	0.2257	0.6467	53562	0.5744	1.3755	39190	1.2040	2.7845	26171	1.6501	3.7677	21153
WENO	0.2040	1.0532	24140	0.5004	1.5535	21579	1.0298	2.4339	17530	1.5179	3.6463	13975

表2：*Geometric* 图像的结果，展示单元平均误差 $\mathbf{E_1}$ 和 $\mathbf{E_2}$ （见公式(27)–(29)）的数值，以及不同参数值 ε_L下的非零系数个数（NNZ）。

表2总结了*Geometric* 图像的结果。在这种情况下，就稀疏性而言，加权本质无振荡重构明显优于线性方法：在 $\varepsilon_L = 30$时，非零系数个数（NNZ）减少了约 33%，同时误差 E_1 和 E_2的数值保持相近。这表明，加权本质无振荡方法能够实现更高效的压缩，在不牺牲精度的前提下减少活跃系数的数量。在较高压缩水平下，这种改进尤为明显，此时线性格式的质量下降更快。总体而言，这些结果凸显了基于WENO的多分辨率框架在处理包含锐利边缘和几何图案的图像时具有很强的适应性，证实了其在高保真图像压缩与重构方面的稳健性和有效性。

为进一步说明这两种重构策略的数值表现，我们继续分析图7所示的第二幅图像，即彩色方块 图像。

应用线性重构方法和非线性重构方法得到的视觉结果如图9所示。



(c) (d)

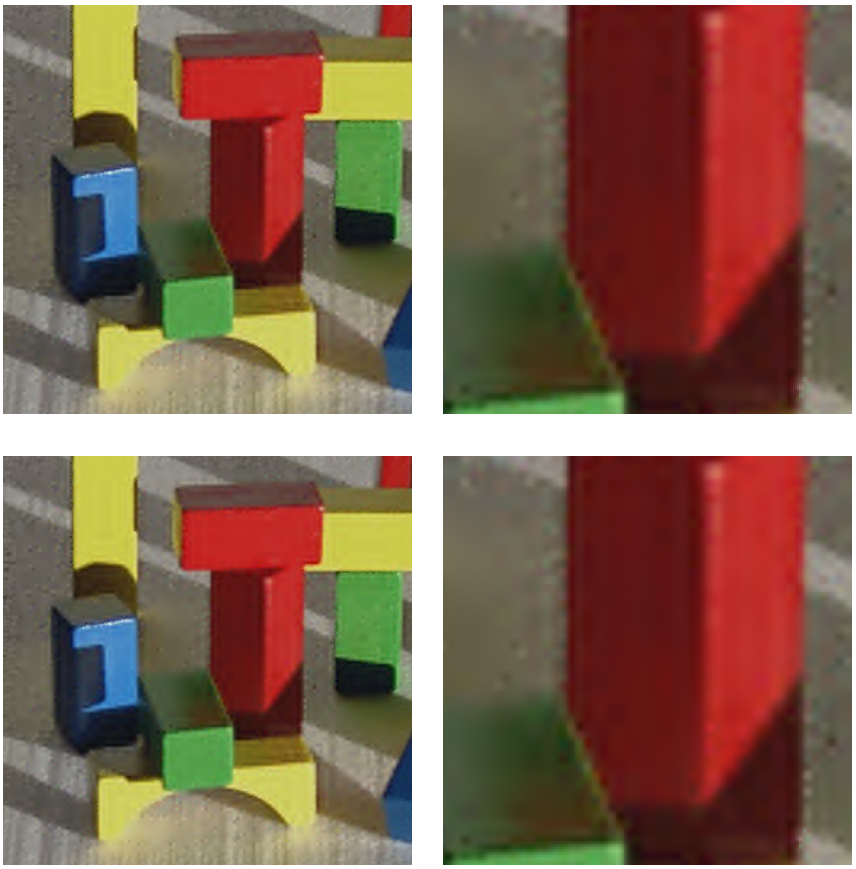
图8：采用两种方法重构的*Geometric* 图像：**(a)** 线性重构和**(c)** 渐进式双变量 WENO-2D 重构，其中 $\varepsilon_L = 30$。子图**(b)** 和**(d)** 分别展示 (a) 和 (c) 中相应高亮区域的放大（局部放大）视图，以说明边缘和间断附近的局部差异。

与前一情形相同，即使放大特定区域，仅凭目视检查也难以区分两种方法之间的差异。因此，表3给出了基于误差度量和稀疏性（非零系数个数）的定量比较，以便对两种方法进行严格评估。

	$\varepsilon_L = 5$			$\varepsilon_L = 10$			$\varepsilon_L = 20$			$\varepsilon_L = 30$		
方法	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**
LIN	0.9507	1.2950	84741	1.9548	2.6007	42682	3.0937	4.1437	16241	3.7475	5.0802	9427
WENO	1.2482	1.6772	91284	2.1258	2.8198	44954	3.1541	4.2252	16444	3.7751	5.1154	8978

表3：方块 图像的结果，给出单元平均误差 $\mathbf{E_1}$ 和 $\mathbf{E_2}$ 的值（见式 (27)–(29)），以及参数 ε_L 不同取值下的非零系数个数（NNZ）。

表3给出了方块图像的结果，报告了不同截断常数 ε_L下的重构误差（E_1, E_2）和非零系数个数（NNZ）。随着 ε_L 增加，两种方法均呈现出预期趋势：误差上升，而NNZ下降，反映了准确性与压缩之间的权衡。在所有阈值下，线性预测器的误差均略小，而加权本质无振荡产生了几乎相同的稀疏水平。在较高压缩水平下，两种方案之间的差异变得很小；此时，加权本质无振荡甚至在保持相当准确性的同时，使NNZ略有降低。总体而言，在该测试中两种方法的表现非常相似，表明加权本质无振荡提供了一种稳定可靠的替代方案，能够在强压缩条件下有效保留间断。



(c) (d)

图9：使用两种方法重构的方块 图像：**(a)** 线性重构和**(c)** 渐进式双变量加权本质无振荡-2D 重构，其中 $\varepsilon_L = 30$。子图**(b)** 和**(d)** 分别展示了 (a) 和 (c) 中突出显示区域的放大（缩放）视图，以说明边缘和间断附近的局部差异。

现在，我们考虑图7所示的第三幅图像，称为*Red house*。在此情况下，原始图像（a）的尺寸为 $256 \times 256 \times 3$，其中 $N = 256$ 对应空间分辨率，第三个维度则对应三个颜色通道（RGB）。

我们按照前面各个案例的方式继续进行，并给出相应表格，以突出显示两种重构方法之间在图10中无法通过视觉辨别的差异。

	$\varepsilon_L = 5$			$\varepsilon_L = 10$			$\varepsilon_L = 20$			$\varepsilon_L = 30$		
方法	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**
LIN	0.8846	1.2167	82358	1.7732	2.4516	45456	2.8884	4.0535	19231	3.5162	5.0635	11737
WENO	1.2150	1.6652	91118	2.0398	2.8044	46110	3.0459	4.2792	19152	3.6141	5.2142	11864

表4：*Red house* 图像的结果，显示了单元平均误差 $\mathbf{E_1}$ 和 $\mathbf{E_2}$ （见公式 (27)–(29)）的数值，以及参数 ε_L 取不同值时的非零系数个数 (NNZ)。

表 4 比较了 LIN 和 WENO 在不同截断常数 ε_L下的重构误差（E_1, E_2）和稀疏性（NNZ）表现。在较低阈值下，例如 $\varepsilon_L = 5$ 和 $\varepsilon_L = 10$，线性预测器产生的误差较小，非零系数也略少，因此表示更加准确、紧凑。相比之下，在较高阈值下，即 $\varepsilon_L = 20$ 和 $\varepsilon_L = 30$，WENO 重构的误差更低，且 NNZ 值相当甚至更小。总体而言，在整个压缩水平范围内，两种方法的表现相似，这表明在这一特定情况下，非线性 WENO 自适应的表现不逊于



(c) (d)

图10：使用两种方法重构的$Red\ house$ 图像：**(a)** 线性重构和**(b)** 渐进式双变量 WENO-2D 重构，其中 $\varepsilon_L = 30$。子图**(c)** 和**(d)** 分别放大了(a)和(b)中标出的相应区域，以展示边缘和间断附近的局部差异。

线性格式，同时在具有较陡峭跃变的区域保持稳健。

最后，我们以图7所示的第四幅图像结束分析，该图像是著名的辣椒 测试图像，其特点是色彩变化平滑且具有弯曲结构。

线性和非线性重建方法的应用结果如图11所示。然而，与前一种情况一样，仅凭目视检查，即使放大特定区域，也无法发现这两种方法之间的显著差异。因此，需要基于误差度量和非零系数个数（NNZ）进行定量分析，才能恰当地评估这两种方法的性能。相关信息见表5。

	$\varepsilon_L = 5$			$\varepsilon_L = 10$			$\varepsilon_L = 20$			$\varepsilon_L = 30$		
方法	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$	**NNZ**
LIN	2.0410	2.7260	248514	3.6066	4.7234	90166	4.8058	6.4947	30356	5.4736	7.5959	17409
WENO	2.1114	2.8487	247205	3.6544	4.8285	89663	4.8307	6.6077	31289	5.5066	7.7393	18340

表5：辣椒 图像在参数 ε_L 取不同值时的单元平均误差 $\mathbf{E_1}$ 和 $\mathbf{E_2}$ （见公式（27）–（29））以及非零系数个数（非零系数个数）的结果。

表5给出了辣椒 图像的结果。在这种情况下，趋势与$Red\ house$图像所观察到的相反。对于较低的阈值，例如 $\varepsilon_L = 5$ 和 $\varepsilon_L = 10$，WENO 重构产生的误差略小于线性预测器，在非零系数数量相近的情况下实现了精度的边际提升。



(d) (e) (f)

图11：使用线性和非线性多分辨率方法重构辣椒 图像。子图**(a)–(c)** 对应线性重构：**(a)** 完整图像，**(b)–(c)** 为放大区域，展示边缘光滑性。子图**(d)–(f)** 展示使用所提出的非线性渐进WENO方法获得的结果：**(d)** 完整图像，**(e)–(f)** 为对应的放大区域，展示了边缘保持效果的提升和伪影的减少。

然而，对于较高的阈值（$\varepsilon_L = 20$ 和 $\varepsilon_L = 30$），线性方法得到的误差略低，而两种方法呈现出几乎相同的稀疏模式。总体而言，两种重构在全部压缩水平范围内的表现非常相似，表明对于该图像它们的性能实际上相当，且加权本质无振荡在强压缩下仍保持良好的稳定性。

7. 结论与未来工作

本文提出了一种非线性渐进阶插值算法，在单元平均值场景下改进了加权本质无振荡（WENO）方法。这种数据离散化特别适用于数字图像处理等应用。与标准WENO方法相比，主要区别在于求值步骤，该步骤涉及在更细离散尺度上计算平均值。

我们将所提出的方法应用于基于 Harten 多分辨率框架[11]的数字图像压缩。这种新的近似方法为修改所采用的离散化类型提供了可能；例如，可以使用其他类型的平均值，如帽平均或其任意卷积。

这些技术也可应用于偏微分方程的数值求解。此外，其他插值策略，例如径向基函数（RBF）方法（见 [5]），也可采用本文所介绍的同一算法框架加以实现。

总之，这一推广从理论和实践角度都开辟了广泛的可能性。

参考文献

[1] S. Amat, J. Liandrat, J. Ruiz, J. C. Trillo, (2016年): “关于非线性均值及其使用多分辨率格式进行图像压缩的应用”, 《数值算法》, 71, 729-752。[2] S. Amat, J. Ruiz, C.W. Shu, D. F. Yáñez, (2020年): “一种在间断附近具有接近精度阶的渐进式WENO-$2r$ 算法”, 《*SIAM*数值分析杂志》, 58(6), 3448-3474。[3] F. Aràndiga, A. M. Belda, P. Mulet, (2010年): “点值WENO多分辨率在稳定图像压缩中的应用”, 《科学计算杂志》, 43(2), 158–182。[4] F. Aràndiga and P. Mulet, V. Renau, (2012年): “非可分二维加权ENO插值”, 《应用数值数学》62, 8, 975–987。[5] R. Cavoretto, A. De Rossi,E. Perracchione, (2016年): “通过基于块的搜索技术高效计算单位分解插值函数”, 《计算数学及其应用》71, 2568–2584。[6] A. Cohen: 《小波方法的数值分析》, 数学及其应用研究, 爱思唯尔, 阿姆斯特丹, 2003年。[7] G. E. Fasshauer: 《结合Matlab的无网格近似方法》, 世界科技出版公司, 新加坡, 2007年。[8] Franke, R. (1979年): “几种散乱数据插值方法的批判性比较”, (编号NPS53- 79-003)。[9] M. Gasca, E. A. Lebrón, (1987年): “关于多元插值的Aitken-Neville公式”, 北荷兰数学研究, 133, 133–140。[10] G. Jiang, C.-W. Shu, (1996年): “加权ENO格式的高效实现”, 《计算物理学杂志》, 126(1), 202-228。[11] A. Harten (1996年): “数据的多分辨率表示”, 《*SIAM*数值分析杂志》, **33**(3), 1205–1256。[12]A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R. Chakravarthy, (1987年): “一致高阶精度的本质无振荡格式, III”, 《计算物理学杂志》, 71(2), 231-303。[13] A. Harten, S. Osher, (1987年): “一致高阶精度的无振荡格式。I”, 《*SIAM*数值分析杂志》, 24(2), 279–309。[14] D. Levin, (1998年): “移动最小二乘的近似能力”, 《数学计算》, 67(224):1517–1531。[15] X.-D. Liu, S. Osher, T. Chan, (1994年): “加权本质无振荡格式”, 《计算物理学杂志》, 115, 200-212。[16] P. Mulet, J. Ruiz-Álvarez, C.W. Shu, D. F. Yáñez, (2024年): “非可分渐进式多元WENO-2r点值”, 《应用数值数学》。[17] C.-W. Shu, (1999年): “对流主导问题的高阶加权本质无振荡格式”, 《*SIAM*评论》, 51(1), 82–126。[18] H. Wendland: 《散乱数据近似》, 剑桥大学出版社, 2003年。[19] Y.-T. Zhang, C.-W. Shu (2016年): “ENO和WENO格式”, 载于R. Abgrall和C.-W. Shu（编）, 《双曲问题数值方法手册: 基本问题与基础问题》, 《数值分析手册》, 第17卷, 爱思唯尔, 第xxi–xxiii页。