无穷维中的 Drinfeld 对应

PRAFUL RAHANGDALE

摘要。本文在无穷维情形下，建立泊松李群与其无穷小对应物——李双代数之间的 Drinfeld 对应。具体而言，我们将这一对应推广到以便利向量空间为模型的正则李群，尤其关注以核 Fréchet 空间和核 Silva 空间为模型的李群。值得关注的重要例子包括 $C^\infty(\mathbb{S}^1, G)$ 的光滑环群和 $C^\omega(\mathbb{S}^1, G)$ 的解析圈群，其中 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ G 是单连通实李群；此外还有 $\mathrm{Diff}^\infty(M)_0$ 和 $\mathrm{Diff}^\omega(M)_0$——它们分别是紧流形 M 上光滑微分同胚群和实解析微分同胚群的单位连通分支的万有覆盖群。

arXiv:2603.04634v1 [math-ph] 4 Mar 2026

目录

1. 引言 2 1.1. 文章结构 3 2. 无穷维流形上的泊松结构 4 3. 泊松李群及其在单位元处的线性化 8 4. 李双代数、李-泊松空间与 Manin 三元组 12 5. 由权空间分解得到的 Manin 三元组 15 5.1. 光滑向量及其权空间分解 16 5.2. 解析向量及其权分解 18 5.3. 从 C^*-代数构造 Manin 三元组 21 5.4. 余括号公式 22 5.5. Manin 三元组的例子 22 6. 李双代数的积分 24 6.1. 雅可比恒等式 25 6.2. 无穷维中的 Drinfeld 定理 26 7. 巴斯蒂亚尼微积分框架下关于泊松结构的评述 30 8. 核弗雷歇空间或核 Silva 空间模型上的泊松李群的 Drinfeld 定理 30 8.1. 无穷维情形下的 Serre-Swan 定理 31 8.2. Schouten 括号 34 8.3. 左不变/右不变多向量场的逼近 35 8.4. 乘法双向量与 Schouten 括号 36 8.5. 核弗雷歇空间或核 Silva 空间模型上的正则泊松李群的 Drinfeld 定理 36 8.6. 例子 39 致谢 42 附录 A. 无穷维微积分的概念与符号 42 A.1. 空间的拓扑性质 42 A.2. 微分演算框架 42 A.3. 便利微积分 43 A.4. 多重线性映射空间 43 A.5. $L^2(T'M)$ 上的光滑向量丛结构 43 A.6. 便利流形、丛与李群 44 A.7. 微分学参考文献 45

2020年 数学主题分类。主要分类：53D17，17B62；次要分类：58B25，22E65，37K10。关键词和短语。泊松李群，李双代数，无穷维流形。1

参考文献 45

1. 引言

泊松结构为描述经典系统的动力学提供了数学框架，其中相空间是一个光滑流形或李群。在此背景下，一项基本任务是将动力学限制在某些子流形上；拥有足够多此类子流形的系统称为可积系统。尽管有限维情形下的泊松结构以及识别可积系统的方法已广为人知，但许多具有重要物理意义的系统——例如科尔特韦–德弗里斯（KdV）层级和非线性薛定谔方程——都在无穷维相空间中演化 [9, 10, 16, 19]。我们的目标是建立一个数学框架，通过定义在无限维局部凸拓扑向量空间模型上的流形的泊松结构来描述这类动力学。

（为方便读者，本文通篇使用的无限维微积分相关基本概念和符号汇集于附录A。）

泊松李群及其无穷小对应物李双代数的概念由 Drinfeld 在 [7], 中引入，其中建立了有限维情形下泊松李群与李双代数之间的一一对应。我们探讨一个框架，使这一对应在无限维情形下成立。将有关泊松结构的结果推广时会遇到各种困难，因此文献中出现了不同的处理方法（例如， [5, 25, 31]），相关综述见 [15]。主要而言，以下障碍阻碍了有限维技巧的直接应用：

(1) 对于 $f \in C^\infty(M)$，微分 $df(x)$ 的集合可能与余切空间 T_x^*M 不一致：

$$\{df(x) \mid f \in C^\infty(M), x \in M\} \neq T_x^*M.$$

(2) 哈密顿向量场可能不存在，因为并非 $C^\infty(M)$ 上的所有导子都能由流形上的光滑向量场表示。(3) 多重线性形式与切空间的外幂之间的同构失效： $L^k_{\text{alt}}(T_x^*M) \ncong \hat{\wedge}^k T_xM$。

文献 [31] 研究了 Banach 李双代数与 Manin 三元组之间的对应。文中证明，泊松李群 $(G, \mathbb{F}, \pi)$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 同时具有李双代数结构和相对于 $\mathfrak{b} := \mathbb{F}_e$ 的李-泊松空间结构。本文对一个开放问题给出了肯定的回答：在 $\mathfrak{g}$ 是某个单连通Banach李群的李代数的条件下，Banach 李双代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta)$ 可以积分为泊松李群结构 $(G, \mathbb{F}_{\mathfrak{b}}, \pi)$（见 [31,备注 5.14]）。

在代数情形中，文献 [1, 2, 3] 探讨了环代数上的标准李双代数结构及其经典扭曲。文献 [22] 给出了光滑环代数上的李双代数结构的一种构造。对于作为拓扑空间正则、且以核 Fréchet 空间或核 Silva 空间为模型的流形，以下特殊结论成立：

(1) 光滑凸起函数的存在性 [20, 16.10] 意味着 $\{df(x) \mid f \in C^\infty(M)\} = T_x^*M$。(2) $C^\infty(M)$ 上连续导子的空间与光滑向量场的空间拓扑同构，从而保证哈密顿向量场 $X_f := \{-, f\} \in \Gamma(TM)$ [29] 的存在。(3) Grothendieck 在核情形下对“拓扑问题”的解表明，$L^k_{\text{alt}}(T_x^*M) \cong \hat{\wedge}^k T_xM$ 是一个拓扑同构 [17, 推论 2, 21。2], 其中 $\hat{\wedge}$ 表示在射影张量积拓扑下完备化的反对称张量积。

我们证明，在这个特殊情形下，Drinfeld 对应（定理 8.16）与经典的有限维情形十分相似。我们旨在推广这一对应。其中一个方向在相当一般的条件下成立：我们证明，泊松双向量的微分

π 在方便泊松李群 $(G,\ \mathbb{F},\ \pi)$ 单位元处定义了李代数 $\mathfrak{g}$ 上的李双代数结构 $(\mathfrak{g},\ \mathbb{F}_e,\ d\pi(e))$（定理 6.2）。

如果 G 是单连通正则李群，则反向结论也成立。我们证明，在单连通正则李群上的泊松结构范畴 $\mathbf{PLGrp}^{\mathrm{sc}}_{\mathrm{reg}}$与李双代数范畴 $\mathbf{LieBiAlg}^{\mathrm{reg}}$之间存在一个左伴随积分函子（记为“Int”）（定理 6.8）。

1.1. **文章结构**。 本文旨在基于哈密顿向量场的存在性，证明 Drinfeld 定理在无限维情形下的两个版本。对于一个以便利空间 M 为模型的无限维方便光滑流形 E，我们首先在定义 $(M,\mathbb{F},\pi)$ 中扩展泊松结构的概念。2.2。

(为简便起见，我们分别将方便光滑流形称为光滑流形，将方便光滑态射称为光滑态射。)

随后，我们在便利框架下讨论泊松李群结构。在第4节中，我们证明，泊松李群结构 $(G,\mathbb{F}_{\mathfrak{b}},\pi)$ 在单位元处的线性化在 $\mathfrak{g}$ 上诱导出李双代数结构 $(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$（定理6.2）。此外，若假设哈密顿向量场存在（$\pi^\sharp(\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}) \subseteq TG$），我们证明 $(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$ 是李双代数，且 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{b}$ 是李-泊松空间。第4节还讨论了 Manin 三元组 $(\mathfrak{d},\mathfrak{g},\mathfrak{b})$ 与李双代数结构 $(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$ 之间的一一对应。

在第5节中，我们给出一种方法，用以构造来自 C^*-代数的 Manin 三元组例子，该代数配备环面不变的忠实迹态。我们给出 Manin 三元组的显式例子，包括：

(1) $C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathfrak{g})$；实半单李代数 $\mathfrak{g}$的光滑环代数。(2) $C^\omega(\mathbb{S}^1,\mathfrak{g})$；实半单李代数 $\mathfrak{g}$的解析环代数。(3) $\Gamma^\infty(T\mathbb{S}^1)$； $\mathbb{S}^1$上的光滑向量场空间。(4) $\Gamma^\omega(T\mathbb{S}^1)$； $\mathbb{S}^1$上的实解析向量场空间。

在第6节中，我们在两种情形下证明 Drinfeld 定理：哈密顿向量场存在时以及不存在时。

定理*1.1*（见定理*6.2*）。设（G，$\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}$，$\pi$）是以$\mathfrak{g}$为李代数的方便泊松李群。设 $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{g}'$ 是一个便利空间，使得典范映射 $incl:\ \mathfrak{b}\to\mathfrak{g}',\ \alpha\mapsto\alpha$ 是光滑的，并且余伴随作用 $Ad^*:\ G\times\mathfrak{g}'\to\mathfrak{g}'$ 限制为 $\mathfrak{b}$上的光滑作用。则 π 在单位元处的微分$\delta := d\pi(e)$ 在 $\mathfrak{g}$上诱导唯一（在同构意义下）的便利李双代数结构（$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{b}$，δ），其中 $\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}(e) = \mathfrak{b}$。此外，若 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{b}$ 是弗雷歇空间或 *Silva* 空间，则它定义一个拓扑（连续）李双代数结构。

定理 *1.2*（见定理 *6.3*）。设 G 是一个单连通 *convenient* 正则李群。设 $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{g}'$是一个便利空间，使得典范映射 $incl:\ \mathfrak{b}\to\mathfrak{g}', \alpha\mapsto\alpha$ 是光滑的，并且余伴随作用 $Ad^*:\ G\times\mathfrak{g}'\to\mathfrak{g}'$ 限制为在 $\mathfrak{b}$ 上的光滑作用。那么，便利李双代数结构 $(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$ 可积分为方便泊松李群结构 $(G,\mathbb{F}_{\mathfrak{b}},\pi)$，其中 $\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}$ 由 G 对 $\mathfrak{b}$ 的右平移作用生成（即 $\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}(g) := R_g^*\mathfrak{b}$），而 π 由 G 的群 *1*- 余循环 Θ 的右平移给出，其中 Θ 是对公式 *(6.1)* 所给的李代数 *1*-余循环 δ进行积分所得。

定理 1.3 (见定理 6.4)。 设 G 是一个具有便利李代数 $\mathfrak{g}$的单连通正则李群。设 $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{g}'$ 是一个便利空间，使得典范映射 $\mathrm{incl}:\ \mathfrak{b}\to\mathfrak{g}', \alpha\mapsto\alpha$ 是光滑的，并且余伴随作用 $\mathrm{Ad}^*:\ G\times\mathfrak{g}'\to\mathfrak{g}'$ 限制为在 $\mathfrak{b}$上的光滑作用。那么，以下断言在同构意义下等价：

(1) $(G,\mathbb{F}_{\mathfrak{b}},\pi)$ 是一个泊松李群结构，使得对每个 $x\in G$ 有 $\pi^\sharp(\mathbb{F}_x)\subset T_xG$。*(2)* $(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$ 是一个李双代数结构，且 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{b}$ 是一个李-泊松空间。*(3)* $(\mathfrak{d}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{b},\mathfrak{g},\mathfrak{b})$ 是一个 *Manin* 三元组。

稍后我们将证明，方便的泊松李群与其李双代数之间的对应，扩展为 1-连通正则李群上泊松结构的范畴 $\mathbf{PLGrp}^{\mathrm{sc}}_{\mathrm{reg}}$ 与李双代数范畴 $\mathbf{LieBiAlg}^{\mathrm{reg}}$ 之间的范畴等价。

定理 *1.4*（$PLGrp^{sc}_{reg}$ 与 $LieBiAlg^{reg}$ 之间的范畴等价，见定理 *6.8*）。微分函子 $\mathcal{L}ie$ 通过取单位元处的切映射来定义，并建立 $PLGrp^{sc}_{reg}$ 与 $LieBiAlg^{reg}$ 之间的范畴等价。其逆函子在自然同构意义下唯一，是一个左伴随函子（积分，记作*"Int"*）。这意味着，$LieBiAlg^{reg}$ 中的每个李双代数结构 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta)$，都可积分为相应李群 G 上唯一的泊松李群结构 $(G, \mathbb{F}, \pi)$，使得 $\mathcal{L}ie(G) = \mathfrak{g}$。

在最后一节中，我们讨论建模空间为核 Fréchet 空间或核 Silva 空间的李群这一特殊情形。我们讨论符合这一设定的例子，例如有限维实李群 G的光滑环群 $C^\infty(\mathbb{S}^1, G)$ 和实解析环群 $C^\omega(\mathbb{S}^1, G)$，以及 $\mathrm{Diff}^\infty(M)_0$和 $\mathrm{Diff}^\omega(M)_0$——它们分别是紧流形 M上光滑微分同胚群和实解析微分同胚群的单位连通分支的万有覆盖群。

2. 无穷维流形上的泊松结构

设 $\pi_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} \to M$ 是光滑流形 M 上的光滑向量丛，其典型纤维为便利空间 F。令 $L^2_{skew}(F)$ 表示F上的连续斜对称双线性形式空间，并赋予其在 $F \times F$的有界子集上一致收敛的拓扑。我们将 M 上的向量丛 $L^2_{skew}(\mathbb{F})$ 定义为

$$L^2_{skew}(\mathbb{F}) := \bigcup_{x \in M} L^2_{skew}(\mathbb{F}_x)$$

其中，$L^2_{skew}(\mathbb{F}_x)$ 表示 $\mathbb{F}_x$上的所有斜对称有界双线性形式所构成的空间，它通过 [20, 命题 56] 赋予 convenient 结构。新丛的纤维定义为 $L^2_{skew}(\mathbb{F})_x := L^2_{skew}(\mathbb{F}_x)$。丛投影 $\pi_{skew}: L^2_{skew}(\mathbb{F}) \to M$ 将 $\omega \in L^2_{skew}(\mathbb{F}_x)$ 映射到 $x \in M$。

对于一个丛 $\mathbb{F}$ 在开集 $U \subseteq M$ 上的局部平凡化 $\tau: \mathbb{F}|_U \to U \times F$，我们对每个 $x \in U$，都有一个逐纤维拓扑同构 $\tau_x: \mathbb{F}_x \to F$。

我们将 $L^2_{skew}(\mathbb{F})$ 在 U 上的诱导局部平凡化定义为

$$\Theta_\tau : L^2_{skew}(\mathbb{F})|_U \to U \times L^2_{skew}(F)$$
$$\Theta_\tau(\omega) := (x, (\tau_x^{-1})^*\omega)$$

其中 $x = \pi_{skew}(\omega)$，且拉回 $(\tau_x^{-1})^*\omega \in L^2_{skew}(F)$ 对所有 $u, v \in F$由

$$((\tau_x^{-1})^*\omega)(u, v) := \omega(\tau_x^{-1}(u), \tau_x^{-1}(v)).$$

该平凡化映射的逆由下式给出

$$\Theta_\tau^{-1} : U \times L^2_{skew}(F) \to L^2_{skew}(\mathbb{F})|_U$$
$$(x, \eta) \mapsto \tau_x^*\eta$$

其中 $\tau_x^*\eta \in L^2_{skew}(\mathbb{F}_x)$ 由 $(\tau_x^*\eta)(w_1, w_2) = \eta(\tau_x(w_1)\ \tau_x(w_2))$ 对 $w_1, w_2 \in \mathbb{F}_x$ 定义.

为验证这定义了一个光滑向量丛结构，设 $\sigma: \mathbb{F}|_V \to V \times F$为另一个局部平凡化，使得 $U \cap V \neq \emptyset$。$\mathbb{F}$ 的转移映射由光滑映射$x \mapsto \sigma_x \circ \tau_x^{-1} \in GL(F)$给出。

$L^2_{skew}(\mathbb{F})$ 在 $U \cap V$上相应的转移映射为:

$$\Theta_\sigma \circ \Theta_\tau^{-1} : (U \cap V) \times L^2_{skew}(F) \to (U \cap V) \times L^2_{skew}(F)$$
$$(x, \eta) \mapsto (x, (\sigma_x^{-1})^*(\tau_x^*\eta)) = (x, (\tau_x \circ \sigma_x^{-1})^*\eta).$$

由于映射 $x \mapsto \tau_x \circ \sigma_x^{-1} \in GL(F)$ 是光滑的，且有界双线性形式上的拉回运算光滑地依赖于算子 $\tau_x \circ \sigma_x^{-1}$，诱导到$GL(L^2_{skew}(F))$ 的转移映射也是光滑的。因此，$L^2_{skew}(\mathbb{F})$ 是 M 上的光滑向量丛。

定义2.1（弱子丛）。设 $p: E \to M$ 是以光滑流形 M 为底空间的便利向量丛。赋予 convenient 结构的向量子丛 $p': F \to M$ 称为 $p: E \to M$ 的弱子丛，若典范映射 $i_F: F \to E,\ v \mapsto v$ 相对于向量丛 $p': F \to M$ 的 convenient 结构是光滑向量丛态射。

定义2.2（泊松结构）。设 M 是以便利空间 E 为模型的便利流形。设 $\mathbb{F}$ 是 $T'M$ 的弱子丛，具有典范光滑向量丛态射 $i_{\mathbb{F}}$： $\mathbb{F} \to T'M$，使得对于每个 $x \in M$， $\mathbb{F}_x$ 在 T_xM 中分离点。

设 $\pi \in \Gamma(M, L^2_{\text{skew}}(\mathbb{F}))$ 是一个光滑双向量，且对于所有满足 $d\alpha = d\beta = d\gamma = 0$的局部截面 α， β， $\gamma \in \Gamma(\mathbb{F})$，以下条件成立：

(1) 微分 $d(\pi(\alpha, \beta))$ 唯一地经由 $\mathbb{F}$ 分解，即存在 $d(\pi(\alpha, \beta)) \in \Gamma(\mathbb{F})$，使得

$$d(\pi(\alpha, \beta)) = i_{\mathbb{F}} \circ \widetilde{d(\pi(\alpha, \beta))}.$$

(2) 雅可比恒等式

$$\pi\big(\alpha, \widetilde{d(\pi(\beta, \gamma))}\big) + \pi\big(\beta, \widetilde{d(\pi(\gamma, \alpha))}\big) + \pi\big(\gamma, \widetilde{d(\pi(\alpha, \beta))}\big) = 0$$

成立。

那么，二元组 $(M, \mathbb{F}, \pi)$ 称为泊松结构。

推论 2.3。设 $(M, \mathbb{F}, \pi)$ 是一个泊松结构。那么，子代数

$$\mathcal{A}_{\mathbb{F}} := \{f \in C^\infty(M) : df \textit{ factors as } i_{\mathbb{F}} \circ \widetilde{df} \textit{ for } \widetilde{df} \in \Gamma(\mathbb{F})\}$$

配备由这些线性映射诱导的便利向量空间结构

$$\mathcal{A}_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\text{incl}} C^\infty(M, \mathbb{R}), f \mapsto f,$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\widetilde{d}} \Gamma(\mathbb{F}), f \mapsto \widetilde{df}$$

相对于有界李括号构成一个泊松代数

$$\{-,-\} : \mathcal{A}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{A}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{A}_{\mathbb{F}}, \{f, g\} := \pi(\widetilde{df}, \widetilde{dg}).$$

证明。泊松括号

$$\{-,-\} : \mathcal{A}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{A}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{A}_{\mathbb{F}}, (f, g) \mapsto \pi(\widetilde{df}, \widetilde{dg})$$

是有界的，因为 $\pi \in L^2_{skew}(\mathbb{F})$ 是光滑的，微分算子 $\widetilde{d}$： $\mathcal{A}_{\mathbb{F}} \to \Gamma(\mathbb{F})$ 是一个有界算子，因为 $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}$ 上的拓扑是由映射 incl 和 d所诱导的初始拓扑，并且求值 $(\pi, df, dg) \mapsto \pi(df, dg)$ 是有界的（在便利框架中，求值映射总是光滑的 [20,推论3。13]）。现在，考虑

$$\{\{f, g\}, h\} = \pi(d(\pi(\widetilde{df}, \widetilde{dg})), \widetilde{dh}).$$

因此， $\{-,-\}$ 的雅可比恒等式由 π 的雅可比恒等式推出（定义 2.2 的条件 (2)）。为证明 $\{-,-\}$ 满足莱布尼茨恒等式，我们注意到

$$\{f, gh\} = \pi(\widetilde{df}, \widetilde{d(gh)}) = \pi(\widetilde{df}, g\widetilde{d(h)} + \widetilde{d(g)}h) = g\{f, h\} + \{f, g\}h.$$

□

注记 2.4。请注意，推论 3.3 的逆命题未必总是成立。设 $\mathcal{A} \subseteq C^\infty(M)$ 是一个配备有有界泊松括号的泊松代数。那么，由 $\mathbb{F}$ 形成的丛

$$\mathbb{F}_x := \{df(x) \mid f \in \mathcal{A}\}$$

可能不具有光滑向量丛结构。即使 $\mathbb{F}$ 具有光滑向量丛结构，也不能保证光滑双向量 $\pi \in \Gamma(L^2_{skew}(\mathbb{F}))$ 的存在，因为对于每个无限维希尔伯特流形 H，在 $C^\infty(M)$ 上存在泊松括号，使得函数 $\{f, g\}$对于 $f, g \in \mathcal{A}$ 不总是取决于 f 和 g 的一阶喷射（见 [37]）。这是因为对于每个无限维希尔伯特流形，都存在二阶运算切向量（见 [20, 注 28.8]）。但在一种特殊情况下，当一个流形模型化于具有有界近似性质的光滑仿紧便利流形上时（见 [20, 6.6]），文献 [38] 表明，泊松括号的对偶映射 $\widehat{\{-,-\}}' : C^\infty(M)' \to L^2_{skew}(C^\infty(M)\ \mathbb{R})$ 可通过向量丛 $L^2_{skew}(T'M)$ 的光滑截面进行分解。

Re标记 2.5。 如果锚映射 $M, \mathbb{F}, \pi$，我们将泊松结构 $(M, \mathbb{F}, \rho)$ 记作 $(M, \mathbb{F}, \rho)$

$$\rho := \pi^\sharp : \mathbb{F} \to T''M, \quad \alpha \mapsto \pi(\alpha, -)$$

取值于 $TM \subseteq T''M$。注意， ρ是一个光滑丛态射，因为 $\pi\colon M \to L^2_{\text{skew}}(\mathbb{F})$通过局部平凡化，并利用多线性映射的指数律（[20, 命题 5.2]），可知 π 是光滑的，当且仅当诱导的丛映射 $\widehat{\pi}: \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$按纤维定义为 $\alpha_x \mapsto \pi(x)(\alpha_x, -) = \rho(\alpha_x)$是光滑的。

为证明余限制 $\rho\colon \mathbb{F} \to TM$ 也是光滑的，我们将证明典范包含映射 $\text{incl}\colon TM \hookrightarrow T''M$（将 $X \mapsto X$对应起来）是光滑嵌入。令 E为刻画 TM各纤维的便利向量空间。incl 在某个纤维上的限制是典范求值映射 $\iota_E\colon E \to E''$，定义为对所有 $v \in E$ 和 $l \in E'$， $\iota_E(v)(l) := l(v)$。

根据便利框架中的定义，像 ι_E 这样的有界线性映射是光滑嵌入，当且仅当对于一条曲线 $c\colon \mathbb{R} \to E$，该曲线光滑，当且仅当复合映射 $\iota_E \circ c\colon \mathbb{R} \to E''$ 是 E'' 中的一条光滑曲线。

如果 c 是 E 中的一条光滑曲线，那么由于 ι_E 是有界线性算子，复合映射 $\iota_E \circ c$ 光滑。反过来，假设复合映射 $\iota_E \circ c\colon \mathbb{R} \to E''$ 是一条光滑曲线。对于任意连续线性泛函 $l \in E'$，由 $\Phi \mapsto \Phi(l)$ 定义的点求值映射 $\text{ev}_l\colon E'' \to \mathbb{R}$ 是有界线性算子，因此是光滑的。因此，复合映射 $\text{ev}_l \circ (\iota_E \circ c)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一条光滑曲线。我们注意到，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，都有

$$(\text{ev}_l \circ \iota_E \circ c)(t) = \iota_E(c(t))(l) = l(c(t)) = (l \circ c)(t).$$

这表明，对于每个连续线性泛函 $l \in E'$， $l \circ c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 都是光滑的。根据 [20, 推论 2.3], , 一条曲线光滑，当且仅当它是弱光滑的（即，与任意连续线性泛函复合后仍然光滑）。因此， $c : \mathbb{R} \to E$ 必须是一条光滑曲线。

最后，转到向量丛上，我们可以在局部平凡化域$U \subset M$上计算 incl。该映射的局部形式为 $\text{id}_U \times \iota_E\colon U \times E \to U \times E''$。由于单位元 id_U 显然是微分同胚，且 ι_E 是便利嵌入，它们的笛卡尔积是便利流形之间的光滑嵌入。将这些局部嵌入粘合起来，可得整体丛态射 $\text{incl} : TM \hookrightarrow T''M$是光滑嵌入，从而证明 ρ是光滑的。

引理 2.6. [5, 命题 7.7] 设 $(M, \mathbb{F}, \rho)$ 是一个泊松结构。那么，存在 $[\pi, \pi]_s \in \Gamma(L^3(T'M))$ 使得

$$[\pi, \pi]_s(\alpha, \gamma, \beta) = 2(\pi(d(\pi(\alpha, \beta)), \gamma) + \pi(\beta, d\pi(\gamma, \alpha)) + \pi(\gamma, d\pi(\alpha, \beta))).$$

备注 2.7 （ $\Gamma(\mathbb{F})$上的李代数胚结构）。 注意， $\Gamma(\mathbb{F})$是以下代数的一个模：

$$\mathcal{A} := \{f \in C^\infty(M) \mid df(x) \in \mathbb{F}_x\}.$$

它可以借助以下李括号赋予李代数胚结构（见 [5, 命题 7.3]）：

$$[\alpha, \beta]_\rho := \mathcal{L}_{\rho(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\rho(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)).$$

其中， $\mathcal{L}_{\rho(\alpha)}$、 $\mathcal{L}_{\rho(\beta)}$ 分别表示相对于向量场 $\rho(\alpha)$ $\rho(\beta)$ 的李导数。

注 2.8。 注意， $[-,-]_\rho$ 的雅可比恒等式蕴含丛态射 $\rho\colon \mathbb{F} \to TM$ 满足 $\rho[\alpha, \beta] = [\rho(\alpha)\ \rho(\beta)]$。因此，它诱导出李代数同态 $\tilde{\sigma}\colon \Gamma(M, \mathbb{F}) \to \Gamma(M, TM) = \mathfrak{X}(M)$。

命题 2.9 (哈密顿向量场)。 设 $(M, \mathbb{F}, \rho)$ 是一个泊松流形，并设 $\mathcal{A}_\mathbb{F}$ 是推论 2.3中定义的便捷泊松子代数。那么，对于每个 $f \in \mathcal{A}_\mathbb{F}$，对应于 $\tilde{}$的哈密顿向量场 f定义为 $X_f\colon = \tilde{\rho}(df) = \{f, -\}$，它是 M上的光滑向量场。此外，映射

$$X_- : \mathcal{A}_\mathbb{F} \to \Gamma(TM), \quad f \mapsto X_f$$

是一个有界的、因此也是光滑的线性算子。

证明。首先，对于固定元素 $f \in \mathcal{A}_{\mathfrak{b}}$，我们证明截面光滑性。根据子代数 $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}$ 的定义，微分 df 可唯一地通过光滑截面 $df \in \Gamma(\mathbb{F})$ 分解，使得 $\backsim df = \iota_{\mathbb{F}} \circ df$。根据备注 2.5，锚映射 ρ: $\mathbb{F} \to TM$ 是光滑向量丛态射。设ρ : $\mathbb{F} \to TM$ 是光滑丛态射。对于任意光滑截面 $\tilde{\alpha} \in \Gamma(\mathbb{F})$, 复合映射$\rho \circ \tilde{\alpha}$是从 M到 TM 的光滑映射。由于 ρ 是丛态射，它保持基点不变，即 $\rho(\tilde{\alpha}(x))$ $\in T_xM$。因此， $\tilde{\rho}(\tilde{\alpha}) \in \Gamma(TM)$。所以，复合映射 $X_f = \tilde{\rho}(df)$ 属于 $\Gamma(TM)$。因此， X_f 是光滑向量场。

其次，我们证明赋值 X_- 的算子光滑性。映射 $f \mapsto X_f$ 可以写成两个线性算子的复合:

$$X_- = \tilde{\rho} \circ \widetilde{d}.$$

回忆一下， $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}$ 配备了由映射 incl : $\mathcal{A}_{\mathbb{F}} \to C^\infty(M)$ 和微分算子 d : $\mathcal{A}_{\mathbb{F}} \to \Gamma(\mathbb{F})$ 诱导的初始方便向量空间结构。因此， d 是一个有界算子。此外，诱导映射 $\tilde{\rho}$: $\Gamma(\mathbb{F}) \to \Gamma(TM)$ 是便利向量空间之间的有界线性映射。事实上，考虑求值映射 $\mathrm{ev}_{\mathbb{F}}$: $\Gamma(\mathbb{F}) \times M \to \mathbb{F}, (\tilde{\alpha}, x) \mapsto \backsim\tilde{\alpha}(x)$，它在便利框架下是光滑的。映射 $\tilde{\rho}$: $\Gamma(\mathbb{F}) \times M \to TM, (\tilde{\alpha}, x) \mapsto \tilde{\rho}(\tilde{\alpha})(x)$ 恰好是复合 $\rho \circ \mathrm{ev}_{\mathbb{F}}$。由于根据假设， ρ 是光滑的，因此复合 $\rho \circ \mathrm{ev}_{\mathbb{F}}$ 也是光滑的。根据指数律（[20, 推论 3.13]），相应的映射 $\tilde{\rho}$: $\Gamma(\mathbb{F}) \to \Gamma(TM)$ 是有界的。由于在便利微积分中，有界线性映射的复合仍然有界，因此算子 X_- 是有界的。□

注 2.10。请注意，根据泊松结构的定义2.2 ，流形上每个光滑函数都存在哈密顿向量场并非必然。参见[15, 表 1] ，其中列出了无限维情形下现有的不同泊松结构定义中哈密顿向量场的存在性（参见 [15, 第 4]节）。

定义 2.11 （积泊松结构）。设 $(M, \mathbb{F}_1, \pi_1)$ 和 $(N, \mathbb{F}_2, \pi_2)$ 是两个泊松结构。那么， $M \times N$ 带有一个自然的泊松结构 $(M \times N, \mathbb{F}, \pi)$，其中

(1) $\mathbb{F}$ 是 $T'M \oplus T'M$的一个子丛，定义为 $\mathbb{F}(p, q) := \mathbb{F}_1(p) \oplus \mathbb{F}_2(q)$。(2) $\pi \in \Gamma(L^2_{skew}(\mathbb{F}))$ 定义为

$$\pi(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) := \pi_1(\alpha_1, \beta_1) + \pi_2(\alpha_2, \beta_2)$$

其中 $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{F}_1$和 $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{F}_2$.

定义 2.12 （泊松态射）。设 $(M, \mathbb{F}_1, \pi_1)$ 和 $(N, \mathbb{F}_2, \pi_2)$ 分别是光滑流形 M 和 N 上的两个泊松结构。若光滑映射 Φ : $M \to N$ 满足以下两个条件，则称其为泊松态射:

（1）对于每个 $x \in M$，微分 $(d\Phi_x)^*$: $T'_{\Phi(x)} N \to T'_x M$ 的对偶映射限制为相应子丛之间定义良好的有界线性映射，将 $(\mathbb{F}_2)_{\Phi(x)}$ 映射到 $(\mathbb{F}_1)_x$ 中。整体而言，这意味着对偶映射限制为一个光滑丛态射

$$(d\Phi)^*|_{\mathbb{F}_2} : \Phi^*\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_1.$$

（2）双向量场是 Φ-相关的。也就是说，沿着 Φ 对 π_1 的推前与 π_2 重合，记作

$$\pi_2(\Phi(x)) = \Phi_* \pi_1(x),$$

其中 Φ_*: $L^2_{\mathrm{skew}}((\mathbb{F}_1)_x) \to L^2_{\mathrm{skew}}((\mathbb{F}_2)_{\Phi(x)})$ 是由微分的对偶映射在双线性形式上诱导的推前映射。这意味着，对于所有 $x \in M$ 和余向量 α， $\beta \in (\mathbb{F}_2)_{\Phi(x)}$，该相容条件可表示为

$$\pi_2(\Phi(x))(\alpha, \beta) = \pi_1(x)((d\Phi_x)^*\alpha, (d\Phi_x)^*\beta).$$

3. 泊松李群及其在单位元处的线性化

本节讨论赋有泊松结构（G，$\mathbb{F}$，π）的泊松李群 G 的线性化。我们证明，泊松张量 π 在单位元 $e \in G$ 处的微分会在李代数 $\mathfrak{g} = T_eG$ 上诱导出李双代数结构。此外，如果泊松结构保证哈密顿向量场的存在，我们将证明李代数 $\mathfrak{g}$ 相对于子空间 $\mathfrak{b} := \mathbb{F}_e \subseteq \mathfrak{g}'$ 是一个李-泊松空间。

定义 3.1（泊松李群）。若李群 G 以convenient李代数为模型 $\mathfrak{g}$，则称其为具有方便泊松结构（G，$\mathbb{F}$，π）的方便泊松李群，如果

(1) G 在 $T'G$ 上的光滑左作用与右作用限制为 $\mathbb{F}$ 上的光滑作用：

$$L^* : G \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, G \times \mathbb{F}(g_0) \ni (g, \alpha) \mapsto L_g^* \alpha \in \mathbb{F}(gg_0),$$

$$R^* : G \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, G \times \mathbb{F}(g_0) \ni (g, \alpha) \mapsto R_g^* \alpha \in \mathbb{F}(g_0 g).$$

(2) 乘法映射 m：$G \times G \to G$，$(g, h) \to gh$ 是泊松映射，等价地，

$$\pi(xy) = L_x^{**}\pi(y) + R_y^{**}\pi(x) \tag{3.1}$$

其中 L_x^{**}与 R_y^{**}分别是 G 在 $L^2_{skew}(\mathbb{F})$上的诱导左作用与右作用，它们分别来自 G 在 $\mathbb{F}$ 上的受限光滑左作用与右作用 L^* 与 R^*。

定义 3.2. 若双向量 $\pi \in \Gamma(L^2_{skew}(\mathbb{F}))$ 满足 $\pi(gh) = L_g^{**}\pi(h)$，则称其为左不变；若对所有 $g, h \in G$，满足 $\pi(gh) = R_h^{**}\pi(g)$，则称其为右不变。

命题 3.3. 设 $(G, \mathbb{F}, \pi)$ 是一个方便泊松李群，令 $\mathfrak{g}$ 为 G的李代数，并令 $\mathfrak{b} = \mathbb{F}_e$。则下列映射在 $\mathfrak{b}$上定义了一个有界李代数结构：

$$[\alpha(e), \beta(e)] = d(\widetilde{\pi(\alpha, \beta)})(e), \tag{3.2}$$

其中 α 和 β 是 $\mathbb{F}$的左不变（或右不变）截面。

证明。对任意 $\xi, \eta \in \mathfrak{b}$，令 $\alpha = \xi^L$ 和 $\beta = \eta^L$ 分别表示将 ξ 和 η延拓得到的 $\mathbb{F}$的唯一左不变截面（因此 $\alpha(e) = \xi$ 且 $\beta(e) = \eta$）。由于 G在 $T'G$ 上的左平移光滑地限制在 $\mathbb{F}$上，延拓映射

$$E : \mathfrak{b} \to \Gamma(\mathbb{F}), \quad \xi \mapsto \xi^L$$

是一个有界线性映射。

由于 $\pi \in \Gamma(M, L^2_{\text{skew}}(\mathbb{F}))$ 是一个光滑双向量，求值映射

$$P : \Gamma(\mathbb{F}) \times \Gamma(\mathbb{F}) \to C^\infty(G), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \pi(\alpha, \beta)$$

是一个有界双线性映射。此外，微分算子 $d : C^\infty(G) \to \Gamma(T'G)$ 是一个有界线性映射（参见 [20, 定理 3。18]）。根据泊松结构的定义（定义 2.2），微分 $d(\pi(\alpha, \beta))$ 唯一地通过 $\mathbb{F}$分解，也就是说，运算

$$\tilde{d} : f \mapsto \widetilde{df} \in \Gamma(\mathbb{F})$$

在其定义域上也是有界线性映射。最后，在单位元处的求值

$$\text{ev}_e : \Gamma(\mathbb{F}) \to \mathfrak{b}, \quad \gamma \mapsto \gamma(e)$$

是一个有界线性映射。

Lie 群 $\mathfrak{b}$ 上的括号由这些有界线性映射和双线性映射的复合给出 s

$$[\xi, \eta] = \text{ev}_e \left(\widetilde{d}\,(P(E(\xi), E(\eta))) \right).$$

由于它是有界映射的复合，$[-,-] : \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ 是一个有界双线性映射。此括号在 $\mathfrak{b}$ 上满足雅可比恒等式，这直接源于泊松双向量 π 的雅可比恒等式（定义2.2的条件（2））。因此，$\mathfrak{b}$ 具有有界李代数结构。□

现在，如果 $\mathfrak{b}$ 是弗雷歇空间或 Silva空间，$[-,-]$ 由以下两个引理可知是连续双线性映射 s.

引理 3.4. 如果 E 是弗雷歇空间或 *Silva*空间，那么从 E 到任意局部凸空间的有界线性映射都是连续的。

证明。 注意，弗雷歇空间和 Silva空间是有界型的（[27, 8.2，推论 2]）。根据（[27, 8.3]），从桶化空间到局部凸空间的线性映射连续，当且仅当它有界。

□

引理 3.5。 若 E 是弗雷歇空间或 *Silva*空间，则从 $E \times E$ 到任意局部凸空间的分别连续双线性映射都是连续的。

证明。 设 $\beta\colon E \times E \to F$ 是取值于局部凸空间 F的分别连续双线性映射。若 E 是弗雷歇空间，则根据 [27, 5.1]，， $E \times E$上的每个分别连续双线性映射都是连续的。

现在，假设 E 是 Silva空间。根据定义， $E = \varinjlim E_n$ 是巴拿赫空间 E_n的正则归纳极限。乘积 $E \times E$ 也是 Silva空间，且其拓扑与各乘积的正则归纳极限拓扑一致，因此 $E \times E = \varinjlim(E_n \times E_n)$。根据归纳极限拓扑的泛性质， β 连续，当且仅当它的所有限制 $\beta|_{E_n \times E_n}$ 都连续。

由于每个 E_n 都是巴拿赫空间，因此它本身也是弗雷歇空间。由于 β 在 $E \times E$ 上分别连续，其限制 $\beta|_{E_n \times E_n}$ 是定义在弗雷歇空间上的分别连续双线性映射。根据上文已确立的弗雷歇情形，每个限制 $\beta|_{E_n \times E_n}$ 都是连续的。因此，β 在 $E \times E$ 上连续。□

定义 3.6 （李群 1-余循环）。 设 G 是一个光滑李群，其在便利空间 V 上有一个由 G 给出的光滑作用，该作用是李群同态 $\alpha\colon G \to \mathrm{GL}(V)$。那么，映射 $\theta\colon G \to V$ 称为相对于 α 的李群 1-余循环，若

$$\theta(gh) = \theta(g) + \alpha(g)(\theta(h)),$$

对任意 g， $h \in G$。

定义 3.7 （李代数 1-余循环）。 导数 $d\theta(e)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 满足

$$d\theta(e)([X,Y]) = d\alpha(e)(X)(d\theta(e)(Y)) - d\alpha(e)(Y)(d\theta(e)(X))$$

对任意 X， $Y \in \mathfrak{g}$。于是我们称 $d\theta(e)$ 为相对于作用 $d\alpha(e)$ 的 $\mathfrak{g}$ 的李代数 1-余循环。

命题 3.8 (1-余循环（泊松李群）。 设 $(G, \mathbb{F}, \pi)$ 为泊松李群结构。映射 $\theta\colon \ G \to L^2_{skew}(\mathfrak{b})$ 定义为 $\theta(x) := R^{**}_{x^{-1}}\pi(x)$ 是相对于 G 在 $L^2_{skew}(\mathfrak{b})$ 上的受限光滑伴随作用 $\mathrm{Ad}^{(2)}$ 的光滑1-余循环，定义如下：

$$\mathrm{Ad}^{(2)} : G \times L^2_{skew}(\mathfrak{b}) \to L^2_{skew}(\mathfrak{b}), \quad (g,\eta) \mapsto \left(R^{**}_{g^{-1}} \circ L^{**}_g\right)(\eta),$$

其中， L^{**}_g和 R^{**}_h表示由左平移和右平移得到的推前。对于 $\eta \in L^2_{skew}(\mathfrak{b})$ 以及$\alpha, \beta \in \mathfrak{b}$，它们的显式定义如下：

$$L^{**}_g\eta(\alpha,\beta) := \eta(L^*_g\alpha, L^*_g\beta), \quad R^{**}_h\eta(\alpha,\beta) := \eta(R^*_h\alpha, R^*_h\beta).$$

此外，若 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 是弗雷歇空间或席尔瓦空间，则 θ 是巴斯蒂亚尼光滑1-余循环，且伴随作用是巴斯蒂亚尼光滑的。

证明。 首先，我们验证代数1-余循环条件。 G 在 $\mathbb{F}$上的左作用和右作用意味着伴随作用 $\mathrm{Ad}^{(2)}$ 定义良好。根据泊松李群的定义，双向量场 π 是可乘的，也就是说，对于所有 $x, y \in G$，都有 $\pi(xy) = L^{**}_x\pi(y) + R^{**}_y\pi(x)$。对两边应用$R^{**}_{(xy)^{-1}}$，得到

$$\begin{aligned}
\theta(xy) &= R^{**}_{(xy)^{-1}}\left(L^{**}_x\pi(y) + R^{**}_y\pi(x)\right) \\
&= \left(R^{**}_{y^{-1}} \circ R^{**}_{x^{-1}} \circ L^{**}_x\right)\pi(y) + \left(R^{**}_{y^{-1}} \circ R^{**}_{x^{-1}} \circ R^{**}_y\right)\pi(x) \\
&= \left(R^{**}_{y^{-1}} \circ L^{**}_x\right)\left(R^{**}_{x^{-1}}\pi(y)\right) + R^{**}_{x^{-1}}\pi(x) \\
&= \mathrm{Ad}^{(2)}_x(\theta(y)) + \theta(x),
\end{aligned}$$

这里我们用到了左平移和右平移可交换这一事实。这表明 θ 满足1-余循环条件。

接下来，我们证明 θ 在convenient意义上是光滑的。由于 $\mathfrak{b}$ 是便利向量空间，有界反对称双线性形式的空间$L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$ 也是便利的。根据便利一致有界原理（[20, 定理5.18]），到有界多重线性映射空间中的曲线是光滑的，当且仅当它与点求值的复合是光滑的。对于固定的 α, $\beta \in \mathfrak{b}$，我们对 $\theta(x)$ 求值，得到

$$\theta(x)(\alpha,\beta) = \pi(x)(R^*_{x^{-1}}\alpha, R^*_{x^{-1}}\beta) = \pi(x)(\tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x)),$$

其中 $\tilde{\alpha}$, $\beta \in \Gamma(\mathbb{F})$是由 $\tilde{\alpha}(x) := R^*_{x^{-1}}\alpha$ 和$\beta(x) := R^*_{x^{-1}}\beta$定义的右不变截面。映射 $x \mapsto \tilde{\alpha}(x)$是光滑的，因为右作用 $R^* : G \times \mathfrak{b} \to \mathbb{F}$ 被假定为光滑的。由于 π 是光滑截面，它在光滑截面 $\tilde{\alpha}$ 和 β 上的求值给出从 G 到 $\mathbb{R}$的光滑函数。因此，$\theta : G \to L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$在convenient意义上是光滑的。

尚需证明伴随作用 $\text{Ad}^{(2)} : G \times L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b}) \to L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$ 是便利光滑的。根据便利向量空间的指数律，该映射的联合光滑性等价于柯里化映射的光滑性

$$\check{\text{Ad}}^{(2)} : G \to C^\infty\left(L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b}), L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})\right).$$

由于该作用关于第二个变量是线性的，$\check{\text{Ad}}^{(2)}$ 实际上取值于有界线性算子空间$L\left(L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})\ L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})\right)$。由于$L\left(L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})\ L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})\right)$ 依 [20, 命题5.6], 是光滑映射空间$C^\infty\left(L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})\ L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})\right)$ 的一个 c^∞-闭（相对于便利拓扑闭）线性子空间，因此只需检验到该子空间的光滑性。应用一致有界原理，该映射光滑当且仅当它在任一固定形式 $\omega \in L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$上的求值是从 G 到 $L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$的光滑映射。对空间 $L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$再次应用一致有界原理，只需证明：对于固定向量 $b_1, b_2 \in \mathfrak{b}$，标量映射

$$g \mapsto \text{Ad}^{(2)}_g(\omega)(b_1,b_2) = \omega(\text{Ad}^*_{g^{-1}} b_1, \text{Ad}^*_{g^{-1}} b_2)$$

是定义在 G上的光滑函数。由于 G 通过限制的标准伴随作用光滑地作用于 $\mathfrak{b}$ （这是由于定义3.1 的假设（2）），映射 $g \mapsto \text{Ad}^*_{g^{-1}} b_i$ 是光滑的。与有界且因此光滑的双线性形式 ω 复合后，可知该求值是一个光滑函数（[20, 推论 3。13]）。因此，联合作用$\text{Ad}^{(2)}$ 在 convenient 意义下是光滑的。

最后，假设 G 是一个光滑李群，其李代数为弗雷歇或席尔瓦李代数 $\mathfrak{g}$。在此情形下，我们注意到，convenient 意义下的光滑性等价于巴斯蒂亚尼意义下的光滑性。由于 $\mathfrak{b}$ 是一个蒙特尔空间，在$L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$上（其为麦基完备）关于有界集的一致收敛所诱导的便利拓扑，与关于紧集的一致收敛拓扑重合。因此，为证明 θ的连续性，只需证明弗雷歇空间（分别地，席尔瓦空间）中的任意收敛序列（或网）都是麦基收敛的，而这由 [20, 4得出。11]。该性质对 θ的每个导数均成立。因此，θ 的所有导数都是连续的，从而证明 θ 在巴斯蒂亚尼意义下是光滑的。通过完全相同的论证，伴随作用 $\text{Ad}^{(2)}$ 在巴斯蒂亚尼意义下也是光滑的。□

定义 3.9 （泊松李群同态）：设 $(G, \mathbb{F}_1, \pi_1)$ 和 $(H, \mathbb{F}_2, \pi_2)$ 是两个泊松李群，其对应的 1-余循环分别为 Θ_1 和 Θ_2。若李群同态$\Phi : G \to H$ 同时也是G 与 H之间的泊松态射，则称其为泊松李群同态。

令 $\phi := d\Phi(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$表示诱导的李代数同态，并令 $\phi^* : \mathfrak{h}' \to \mathfrak{g}'$表示其对偶。按照泊松态射的条件，$\phi^*$ 必须限制为单位元处相应子丛之间定义良好的有界线性映射

$$\phi^*|_{\mathfrak{b}_2} : \mathfrak{b}_2 \to \mathfrak{b}_1.$$

李群同态 Φ 关于群 1-余循环 Θ_1 和 Θ_2 的相容条件写作

$$\Theta_2 \circ \Phi = (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_* \circ \Theta_1, \tag{3.3}$$

其中 $(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*$：$L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b}_1) \to L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b}_2)$ 是斜对称双线性形式上的诱导推前映射。等价地，对于所有 $g \in G$ 和对偶元素 α，$\beta \in \mathfrak{b}_2$，我们有

$$\Theta_2(\Phi(g))(\alpha,\beta) = \Theta_1(g)(\phi^*(\alpha),\phi^*(\beta)).$$

3.0.1. 半直积上的正则李群结构。 [20, 第5节。8]
令 G，H 为正则光滑正则李群，且 α：$G \times H \to H$ 是 G在 H 上的一个自同构光滑作用（作用于 H），使得 $\hat{}\alpha$：$G \to$Aut(H) 是一个群同态。那么半直积 $G \rtimes H$ 带有正则李群结构，其中

乘法映射

$$(g_1,h_1)\times(g_2,h_2) \mapsto (g_1\alpha(h_1)(g_2), h_1h_2),$$

以及逆映射

$$(g_1,h_1) \mapsto (\alpha(h_1^{-1})(g_1), h_1^{-1})$$

在 convenient 意义下都是光滑的。

下面的引理自然地来自 $G \rtimes L$ 上的半直积李群结构。

引理 3.10。 设 G 是一个光滑李群，它在便利向量空间 L 上有一个光滑作用 α。$\tilde{}$ 光滑映射 θ：$G \to L$ 是关于 α 的1-余循环，当且仅当由 $\tilde{}\ \theta(g) := (g, \theta(g))$ 定义的映射 θ：$G \to G \rtimes L$ 是光滑李群同态。

注意，G 在 L 上的作用 α 诱导出李代数 $\mathfrak{g}$ 在 L 上的自然李代数作用 $d\alpha(e)$。空间 $\mathfrak{g} \times L$ 具有半直积李代数结构，记作 $\mathfrak{g} \rtimes L$，其李括号如下

$$[(X,l_1),(Y,l_2)] := ([X,Y]_{\mathfrak{g}}, X\cdot l_2 - Y\cdot l_1)$$

对于 X、$Y \in \mathfrak{g}$和 l_1，$l_2 \in L$，其中 $X \cdot l = d\alpha(e)(X)(l)$。下面的引理是引理 3.10 的无穷小对应，这可直接由该李代数结构得到。

引理 3.11. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个便利李代数，其在便利向量空间 l上有一个光滑作用 $\tilde{\alpha}$：$\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(l)$。有界线性映射 δ：$\mathfrak{g} \to l$ 是相对于 $\tilde{\alpha}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的有界1-余循环，当且仅当$\tilde{}$ $\tilde{}$由 $\delta(X) := (X, \delta(X))$ 定义的映射 δ：$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \rtimes l$ 是有界李代数同态。

命题 3.12. [21, 定理 7.3] 设 G 和 H 是光滑李群，其李代数分别为 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{h}$。假设 G 是 *1*-连通的，且 H 是正则的。那么，若 δ：$\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是有界李代数同态，则存在 $\theta : G \to H$ 唯一的光滑李群同态，使得$d(\theta)(e) = \delta$。

下面的引理表明，$d(\theta)(e)$，θ 的微分诱导出一个取值于 $L^2_{skew}(\mathfrak{b})$ 的 $\mathfrak{g}$的 1-余循环，而它的对偶在 $\mathfrak{b}$上诱导出一个李括号。

引理 3.13. 设 $(G,\mathbb{F},\pi)$ 是一个方便泊松李群，且 θ 是相应的光滑1-余循环。那么，$\delta := d\theta(e)$：$\mathfrak{g} \to L^2_{skew}(\mathfrak{b})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个光滑1-余循环，其取值于 $L^2_{skew}(\mathfrak{b})$，并且相对于 $\mathfrak{g}$ 在 $L^2_{skew}(\mathfrak{b})$上的伴随作用 $\mathrm{ad}^{(2)}$，该作用定义如下：

$$\mathrm{ad}^{(2)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(L^2_{skew}(\mathfrak{b})),$$

$$\mathrm{ad}^{(2)}_X \eta(\alpha,\beta) = \eta(\mathrm{ad}^*_X\alpha,\beta) + \eta(\alpha,\mathrm{ad}^*_X\beta)$$

对于 $X \in \mathfrak{g}, \eta \in L^2_{skew}(\mathfrak{b})$，以及 $\alpha,\beta \in \mathfrak{b}$。此外，映射 $[-,-]_{\mathfrak{b}} := \delta'_{|\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}}$：$\mathfrak{b}\times\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ 在 $\mathfrak{b}$ 上定义了一个李代数结构，其有界李括号态射由命题 *4.3* 中的公式给出：

$$[\alpha,\beta]_{\mathfrak{b}} = d(\theta(\alpha,\beta))(e)$$

对于 $\alpha,\beta \in \mathfrak{b}$。

证明。 根据命题 3.8，θ：$G \to L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$ 是一个相对于作用 1-余循环 $\mathrm{Ad}^{(2)}$的光滑 3.10引理指出，当且仅当由 $\tilde{\theta}$：$G \to G \rtimes L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$ 定义的映射$g \mapsto (g,\ \theta(g))$ 是光滑李群同态时，这一结论成立。

~根据命题 3.12，对 θ 在单位元处 $e \in G$ 求导，可得到相应李代数之间的有界李代数同态

$$d\tilde{\theta}(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \rtimes L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b}).$$

~在 $X \in \mathfrak{g}$ 处计算该微分，我们得到 $d\theta(e)(X) = (X, d\theta(e)(X)) = (X, \delta(X))$。根据引理 3.11，$X \mapsto (X, \delta(X))$ 是李代数同态这一事实蕴含着，$\delta = d\theta(e)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的光滑 1-余循环，相对于无穷小导出作用 $\mathsf{ad}^{(2)} = d(\mathsf{Ad}^{(2)})(e)$。对命题 3.8 中定义的作用 $\mathsf{Ad}^{(2)}$ 进行显式微分，得到所述的 $\mathsf{ad}^{(2)}_X$ 公式。

对于该陈述的第二部分，我们必须恢复命题 4.3 中在 $\mathfrak{b}$上建立的李括号。令 $\xi,\ \eta \in \mathfrak{b}$ 并将它们延拓为右不变截面 $\alpha,\ \beta \in \Gamma(\mathbb{F})$，使得$\alpha(g) = R^*_{g^{-1}}\xi$ 且 $\beta(g) = R^*_{g^{-1}}\eta$。考虑由配对定义的光滑函数 $f \in C^\infty(G)$

$$f(g) := \pi(g)(\alpha(g), \beta(g)).$$

根据 1-余循环 $\theta(g) = R^{**}_{g^{-1}}\pi(g)$ 的定义，在向量 $\xi,\ \eta$ 上计算 $\theta(g)$，恰好得到这个函数：

$$\theta(g)(\xi, \eta) = \pi(g)(R^*_{g^{-1}}\xi, R^*_{g^{-1}}\eta) = \pi(g)(\alpha(g), \beta(g)) = f(g).$$

沿 $X \in \mathfrak{g}$ 方向在单位元 e 处对这个表达式求导，我们将 X 延拓为左不变向量场 X，并对标量函数 $f = \pi(\alpha,\ \beta)$ 应用李导数 $\mathcal{L}_{\tilde{X}}$。利用李导数的莱布尼茨法则，在 e 处求值：

$$df(e)(X) = (\mathcal{L}_{\tilde{X}}\pi)(e)(\alpha(e), \beta(e)) + \pi(e)((\mathcal{L}_{\tilde{X}}\alpha)(e), \beta(e)) + \pi(e)(\alpha(e), (\mathcal{L}_{\tilde{X}}\beta)(e)).$$

由于泊松双向量在单位元处消失（$\pi(e) = 0$），涉及这些截面的李导数的两项恒等于零。此外，张量在其消失点处的李导数就是其通常微分，因此 $(\mathcal{L}_{\tilde{X}}\pi)(e) = d\pi(e)(X)$。由此，我们得到

$$df(e)(X) = d\pi(e)(X)(\xi, \eta) = d\theta(e)(X)(\xi, \eta) = \delta(X)(\xi, \eta).$$

根据对偶映射 $\delta' : (L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b}))' \to \mathfrak{g}'$ 的定义，这个求值通过与 X 的对偶配对定义了括号 $[\xi, \eta]_\mathfrak{b}$

$$\delta(X)(\xi, \eta) = \langle X, \delta'(\xi \wedge \eta)\rangle = \langle X, [\xi, \eta]_\mathfrak{b}\rangle.$$

另一方面，将泊松双向量的微分的分解性质（定义 3.2）应用于函数 $f = \pi(\alpha,\ \beta)$，微分 df 可经由子丛 $\widetilde{\mathbb{F}}$分解为 $df = i_\mathbb{F} \circ df$。在 e 处对 df 与 $X \in \mathfrak{g}$ 配对，得到

$$df(e)(X) = \langle X, df(e)\rangle = \langle X, d(\widetilde{\pi(\alpha, \beta)})(e)\rangle.$$

令 $df(e)(X)$ 的两个表达式相等，得到

$$\langle X, [\xi, \eta]_\mathfrak{b}\rangle = \langle X, d(\widetilde{\pi(\alpha, \beta)})(e)\rangle.$$

由于此单位元关系对所有 $X \in \mathfrak{g}$ 都成立，配对的非退化性意味着 $[\xi, \eta]_\mathfrak{b} = \widetilde{d(\pi(\alpha,\ \beta))(e)}$。□

4. 李双代数、李-泊松空间与 Manin 三元组

本节讨论李双代数与 Manin 三元组之间的对应。我们证明，若 $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ 是一个 Manin 三元组，则 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta)$ 继承李双代数结构。此外，我们证明，相对于 $\mathfrak{b}$，$\mathfrak{g}$ 带有李-泊松空间结构。反过来，若 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta)$ 是一个李双代数结构，且 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{b}$ 是一个李-泊松空间，则 $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ 构成一个 Manin 三元组。

定义 4.1（便利李双代数）。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个具有光滑李括号 $[-,-]_{\mathfrak{g}}$ 的 convenient李代数。那么， $\mathfrak{g}$ 上的便利李双代数结构是一个二元组 $(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$，其中 $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{g}'$ 在 $\mathfrak{g}$ 中分离点，使得 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}'$ 上的光滑余伴随作用限制为 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{b}$ 上的光滑作用，并且存在一个映射

$$\delta:\mathfrak{g}\to L^2_{skew}(\mathfrak{b})$$

使得 δ 是一个光滑的 1-余循环，属于 $\mathfrak{g}$，定义在 $L^2_{skew}(\mathfrak{b})$ 上，并且相对于伴随作用 $\mathrm{ad}^{(2)}$，该作用是 $\mathfrak{g}$ 在$L^2_{skew}(\mathfrak{b})$ (3.13) 上的作用，且

$$[-,-]_{\mathfrak{b}}:=\delta'|_{\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{b}}:\wedge^2\mathfrak{b}\to\mathfrak{b}$$

在 $\mathfrak{b}$ 上定义一个有界李代数结构，其中 $\wedge$ 表示在有界集张量积拓扑下完备化的反对称张量积（有界型张量积的定义见 [20, 5。6] ）。

注 4.2（拓扑李双代数结构）。如果 $\mathfrak{g}$ 是一个局部凸拓扑空间，我们称 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{b},\ \delta)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的拓扑李双代数结构，若 δ 是 $\mathfrak{g}$ 在 $L^2_{skew}(\mathfrak{b})$ 上的连续 1-余循环，且相对于伴随作用 $\mathrm{ad}^{(2)}$，该作用是 $\mathfrak{g}$ 在 $L^2(\mathfrak{b})$ 上的作用，并且

$$[-,-]_{\mathfrak{b}}:=\delta'|_{\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{b}}:\wedge^2\mathfrak{b}\to\mathfrak{b}$$

定义一个连续的李代数括号 $\mathfrak{b}$，其中 $\wedge$ 表示在射影张量积拓扑下完备化的反对称张量积。

定义 4.3（线性泊松结构）。 （另见 [24, 推论 2.11] 设 V为便利空间，使得子空间 $\mathfrak{b}\subseteq V'$ 分离 V的点，且 $\mathfrak{b}$ 是具有有界李括号 $[-,-]$的李代数。则子代数

$\sim\qquad\sim\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}:=\{f\in C^\infty(\mathfrak{g}):\ df$ 可分解为 $i_{\mathfrak{b}}\circ df$，对于 $df\in C^\infty(V,\mathfrak{b})\}$ 具有由线性映射诱导的便利向量空间结构

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}\xrightarrow{\text{incl}}C^\infty(V,\mathbb{R}),f\mapsto f,$$

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}\xrightarrow{\widetilde{d}}C^\infty(V,\mathfrak{b}),f\mapsto\widetilde{df}$$

是一个泊松代数，其有界泊松括号 $\{-,-\}$ 定义为

$$\{f,g\}(v):=\langle v,[df(v),dg(v)]\rangle$$

对于 $v\in V$与 $f,g\in\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V与 $\mathfrak{b}$之间的非退化配对（由限制 V与 V'之间的自然求值配对得到，因为 $\mathfrak{b}\subseteq V'$ 分离 V的点）。则（$V,\mathcal{A}_{\mathfrak{b}},\{-,-\}$）称为 V上的线性泊松结构。

注记 4.4（关于李双代数结构的另一种观点）。 设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$ 是一个李双代数结构。这等价于 $\mathfrak{g}$ 上的线性泊松结构 $(\mathfrak{g},\mathcal{A}_{\mathfrak{b}},\{-,-\})$，其中

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}:=\{f\in C^\infty(\mathfrak{g})\mid df\text{ factors as }i_{\mathfrak{b}}\circ\widetilde{df}\text{ for }\widetilde{df}\in C^\infty(\mathfrak{g},\mathfrak{b})\}$$

且 $\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}$ 上的泊松括号定义为

$$\{f,g\}(X):=\langle X,[\widetilde{df}(X),\widetilde{dg}]_{\mathfrak{b}}\rangle=\delta(X)(\widetilde{df}(X),\widetilde{dg}(X))$$

对 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $f,g\in\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}$ 成立。此外，泊松结构与 $\mathfrak{g}$ 上的李括号相容，这意味着

$$\{f,g\}([X,Y])=\{\mathrm{ad}^*_X f,\mathrm{ad}^*_X g\}(Y)-\{\mathrm{ad}^*_Y f,\mathrm{ad}^*_Y g\}(X)$$

对 $f,g\in\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}$ 和 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 成立，其中 ad^* 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}$ 上的余伴随作用，定义为

$$\mathrm{ad}^*_X f(Y):=f([X,Y]_{\mathfrak{g}})$$

对 $X,Y\in\mathfrak{g}$，$[-,-]_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的李括号，$[-,-]_{\mathfrak{b}}$ 是 $\mathfrak{b}$ 上的李括号，而配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 如定义5.3所定义。

定义4.5（李双代数态射）。 设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{b}_1,\delta_1)$ 和 $(\mathfrak{h},\mathfrak{b}_2,\delta_2)$ 是两个李双代数。李代数同态 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 若满足以下两个条件，则称为李双代数态射:

（1）对偶映射 $\phi^*:\mathfrak{h}'\to\mathfrak{g}'$ 限制后，在相应的子代数之间定义了一个良定的有界线性映射：

$$\phi^*|_{\mathfrak{b}_2}:\mathfrak{b}_2\to\mathfrak{b}_1.$$

(2) 1-余循环 δ_1 和 δ_2 满足相容条件

$$\delta_2\circ\phi=(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\delta_1, \tag{4.1}$$

其中 $(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*:\ L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b}_1)\to L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b}_2)$ 是诱导的斜对称双线性形式上的推前映射。具体而言，对于所有 $X\in\mathfrak{g}$ 和对偶元素 $\alpha,\ \beta\in\mathfrak{b}_2$，我们有

$$\delta_2(\phi(X))(\alpha,\beta)=\delta_1(X)(\phi^*(\alpha),\phi^*(\beta)).$$

巴拿赫李-泊松空间在 [26] 中被引入，并在 [31]中扩展到任意对偶配对。本文将这一概念扩展到便利框架。

定义 4.6（李-泊松空间）。设 $\mathfrak{g}_+$ 是一个便利空间，$\mathfrak{g}_-\subset\mathfrak{g}'_+$ 是一个便利子空间。设 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle:\mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_-\to\mathbb{K}\,(\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\})$ 是两个便利空间 $\mathfrak{g}_+$ 和 $\mathfrak{g}_-$之间的弱非退化配对。那么，如果 $\mathfrak{g}_-$ 是一个李代数，且 $\mathfrak{g}_-$ 对 $\mathfrak{g}_-^*$ 的连续余伴随作用限制在 $\mathfrak{g}_+$上，即对于所有 $x\in\mathfrak{g}_+$ 和 $\alpha\in\mathfrak{g}_-$，均有 $\mathrm{ad}^*_\alpha x\in\mathfrak{g}_+$，并且 $\mathrm{ad}^*:\mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_-\to\mathfrak{g}_+$ 是光滑的，则称 $\mathfrak{g}_+$ 关于 $\mathfrak{g}_-$ 是一个李-泊松空间。

注 4.7. 注意到，巴拿赫空间上的连续线性映射是有界的，因此在 convenient 意义下是光滑的，所以我们可以放心地在便利框架下改写 [31,定义 3.12]中李-泊松空间的定义。由此可得以下结果。

推论 4.8. [31, 定理 3.14] 若$(\mathfrak{g}_+,\mathfrak{g}_-,\delta)$ 是一个李双代数结构，则 $\delta^*|_{\mathfrak{g}_-\wedge\mathfrak{g}_-}$ 在 $\mathfrak{g}_-$上定义了一个李代数结构，并且$(\mathfrak{g}_+,\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-},\{-,-\})$ 是一个线性泊松结构。这里，子代数

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-}:=\{f\in C^\infty(\mathfrak{g}_+)\mid df\ \textit{factors as}\ i_{\mathfrak{g}_-}\circ\widetilde{df}\ \textit{for}\ \widetilde{df}\in C^\infty(\mathfrak{g}_+,\mathfrak{g}_-)\}$$

赋予由这些线性映射诱导的便利向量空间结构

$$\mathrm{incl}:\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-}\to C^\infty(\mathfrak{g}_+,\mathbb{R}),\quad f\mapsto f,$$

$$\widetilde{d}:\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-}\to C^\infty(\mathfrak{g}_+,\mathfrak{g}_-),\quad f\mapsto\widetilde{df},$$

相对于有界泊松括号是一个泊松代数

$$\{-,-\}:\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-}\times\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-}\to\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-},\quad \{f,g\}(x):=\langle x,[\widetilde{df}_x,\widetilde{dg}_x]_{\mathfrak{g}_-}\rangle$$

对于 $f,g\in\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-}$ 和 $x\in\mathfrak{g}_+$。在此表达式中，$[-,-]_{\mathfrak{g}_-}$ 是 $\mathfrak{g}_-$上的李括号，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathfrak{g}_+$ 与 $\mathfrak{g}_-$ 之间的非退化配对（由 $\mathfrak{g}_+$ 与 $\mathfrak{g}'_+$之间的自然求值配对限制得到，因为 $\mathfrak{g}_-\subseteq\mathfrak{g}'_+$ 在 $\mathfrak{g}_+$中分离点）。

$\mathfrak{g}_+$ 关于 $\mathfrak{g}_-$ 是李-泊松空间，当且仅当对每个 $f\in\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_-}$，$\{f,\cdot\}\in\Gamma(T\mathfrak{g}_+)$ 定义了一个哈密顿向量场。

推论 4.9。 [31, 定理 5。13] 设$(G,\mathbb{F}_{\mathfrak{b}},\pi)$ 为一个泊松李群结构。则 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{b}:=\mathbb{F}_e$是一个李-泊松空间。

定义 4.10（Manin 三元组）。若一组三元组$(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_+,\ \mathfrak{g}_-)$由便利李代数组成，且 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-$，并存在一个弱非退化、对称、伴随不变的双线性形式 $\langle-,\ -\rangle:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}\,(\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\})$，定义在 $\mathfrak{g}$ 上，使得 $\mathfrak{g}_+$ 和 $\mathfrak{g}_-$ 均为各向同性子空间，则称其为 Manin 三元组，而映射

$$\mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_-\to\mathfrak{g}_-\subseteq\mathfrak{g}'_+,\quad(\alpha,\beta)\mapsto\mathrm{ad}^*_\alpha(\beta)=[\alpha,\beta]$$

相对于 $\mathfrak{g}_-$的拓扑是有界的。

现在，由命题3.13 和引理3.12可得，方便泊松李群的李代数$(G,\mathbb{F},\pi)$ 具有一个光滑（有界）双代数结构$(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$，其中$\mathfrak{b}:=\mathbb{F}_e$.

定理 4.11。设$(G,\mathbb{F},\pi)$是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的方便泊松李群，且设 $\mathfrak{b}=\mathbb{F}_e$。那么，在 $\mathfrak{g}$ 上存在一个便利李双代数结构$(\mathfrak{g},\mathfrak{b},\delta)$，其中余循环 δ 定义为

$$\delta(X)(\alpha,\beta):=d(\pi(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}))(e)(X)$$

~对于 $X\in\mathfrak{g}$ 和 α、$\beta\in\mathfrak{b}$，其中 $\tilde{\alpha}$、$\beta\in\Gamma(\mathbb{F})$ 是延拓 α 和 ~β 的右不变截面，由 $\tilde{\alpha}(g)$ 给出：$:=R_{g^{-1}*}\alpha$ 和 $\beta(g):=R_{g^{-1}*}\beta$。此外，若 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是弗雷歇空间或席尔瓦空间，则 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{b},\ \delta)$ 是一个拓扑李双代数。

定理 4.12。 [31, 定理 4。9] 设 $(\mathfrak{a},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{b})$ 是一个 *Manin* 三元组，则 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{b},\ \delta)$ 具有李双代数结构，其中 $\delta:\ \mathfrak{g}\to\wedge^2\mathfrak{b}$ 是 $[-,-]'_{\mathfrak{b}}$ 在 $\mathfrak{g}$上的限制：

$$\delta(X)(\alpha,\beta)=X([\alpha,\beta]_{\mathfrak{b}}).$$

此外， $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{b}$ 具有李–泊松空间结构。

反过来，若 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{b},\ \delta)$ 具有李双代数结构，且 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{b}$ 是一个李-泊松空间，则 $(\mathfrak{a},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{b})$ 是关于自然非退化配对的 *Manin* 三元组

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{a}}:\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}\to\mathbb{K},\qquad(\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\})$$

$$(x,\alpha)\times(y,\beta)\mapsto\langle x,\beta\rangle+\langle y,\alpha\rangle,$$

其上的李括号由 $\mathfrak{a}$ 给出

$$[\cdot,\cdot]:\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{b}$$

$$((x,\alpha),(y,\beta))\mapsto([x,y]_{\mathfrak{g}_+}+\mathrm{ad}^*_\beta(x)-\mathrm{ad}^*_\alpha(y),[\alpha,\beta]_{\mathfrak{g}_-}+\mathrm{ad}^*_y(\alpha)-\mathrm{ad}^*_x(\beta)).$$

证明。 在 [31, 定理 4.9] （另见 [31, 定理 2.3] ）中，当 $\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}$ 都是巴拿赫空间时，该定理是在 Banach 情形下证明的。不过，由于我们在便利框架下对李双代数和 Manin 三元组的定义，是对 [31]，中定义的改编；并且，一个线性映射在 convenient 意义下光滑，当且仅当它有界，而这在 Banach 情形下等价于连续，因此同样的证明也适用于我们的情形。□

5. 由权空间分解得到的 Manin 三元组

本节从一个具有权空间分解的李代数出发构造 Manin 三元组的例子，其中零模关于李括号构成阿贝尔子代数。此外，我们还给出配备强连续圆群作用和环面不变、忠实迹态的 C^*-代数的光滑向量空间与解析向量空间的权空间分解。

定义 5.1 （权空间分解）。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个带有非退化对称不变双线性形式 $\langle\langle-,-\rangle\rangle$ 的李代数：若 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}\,(\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\})$ 具有以下拓扑直和，则称其具有权空间分解：

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}-\{0\}}\mathfrak{g}_\alpha$$

with

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=0,$$
$$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

定理 5.2。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个具有权空间分解的李代数

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}-\{0\}}\mathfrak{g}_\alpha.$$

我们定义

$$\mathfrak{p}_1:=\{(a,a):a\in\mathfrak{g}\}\quad\textit{(diagonal subalgebra)},$$
$$\mathfrak{p}_2:=\{(x,y):x\in\mathfrak{g}_{\geq0},y\in\mathfrak{g}_{\leq0},\pi_0(x)+\pi_0(y)=0\},$$

其中

$$\mathfrak{g}_{\geq 0} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{m>0} \mathfrak{g}_m,$$
$$\mathfrak{g}_{\leq 0} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{m<0} \mathfrak{g}_m,$$

并且 $\pi_0 :\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是将 $\mathfrak{g}$ 投影到子代数 $\mathfrak{h}$上的连续投影。那么 $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ 是一个 *Manin* 三元组。

证明。 我们参见第 5.3节，该节是本定理的一个特例，但证明过程采用了类似的论证。 □

5.1. 光滑向量及其权空间分解。 设 A 是一个带有强连续圆周作用的含幺 C^*-代数

$$\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{Aut}(A), \quad t \mapsto \alpha_t,$$

并设 $\omega :\ A \to \mathbb{C}$ 是一个忠实的迹 α-不变态（参见 [4, 第 23] 节中态的定义）。回顾一下，若 A满足以下条件，则称其为 α-不变：

$$\omega(\alpha_t(a)) = \omega(a) \quad \text{for all } t \in \mathbb{S}^1, a \in A.$$

并且若 ω 满足以下条件，则称其为迹：

$$\omega(ab) = \omega(ba) \quad \text{for all } a, b \in A.$$

我们进一步定义 A 的权子空间 A_m 为

$$A_m := \{a \in A : \alpha_t(a) = e^{itm} a \ \forall t \in \mathbb{S}^1\}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

由于 $\mathbb{S}^1$ 是一个紧群，因此根据 [18], , 和 $\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} A_m$ 在 A 中稠密。

定义5.3. 光滑向量空间定义为

$$A_\infty := \{a \in A : \text{the map } t \mapsto \alpha_t(a) \text{ is } C^\infty(\mathbb{R}, A)\}.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，定义弗雷歇空间

$$A^{(k)} := \{a \in A_\infty : \|a\|_{(k)} < \infty\}$$

其中半范数定义为

$$\|a\|_{(k)} := \max_{0\leq j\leq k} \sup_{t\in[0,2\pi]} \left\| \frac{d^j}{dt^j} \alpha_t(a) \right\|_A .$$

注意， $A_\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} A^{(k)}$，且半范数系 $(\|\cdot\|_{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$使 A_∞ 具有 Fréchet 空间结构。

引理 5.4。 空间 A_∞ 是一个弗雷歇空间。

5.1.1. 权空间分解。 我们注意到，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$， $A_m \subseteq A_\infty$。根据 [18, 命题 3.3], , 到 A_m 上的傅里叶投影定义为

$$P_m(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} \alpha_t(a)\, dt.$$

光滑权空间分解 A_∞ 为拓扑直和：

$$A_\infty = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} A_\infty^m.$$

证明。 对于 $a \in A_\infty$，傅里叶积分是良定义的且存在，因为 $t \mapsto \alpha_t(a)$ 是光滑的。元素 $P_m(a)$ 满足 $\alpha_t(P_m(a)) = e^{imt} P_m(a)$：

$$\alpha_t(P_m(a)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ims} \alpha_{t+s}(a)\, ds = e^{imt} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ims} \alpha_s(a)\, ds = e^{imt} P_m(a),$$

这利用了 α 在圆周上的周期性。因此 $P_m(a) \in A_\infty^m$。分解 $a = \sum_{m\in\mathbb{Z}} P_m(a)$（在 A_∞ 中收敛，证明见下文第 5.1.3 节）可由周期函数 $t \mapsto \alpha_t(a)$ 的傅里叶分解得到。由权空间的正交性可立即得出唯一性：若 $a = \sum_m x_m$ 且 $x_m \in A_\infty^m$，则与 e^{-imt} 配对即可唯一确定 $x_m = P_m(a)$。直和是拓扑直和，因为傅里叶投影 $P_m : A_\infty \to A_\infty^m$ 关于 Fréchet 拓扑是连续的（[18, 命题 3.3]）。□

5.1.2. 光滑向量的傅里叶系数快速衰减。

引理 5.5 (光滑向量的快速衰减). 对于每个 $a \in A_\infty$ 和每个 $k \in \mathbb{N}_0$，存在一个常数 $C(k)_a > 0$，使得

$$\|P_m(a)\|_A \le \frac{C(k)_a}{|m|^k} \quad \textit{for all } m \neq 0.$$

等价地，令 $\|P_0(a)\|_A$ 由 $P_0(a)$确定，则傅里叶系数满足

$$\|P_m(a)\|_A \le \|a\|_{(k)} |m|^{-k}$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $m \neq 0$。

证明。 固定 $a \in A_\infty$。傅里叶系数为

$$P_m(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} \alpha_t(a)\, dt.$$

对于 $m \neq 0$，分部积分 k 次。令 $u = e^{-imt}$ 和 $dv = \alpha_t(a)\, dt$。则$du = -im \cdot e^{-imt} dt$。由 $t \mapsto \alpha_t(a)$ 的光滑性，映射 $v(t) := \int_0^t \alpha_s(a) ds$ 定义良好且可微，满足 $\frac{dv}{dt} = \alpha_t(a)$。连续分部积分 k 次后，由于$\alpha_t(a)$ 的周期性，边界项消失。我们得到

$$\int_0^{2\pi} e^{-imt} \alpha_t(a)\, dt = \frac{1}{(im)^k} \int_0^{2\pi} e^{-imt} \frac{d^k}{dt^k} \alpha_t(a)\, dt.$$

因此,

$$P_m(a) = \frac{1}{2\pi (im)^k} \int_0^{2\pi} e^{-imt} \frac{d^k}{dt^k} \alpha_t(a)\, dt.$$

取范数可得:

$$\|P_m(a)\|_A \le \frac{1}{2\pi |m|^k} \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d^k}{dt^k} \alpha_t(a) \right\|_A dt \le \frac{1}{|m|^k} \max_{t\in[0,2\pi]} \left\| \frac{d^k}{dt^k} \alpha_t(a) \right\|_A .$$

根据半范数 $\|\cdot\|_{(k)}$ 的定义:

$$\|P_m(a)\|_A \le \frac{1}{|m|^k} \|a\|_{(k)}.$$

□

5.1.3. 光滑向量的部分和收敛。对于 $a \in A_\infty$，部分和

$$S_N(a) := \sum_{|m|\le N} P_m(a)$$

以多项式速率收敛到 a 的 A_∞ 中。这意味着，对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\|a - S_N(a)\|_{(k)} \le C(k)_a (k-1) N^{k-1} \quad \text{for } k \ge 2.$$

证明。 部分和的误差为

$$a - S_N(a) = \sum_{|m|>N} P_m(a).$$

根据三角不等式和引理5.5,

$$\|a - S_N(a)\|_A \leq \sum_{|m|>N} \|P_m(a)\|_A \leq \sum_{|m|>N} \frac{\|a\|_{(k)}}{|m|^k} = \|a\|_{(k)} \sum_{|m|>N} \frac{1}{|m|^k}.$$

对于 $k \geq 2$，整数上的尾和可以通过积分比较得到有界估计：

$$\sum_{|m|>N} \frac{1}{|m|^k} = 2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} \leq 2 \int_N^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \frac{2}{(k-1)N^{k-1}}.$$

Thus

$$\|a - S_N(a)\|_A \leq \|a\|_{(k)} \cdot \frac{2}{(k-1)N^{k-1}} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

对于弗雷歇半范数 $\|\cdot\|_{(k)}$，我们还需要高阶导数的有界估计。注意，

$$\frac{d^j}{dt^j} \alpha_t(S_N(a)) = \sum_{|m|\leq N} \frac{d^j}{dt^j} P_m(a) e^{imt}$$

对于 $j = 0, 1, \ldots\ldots, k$。傅里叶系数 $P_m(a)$ 具有快速衰减性质（引理 5.5），且这种性质在微分下保持不变（乘以 m的幂）。因此，

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} (\alpha_t(a) - \alpha_t(S_N(a))) \right\|_A \leq \sum_{|m|>N} |m|^j \|P_m(a)\|_A \leq \sum_{|m|>N} |m|^j \cdot \|a\|_{(k)} |m|^{-k} = \|a\|_{(k)} \sum_{|m|>N} |m|^{j-k}.$$

对于 $j \leq k$，我们有 $j - k \leq 0$，因此 $|m|^{j-k} \leq |m|^{-(k-j)}$。于是，

$$\sum_{|m|>N} |m|^{j-k} = \sum_{|m|>N} \frac{1}{|m|^{k-j}} \leq \frac{2}{(k-j-1)N^{k-j-1}}.$$

因此，

$$\max_{0\leq j\leq k} \sup_{t\in[0,2\pi]} \left\| \frac{d^j}{dt^j} (\alpha_t(a) - \alpha_t(S_N(a))) \right\|_A \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

因此， $S_N(a)$ 在 A_∞ 的弗雷歇拓扑中 $\to a$ 。 □

5.2. **解析向量及其权分解**。 令 A 为带单位元的 C^*-代数，并赋予强连续圆群作用 $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{Aut}(A)$。

定义 5.6 （解析向量空间）。 解析向量空间 A_ω 定义为满足以下条件的元素 $a \in A$ 所构成的集合：映射 $t \mapsto \alpha_t(a)$ 可延拓为某个 $r > 0$ 上的全纯映射 $f_a : S_r \to A$，其中 $S_r := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < r\}$ 是宽度为 $2r$ 的开水平带。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们将赋范空间 B_n 定义为可延拓到带形区域 $S_{1/n}$ 的元素所构成的集合：

$$B_n := \{a \in A_\omega : \|a\|_n < \infty\}$$

其中范数定义为

$$\|a\|_n := \sum_{k=0}^{n} \sup_{z\in S_{1/n}} \left\| \frac{d^k}{dz^k} \alpha_z(a) \right\|_A.$$

引理 5.7。 每个空间 $(B_n, \|\cdot\|_n)$ 都是巴拿赫空间。

证明。 设 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为 B_n中的柯西序列。由范数的定义，对每个 $0 \leq k \leq n$，函数序列 $f_j^{(k)}(z) := \frac{d^k}{dz^k} \alpha_z(a_j)$关于 $S_{1/n}$上的一致范数是柯西的。特别地，全纯函数序列 $f_j(z) = \alpha_z(a_j)$在 $S_{1/n}$ 上一致收敛于函数 $f_\infty : S_{1/n} \to A$。由于全纯函数的一致极限是全纯的，故 f_∞ 是全纯的。此外，一致收敛蕴含导数的一致收敛，因此 $f_j^{(k)}$ 在 $S_{1/n}$上一致收敛于 $f_\infty^{(k)}$。由于 A 是完备的，序列 $\{a_j\} = \{f_j(0)\}$ 收敛于极限 $a_\infty \in A$。由 α的强连续性，我们有 $\alpha_t(a_\infty) = \lim_{j\to\infty} \alpha_t(a_j) = f_\infty(t)$，对 $t \in \mathbb{R}$成立。因此 f_∞ 是.....的唯一解析延拓

群作用 $\alpha_t(a_\infty)$，故 $a_\infty \in A_\omega$。由于在 $S_{1/n}$上的收敛是一致的， a_∞ 属于 B_n且 $\|a_j - a_\infty\|_n \to 0$。□

连续紧单射 $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$:

引理 5.8. 对每个 $n \in \mathbb{N}$，典范包含映射 $i_n:\ B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ 是连续线性单射。

证明。设 $a \in B_n$。由于 $S_{1/(n+1)} \subset S_{1/n}$，对于任意 $k \le n$，在较小带形区域 $S_{1/(n+1)}$ 上 k 阶导数的上确界有界于在 $S_{1/n}$上的上确界。对于 $n+1$阶导数，我们使用柯西积分估计。设 $z \in S_{1/(n+1)}$。我们取 $\epsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$。闭圆盘 $D(z,\ \epsilon)$ 包含于 $S_{1/n}$中。因此，

$$\left\| \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \alpha_z(a) \right\|_A \le \frac{(n+1)!}{\epsilon^{n+1}} \sup_{\zeta \in S_{1/n}} \|\alpha_\zeta(a)\|_A.$$

由于 $\|\alpha_\zeta(a)\|_A \le \|a\|_n$，$S_{1/(n+1)}$ 上的上确界有限且由 $C_n\|a\|_n$控制。将所有从 $k=0$ 到 $n+1$ 阶导数的估计相加，得到对于某个常数C_n，$\|a\|_{n+1} \le C_n\|a\|_n$。□

引理 5.9. 包含映射 $i_n:\ B_n \to B_{n+1}$ 是一个紧算子。

证明. 设 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 B_n中的一个有界序列，因此 $\|a_j\|_n \le M$。函数族$\mathcal{F} = \{f_j(z) := \alpha_z(a_j)\}$ 在带形区域 $S_{1/n}$上是一致有界的。我们应用阿斯科利-阿尔泽拉定理。由于 α 是圆周群 $\mathbb{S}^1$ 的作用，函数 $f_j(z)$关于 z的实部是 2π-周期的。因此，只需考虑紧矩形:

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 2\pi, |\mathrm{Im}(z)| \le \frac{1}{n+1} \right\}.$$

$\mathcal{F}$ 在 $S_{1/n}$ 上的一致有界性意味着函数族 $\mathcal{F}$ 及其导数 $\mathcal{F}'$ 在 K 上一致有界（由柯西估计可知）。因此，函数族 $\mathcal{F}$ 在K上等度连续。根据阿斯科利-阿尔泽拉定理，存在一个子序列 f_{i_j}，它在 K 上一致收敛到全纯函数 f_∞。由于具有 2π-周期性，在 K 上一致收敛意味着在无穷带 $S_{1/(n+1)}$上一致收敛。在开带形区域$S_{1/(n+1)}$ 上一致收敛意味着所有导数 $\frac{d^k}{dz^k} f_j$ 在 $S_{1/(n+1)}$ 上一致收敛，其中 $k = 0, \dots, n+1$。因此，$\{a_{i_j}\}$ 在 B_{n+1}的范数下收敛。□

5.2.1. A_ω 是一个*Silva*空间。

定理 5.10. 解析向量空间 A_ω 是一个*Silva*空间，由以下严格归纳极限给出:

$$A_\omega = \varinjlim B_n.$$

证明。空间 A_ω 显然是 B_n 的并集。根据引理5.7、5.8和5.9， A_ω 是由带有紧结构映射的巴拿赫空间构成的可数归纳极限，按定义它是一个Silva空间。□

5.2.2. 权空间分解。解析权空间 A_ω^m是作用α 对应于特征值 e^{imt}的特征子空间:

$$A_\omega^m := \{a \in A_\omega : \alpha_t(a) = e^{imt} a\}.$$

傅里叶投影 $P_m:\ A_\omega \to A_\omega^m$定义为

$$P_m(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} \alpha_t(a)\, dt.$$

空间 A_ω 分解为拓扑直和:

$$A_\omega = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} A_\omega^m.$$

引理5.11 (傅里叶系数的快速衰减)。 对于每个 $a \in A_\omega$，都存在常数 $C_a > 0$和 $\rho_a > 1$，使得傅里叶系数满足：

$$\|P_m(a)\|_A \leq C_a \rho_a^{-|m|}.$$

证明。 由于 $a \in A_\omega$，存在 $r_a > 0$，使得 $f(z) = \alpha_z(a)$ 在 S_{r_a} 上全纯。根据柯西定理以及 $f(z)$ 的 2π-周期性，我们可以将积分围道从实轴移至任意路径 $t \mapsto t + iy$（其中 $|y| < r_a$）：

$$P_m(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im(t+iy)} f(t+iy)\, dt = \frac{e^{my}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} f(t+iy)\, dt.$$

为确保衰减，我们选择 y，使得 my 为负数。令 r' 为满足 $0 < r' < r_a$ 的一个数。令 $M = \sup_{z \in S_{r_a}} \|f(z)\|_A$。

(1) If $m \geq 0$: We choose $y = -r'$. Then $e^{my} = e^{-mr'}$.
(2) If $m < 0$: We choose $y = r'$. Then $e^{my} = e^{mr'} = e^{-|m|r'}$.

在两种情况下，我们都取模：

$$\|P_m(a)\|_A \leq \frac{e^{-|m|r'}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(t \pm ir')\|_A\, dt \leq e^{-|m|r'} M.$$

令 $C_a = M$ 和 $\rho_a = e^{r'} > 1$，即可得到所需的指数衰减。 □

5.2.3. 部分和的收敛。 部分和 $S_N(a) := \sum_{|m| \leq N} P_m(a)$ 在 A_ω 的席尔瓦拓扑中收敛到 a。

证明。 由于 $a \in A_\omega$，存在一个指标 k 使得 $a \in B_k$。我们证明序列 $S_N(a)$ 在巴拿赫空间范数 $\|\cdot\|_k$ 下收敛到 a。误差由级数的尾部给出：

$$\|a - S_N(a)\|_k = \left\| \sum_{|m| > N} P_m(a) \right\|_k.$$

根据 $\|\cdot\|_k$ 范数的定义，有：

$$\|a - S_N(a)\|_k = \sum_{j=0}^{k} \sup_{z \in S_{1/k}} \left\| \frac{d^j}{dz^j} \sum_{|m|>N} e^{imz} P_m(a) \right\|_A.$$

由于各项在 $S_{1/k}$ 上绝对且一致收敛，我们交换导数与求和的次序：

$$\|a - S_N(a)\|_k \leq \sum_{j=0}^{k} \sum_{|m|>N} \sup_{z \in S_{1/k}} \|(im)^j e^{imz} P_m(a)\|_A.$$

利用引理5.11，我们有 $\|P_m(a)\|_A \leq C_a \rho_a^{-|m|}$ 且 $|e^{imz}| \leq e^{|m| \cdot |\mathrm{Im}(z)|} \leq e^{|m|/k}$。

$$\|a - S_N(a)\|_k \leq C_a \sum_{j=0}^{k} \sum_{|m|>N} |m|^j e^{|m|/k} \rho_a^{-|m|}.$$

我们要求项 $e^{|m|/k} \rho_a^{-|m|} = (e^{1/k} \rho_a^{-1})^{|m|} = (\rho')^{-|m|}$ 为衰减因子。由于 $\rho_a > 1$，我们总可以选取足够大的 k，使得 $\rho_a > e^{1/k}$，从而保证 $\rho' > 1$。多项式因子 $|m|^j$ 被 $\rho^{-|m|}$ 的指数衰减所克服。因此，该级数在 B_k 中绝对收敛，且尾项 $\sum_{|m|>N}$ 在 $N \to \infty$ 时收敛于 0。这证明了在 B_k 范数下的收敛性，从而也证明了在 A_ω 的 Silva 拓扑下的收敛性。□

5.3. 由 C^*-代数构造 Manin 三元组。

定理 5.12. 设 A 为一个带单位元的 C^*-代数，配备强连续圆群作用$\alpha : \mathbb{S}^1 \to Aut(A)$以及一个忠实的、迹的、 α-不变态 $\omega : A \to \mathbb{C}$。设 $\pi_0 : A_\infty \to A_\infty^0$ 为到零权元素上的投影，由下式给出

$$\pi_0(a) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_t(a)\, dt.$$

考虑李代数 $\mathfrak{g} := A_\infty \oplus A_\infty$，配备逐分量定义的李括号 $[\,(x_1, y_1), (x_2, y_2)\,] := ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$，以及对称双线性形式

$$\langle\langle (a, a'), (x, y) \rangle\rangle := \omega(ax) - \omega(a'y).$$

定义李子代数 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{g}$ 如下：

$$\mathfrak{p}_1 := \{(a, a) \mid a \in A_\infty\},$$
$$\mathfrak{p}_2 := \{(x, y) \mid x \in A_\infty^{\geq 0},\, y \in A_\infty^{\leq 0},\, \pi_0(x) + \pi_0(y) = 0\},$$

其中 $A_\infty^{\geq 0} := \bigoplus_{m \geq 0} A_\infty^m$ 且 $A_\infty^{\leq 0} := \bigoplus_{m \leq 0} A_\infty^m$。

若零权子空间 A_∞^0 关于典范对易子括号是阿贝尔的（即对于所有 $a, b \in A_\infty^0$, $[a, b] = 0$），则（$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$）是一个 *Manin* 三元组。

证明。 我们必须验证三元组 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ 满足 Manin 三元组的四个定义条件：

(1) 李子代数。对于 $\mathfrak{p}_1 = \{(a, a) \mid a \in A_\infty\}$，逐分量括号给出

$$[(a, a), (b, b)] = ([a, b], [a, b]) \in \mathfrak{p}_1,$$

thus $\mathfrak{p}_1$ 在李括号下封闭。对于 $\mathfrak{p}_2$，设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathfrak{p}_2$。括号 i s

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2]).$$

将 $x_1 = \sum_{m \geq 0} x_{1,m}$ 和 $x_2 = \sum_{n \geq 0} x_{2,n}$ 写成分别属于权空间 A_∞^m 和 A_∞^n 的元素，我们有

$$[x_1, x_2] = \sum_{m,n \geq 0} [x_{1,m}, x_{2,n}].$$

由于圆作用通过 $\alpha_t([x_{1,m}, x_{2,n}]) = e^{i(m+n)t}[x_{1,m}, x_{2,n}]$ 和 $m + n \geq 0$ 起作用，我们得出 $[x_1, x_2] \in A_\infty^{\geq 0}$。同理，$[y_1, y_2] \in A_\infty^{\leq 0}$。此外，由于 $[A_\infty^0, A_\infty^0] = 0$，括号在零权空间上的投影为零：$\pi_0([x_1, x_2]) = [\pi_0(x_1), \pi_0(x_2)] = 0$。因此，$\pi_0([x_1, x_2]) + \pi_0([y_1, y_2]) = 0 + 0 = 0$，这证明 $\mathfrak{p}_2$ 是一个闭李子代数。

(2) 迷向性。对于任意两个元素 $(a, a), (b, b) \in \mathfrak{p}_1$，双线性形式给出

$$\langle\langle (a, a), (b, b) \rangle\rangle = \omega(ab) - \omega(ab) = 0.$$

对于 $\mathfrak{p}_2$，令 $(x, y), (x', y') \in \mathfrak{p}_2$。那么 $x, x' \in A_\infty^{\geq 0}$和 $y, y' \in A_\infty^{\leq 0}$，我们计算

$$\langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle = \omega(xx') - \omega(yy').$$

由于态 ω 是 α-不变的，对于所有 $a \in A_\infty$，$\omega(a) = \omega(\pi_0(a))$。由于 x 和 x' 仅包含权 $m, n \geq 0$，它们的乘积 xx' 只有在 $m = 0$ 和$n = 0$时才含有零权分量。因此，$\pi_0(xx') = \pi_0(x)\pi_0(x')$，这意味着 $\omega(xx') = \omega(\pi_0(x)\pi_0(x'))$。类似地，$\omega(yy') = \omega(\pi_0(y)\pi_0(y'))$。由于 $\pi_0(x) = -\pi_0(y)$ 且 $\pi_0(x') = -\pi_0(y')$，我们得到

$$\omega(\pi_0(x)\pi_0(x')) - \omega(\pi_0(y)\pi_0(y')) = \omega((-\pi_0(y))(-\pi_0(y'))) - \omega(\pi_0(y)\pi_0(y')) = 0.$$

因此，$\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$ 都是各向同性的。

(3) 在不变性在伴随作用下的不变性。若对所有的 $(u,\ v)$，$(a,\ b)$，$(x,\ y) \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\langle\langle [(u, v), (a, b)], (x, y) \rangle\rangle + \langle\langle (a, b), [(u, v), (x, y)] \rangle\rangle = 0.$$

展开括号和双线性形式后，得到

$$\omega([u, a]x) - \omega([v, b]y) + \omega(a[u, x]) - \omega(b[v, y]).$$

由于态 ω 是迹的，我们可以循环置换这些元素： $\omega([u,a]x) = \omega(uax) - \omega(aux)$ 和 $\omega(a[u,x]) = \omega(aux) - \omega(axu) = \omega(aux) - \omega(uax)$。这两项相加后为零。对于 v, b, y 项也会发生同样的抵消，从而证明不变性。

(4) 弱非退化性与拓扑直和。配对的弱非退化性直接源于态 ω 的忠实性。事实上，若对于所有 $(x,y) \in \mathfrak{g}$， $\omega(ax) - \omega(by) = 0$，令 $y = 0$ 和 $x = a^*$，则有 $\omega(aa^*) = 0$，这意味着 $a = 0$（对称地， $b = 0$）。

对于拓扑直和，我们必须证明任意元素 $(u,v) \in A_\infty \oplus A_\infty$ 都能唯一分解为 $(a,a) \in \mathfrak{p}_1$ 和 $(x,y) \in \mathfrak{p}_2$。令 $P_+ = \sum_{m>0}$ 和 $P_- = \sum_{m<0}$ 分别表示到严格正权空间和严格负权空间的投影。唯一分解可明确写为

$$a = P_+ v + \frac{1}{2}\pi_0(u+v) + P_- u,$$
$$x = P_+(u-v) + \frac{1}{2}\pi_0(u-v),$$
$$y = \frac{1}{2}\pi_0(v-u) + P_-(v-u).$$

注意， $x \in A_\infty^{\geq 0}$ 和 $y \in A_\infty^{\leq 0}$。此外， $\pi_0(x) + \pi_0(y) = \frac{1}{2}\pi_0(u-v) + \frac{1}{2}\pi_0(v-u) = 0$，因此 $(x,y) \in \mathfrak{p}_2$。此外， $a + x = u$ 和 $a + y = v$。由于投影 P_+, P_-, 和 π_0 均连续， $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$ 都是闭子空间。□

5.4. 余括号公式。

命题 5.13 ($\mathfrak{p}_1$上的余括号)。 设 $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \delta)$ 是由 *Manin* 三元组在 $\mathfrak{p}_1 \cong A_\infty$上诱导的李双代数结构。对于 $(X,X) \in \mathfrak{p}_1$，其傅里叶展开为 $X(\theta) = \sum_k X_k e^{ik\theta}$，余括号在配对 $(\xi,\eta),(\zeta,\chi) \in \mathfrak{p}_2$ 上的作用为

$$\delta(X)((\xi,\eta),(\zeta,\chi)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\omega(X(\theta)[\xi(\theta),\zeta(\theta)]) - \omega(X(\theta)[\eta(\theta),\chi(\theta)])\right) d\theta.$$

在傅里叶模中，这化为

$$\delta(X)((\xi,\eta),(\zeta,\chi)) = \sum_{k+m+p=0} \omega(X_k[\xi_m,\zeta_p]) - \sum_{k+n+q=0} \omega(X_k[\eta_n,\chi_q]),$$

其中 $\xi = \sum_{m\geq 0} \xi_m e^{im\theta}$, $\eta = \sum_{n\leq 0} \eta_n e^{in\theta}$, $\zeta = \sum_{p\geq 0} \zeta_p e^{ip\theta}$, $\chi = \sum_{q\leq 0} \chi_q e^{iq\theta}$。

证明。 余括号由配对和括号结构对偶定义。对于 $(X,X) \in \mathfrak{p}_1$ 以及 $\mathfrak{p}_2$中的元素对，与交换子的配对给出

$$\langle\langle (X,X), [(\xi,\eta),(\zeta,\chi)]\rangle\rangle = \langle\langle (X,X), ([\xi,\zeta],[\eta,\chi])\rangle\rangle = \omega(X[\xi,\zeta]) - \omega(X[\eta,\chi]).$$

通过傅里叶模展开并利用权正交性（含有 $k+m+p \neq 0$ 的项为零，对于 η, χ 分量也同样如此），即可得到所述公式。□

5.5. Manin 三元组的例子。

例 5.14 （带有对角环面作用的矩阵代数）。 设 $A = M_n$ 配备归一化迹 $\omega(a)$，并以 $= \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(a)$ 作为忠实迹态。考虑对角环面作用 $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{Aut}(A)$，定义为

$$\alpha_t(a) = \mathrm{diag}(t^{k_1}, \ldots, t^{k_n})\, a\, \mathrm{diag}(t^{-k_1}, \ldots, t^{-k_n}),$$

其中 k_1，……， $k_n \in \mathbb{Z}$。相应的权空间为

$$A_m = \mathrm{span}\{E_{ij} \mid k_i - k_j = m\}.$$

我们将正权空间和负权空间定义为直和

$$A_{\geq 0} := \bigoplus_{m\geq 0} A_m, \quad A_{\leq 0} := \bigoplus_{m\leq 0} A_m.$$

零权空间 A_0 = 张成$\{E_{ii}\}$ 由对角矩阵组成，其满足$[A_0, A_0] = 0$。

约束 $\pi_0(X) + \pi_0(Y) = 0$ 对$(X, Y) \in \mathfrak{p}_2$ 意味着， X 与 Y的对角部分必须严格相反。对于元素$(E_{ij}, E_{ij}) \in \mathfrak{p}_1$ 与$(X, Y) \in \mathfrak{p}_2$，配对取值为

$$\langle\langle (E_{ij}, E_{ij}), (X, Y) \rangle\rangle = \omega(E_{ij}X) - \omega(E_{ij}Y) = \frac{1}{n}(X_{ji} - Y_{ji}).$$

据此，傅里叶模中的余括号公式可通过计算交换子 $([X, X'],\ [Y, Y'])$ 上的配对得到

$$\delta(E_{ij})((X, Y), (X', Y')) = \omega(E_{ij}[X, X']) - \omega(E_{ij}[Y, Y']).$$

例 5.15 （ $\Gamma^\infty(T\mathbb{S}^1)$ 的 Manin 三元组）。 考虑弗雷歇空间 $C^\infty(\mathbb{S}^1)$（带有紧开拓扑 C^∞ ），其上赋予李括号

$$[f, g] = f'g - g'f.$$

这使得 $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 成为拓扑李代数。注意，该映射

$$\phi : C^\infty(\mathbb{S}^1) \to \Gamma^\infty(T\mathbb{S}^1), \quad f \mapsto X_f,$$

通过将 f 映射到向量场 $X_f := f\frac{d}{dt} \in \Gamma^\infty(T\mathbb{S}^1)$ 来定义，是一个连续李代数同构。

设 $A = C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 带有旋转作用 $(\alpha_t f)(\theta) = f(\theta - t)$。相应的权空间由下式给出

$$A_m = \operatorname{span}\{e^{im\theta}\}.$$

由此，我们构造 Manin 三元组（$\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{p}_1$、 $\mathfrak{p}_2$），其中

$$\mathfrak{p}_1 = \{(f, f) \mid f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)\},$$

$$\mathfrak{p}_2 = \left\{ (X, Y) \mid X(\theta) = \sum_{k \geq 0} X_k e^{ik\theta}, Y(\theta) = \sum_{m \leq 0} Y_m e^{im\theta},\ X_0 + Y_0 = 0 \right\}.$$

零模空间 A_0 表示 $\mathbb{S}^1$上的常向量场子空间，即 $A_0 \cong \mathbb{C}$。因此， $[A_0, A_0] = 0$，且（$\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{p}_1$、 $\mathfrak{p}_2$）构成一个 Manin 三元组。

（X、 X）的余括号公式 $\in \mathfrak{p}_1$ 以及对（ξ、 η）、（ζ、 χ） $\in \mathfrak{p}_2$ 为

$$\delta(X)((\xi, \eta), (\zeta, \chi)) = \sum_{\substack{k<0, m \geq 0, p \geq 0 \\ k+m+p=0}} \omega(X_k[\xi_m, \zeta_p]) - \sum_{\substack{k>0, n \leq 0, q \leq 0 \\ k+n+q=0}} \omega(X_k[\eta_n, \chi_q]).$$

光滑函数的傅里叶多项式衰减，加上双线性形式 ω 和李括号的连续性，确保这些形式和收敛。

例 5.16 （ $\Gamma^\omega(T\mathbb{S}^1)$的 Manin 三元组）。对于 $A = C^\omega(\mathbb{S}^1)$，我们注意到，环面作用、Manin 三元组和余括号公式与光滑情形相同。我们有以下界

$$\|X_k\|_A \leq C\rho^{-k}, \quad \|Y_m\|_A \leq C\rho^{-|m|} \quad \text{for } \rho > 1, C \geq 0.$$

因此，余括号公式中的和绝对收敛

$$\sum_{\substack{k<0, m \geq 0, p \geq 0 \\ k+m+p=0}} \|[\xi_m, \zeta_p]\|_A \cdot \|X_k\|_A \leq C \sum_{k<0} \rho^{-|k|} < \infty.$$

例5.17 (C^∞的 Manin 三元组$(\mathbb{S}^1,\ \mathfrak{g})$**)**。（另见 [8, 例 3]）。设 $A = C^\infty(\mathbb{S}^1,\ \mathfrak{g})$。根据有限维李代数 $\mathfrak{g}$的根空间分解，我们有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中， $\mathfrak{h}$是 Cartan 子代数（极大交换子代数）， $\Phi \subset \mathfrak{h}'$ 是根的集合。令 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 型。我们通过 Killing 型在 A 上定义不变非退化对称双线性型

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle_A := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f(t), g(t) \rangle_{\mathfrak{g}}\, dt.$$

定义函数空间

$$A_0 := C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathfrak{h}),$$
$$A_\alpha := C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathfrak{g}_\alpha).$$

于是我们得到如下权空间分解

$$C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathfrak{g}) = A_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} A_\alpha.$$

固定正根 $\Phi^+ \subset \Phi$和负根 Φ^-的选取，定义

$$A_{\geq 0} := A_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} A_\alpha,$$
$$A_{\leq 0} := A_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^-} A_\alpha.$$

我们定义李代数 $\mathfrak{p} := A \oplus A$及其子代数

$$\mathfrak{p}_1 := \{(x, x) \mid x \in A\},$$
$$\mathfrak{p}_2 := \{(x, y) \mid x \in A_{\geq 0},\, y \in A_{\leq 0},\, \pi_0(x) + \pi_0(y) = 0\},$$

其中 $\pi_0 : A \to A_0$ 是到嘉当分量的典范投影。我们注意到$[A_0, A_0]_A = 0$，因为 $\mathfrak{h}$ 是阿贝尔的，且 A 上的李括号是逐点定义的。包含映射$[A_\alpha, A_\beta] \subseteq A_{\alpha+\beta}$由单位元 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$可知。配备分裂配对

$$\langle\langle(x, x'), (y, y')\rangle\rangle_\mathfrak{p} := \langle\langle x, y\rangle\rangle_A - \langle\langle x', y'\rangle\rangle_A,$$

该三元组$(\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2)$ 满足权空间分解（定义5.1）所需的假设，因此根据定理5.2构成一个 Manin 三元组。

例 5.18 ($C^\omega(\mathbb{S}^1,\ \mathfrak{g})$ 的 Manin 三元组)。 设 $A = C^\omega(\mathbb{S}^1,\ \mathfrak{g})$ 是取值于 $\mathfrak{g}$ 的解析回路空间。我们将这些解析回路所对应的根空间定义为 $A_\alpha := C^\omega(\mathbb{S}^1,\ \mathfrak{g}_\alpha)$。按照与光滑情形完全类似的构造，我们定义子空间 $\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_1$，以及 $\mathfrak{p}_2$。通过验证解析情形下的权空间分解和双线性形式的不变性，我们得出结论：$(\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2)$ 构成一个 Manin 三元组。

6. 李双代数的积分

设 G 是一个 1-连通正则便利李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。设 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}'$ 是一个便利子空间，使得余伴随作用 $\mathrm{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ 限制后在 $\mathfrak{b}$ 上构成光滑作用。对这一受限作用求微分，可确保 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{b}$ 上的无穷小余伴随作用 ad^* 也是良定义且光滑的。因此，这些作用自然诱导出良定义的光滑伴随作用 $\mathrm{Ad}^{(2)}$: G 作用于斜对称双线性形式 $L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$，以及李代数 $\mathfrak{g}$ 在 $L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$ 上的 $\mathrm{ad}^{(2)}$ 作用。

现在，假设 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{b},\ \delta)$ 是一个便利李双代数结构。根据定义，映射 δ : $\mathfrak{g} \to L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$是相对于 $\mathrm{ad}^{(2)}$ 作用的一个 1-余循环。应用引理 3.11，这个 1-余循环条件严格等价于映射

$$\tilde{\delta} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}), \quad X \mapsto (X, \delta(X))$$

是到半直积李代数中的一个有界李代数同态。

由于 $L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$ 上的作用 $\mathrm{Ad}^{(2)}$ of G 光滑，我们可以构造半直积李群 $G \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$。此外，$G$ 和 $L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$ 的正则性确保 $G \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$ 是与李代数 $\mathfrak{g} \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$ 对应的正则李群（根据 3.0.1）。由于 G 是 ˜ 1-连通的，我们可以应用命题 3.12 对李代数同态 δ 进行积分。这将得到一个唯一的光滑李群同态

$$\tilde{\theta} : G \to G \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}).$$

根据引理 3.10，该李群同态的第二个分量定义了一个光滑群 1-余循环 $\Theta : G \to L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{b})$ 相对于 $\mathrm{Ad}^{(2)}$ 作用（我们由此推导出了路径积分公式(6.1）。

这个群 1-余循环使我们能够通过将余循环的值沿群平移，定义唯一的乘法双向量场 π。具体而言，$\pi \in \Gamma(L^2_{\text{skew}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}))$ 是通过设定$\pi(g) := R_g^{**}\Theta(g)$ 来生成的，其中 $\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}$ 是 G 上的向量丛，其纤维由通过 G 的右作用平移$\mathfrak{b}$ 而生成（即，$\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}(g) := R^*_{g^{-1}}\mathfrak{b}$）。

要证明 $(G,\ \mathbb{F}_{\mathfrak{b}},\ \pi)$ 构成一个泊松李群结构，只需证明积分得到的乘法双向量 π 满足雅可比恒等式。我们将在下一节证明这类 π 满足雅可比恒等式。

6.1. 雅可比恒等式。

命题 6.1. 设 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的单连通正则李群，并设 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{b},\ \delta)$ 是如上一节所述的李双代数结构，它积分为乘法双向量 $\pi \in \Gamma(L^2_{skew}(\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}))$。那么，$\pi$ 满足雅可比恒等式（定义 2.2中的条件 *(2)*）。

证明。 设 $\alpha, \beta \in \Gamma_l(\mathbb{F})$ 为左不变截面，$x \in G$ 和 $Y \in \mathfrak{g}$。我们在 x 处沿 $L_{x*}Y$ 的方向计算微分$d(\pi(\alpha,\beta))$：

$$d(\pi(\alpha,\beta))(x)(L_{x*}Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(x\exp(tY))\Big(\alpha(x\exp(tY)), \beta(x\exp(tY))\Big)$$

应用乘法性条件 $\pi(gh) = L_g^{**}\pi(h) + R_h^{**}\pi(g)$，可将其拆分为两项：

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big[L_x^{**}\pi(\exp(tY))\Big(\alpha(x\exp(tY)), \beta(x\exp(tY))\Big) + R^{**}_{\exp(tY)}\pi(x)\Big(\alpha(x\exp(tY)), \beta(x\exp(tY))\Big)\Big]$$

根据双向量推前的定义（$f^{**}\pi(\mu,\nu) = \pi(f^*\mu, f^*\nu)$），我们将作用转移到截面的拉回上：

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big[\pi(\exp(tY))\Big(L_x^*\alpha(x\exp(tY)), L_x^*\beta(x\exp(tY))\Big) + \pi(x)\Big(R^*_{\exp(tY)}\alpha(x\exp(tY)), R^*_{\exp(tY)}\beta(x\exp(tY))\Big)\Big]$$

利用截面的不变性，拉回可化简（例如，$L_x^*\alpha(xh) = \alpha(h)$），于是第二项与 t 无关：

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big[\pi(\exp(tY))\Big(\alpha(\exp(tY)), \beta(\exp(tY))\Big)\Big] + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big[\pi(x)\Big(\alpha(x), \beta(x)\Big)\Big]$$

由于第二项相对于 t 为常数，其导数恰好为 0。第一项则根据莱布尼茨法则（以及 $\pi(e) = 0$ 这一事实）计算得：

$$\begin{aligned} &= d\pi(e)(Y)\Big(\alpha(e), \beta(e)\Big) + 0 \\ &= \langle Y, [\alpha(e), \beta(e)]_{\mathfrak{b}}\rangle \qquad \text{(using equation 3.2).} \end{aligned}$$

这证明了 $d(\pi(\alpha,\beta))(x) = L^*_{x^{-1}}([\alpha(e)\ \beta(e)]_{\mathfrak{b}})$。

由于 $[\alpha(e)\ \beta(e)]_{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{b}$，且子丛纤维定义为 $\mathbb{F}_x = L^*_{x^{-1}}\mathfrak{b}$，1-形式$d(\pi(\alpha,\beta))$ 唯一地经由 $\mathbb{F}$ 分解。现在注意到，分解后的截面

$$\widetilde{d(\pi(\alpha,\beta))}(x) = L^*_{x^{-1}}\left([\alpha(e), \beta(e)]_{\mathfrak{b}}\right),$$

是 $[\alpha(e)\ \beta(e)]_{\mathfrak{b}}$ 的唯一左不变延拓。因此，空间 $\Gamma_l(\mathbb{F})$ 在 $\widetilde{\ }$括号 $[\alpha,\beta]_{\mathbb{F}} := d(\pi(\alpha,\ \beta))$ 下封闭。

为证明左不变截面 α、β、$\gamma \in \Gamma_l(\mathbb{F})$ 满足雅可比恒等式，我们将分解后的截面代入 $x \in G$ 处的 Jacobi子：

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}(\alpha,\beta,\gamma)(x) &= \pi(\alpha,[\beta,\gamma]_{\mathbb{F}})(x)+\pi(\beta,[\gamma,\alpha]_{\mathbb{F}})(x)+\pi(\gamma,[\alpha,\beta]_{\mathbb{F}})(x)\\ &= L^*_{x^{-1}}\Big([\alpha(e),[\beta(e),\gamma(e)]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{b}}+[\beta(e),[\gamma(e),\alpha(e)]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{b}}+[\gamma(e),[\alpha(e),\beta(e)]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{b}}\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

对于一般的闭局部截面，Jacobi子构成一个光滑交替三阶张量场。由于 $\mathbb{F}$ 由左不变截面整体张成，且该三阶张量在此标架上恒等于零，因此它必然在 G上的每一点都为零。因此，定义 2.2 的条件（2）得到满足。□

我们在以下定理中总结定理 4.11 的结果以及与李双代数积分相对应的结果。

6.2. 无穷维中的 Drinfeld 定理。

定理6.2。 设 $(G、\ \mathbb{F}_{\mathfrak{b}}、\ \pi)$ 是一个方便泊松李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。设 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}'$ 是一个便利空间，使得典范映射 $\mathrm{incl}:\ \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}'$、$\alpha \mapsto \alpha$ 是光滑的，并且余伴随作用 $\mathrm{Ad}^*:\ G \times \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ 限制为 $\mathfrak{b}$ 上的光滑作用。则 π在单位元处的微分 $\delta :=d(\pi)(e)$ 诱导出 $\mathfrak{g}$上的唯一（在同构意义下）便利李双代数结构 $(\mathfrak{g}、\ \mathfrak{b}、\ \delta)$，其中 $\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}(e) =\mathfrak{b}$。此外，如果 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是弗雷歇空间或席尔瓦空间，则它定义了一个拓扑（连续）李双代数结构。

定理 *6.3.* 设 G 是一个单连通便利正则李群。设 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}'$ 是一个便利空间，使得典范映射 $\mathit{incl}:\ \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}', \alpha \mapsto \alpha$ 光滑，且余伴随作用 $\mathit{Ad}^*:\ G \times \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ 限制为在 $\mathfrak{b}$上的光滑作用。则，便利李双代数结构 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta)$ 可积分为唯一的（在同构意义下）方便泊松李群结构 $(G, \mathbb{F}_{\mathfrak{b}}, \pi)$，其中 $\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}$ 由 $\mathfrak{b}$ 在 G的作用下的右平移生成，$\mathbb{F}_{\mathfrak{b}}(g) := R^*_g\mathfrak{b}$，而 π 由 G的群 *1*-余循环 Θ 的右平移给出，其中 Θ 是公式 *6.1* 给出的李代数 *1*-余循环 δ 的积分。

定理 6.4. 设 G 是一个具有便利李代数 $\mathfrak{g}$的单连通正则李群。设$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}'$ 是一个便利子空间，使得典范映射 $\mathrm{incl}:\ \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}', \alpha \mapsto \alpha$ 光滑，且余伴随作用 $\mathrm{Ad}^*:\ G \times \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ 限制为在 $\mathfrak{b}$上的光滑作用。则以下断言在同构意义下等价：

(1) $(G, \mathbb{F}_{\mathfrak{b}}, \pi)$ 是一个泊松李群结构，使得 $\pi^\sharp(\mathbb{F}_x) \subset T_xG$ 对每个 $x \in G$都成立。*(2)* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta)$ 是一个李双代数结构，且 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{b}$是一个李-泊松空间。*(3)* $(\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ 是一个 *Manin* 三元组。

泊松李群与李双代数之间的对应关系还可以提升为泊松李群同态与李双代数态射之间的对应关系。设 $(G, \mathbb{F}_1, \pi_1)$ 和 $(H, \mathbb{F}_2, \pi_2)$ 是两个泊松李群结构，并设 $\Phi:\ G \to H$ 是一个泊松李群同态。则诱导映射 $\phi := d\Phi(e):\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一个李双代数态射。设 $\mathfrak{b}_1 = \mathbb{F}_1(e)$ 和 $\mathfrak{b}_2 = \mathbb{F}_2(e)$。$\Phi$ 上的相容条件（见定义 3.9）表明

$$\Theta_2 \circ \Phi = (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_* \circ \Theta_1,$$

其中，Θ_1 和 Θ_2 分别是与双向量 π_1 和 π_2相关联的 1-余循环。对这一条件在单位元处求微分，并利用 $\Theta_2(e) =0$这一事实，可得

$$\delta_2 \circ \phi = (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_* \circ \delta_1,$$

其中，$\delta_1 = d\Theta_1(e)$ 且 $\delta_2 = d\Theta_2(e)$。因此，ϕ 确实是一个李双代数态射。

反之，假设 $\phi:\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一个李双代数态射。由于 G 连通且单连通，而 H 是一个正则李群，ϕ 可积分为唯一的李群同态 $\Phi:\ G \to H$，使得 $d\Phi(e) =\phi$。ϕ 的相容条件为

$$\delta_2 \circ \phi = (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_* \circ \delta_1.$$

注意到

$$\begin{aligned}(\delta_2\circ\phi)([X,Y]) &= \delta_2([\phi(X),\phi(Y)])\\ &= \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(X)}(\delta_2(\phi(Y))) - \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(Y)}(\delta_2(\phi(X))).\end{aligned}$$

因此，相对于由李代数同态 ϕ 给出的 $\mathfrak{g}$在 $L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_2)$上的作用， $\delta_2\circ\phi$ 是一个取值于 $L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_2)$的李代数 $\mathfrak{g}$ 的 1-余循环

$$X\cdot\eta := \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(X)}\eta,$$

对于 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $\eta\in L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_2)$。由于 $d(\Theta_2\circ\Phi)(e) = \delta_2\circ\phi$， G 是单连通的，并且 $G\ltimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_2)$ 是一个正则李群，命题 3.12 表明，1-余循环 $\delta_2\circ\phi$ 积分为唯一的李群 1-余循环 $\Theta_2\circ\Phi$。

现在考虑右侧，$(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\delta_1:\ \mathfrak{g}\to L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_2)$。我们计算

$$\begin{aligned}((\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\delta_1)([X,Y]) &= (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\left(\mathrm{ad}^{(2)}_X(\delta_1(Y)) - \mathrm{ad}^{(2)}_Y(\delta_1(X))\right)\\ &= \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(X)}\left((\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*(\delta_1(Y))\right) - \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(Y)}\left((\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*(\delta_1(X))\right).\end{aligned}$$

最后这个等式成立，是因为推前映射与余伴随作用相交织

$$(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\mathrm{ad}^{(2)}_X = \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(X)}\circ(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\in L(L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_1),L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_2)).$$

确实，令 $\eta\in L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_1)$ 和 $\alpha,\ \beta\in\mathfrak{b}_2$。计算左边可得

$$\begin{aligned}((\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\mathrm{ad}^{(2)}_X\eta)(\alpha,\beta) &= \mathrm{ad}^{(2)}_X\eta\left(\phi^*(\alpha),\phi^*(\beta)\right)\\ &= \eta\left(\mathrm{ad}^*_X(\phi^*(\alpha)),\phi^*(\beta)\right) + \eta\left(\phi^*(\alpha),\mathrm{ad}^*_X(\phi^*(\beta))\right).\end{aligned}$$

由于 ϕ 是李代数同态，其对偶映射满足恒等式 $\mathrm{ad}^*_X(\phi^*(\alpha)) = \phi^*(\mathrm{ad}^*_{\phi(X)}\alpha)$。将其代入方程，我们得到

$$\begin{aligned}&\eta\left(\phi^*(\mathrm{ad}^*_{\phi(X)}\alpha),\phi^*(\beta)\right) + \eta\left(\phi^*(\alpha),\phi^*(\mathrm{ad}^*_{\phi(X)}\beta)\right)\\ &= (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*(\eta)(\mathrm{ad}^*_{\phi(X)}\alpha,\beta) + (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*(\eta)(\alpha,\mathrm{ad}^*_{\phi(X)}\beta)\\ &= (\mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(X)}\circ(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\eta)(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

因此，

$$((\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\delta_1)([X,Y]) = \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(X)}\left((\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*(\delta_1(Y))\right) - \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(Y)}\left((\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*(\delta_1(X))\right).$$

因此，$(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\delta_1:\ \mathfrak{g}\to L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_2)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 相对于作用 $\widetilde{\mathrm{ad}}^{(2)}_X(\eta) := \mathrm{ad}^{(2)}_{\phi(X)}\eta$ 的李代数 1- 余循环，其中 $X\in\mathfrak{g}$ 且 $\eta\in L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_1)$。它积分为唯一的李群余循环 $(\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\Theta_1:$ $G\to L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}_2)$。因此，李代数 1-余循环的等式

$$\delta_2\circ\phi = (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\delta_1$$

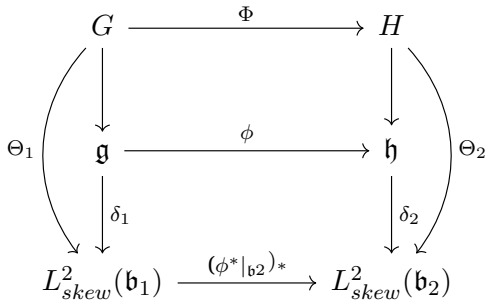
积分后得到李群 1-余循环相等

$$\Theta_2\circ\Phi = (\phi^*|_{\mathfrak{b}_2})_*\circ\Theta_1,$$

这证明 $\Phi:\ G\to H$ 是一个泊松李群同态。

让我们在以下定理中重述泊松李群同态与李双代数态射之间的对应关系：

定理 *6.5.* 设 $(G,\mathbb{F}_1,\pi_1)$ 和 $(H,\mathbb{F}_2,\pi_2)$ 是两个方便泊松李群结构。设 $\Phi:\ G\to H$ 是一个泊松李群同态。那么 $d\Phi(e):\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一个李双代数态射。反之，若 G 和 H 是单连通方便正则李群，则李双代数 $Lie(G)=\mathfrak{g}$ 和 $Lie(H)=\mathfrak{h}$ 之间的李双代数态射 $\phi:\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 唯一积分为泊松李群同态 $\Phi:\ G\to H$，使得 $d\Phi(e)=\phi$。



我们用范畴论语言重述这一等价关系。

定义 6.6。 令$\mathbf{PLGrp}^{\mathrm{sc}}_{\mathrm{reg}}$ 为如下范畴:

- **对象** 是三元组 $(G, \mathbb{F}, \pi)$，其中 G 是一个 1-连通的便利正则李群，并配备泊松李群结构 $(G, \mathbb{F}, \pi)$。
- **态射** 是泊松李群同态 $\Phi\colon G \to H$。

定义 6.7。 令 $\mathbf{LieBiAlg}^{\mathrm{reg}}$ 为如下范畴:

- **对象**是三元组（$\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta$），其中 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 是便利正则李群 G 的李代数，并配备李双代数结构（$\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta$）。
- **态射**是李双代数同态 $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$。

定理 6.8（$\mathbf{PLGrp}^{\mathrm{sc}}_{\mathrm{reg}}$ 与$\mathbf{LieBiAlg}^{\mathrm{reg}}$之间的等价）。 将单位元处的切映射作为取值来定义的微分函子 $\mathcal{L}ie$，在$\mathbf{PLGrp}^{sc}_{reg}$ 与$\mathbf{LieBiAlg}^{reg}$之间建立了范畴等价。其逆函子在自然同构意义下，是唯一的左伴随函子（积分，记作*"Int"*）。这意味着，（$\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta$）这一$\mathbf{LieBiAlg}^{reg}$中的每个李双代数结构，都可积分为相应李群 G 上唯一的泊松李结构（$G, \mathbb{F}, \pi$），使得$\mathcal{L}ie$（G）$= \mathfrak{g}$。

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Category } \mathbf{PLGrp}^{\mathrm{sc}}_{\mathrm{reg}} & \xleftarrow{\ \mathrm{Int}\ } & \textbf{Category } \mathbf{LieBiAlg}_{\mathrm{reg}} \\ \text{Objects: } (G, \mathbb{F}, \pi) & \xrightarrow[\mathcal{L}ie]{\ \simeq\ } & \text{Objects: } (\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta) \\ \text{Morphisms: } \Phi : G \to H & & \text{Morphisms: } \phi = d\Phi(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \end{array}$$

证明。 设 $Y \in \mathrm{LieBiAlg}^{\mathrm{reg}}$ 是一个李双代数，且设 $X \in \mathrm{PLGrp}^{\mathrm{sc}}_{\mathrm{reg}}$ 是一个泊松李群。为建立伴随 $\mathrm{Int} \dashv \mathcal{L}ie$，我们需要构造一个双射

$$\Phi_{Y,X} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{PLGrp}^{\mathrm{sc}}_{\mathrm{reg}}}(\mathrm{Int}(Y), X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{LieBiAlg}_{\mathrm{reg}}}(Y, \mathcal{L}ie(X))$$

也就是说，它对 Y和 X都是自然的。

首先，考虑伴随在对象 Y 上的单位。这是一个自然变换η_Y：$Y \to \mathcal{L}ie(\mathrm{Int}(Y))$。由于 $\mathrm{Int}(Y)$ 是通过积分 Y 的李代数而构造出的唯一单连通李群，单位 η_Y是李双代数的典范同构，其逆 η_Y^{-1}：$\mathcal{L}ie(\mathrm{Int}(Y)) \to Y$是良定义的。

构造 $\Phi_{Y,\,X}$：给定一个泊松李群同态 $\Psi : \mathrm{Int}(Y) \to X$，我们通过应用微分函子并与单位预合成，定义相应的李双代数同态:

$$\Phi_{Y,X}(\Psi) := \mathcal{L}ie(\Psi) \circ \eta_Y.$$

由于 $\mathcal{L}ie(\Psi)$ 和 η_Y 都是李双代数态射，它们的复合是 $\mathrm{LieBiAlg}^{\mathrm{reg}}$ 中的一个态射。

逆映射的构造 $\Phi_{Y,\,X}^{-1}$：设 $g \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{LieBiAlg}_{\mathrm{reg}}}(Y,\ \mathcal{L}ie(X))$ 是一个李双代数同态。由于 η_Y是一个同构，我们可以构造复合

$$\tilde{g} := g \circ \eta_Y^{-1} : \mathcal{L}ie(\mathrm{Int}(Y)) \to \mathcal{L}ie(X).$$

注意，$\tilde{g}$ 是一个李双代数同态，将 $\mathrm{Int}(Y)$ 的李代数映射到 X 的李代数。

由于定义域群 $\mathrm{Int}(Y)$ 是 1-连通的，且 X 是正则的，因此存在唯一的光滑李群同态 $F(g) : \mathrm{Int}(Y) \to X$，使其导数满足 $\mathcal{L}ie(F(g)) = \tilde{g}$。

此外，由于 $\tilde{g}$ 与余循环相容（定义4.1中的条件 (2)），$F(g)$ 保持乘法 Poisson 结构（定义3.9中的方程 4.2），因此它是 $\mathrm{PLGrp}^{\mathrm{sc}}_{\mathrm{reg}}$ 中的一个态射。我们定义 $\Phi_Y^{-1},_X(g) := F(g)$。□

6.2.1. 群 1-余循环的路径积分公式。设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \delta)$ 为李双代数结构。由定理 6.3，它积分得到唯一的泊松李群结构 $(G, \mathbb{F}, \pi)$。相应的 1-余循环 $\theta: G \to L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$ 是李群同态 $\tilde{\theta}: G \to G \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$ 的第二分量，该同态是由 $X \mapsto (X, \delta(X))$ 定义的李代数同态 $\tilde{\delta}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})$ 的积分。

设 $X \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g})$。利用李群的正则性 G ([21, 定义 5.3])，存在唯一曲线 $g \in C^\infty(\mathbb{R}, G)$ 满足该微分方程

$$\begin{cases} g(0) = e, \\ g'(t) = R_{g(t)*} X(t). \end{cases}$$

我们将这条曲线的端点记为 $\mathrm{evol}_G(X) := g(1)$。由 [20, 推论 5.9]，可知，半直积群中曲线 $(X, Y) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g} \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}))$ 的演化由下式给出

$$\mathrm{evol}_{G \rtimes L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b})}(X, Y) = (g(1), h(1)),$$

其中各分量由下式确定

$$g(t) = \mathrm{Evol}_G(X)(t),$$
$$h(t) = \mathrm{Ad}^{(2)}_{g(t)} \int_0^t \mathrm{Ad}^{(2)}_{g(u)^{-1}} Y(u)\, du \in L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}).$$

这里，$\mathrm{Evol}_G: C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g}) \to C^\infty(\mathbb{R}, G)$ 是右演化映射，它是右对数导数的逆

$$\delta^r : C^\infty(\mathbb{R}, G) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g}), \quad \delta^r(g)(t) := R_{g(t)^{-1}*} g'(t).$$

现在，设 $g_0 \in G$，并设 $g \in C^\infty(\mathbb{R}, G)$ 为一条光滑曲线，使得 $g(0) = e$ 且 $g(1) = g_0$。对 g 取右对数导数，我们得到由$X(t) := R_{g(t)^{-1}*} g'(t)$ 给出的曲线 $X \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g})$。

~ ~由于同态 θ 积分了李代数同态 δ，李代数中曲线 $(X(t)\ \delta(X(t)))$ 的演化恰好映到李群中的曲线 $(g(t)\ \theta(g(t)))$。令 $Y(t) := \delta(X(t)) \in C^\infty(\mathbb{R}, L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}))$，则第二分量在 $t = 1$ 处取值为

$$h(1) = \mathrm{Ad}^{(2)}_{g(1)} \int_0^1 \mathrm{Ad}^{(2)}_{g(u)^{-1}} \delta(X(u))\, du \in L^2_{\mathrm{skew}}(\mathfrak{b}).$$

由于 $g(1) = g_0$ 且 $h(1) = \theta(g_0)$，我们得到李群 1-余循环 θ 的如下路径积分公式

$$\theta(g_0) = \mathrm{Ad}^{(2)}_{g_0} \int_0^1 \mathrm{Ad}^{(2)}_{g(t)^{-1}} \delta(X(t))\, dt. \tag{6.1}$$

我们必须验证公式的唯一性 6.1 关于1 -余循环 $\Theta(g)$。根据引理 3.10，Θ 是一个1-余循环，当且仅当

$$\tilde{\Theta} : G \to G \rtimes L^2_{skew}(\mathfrak{b}), g \to (g, \Theta(g)), g \in G.$$

是一个李群同态。但由于 G是一个单连通正则李群，由命题~3.12可知，Θ 是李代数同态的唯一提升

$$\tilde{\delta} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \rtimes L^2_{skew}(\mathfrak{b}), X \to (X, \delta(X)), X \in \mathfrak{g},$$

它由 δ唯一确定。因此，公式6.1 仅取决于路径$g(t)$的端点。

7. 巴斯蒂亚尼微积分框架下关于泊松结构的评述

对于以局部凸空间 E 为模型的流形 M，我们遇到一个问题：丛 $p\colon L^2(T'M) \to M$ 可能没有光滑流形结构，因为 $T'M$ 可能不具有定义在 M 上的光滑向量丛结构。

评注 7.1。对于一个流形 M，其模型空间是局部凸空间 E，其余切丛$T'M$未必具有以 M为底空间的光滑向量丛结构。这是因为 E'未必存在一种拓扑，使得 $T'M$ 的转移图变换映射是光滑的。但如果某一点上的典型纤维与 E属于同一类型，那么它便具有依赖于局部平凡化的光滑流形结构。如果余切丛是平凡向量丛，结论同样成立，此时 $T'M \cong M \times E'$。因此， E' 上的任意局部凸拓扑都会在 $T'M$上赋予光滑流形结构。然而，若 M是一个以便利空间 E为模型的光滑流形，令$(U_\alpha, u_\alpha\colon U_\alpha \to E_\alpha)$ 为一个光滑图册。余切丛 $T'M$带有光滑流形结构（参见 [20, 33。1]），其中转移函数的余循环由下式给出

$$\phi_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(E'_\alpha, E'_\beta), x \mapsto d(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(x))^*.$$

我们将在下一节看到，在一种特殊情形下，当流形 M 作为拓扑空间是正则的，且以核弗雷歇空间或核 Silva 空间 E建模时，$L^k_{\text{alt}}(T'_xM) \cong \hat{\wedge}^k T_xM$是一个拓扑同构 [17, 推论 2, 21。2]，其中 $\hat{\wedge}$ 表示赋予射影张量积拓扑并取完备化的反对称张量积。$\hat{\wedge}^k T_xM \cong \hat{\wedge}^k E$ 在 E 是核弗雷歇空间时具有核弗雷歇结构，而 $\hat{\wedge}^k T_xM \cong \hat{\wedge}^k E$在 E 是核 Silva 空间时具有核 Silva 结构（见 8.13）。因此，$\hat{\wedge}^2 TM$ 根据 [11, 定义 3.7。1]具有光滑向量丛结构。于是，丛投影$\pi_{\hat{\wedge}^k TM}\colon \hat{\wedge}^k TM \to M$将所有 $v \in \hat{\wedge}^k T_xM$映到 $x \in M$。对于 M 的每个坐标图 $\phi\colon U \to V \subseteq E$，局部平凡化由下式给出

$$\theta_\phi : \hat{\wedge}^k T(U) \to U \times \hat{\wedge}^k E,$$
$$\theta_\phi(v) = ((\pi_{\hat{\wedge}^k TM})_{|\hat{\wedge}^k TU}, \hat{\wedge}^k T_x\phi(v))$$

其中 $x = \pi_{\hat{\wedge}^k TM}(v)$，且 $\hat{\wedge}^k T_x\phi\colon \hat{\wedge}^k T_xM \to \hat{\wedge}^k E$ 是微分 $T_x\phi\colon T_xM \to E$ 到第 k 个外幂的连续线性延拓。θ_ϕ 的逆由以下映射给出：

$$U \times \hat{\wedge}^k E \to \hat{\wedge}^k TU, (x, y) \to \hat{\wedge}^k (T(\phi)^{-1})(\phi(x), y)$$

其中 $\hat{\wedge}^k (T_x(\phi)^{-1})$ 是映射 $T(\phi)^{-1}\colon U \times E \to TU$ 到楔积的连续线性延拓。

8. 核 Fréchet 空间和核 Silva 空间上的泊松李群的 Drinfeld 定理

本节在以核 Fréchet 空间或核 Silva 空间为模型的李群框架下证明 Drinfeld 对应，这与有限维情形下的 Drinfeld 对应相似。对于将 1-连通正则李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的李双代数结构 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \delta)$ 积分为相容的泊松结构 $(G, T'G, \pi)$，我们给出一种不同于第 7 节所述证明的方法。

我们建立了一个判据：通过 Schouten 括号 $[\pi, \pi]_s = 0$ 的消失，判断双向量 $\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^2 TM)$ 是否定义了泊松结构。我们首先证明拓扑模 $\hat{\wedge}^k_{C^\infty(M)}\Gamma(TM)$ 与截面空间 $\Gamma\left(\hat{\wedge}^k TM\right)$ 同构；这一结果是要在分次交换代数 $\bigoplus_{n\geq 0}\Gamma(\hat{\wedge}^n TM)$ 上定义 Schouten 括号所必需的。

8.1. 无穷维情形下的 Serre-Swan 定理。设 M 是一个以核的拓扑向量空间 E 为模型的光滑正则流形。我们旨在证明如下拓扑同构

$$\hat{\wedge}^k_{C^\infty(M)}\Gamma(TM) \cong \Gamma\left(\hat{\wedge}^k TM\right).$$

设 $U \subset E$ 为开子集，设 F 为核的拓扑向量空间，并设 $\hat{\wedge}^k_{C^\infty(M)}$ 表示在射影张量积拓扑中完备化的斜对称 $C^\infty(M)$-线性张量积。我们首先需要建立局部映射空间的如下拓扑同构

$$C^\infty(U,F) \cong C^\infty(U,\mathbb{R})\hat{\otimes}_\pi F.$$

$C^\infty(U,\mathbb{R}) \otimes F$在 $C^\infty(U,F)$ 中的稠密性。

注记 8.1 ([14, 4.6])**.** 设 E 与 F 为拓扑向量空间。 ϵ-拓扑在 $E\tilde{\otimes}_\epsilon F$ 上是关于线性映射的初始拓扑

$$\psi : E \otimes F \to L(E'_\tau, F)_\epsilon$$

由 $\psi(x,y)(\lambda) := \lambda(x)y$ 给出，适用于 $x \in E, y \in F$ 与 $\lambda \in E'$，其中 E'_τ 表示赋予 Mackey 拓扑（即在 E' 的等度连续子集上的一致收敛拓扑）的连续线性泛函空间。 $L(E',F)$ 上的局部凸拓扑由半范数给出

$$\|\alpha\|_{S,q} := \sup_{\lambda\in S} q(\alpha(\lambda))$$

其中 S 遍历 E'的等度连续子集之集，而 q 遍历 F上的连续半范数之集。利用双极定理，我们可以推出 E 上的半范数 p 可写为

$$p(y) = \sup_{\lambda\in S} |\lambda(y)|$$

对所有 $y \in E$ 成立（见 [14, 第4节.7]）。

注记 8.2. 设 $\mathcal{K} \in \mathcal{K}(U)$与 $\mathcal{L} \in \mathcal{K}(E)$为共尾紧子集。则表达式

$$\|\gamma\|_{C^j,\mathcal{K},\mathcal{L},q} := \max\{\|\gamma\|_{1,\mathcal{K},\mathcal{L},q}, \dots, \|\gamma\|_{C^j,\mathcal{K},\mathcal{L},q}\}$$

在 $C^\infty(U,F)$上定义了一个连续半范数，其中

$$\|\gamma\|_{i,\mathcal{K},\mathcal{L},q} = \sup_{x\in\mathcal{K}\times\mathcal{L}^i} q(D^i(\gamma)(x)).$$

设 $\gamma \in C^\infty(U,F)$，并设 I_F为 F上的恒等算子。由于 F是核 Fréchet（或席尔瓦）空间，我们有 $L_\beta(F,F) \cong F'\hat{\otimes}_\pi F$（见 [30, 命题50.5]），这意味着 I_F可由有限秩算子 $i_n \in F'\hat{\otimes}_\pi F$ 逼近。 $C^\infty(U,\mathbb{R}) \otimes F$在$C^\infty(U,F)$中稠密这一事实由下述引理得出。

引理 8.3。 对于 $\gamma_n := i_n \circ \gamma \in C^\infty(U) \otimes F$，序列 $\gamma_n \to \gamma$关于 $C^\infty(U,F)$ 的紧开 C^k-拓扑收敛。

证明。 设 $j \in \mathbb{Z}_+$，令 $\mathcal{K} \in \mathcal{K}(U)$ 和 $\mathcal{L} \in \mathcal{K}(E)$ 为紧子集，并令 q 为 F上的一个半范数。那么，对于$\|\cdot\|_{C^j,\mathcal{K},\mathcal{L},q}$上的半范数 $C^\infty(U,F)$（见 [14, 引理 2.14，c]），我们有

$$\|\gamma_n-\gamma\|_{C^j,\mathcal{K},\mathcal{L},q} = \max_{1\le i\le j}\left\{\sup_{x\in\mathcal{K}\times\mathcal{L}^i} q(D^i(i_n\circ\gamma-\gamma)(x))\right\} = \max_{1\le i\le j}\left\{\sup_{x\in\mathcal{K}\times\mathcal{L}^i} q((i_n-I_F)(D^i\gamma(x)))\right\}.$$

由于每个全导数 $D^i\gamma$ 都是连续的，且定义域 $x \in \mathcal{K}\times\mathcal{L}^i$ 是紧的，因此像集 $D^i\gamma(\mathcal{K}\times\mathcal{L}^i)$ 包含于 F的某个紧子集内。由于 $i_n \to I_F$在 F的紧子集上一致，故有$\|\gamma_n-\gamma\|_{C^j,\mathcal{K},\mathcal{L},q} \to 0$。□

拓扑同构 $C^\infty(U,F) \cong C^\infty(U,\mathbb{R})\,\hat{\otimes}_\pi F$。由于 U是一个 $k_\mathbb{R}$-空间（因为它是一个 Silva空间），且 F是完备的，所以空间 $C^\infty(U,F)$ 是完备的。代数张量积 $C^\infty(U,\mathbb{R}) \otimes F$是 $C^\infty(U,F)$ 和 $C^\infty(U,\mathbb{R})\,\hat{\otimes}_\pi F$的稠密向量子空间（因为 F是核的）。因此，只需证明 $C^\infty(U,F)$ 和 $C^\infty(U,\mathbb{R})\,\hat{\otimes}_\pi F$ 在 $C^\infty(U,\mathbb{R})\otimes F$ 上诱导出相同的拓扑。唯一的连续线性映射

$$\tilde{\Lambda} : C^\infty(U,F) \to F\tilde{\otimes}_\epsilon C^\infty(U) \cong F\hat{\otimes}_\pi C^\infty(U)$$

由.....确定 $\Lambda(\gamma\cdot v) = v\otimes\gamma$对于 $v\in F$和 $\gamma\in C^\infty(U)$ 于是是一个拓扑同构（参见[14, 4。6] 对于张量积上的 ϵ-拓扑，由于 F 是核的，它与射影张量积拓扑同构）。

由于 F 是核的，我们有拓扑嵌入

$$\psi : F\otimes C^\infty(U) \to L(F'_\tau, C^\infty(U))_\epsilon.$$

现在只需证明线性映射 $h := \psi\circ\Lambda$ 是拓扑嵌入，其中$h(\gamma)(\lambda) = (\psi\circ\Lambda)(\gamma)(\lambda) = \lambda\circ\gamma$对所有 $\gamma\in Y$: $= F\otimes C^\infty(U) \subseteq C^\infty(U,\ F)$ 和 $\lambda\in F'$均成立。这可由 $F\tilde{\otimes}_\epsilon C^\infty(U)$ 与 $C^\infty(U,\ F)$ 上半范数的等价性推出，具体而言

$$\|h(\gamma)\|_{S,C^j,\mathcal{K},\mathcal{L}} = \|\gamma\|_{C^j,\mathcal{K},\mathcal{L},q}$$

对每个 $j\in\mathbb{N}_0$、紧子集 $\mathcal{K}\in\mathcal{K}(U)$、 $\mathcal{L}\in\mathcal{K}(E)$，以及 F 上的连续半范数 q，其中$S := B_q(0)^\circ \subseteq F'$。我们来计算

$$\begin{aligned}
\|h(\gamma)\|_{S,C^j,\mathcal{K},\mathcal{L}} &= \sup_{\lambda\in S}\|\lambda\circ\gamma\|_{C^j,\mathcal{K},\mathcal{L}} = \sup_{\lambda\in S}\max_{0\le i\le j}\left|\sup_{x\in\mathcal{K}\times\mathcal{L}^i} D^i(\lambda\circ\gamma)(x)\right| \\
&= \sup_{\lambda\in S}\max_{0\le i\le j}\left|\sup_{x\in\mathcal{K}\times\mathcal{L}^i}\lambda(D^i(\gamma)(x))\right| \\
&= \max_{0\le i\le j}\left\{\sup_{x\in\mathcal{K}\times\mathcal{L}^i}\left|\sup_{\lambda\in S}\lambda(D^i(\gamma)(x))\right|\right\} \\
&= \max_{0\le i\le j}\left\{\sup_{x\in\mathcal{K}\times\mathcal{L}^i} q(D^i(\gamma)(x))\right\} = \|\gamma\|_{C^j,\mathcal{K},\mathcal{L},q}.
\end{aligned}$$

扩展到楔积： $C^\infty(U,\ \hat{\wedge}^2 TU) \cong \hat{\wedge}^2_{C^\infty(U)} C^\infty(U,\ TU)$。现在我们在空间 $\otimes^2_\pi C^\infty(U,\ F)$ 上定义一个等价关系，使得射影张量积在商空间上是 $C^\infty(U)$-线性的。考虑映射

$$\tau : \otimes^2_\pi(C^\infty(U)\otimes_\pi F) \to C^\infty(U)\otimes_\pi(F\otimes_\pi F), \quad (f\otimes u)\otimes(g\otimes v)\mapsto fg\otimes u\otimes v,$$

以及它到商空间的延拓

$$\tilde{\tau} : \otimes^2_\pi(C^\infty(U)\otimes_\pi F)/\ker(\tau) \to C^\infty(U)\otimes_\pi(\otimes^2_\pi F).$$

令 τ' 为 τ 到完备化的延拓，并令 $\tilde{\tau}'$ 为 τ' 到商空间的延拓

$$\begin{aligned}
\tau' &: \hat{\otimes}^2_\pi C^\infty(U,F) \to C^\infty(U,\hat{\otimes}^2_\pi F), \\
\tilde{\tau}' &: \hat{\otimes}^2_\pi C^\infty(U,F)/\ker(\tau') \to C^\infty(U,\hat{\otimes}^2_\pi F).
\end{aligned}$$

为证明 $\tilde{\tau}'$ 是拓扑同构，我们必须构造其逆映射。注意映射

$$\begin{aligned}
I : C^\infty(U)\otimes_\pi(\otimes^2_\pi F) &\to \otimes^2_\pi(C^\infty(U)\otimes_\pi F)/\ker(\tau), \\
f\otimes(u\otimes v) &\mapsto [(f\otimes u)\otimes(1\otimes v)]
\end{aligned}$$

显然是单射。令 $[(f\otimes u)\otimes(g\otimes v)]$ 为商空间中的任意一个等价类。由于$[(f\otimes u)\otimes(g\otimes v)] = [(fg\otimes u)\otimes(1\otimes v)]$, I 也是满射。

现在考虑拓扑嵌入

$$i : C^\infty(U)\otimes_\pi(\otimes^2_\pi F) \to \otimes^2_\pi(C^\infty(U)\otimes_\pi F), \quad f\otimes u\otimes v\mapsto(f\otimes u)\otimes(1\otimes v).$$

其延拓 $\tilde{i}$: $C^\infty(U,\ \hat{\otimes}_\pi^2 F) \to \hat{\otimes}_\pi^2 C^\infty(U,\ F)$ 也是一个嵌入。显然， I 是 $\tilde{\tau}$ 在完备化之前的连续线性逆映射。令

$$q : \hat{\otimes}_\pi^2 C^\infty(U,F) \to \hat{\otimes}_\pi^2 C^\infty(U,F)/\ker(\tau')$$

为商映射。为看出 $I' := q \circ \tilde{i}$ 是映射 $\tilde{\tau}'$ 的连续右逆，我们首先观察正合列关系

$$\begin{aligned}\ker(\tau') \cap \otimes_\pi^2(C^\infty(U) \otimes_\pi F) &= \ker(\tau),\\ \otimes_\pi^2 C^\infty(U,F)/\ker(\tau) &\subset \hat{\otimes}_\pi^2 C^\infty(U,F)/\ker(\tau').\end{aligned}$$

The因此，商前空间的完备化与完备化的商空间相一致

$$\overline{\otimes_\pi^2 C^\infty(U,F)/\ker(\tau)} \cong \hat{\otimes}_\pi^2 C^\infty(U,F)/\ker(\tau').$$

于是我们注意到 $\tilde{\tau}'|_{\otimes_\pi^2(C^\infty(U)\otimes_\pi F)} = \tilde{\tau}$是以下映射的连续右逆： $I'|_{C^\infty(U)\otimes_\pi^2 F} = I$，这意味着它们的延拓 $\tilde{\tau}'$ 与 I' 互为连续逆，依据 [14, 引理 4.5]。因此，我们得到拓扑同构

$$\tilde{\tau}' : \hat{\otimes}_{\pi C^\infty(U)}^2 C^\infty(U,F) := (\hat{\otimes}_\pi^2 C^\infty(U,F))/\ker(\tau') \cong C^\infty(U, \hat{\otimes}_\pi^2 F). \tag{8.1}$$

对任意局部凸空间 E 与核空间 F，设 γ: $F \hat{\otimes}_\pi F \to F \hat{\otimes}_\pi F$ 为交换映射 $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ 的唯一连续延拓。然后我们验证

$$\begin{aligned}C^\infty(U)\hat{\otimes}_\pi(\hat{\wedge}^2 F) &:= C^\infty(U)\hat{\otimes}_\pi(\hat{\otimes}_\pi^2 F)/(\ker(Id_{\hat{\otimes}_\pi^2 F} - \gamma))\\ &\cong (\hat{\otimes}_{\pi C^\infty(U)}^2 C^\infty(U,F))/(\ker(Id_{\hat{\otimes}_{\pi C^\infty(U,F)}^2} - \tilde{\gamma})) =: \hat{\wedge}_{C^\infty(U)}^2 C^\infty(U,F),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\gamma}$ 是该映射的唯一延拓

$$\tilde{\gamma}[(f \otimes u) \otimes (g \otimes v)] := [(g \otimes v) \otimes (f \otimes u)] = [(fg \otimes v) \otimes (1 \otimes u)] = I(fg \otimes \gamma(u \otimes v))$$

到完备化。

该同构

$$\begin{aligned}&C^\infty(U)\hat{\otimes}_\pi(\hat{\otimes}_\pi^2 F)/\ker(Id_{C^\infty(U)} \otimes Id_{\hat{\otimes}_\pi^2 F} - Id_{C^\infty(U)} \otimes \gamma)\\ &\cong (\hat{\otimes}_{\pi C^\infty(U)}^2 C^\infty(U,F))/\ker(Id_{\hat{\otimes}_{\pi C^\infty(U,F)}^2} - \tilde{\gamma})\end{aligned}$$

由拓扑同构 $\tilde{\tau}'$得出，其定义于（8.1）。要看出 I'（ $\tilde{\tau}'$的逆）可传递到商空间，我们注意到它使相应的交换映射相互缠结。对任意简单张量 $f \otimes u \otimes v$，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(I'(f \otimes u \otimes v)) &= \tilde{\gamma}([(f \otimes u) \otimes (1 \otimes v)]) = [(1 \otimes v) \otimes (f \otimes u)]\\ &= [(f \otimes v) \otimes (1 \otimes u)] = I'(f \otimes v \otimes u)\\ &= I'((Id_{C^\infty(U)} \otimes \gamma)(f \otimes u \otimes v)).\end{aligned}$$

由连续性， $I' \circ (Id \otimes \gamma) = \tilde{\gamma} \circ I'$在整个完备化上成立。因此， I'将$\ker(Id - Id \otimes \gamma)$双射地映到$\ker(Id - \tilde{\gamma})$上。

此外，由于 F 是核空间，其二重完备射影张量积$\hat{\otimes}_\pi^2 F$ 也是核的。这保证了完备射影张量积在与 $C^\infty(U)$作张量积时保持正合列 $0 \to \ker(Id - \gamma) \to \hat{\otimes}_\pi^2 F$，这意味着我们可以等同

$$\ker(Id_{C^\infty(U)} \otimes (Id_{\hat{\otimes}_\pi^2 F} - \gamma)) = C^\infty(U)\hat{\otimes}_\pi \ker(Id_{\hat{\otimes}_\pi^2 F} - \gamma).$$

因此， $C^\infty(U) \hat{\otimes}_\pi \ker(Id_{\hat{\otimes}_\pi^2 F} - \gamma)$ 在 I' 下的像与 $\ker(^{Id}_{\hat{\otimes}_{\pi C^\infty(U,F)}^2} - \tilde{\gamma})$ 重合。由于 I' 是一个将这些闭子空间映到彼此的拓扑同构，它诱导出

商空间上的所需拓扑同构。因此，可以将其传递到楔积上。由此我们得到拓扑同构

$$C^\infty(U,\hat\wedge^2 TU)\cong\hat\wedge^2_{C^\infty(U)}C^\infty(U,TU),$$
$$\Gamma(U,\hat\wedge^2 TU)\cong\hat\wedge^2\Gamma(U,TU).$$

由于 M 是光滑正则的，光滑截断函数存在。因此，我们可以将这一局部平凡化延拓到全局，从而得到流形的拓扑同构

$$\psi:\Gamma(M,\wedge^2 TM)\to\wedge^2_{C^\infty(M)}(\Gamma(TM)). \tag{8.2}$$

下列交换图概述了构造商楔积之间拓扑同构的过程：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker(Id-\tilde\gamma) & \hookrightarrow & \frac{\hat\otimes^2_\pi C^\infty(U,F)}{\ker(\tau')} & \xrightarrow{q_1} & \wedge^2_{C^\infty(U)}C^\infty(U,F) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle I'|\cong} & & \downarrow{\scriptstyle I'}\ \uparrow{\scriptstyle \tilde\tau'} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde\tau'_{wedge}\cong} & & \\
0 & \longrightarrow & C^\infty(U)\hat\otimes_\pi\ker(Id-\gamma) & \hookrightarrow & C^\infty(U)\hat\otimes_\pi(\hat\otimes^2_\pi F) & \xrightarrow{q_2} & C^\infty(U)\hat\otimes_\pi(\hat\wedge^2 F) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

图 1. 无限维 Serre-Swan 定理的同构。

8.2. **Schouten 括号。** [23]设 M 是一个以便利空间为模型的光滑流形E。设 $p\colon TM\to M$是 M上 TM的运动学切丛。

考虑向量丛

$$\hat\wedge^k TM=\bigcup_{x\in M}\hat\wedge^k_\beta T_xM$$

在 M 上，其中 $\hat\wedge^k_\beta T_xM$ 表示 $\otimes^k_\beta T_xM$ 内反对称张量空间的完备化； T_xM 的有界张量积空间（见 [20, 第 1 章，5.7]）。向量丛 $p':\hat\wedge^k TM\to M$ 在 M 上具有光滑 convenient 向量丛结构（见 [23,第 1.3] 节）

命题 8.4。 设 M 是光滑正则便利流形。该映射的唯一延拓 p

$$[-,-]_s:\wedge^k\Gamma(TM)\times\wedge^l\Gamma(TM)\to\wedge^{k+l-1}\Gamma(TM),$$
$$[X_1\wedge\cdots\wedge X_k,Y_1\wedge\cdots\wedge Y_l]=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}[X_i,Y_j]\wedge X_1\wedge\ldots\hat X_i\ldots X_k\wedge Y_1\ldots\hat Y_j\ldots Y_l$$

定义一个映射

$$[-,-]_s:\Gamma(\hat\wedge^k TM)\times\Gamma(\hat\wedge^l TM)\to\Gamma(\hat\wedge^{k+l-1}TM),$$

在分次交换代数 $\bigoplus_{n\geq 0}\Gamma(\hat\wedge^n TM)$ 上，我们称之为 *Schouten* 括号。

证明。 简单张量上的映射根据射影张量积的泛性质，唯一延拓到向量场的完备射影张量积。为了说明 Schouten 括号可以延拓到 $\wedge^k_{C^\infty(M)}\Gamma(TM)\times\wedge^l_{C^\infty(M)}\Gamma(TM)$，我们注意到 Schouten 括号在每个分量上都是 $C^\infty(G)$-线性的。

$$[X_1\wedge\ldots fX_i\cdots\wedge X_k,Y_1\wedge\ldots Y_l]_s=f[X_1\cdots\wedge X_k,Y_1\wedge\ldots Y_l]+(-1)^{k-i}i(df)(X_1\wedge\ldots X_k)$$
$\wedge Y_1\wedge\ldots Y_l$其中 $i(df)(X_1\wedge\ldots X_k):=\sum_j(-1)^{j-1}df(X_j)\wedge X_1\ldots\hat{}X_j\ldots X_k$。现在，利用第9.1节中的同构8.2，我们可以将 $[-,-]_s$ 延拓到 $\Gamma(\hat\wedge^k TM)\times\Gamma(\hat\wedge^l TM)$。

8.3. **左不变/右不变多向量场的逼近**。 回忆：双向量场 $\pi \in \Gamma(L^2_{\text{skew}}(T'G))$称为左不变，如果 $\pi(gh) = L^{**}_g \pi(h)$；称为右不变，如果对每个 $g, h \in G$ 有 $\pi(gh) = R^{**}_h \pi(g)$。 □

引理 8.5。 所有截面 $\Gamma(L^2_{skew}(T'G)$ 在拓扑上同构于 $C^\infty(G, L^2_{skew}(\mathfrak{g}')$。在此同构下，左不变斜对称双向量 $\Gamma_l(L^2_{skew}(T'G)$ 在拓扑上同构于向量空间 $L^2_{skew}(\mathfrak{g}')$。

证明。 我们首先证明，丛 $L^2_{\text{skew}}(T'G)$ 可平凡化为 $G \times L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{g}')$。 考虑 G 在 $L^2_{\text{skew}}(T'G)$ 上的如下作用：

$$R : G \times L^2_{\text{skew}}(T'G) \to L^2_{\text{skew}}(T'G), \quad (g, \omega) \mapsto R^{**}_{g^{-1}}\omega,$$

其中 $R^{**}_{g^{-1}}$ 表示通过右平移对双向量取推前。由于 $L^2_{\text{skew}}(T'G)$ 和$G \times L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{g}')$都是弗雷歇（分别为席尔瓦）流形，只需证明该映射在 convenient意义下是光滑的。根据 [20, 定理 5。19]， R 当且仅当对于每一对余向量 $(\alpha_1, \alpha_2) \in T'G \times_G T'G$时，该映射是光滑的，

$$\hat{R} : G \times L^2_{\text{skew}}(T'G) \to \mathbb{R}, \quad (g, \omega) \mapsto (R^{**}_{g^{-1}}\omega)(\alpha_1, \alpha_2) := \omega(R^{*}_{g^{-1}}\alpha_1, R^{*}_{g^{-1}}\alpha_2)$$

对于所有的 $g \in G$ 和 $\omega \in L^2_{\text{skew}}(T'G)$，它都是光滑的。这是因为$G$ 在余向量上的拉回作用 $R^*_{g^{-1}}$ 以及求值映射都是光滑的。

因此，令 $p : L^2_{\text{skew}}(T'G) \to G$ 表示丛基点投影，平凡化映射

$$L^2_{\text{skew}}(T'G) \to G \times L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{g}'), \quad a \mapsto (p(a), R^{**}_{p(a)^{-1}}a)$$

是光滑的，因为 G 在 $L^2_{\text{skew}}(T'G)$ 上的作用是光滑的。它具有如下光滑逆映射：

$$(g, a_0) \mapsto R^{**}_g a_0.$$

因此我们得出结论：截面空间 $\Gamma(L^2_{\text{skew}}(T'G)) \cong C^\infty(G, L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{g}'))$。

现在，我们在此同构下识别左不变截面的子空间。设 $\tilde{\pi} \in C^\infty(G, L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{g}'))$ 是与左不变截面 $\pi \in \Gamma_l(L^2_{\text{skew}}(T'G))$ 对应的函数。根据左不变性的定义， $\pi_g = L^{**}_g \pi_e$。在右平凡化下，对应函数的取值为：

$$\tilde{\pi}(g) = R^{**}_{g^{-1}}\pi_g = R^{**}_{g^{-1}} L^{**}_g \pi_e = \mathrm{Ad}^{(2)}_g \pi_e.$$

由于 $\tilde{\pi}(g) = \mathrm{Ad}^{(2)}_g \pi_e$（其中 $\mathrm{Ad}^{(2)}_g$是作用于双向量的诱导伴随作用），任何左不变截面都由其在单位元 e 处的取值唯一且完全确定。因此，求值映射 $\pi \mapsto \pi(e)$ 在左不变截面空间 $\Gamma_l(L^2_{\text{skew}}(T'G))$ 与纤维 $L^2_{\text{skew}}(\mathfrak{g}')$. □之间给出一个拓扑同构

命题 8.6（左不变/右不变多向量场的逼近）。 **</style]一个左不变（分别地，右不变）的 向量场 (**$\hat{\wedge}^k TG$) 可以由代数外积 $\wedge^k \Gamma_l(TG)$（分别地， $\wedge^k \Gamma_r(TG)$）中的元素逼近，其中 $\Gamma_l(TG)$（分别地， $\Gamma_r(TG)$）表示 G 上左不变（分别地，右不变）向量场的实向量空间。

证明。 我们用 $\Gamma_l(\hat{\wedge}^k TG)$ 表示截面$\Gamma(\hat{\wedge}^k TG)$空间中左不变元素构成的子空间。

根据引理 8.5，将左不变截面在单位元处取值 $e \in G$，可得到左不变截面空间与单位元处的纤维之间的拓扑同构。对于切丛的完备外代数，这给出了以下拓扑同构：

$$\Gamma_l(\hat{\wedge}^k TG) \cong \hat{\wedge}^k \mathfrak{g}.$$

根据完备拓扑楔积的定义，代数外积 $\wedge^k \mathfrak{g}$ 是完备化 $\hat{\wedge}^k \mathfrak{g}$ 的稠密子空间。

由于李代数 $\mathfrak{g}$ 作为拓扑向量空间与左不变向量场空间 $\Gamma_l(TG)$ 典范同构，因此代数外积 $\wedge^k\mathfrak{g}$ 与 $\wedge^k\Gamma_l(TG)$ 完全对应。

因此，完备空间 $\hat{\wedge}^k\mathfrak{g}$ 中的任意元素都可以用 $\wedge^k\mathfrak{g}$ 中的元素逼近。通过我们的拓扑同构将这种稠密性传递回来，可知任意左不变截面 $\pi \in \Gamma_l(\hat{\wedge}^k TG)$ 都可以用代数外积 $\wedge^k\Gamma_l(TG)$ 中的元素逼近。

对于右不变多向量场，证明过程完全相同，只需将右平移代入，并使用 $\Gamma_r(TG)$。□

8.4. **乘法双向量与 Schouten 括号**。

引理 8.7。 $s \in \Gamma(\hat{\wedge}^k TG)$ 是左（右）不变的，当且仅当对于每个右（左）不变的 $X \in \Gamma(TG)$都有 $L_X s = 0$。

引理 8 .8. 若 $s \in \Gamma(\hat{\wedge}^k TG)$ 是左不变的，且 $t \in \Gamma(\hat{\wedge}^l TG)$ 是右不变的，则 $[t, s]_s = 0.$

引理 8.9. $s \in \Gamma(\hat{\wedge}^k TG)$ 是可乘的，当且仅当 $s(e) = 0$，并且对于每个左不变截面 $X \in \Gamma_l(TG)$，$L_X s$ 是左不变的。等价地，当且仅当 $s(e) = 0$，对于每个右不变截面 $Y \in \Gamma_r(TG)$，$L_Y s$ 是右不变的。

注 8.10. 关于引理 8.7、8.8 和 8.9正向结论的证明，请参阅[32, 命题 10。5]。为证明逆向结论，我们注意到，由于我们的李群是正则的，指数映射 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 存在。按照 [32, 命题 10。5], 中的推理，可在由 $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$ 生成的李群 G 的子空间 $\exp(\mathfrak{g})$中建立逆向结论。

如果这个子群 $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$ 在 G中是开的，那么它也是闭的，从而与 G的单位连通分支 G_0 重合。这使我们能够将结果从无穷小层面推广到单位连通分支 G_0，从而在 G 连通时推广到整个群。例如，当 G 是有限维李群的光滑（或解析）圈群时，或者当 G 是圆周 $\mathbb{S}^1$的光滑（或解析）微分同胚群时，$\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$ 是 G 的一个开子集。

命题 8.11. 如果 $\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^2 TG)$ 是乘法双向量，则 $[\pi, \pi]_s \in \Gamma(\hat{\wedge}^3 TG)$ 是乘法双向量。

证明. 由Schouten 括号的分次Jacobi恒等式（[23, 定理1.4]）可知，Schouten 括号的李导数 $[\pi, \pi']_s$ 满足

$$L_X[\pi, \pi'] = [L_X\pi, \pi']_s + [\pi, L_X\pi']$$

对 $X \in \Gamma(TG)$ $\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^k TG)$ $\pi' \in \Gamma(\hat{\wedge}^l TG)$ 成立。现在，若 $\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^2 TG)$ 是可乘的，那么对于左不变向量场 $X \in \Gamma_l(TG)$ 和右不变向量场 $Y \in \Gamma_r(TG)$，有

$$L_Y L_X[\pi, \pi] = 2([L_Y L_X\pi, \pi]_s + [L_Y\pi, L_X\pi]) = 0$$

这由前面三个引理得出。根据引理 6.8，我们得出 $[\pi, \pi]_s$ 是可乘的。□

8.5. **核弗雷歇空间或核 Silva 空间建模的正则泊松李群的 Drinfeld 定理**。本节将证明定理 6.4 在李群以核弗雷歇空间或核 Silva 空间为模型时的一个特例。设 G 是李代数为 $\mathfrak{g}$、以核弗雷歇空间或核 Silva 空间为模型的光滑李群。我们首先证明向量丛 $L^2_{skew}(T'G)$ 与 $\hat{\wedge}^k TG$拓扑同构。为此，我们先用以下两个引理将单位元 $L^2_{skew}(\mathfrak{g}')$ 处的纤维与空间 $\hat{\wedge}^k\mathfrak{g}$ 对应起来。

引理8.12。 如果 E 是核 *Fréchet* 空间或核 *Silva* 空间，那么 L^2_b（E'_b）分别是核 *Fréchet* 空间或核 *Silva* 空间，并且二者之间存在拓扑同构

$$L^2_c(E'_c) \cong L^2_b(E'_b) \cong E\hat{\otimes}_\pi E.$$

其中 $E\hat{\otimes}_\pi E$ 表示 E 与自身的完备射影张量积。此外，

$$L^2_{skew}(E') \cong \hat{\wedge}^2 E$$

其中，$\hat{\wedge}^2 E$ 表示 $E\hat{\otimes}_\pi E$中的完备反对称张量空间。

证明。 我们首先注意到，根据 [30, 命题 50.2、50.12]，每个核空间都是半蒙特尔空间。由于 E 必为弗雷歇空间或席尔瓦空间，因此是桶状的。因 E 此， E 是半蒙特尔、桶状且拟完备的空间，这意味着它是蒙特尔空间，因此也是自反的。

由于蒙特尔空间的每个有界子集都是相对紧的，在有界子集上一致收敛的拓扑与在紧子集上一致收敛的拓扑一致。这种等价性给出拓扑同构 $L^2_c(E'_c) \cong L^2_b(E'_b)$。

设 E 是核弗雷歇空间，并令 $F = E'_b$。由于 F 是席尔瓦空间，因此相对于 F'_b上的有界子集一致收敛拓扑，它是自反的。根据 [27, 9.9 推论1]， $F\hat{\otimes}_\pi F$ 是自反的，并且有以下拓扑同构：

$$(F\hat{\otimes}_\pi F) \cong ((F'_b\hat{\otimes}_\pi F'_b)'_b)'_b,$$
$$F'_b\hat{\otimes}_\pi F'_b \cong E\hat{\otimes}_\pi E.$$

由于 $F'_b = E$ 是核弗雷歇空间，因此 $(F'_b\hat{\otimes}_\pi F'_b)'_b \cong (F'_b)'_b\hat{\otimes}_\pi (F'_b)'_b \cong F\hat{\otimes}_\pi F$。由此，我们得到拓扑同构 $(F\hat{\otimes}_\pi F)'_b \cong E\hat{\otimes}_\pi E$。此外，我们有如下识别 $(F\hat{\otimes}_\pi F)'_b \cong L^2(E'_b)_b$。因此， $L^2(E'_b)_b \cong E\hat{\otimes}_\pi E.$

现在，若 E 是核 Silva 空间，则 $F := E'$ 是核弗雷歇空间。根据 [27,定理 9.9],， $F'_b\hat{\otimes}_\pi F'_b$ 与 $L^2(F)_b$ 之间存在拓扑同构。由于 E 是核 Silva 空间，它是自反的，这意味着 $F'_b = (E'_b)'_b \cong E$。因此， $L^2(E'_b)_b \cong E\hat{\otimes}_\pi E$。

延拓到反对称子空间：为说明该同构可延拓到楔积，考虑连续翻转映射 τ：$E\hat{\otimes}_\pi E \to E\hat{\otimes}_\pi E$，它是 $x\otimes y \mapsto y\otimes x$ 的唯一延拓。同理，定义转置映射 σ：$L^2(E'_b) \to L^2(E'_b)$，使得 $\sigma(B)(\lambda, \mu) = B(\mu, \lambda)$。

上文构造的同构 Ψ：$E\hat{\otimes}_\pi E \to L^2(E'_b)$ 满足等变条件$\Psi\circ\tau = \sigma\circ\Psi$。空间 $\hat{\wedge}^2 E$ 定义为反对称张量的闭子空间（ τ 的 (-1)-特征子空间），而 $L^2_{\text{skew}}(E'_b)$ 是交错双线性形式的子空间（ σ 的 (-1)-特征子空间）。由于 Ψ 是一个拓扑同构，它将 τ 的特征子空间映射到 σ 的相应特征子空间，因此它在反对称子空间之间诱导出一个拓扑同构：

$$\hat{\wedge}^2 E \cong L^2_{\text{skew}}(E'_b).$$

□

引理 8.13。 如果 $\mathfrak{g}$ 是核弗雷歇空间（或 *Silva*空间），那么 $\hat{\wedge}^2\mathfrak{g}$ 也具有弗雷歇空间（分别为 *Silva*空间）的拓扑向量空间结构。

证明。情形 *1*：设 $\mathfrak{g}$是核弗雷歇空间。令 τ：$\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 为由 $a\otimes b \mapsto b\otimes a$定义的交换映射，并令 τ 也表示其唯一的连续延拓 τ：$\mathfrak{g}\hat{\otimes}_\pi\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\hat{\otimes}_\pi\mathfrak{g}$。我们将外幂定义为商空间 $\hat{\wedge}^2_\pi\mathfrak{g} := (\mathfrak{g}\hat{\otimes}_\pi\mathfrak{g})/\ker(\tau)$。由于 $\mathfrak{g}\hat{\otimes}_\pi\mathfrak{g}$是弗雷歇空间，而 $\ker(\tau)$ 是一个闭子空间，因此商空间 $\hat{\wedge}^2_\pi\mathfrak{g}$ 本身也是弗雷歇空间。

情形 *2*：设 $\mathfrak{g}$是核 Silva 空间。令 E为一个 Silva空间，令 q：$E \to E/\ker(\tau)$ 为商映射。我们将证明 $W := E/\ker(\tau) = \varinjlim E_n/(E_n \cap \ker(\tau))$ 是巴拿赫空间的正则归纳极限。

回忆一下， $E = \varinjlim E_n$ 是巴拿赫空间 E_n 的正则归纳极限，其紧连接映射为i_n：$E_n \to E_{n+1}$。 E 上的拓扑相对于包含映射 q_n： $E_n \to E$是终拓扑，而 $E/\ker(\tau)$上的拓扑相对于商映射 q是终拓扑。因此， $E/\ker(\tau)$上的拓扑相对于复合映射 $\tilde{q}_n := q\circ q_n$是终拓扑。这些映射提升为单射$\tilde{\imath}_n$： $E_n/(\ker(\tau)\cap E_n) \to E/\ker(\tau)$，并且 $E/\ker(\tau)$上的拓扑相对于这些诱导映射是终拓扑。

尚需证明诱导连接映射是紧的。设 $p_n\colon\ E_n \to E_n/(\ker(\tau)\cap E_n)$为典范商映射。由于 p_n 是巴拿赫空间之间的连续开映射，它将有界集映为有界集。设 $B \subset E_n/(\ker(\tau)\cap E_n)$为一个有界集。我们注意到 $p_n^{-1}(B)$在 E_n中有界；事实上，设 $V \subset E_n$ 为一个0邻域，则 $p_n(V)$是$\ker(\tau)\cap E_n$的一个0邻域，因此存在某个 $\lambda \in \mathbb{R}_+$ 使得 $B \in \lambda p_n(V)$，这蕴含 $p_n^{-1}(B) \in \lambda V$。因此， $p_n^{-1}(B)$是有界的。

由于 i_n 是紧算子，像 $i_n(p_n^{-1}(B))$ 在 E_{n+1}中相对紧。由于商空间的连接映射由$\tilde{i}_n(B) = p_{n+1}(i_n(p_n^{-1}(B)))$ 给出，且 p_{n+1} 连续，因此 $\tilde{i}_n(B)$ 相对紧。因此，$\hat{\wedge}^2_\pi\mathfrak{g}$ 是一个 Silva空间。□

$L^2_{skew}(T'G) \cong \hat{\wedge}^2 TG$上的核 *Fréchet*（分别为 *Silva*）向量丛结构。
我们注意到，典范映射 $T\colon \hat{\wedge}^2 TG \to G\times\hat{\wedge}^2_\pi\mathfrak{g}$，定义为 $T(\alpha) := (p(\alpha),\ dR_{p(\alpha)^{-1}}(p(\alpha))\alpha$ ），是一个双射。由于右平移映射 $dR_{g^{-1}}$ 对每个 $g \in G$都是拓扑同构，它与外幂的完备化相交换。因此，我们可以在$\hat{\wedge}^2 TG$ 上赋予光滑向量丛结构（沿用 [11, 3。7]），该结构具有以典型纤维 $\hat{\wedge}^2_\pi\mathfrak{g}$为纤维的全局平凡化。

结合前两个引理的结果，我们得到向量丛 $L^2_{skew}(T'G)$ 与 $\hat{\wedge}^2 TG$ 的拓扑识别。

命题 8.14。 设 G 是以核 *Fréchet* 空间或核 *Silva* 空间为模型的光滑李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。则向量丛 $L^2_{skew}(T'G)$ 与 $\hat{\wedge}^2 TG$拓扑同构。

现在我们可以证明以核 Fréchet 空间或核 Silva 空间为模型的李群的 Drinfeld 定理。

设 G 是以核 Fréchet 空间或核 Silva 空间为模型的单连通李群，并设 $\mathfrak{g}$ 是其李代数。假设 (G,π) 是一个光滑泊松李群结构，其中$\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^2 TG)$。根据定理 4.11，存在一个定义在 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}',\delta)$ 上的连续李双代数结构 $\mathfrak{g}$。

反过来，假设 G 是与李代数 $\mathfrak{g}$对应的唯一单连通正则李群，并且 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}',\delta)$ 是 $\mathfrak{g}$上的连续李双代数结构。根据第 3 节中的引理 3.10、引理 3.11 和命题 3.12，余循环 δ 可积分为乘法双向量 $\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^2 TG)$。为了证明 $(G, T'G, \pi)$ 构成 G上的泊松结构，我们必须证明 π 满足雅可比恒等式。这可由以下命题推出。

命题 8.15. 设 G 是一个以核 *Fréchet* 李代数或核 *Silva* 李代数 $\mathfrak{g}$为模型的 *1*-连通正则李群。若 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}',\delta)$ 是一个李双代数结构，则 δ 可积为一个光滑的乘法双向量 $\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^2 TG)$，使得 π 是一个泊松双向量（这意味着括号$\{f,g\} := \pi(df, dg)$ 满足雅可比恒等式）。因此，$(G, T'G, \pi)$ 是一个泊松李群结构。

证明。 根据 [21, 定理 3。6], 可知， π 是泊松双向量，当且仅当其 Schouten 括号为零： $[\pi,\pi]_S = 0$。

由于 $[\pi,\pi]_S$是可乘的（由命题 8.11），映射 $\theta(x)\colon = R^{**}_{x^{-1}}[\pi,\pi]_S(x)$ 定义了一个$\hat{}$光滑群 1-余循环。因此，映射 $\theta(x)\colon = (x,\ \theta(x))$ 定义了一个到半直积中的李群同态

$$\hat{\theta} : G \to G \rtimes L^3_{\text{skew}}(\mathfrak{g}').$$

$\hat{}\,\hat{}$ 在单位元处求导，得到一个李代数同态 $\delta := d_e\theta\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \rtimes L^3_{\text{skew}}(\mathfrak{g}')$。因此，第二个分量 $[\delta,\delta] := \text{pr}_2(\hat{\delta})$ 是一个相对于伴随作用 $\text{ad}^{(3)}$ 的李代数 1-余循环，其中 $\mathfrak{g}$ 在 $L^3_{\text{skew}}(\mathfrak{g}')$上的作用由下式给出

$$\text{ad}^{(3)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(L^3_{\text{skew}}(\mathfrak{g}')),$$
$$\text{ad}^{(3)}_X \eta(\alpha,\beta,\gamma) = \eta(\text{ad}^*_X\,\alpha,\beta,\gamma) + \eta(\alpha,\text{ad}^*_X\,\beta,\gamma) + \eta(\alpha,\beta,\text{ad}^*_X\,\gamma)$$

对于 $X \in \mathfrak{g}$、 $\eta \in L^3_{\text{skew}}(\mathfrak{g}')$ 和 $\alpha,\beta,\gamma \in \mathfrak{g}'$。

E将此余循环作用于元素 $X \in \mathfrak{g}$ 和对偶元素 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}'$，我们得到

$$[\delta, \delta](X)(\alpha, \beta, \gamma) = [[\alpha, \beta]_{\mathfrak{g}'}, \gamma]_{\mathfrak{g}'}(X) + \text{cyclic permutations}(\alpha, \beta, \gamma).$$

由于等式右侧的表达式恰好对应于 X 在 $\mathfrak{g}'$上的李括号 Jacobi子上的取值，而根据定义，$\mathfrak{g}'$ 满足雅可比恒等式，因此我们得到 $[\delta, \delta] = 0$。

ˆ 因此，李代数同态 δ 的第二个分量是平凡的。由于 G 是 1-连通的，这意味着相应的李群同态 θ以及李群 1-余循环 θ也都是平凡的。因此，对所有 $x \in G$，$\theta(x) = 0$，这意味着 $[\pi, \pi]_S = 0$ 处处成立。□

我们在以下定理中重述本节语境下的 Drinfeld 对应：

定理 8.16. 设 G 是一个以核 *Fréchet* 空间或核 *Silva* 空间为模型的李群，设 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，并且 $(G, T'G, \pi)$ 是一个光滑泊松李群结构，其中 $\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^2 TG)$。则 $\mathfrak{g}$上存在一个连续李双代数结构 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \delta)$。反之，若 G 是李代数 $\mathfrak{g}$ 所对应的唯一单连通正则李群，且 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \delta)$ 是 $\mathfrak{g}$上的连续李双代数结构，则 G 上存在唯一的光滑泊松李群结构 $(G, T'G, \pi)$，使得 $\pi \in \Gamma(\hat{\wedge}^2 TG)$ 是一个光滑双向量。

8.6. **例子**。本节所讨论的主要例子包括实李群 G 的光滑环群$C^\infty(\mathbb{S}^1, G)$、解析环群 $C^\omega(\mathbb{S}^1, G)$，以及 $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ 和 $\mathrm{Diff}^\omega(M)$。

回顾一下，我们证明 Drinfeld 对应时对李群 G 的假设是：G 的建模空间必须是核弗雷歇空间或核 Silva 空间，G 应为单连通正则李群，并且由 G 的子空间 $\exp(\mathfrak{g})$ 生成的群必须等于 G。

Examples: (1) $LG := C^\infty(\mathbb{S}^1, G)$*, (2)* $ALG := C^\omega(\mathbb{S}^1, G)$.

定理*8.17*。设 G 是一个实光滑李群，则光滑环群 $LG := C^\infty(\mathbb{S}^1, G)$ 是一个正则李群，其李代数为 $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathfrak{g})$，这是一个核弗雷歇空间。解析环群 $ALG := C^\omega(\mathbb{S}^1, G)$ 是一个正则李群，其李代数为 $C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathfrak{g})$，这是一个核 *Silva* 拓扑空间。关于 $C^\infty(\mathbb{S}^1, G)$ 和 $C^\omega(\mathbb{S}^1, G)$ 的正则性，参见例子 *a* 和 *f*。

引理 8.18. $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathfrak{g})$ 是一个核弗雷歇空间（另见 [20, 引理 30.3]）。

证明. $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ 与快速衰减实数列空间拓扑同构$\mathfrak{s}$，由 [30, 定理 51.3] 可知。因此，$C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ 是一个核弗雷歇空间（见 [30, 注 51.1]）。□

命题 8.19. $C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathfrak{g})$ 是一个核 *Silva* 空间（另见 [20, 引理 30.3]）。

证明. 只需证明标量值空间 $C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ 是一个核 Silva 空间，因为与有限维空间 $\mathfrak{g}$ 作张量积会保留这一性质（另见 [20, 定理 11.4]）。

令 $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - r < |z| < 1 + r\}$ 为以单位圆为中心、厚度为 $r \in (0,1)$ 的开环域。我们将该环域上的平方可积全纯函数构成的希尔伯特空间定义为

$$H^2(A_r) := \left\{ f : A_r \to \mathbb{C} \mid f \text{ is holomorphic and } \int_{A_r} |f(z)|^2 \, dA < \infty \right\}.$$

我们将证明，$C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$是 $H^2(A_r)$的局部凸直极限，其中 $r \to 0$；并且对偶连接映射是核算子（具体而言，是迹类算子）。

希尔伯特空间的直接极限。设 $f \in C^\omega(\mathbb{S}^1,\ \mathbb{R})$。那么存在某个 $r \in (0,\ 1)$，使得 f可延拓为圆环 A_r上的有界全纯函数 F。将其在圆周上的傅里叶展开写为

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ik\theta},$$

如下事实： f 可全纯延拓至 A_r ，由Paley–Wiener定理（例如参见 [28, 定理3.1]）可知，存在常数 C、 $\lambda > 0$ 使得

$$|\hat{f}(k)| \le C e^{-\lambda |k|} \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}.$$

这一指数衰减保证了 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\,\hat{}\,f(k)|^2 < \infty$。由帕塞瓦尔恒等式，全纯延拓 F 对任意 $0 < r' < r$在 $A_{r'}$ 上具有有限的 L^2-范数，即 $F \in H^2(A_{r'})$。因此我们得到拓扑识别

$$C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) = \varinjlim_{r\to 0} H^2(A_r)$$

作为希尔伯特空间的局部凸正则直接极限。
对偶空间的核性。由于每个 $H^2(A_r)$都是希尔伯特空间，根据里斯表示定理，它与其对偶 $H^2(A_r)'$反线性等距。直接极限的对偶空间恰好是诸对偶的射影极限：

$$C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})' = \varprojlim_{r\to 0} H^2(A_r)'.$$

考虑两个半径 $0 < r < R < 1$。正向系统中的连接映射是包含映射 $H^2(A_R) \hookrightarrow H^2(A_r)$。相应的对偶连接映射是限制算子$T$: $H^2(A_R) \to H^2(A_r)$，其定义为 $T(f) = f|_{A_r}$。我们将证明 T是一个迹类算子。

单项式 $\{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $H^2(A_R)$和 $H^2(A_r)$的正交基。下面分析算子 T^*T： $H^2(A_R) \to H^2(A_R)$。首先，我们注意到 T 关于旋转$R_\theta(z) = e^{i\theta} z$是等变的。对于任意 f， $g \in H^2(A_R)$， $H^2(A_r)$上的内积给出

$$\begin{aligned}
\langle T^*T(R_\theta f), g\rangle_R &= \langle T(R_\theta f), T(g)\rangle_r \\
&= \langle R_\theta(Tf), Tg\rangle_r \\
&= \langle Tf, R_{-\theta}(Tg)\rangle_r \\
&= \langle Tf, T(R_{-\theta} g)\rangle_r \\
&= \langle T^*Tf, R_{-\theta} g\rangle_R \\
&= \langle R_\theta(T^*Tf), g\rangle_R.
\end{aligned}$$

由于这对所有 g都成立，因此有 $T^*T \circ R_\theta = R_\theta \circ T^*T$，这意味着 T^*T与旋转可交换。由于单项式 z^n 恰好是旋转作用的特征向量，它们也必定是 T^*T的特征向量。因此， $T^*T(z^n) = c_n z^n$，其中 $c_n > 0$为某些特征值。

我们通过取内积显式计算 c_n：

$$c_n = \frac{\langle T^*T(z^n), z^n\rangle_R}{\|z^n\|_R^2} = \frac{\langle T(z^n), T(z^n)\rangle_r}{\|z^n\|_R^2} = \frac{\int_{A_r} |z|^{2n}\, dA}{\int_{A_R} |z|^{2n}\, dA}.$$

在极坐标（$dA = s\, ds\, d\theta$）下计算面积积分，我们得到：

$$c_n = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{1-r}^{1+r} s^{2n+1}\, ds\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_{1-R}^{1+R} s^{2n+1}\, ds\, d\theta} = \frac{(1+r)^{2n+2} - (1-r)^{2n+2}}{(1+R)^{2n+2} - (1-R)^{2n+2}}.$$

要证明 T 是迹类算子，我们必须证明其奇异值之和收敛，即 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{c_n} < \infty$。我们对序列 $a_n = \sqrt{c_n}$ 应用比值判别法，得到 $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{c_{n+1}}{c_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(1+r)^{2n+4}}{(1+R)^{2n+4}}} = \frac{1+r}{1+R}.$$

由于 $r < R$，比值 $\frac{1+r}{1+R}$ 严格小于 1。对于$n \to -\infty$，利用（$1-r$）和（$1-R$）项也可得到相同的对称极限。根据比值判别法，级数 $\sum \sqrt{c_n}$ 绝对收敛，由此证明 T 是迹类算子。

由于 $C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})'$ 是一个希尔伯特空间的射影极限，且每个连接映射都是迹类映射，[27, 第 7.3 章，推论 3] 证明了 $C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})'$ 是核弗雷歇空间。根据 [27, 第四章，定理 9。6], 核弗雷歇空间的强对偶是核 Silva 空间。

此外，由于 $C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})'$ 是核弗雷歇空间，因此它是蒙特尔空间。蒙特尔空间的强对偶仍是蒙特尔空间，而蒙特尔空间是自反的。因此，典范求值映射给出如下拓扑同构

$$C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \cong C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})''.$$

因此，原空间 $C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ 是核 Silva 空间。 □

Examples: (3) $\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty(M)_0}$*, (4)* $\widetilde{\mathrm{Diff}^\omega(M)_0}$.
设 M 是一个维数为 n的实紧连通流形。指数映射 exp :$\Gamma^\infty(TM) \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ 和 exp : $\Gamma^\omega(TM) \to \mathrm{Diff}^\omega(M)$ 不一定是局部微分同胚，但我们将看到，由像 $\exp(\Gamma^\infty(TM))$（分别为 $\exp(\Gamma^\omega(TM))$）生成的子群等于单位连通分支 $\mathrm{Diff}^\infty(M)_0$（分别为 $\mathrm{Diff}^\omega(M)_0$）。令$\widetilde{\exp}$: $\Gamma^\infty(TM) \to \mathrm{Diff}^\infty(M)_0$为指数映射到万有覆盖群的提升。则由 $\widetilde{\exp}(\Gamma^\infty(TM))$（分别为 $\widetilde{\exp}(\Gamma^\omega(TM))$）生成的群等于$\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty(M)_0}$（分别为 $\widetilde{\mathrm{Diff}^\omega(M)_0}$）。

注记 8.20. 设 M 是一个紧致连通光滑流形。尽管指数映射 exp : $\Gamma^\infty(TM) \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ 并非局部满射（见 [24,第 9] 页），但由其像生成的子群$H := \langle \exp(\Gamma^\infty(TM)) \rangle$ 等于整个单位连通分支 $\mathrm{Diff}^\infty(M)_0$。

为说明这一点，注意到 H 是 $\mathrm{Diff}^\infty(M)_0$的正规子群。事实上，对任意微分同胚$\varphi \in \mathrm{Diff}^\infty(M)_0$和任意向量场 $X \in \Gamma^\infty(TM)$，共轭得到 $\varphi \circ \exp(X) \circ \varphi^{-1} = \exp(\varphi_* X)$，其中推前 $\varphi_* X$ 仍是 $\Gamma^\infty(TM)$中的光滑向量场。根据 Thurston 的 [37,定理 1]，连通流形的微分同胚群的单位连通分支 $\mathrm{Diff}^\infty(M)_0$, 是一个单群。由于 H 是一个非平凡正规子群，它不可能是一个真子群，因此我们必然得出结论： $H = \mathrm{Diff}^\infty(M)_0$。

注记 8.21. 设 M 是一个实解析的 $U(1)$-纤维化紧致连通光滑流形。设$G = \mathrm{Diff}^\omega(M)$为作用于 M 上的实解析微分同胚李群，其模型空间为核 Silva 空间 $\mathfrak{g} = \Gamma^\omega(TM)$。令 $H = \langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$ 表示由指数映射的像生成的子群。

虽然指数映射 exp : $\Gamma^\omega(TM) \to \mathrm{Diff}^\omega(M)$ 在 $\mathrm{Diff}^\omega(M)$ 的 Silva 拓扑下不是局部微分同胚，但 Tsuboi 的编组引理意味着 H 包含单位元的一个开邻域。

设 $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ 是一个有限解析向量场集，它们在任意点 $x \in M$处张成切空间 $T_x M$（命题 8.1]）。对于从 $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$中选取的每一组 n 向量场 κ，令 Δ_κ 为相应向量场的行列式。我们构造解析分割函数 $\mu_\kappa = (\Delta_\kappa)^4 / \sum_\lambda (\Delta_\lambda)^4$ （见 [36, 第 8]节）。

根据编组引理 [36, 定理7。1], 任意 $\varphi \in G$ 充分接近单位元的元素都可以分解为 $\varphi = \prod_\kappa g_\kappa$，其中每个因子 g_κ 都满足以下条件： $g_\kappa - \mathrm{id}$ 可被 μ_κ整除。

由于 μ_κ 包含因子（Δ_κ）^{4}, , 映射 g_κ 满足奇异雅可比矩阵的逆函数定理的假设（g_κ –id 可被 Δ^r 整除，其中 $r \geq 3$， [36, 定理 6。12]）。该定理保证每个编组因子 g_κ 都可以表示为有限个流的复合

$$g_\kappa(x) = \left(\exp(t_1 \xi_{k_1}) \circ \cdots \circ \exp(t_n \xi_{k_n})\right)(x),$$

其中 $t_i(x)$ 是实解析函数。映射 $x \mapsto \exp(t_i(x)\xi_{k_i})(x)$ 对应于全局解析向量场 $X_i = t_i \cdot \xi_{k_i} \in \mathfrak{g}$ 在时间 1 时的流。

因此，单位元的某个充分小邻域中的每个 φ 都属于 H，这意味着 H 是 G 的开子群。由于单位连通分支 $\mathrm{Diff}^{\omega}(M)_0$ 是连通的，开子群必定就是整个连通分支，也就是说 $H = \mathrm{Diff}^{\omega}(M)_0$。

引理 8.22. 设 M 是一个紧流形。光滑微分同胚群 $\mathrm{Diff}^{\infty}(M)$ 和实解析微分同胚群 $\mathrm{Diff}^{\omega}(M)$ 分别是以光滑向量场空间 $\Gamma^{\infty}(TM)$ 和实解析向量场空间 $\Gamma^{\omega}(TM)$ 为模型的正则李群。此外，$\Gamma^{\infty}(TM)$ 是核弗雷歇空间，而 $\Gamma^{\omega}(TM)$ 是核 *Silva* 空间。

证明。若 M 是一个维数为 n 的紧流形，则 $\mathrm{Diff}^{\infty}(M)$ 是一个李群，其李代数为$\Gamma^{\infty}(TM)$。局部而言，该空间同构于 $C^{\infty}(U,\mathbb{R}^n)$，其中 $U \subseteq M$ 是一个开子集。根据 [11, 命题 1.7.16]，$C^{\infty}(U,\mathbb{R}^n)$ 是一个弗雷歇空间。$\Gamma^{\infty}(TM)$ 的核性由 [30, 定理 51.5]及其推论得出（另见 [20, 引理 30.3]）。$\mathrm{Diff}^{\infty}(M)$ 的正则性由 [20, 定理 43.1]确立。

在实解析情形下，$\mathrm{Diff}^{\omega}(M)$ 以李代数 $\Gamma^{\omega}(TM)$ 为模型。根据 [20, 定理 11.4], $\Gamma^{\omega}(TM)$ 是一个核 Silva 空间。虽然解析微分同胚群的正则性在 Milnor 意义下可能较为微妙（参见 [13]），但由 [20, 定理 43.4] 可知，$\mathrm{Diff}^{\omega}(M)$ 是 Kriegl 和 Michor [20, 定义 38.4]意义下的正则李群。□

致谢

首先，我要特别感谢 Helge Glöckner 教授在许多重要讨论中给予的指点。此外，我非常感谢 Peter W. Michor 教授、Alice Barbora Tumpach 教授、Tomasz Goli´nski 教授、Stepan Maximov 博士、Milan Niestijl 博士和 Dawid Kern 博士，他们在本研究的不同阶段进行了有益的讨论并给予了鼓励。本研究得到德国研究联合会（Deutsche Forschungsgemeinschaft）资助，项目编号为 SFB-TRR 358/1 2023 – 491392403。

附录 A. 无穷维微积分的概念与记号

A.1. **空间的拓扑性质**。

（1）豪斯多夫拓扑空间 X 是k-空间，如果子集 $A \subseteq X$ 为闭集，当且仅当对每个紧子集 $K \subseteq X$，$A \cap K$ 在 K 中为闭集。每个可度量化拓扑空间都是k-空间。（2）豪斯多夫空间 X 是 $k_{\mathbb{R}}$-空间，如果函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 连续，当且仅当它是 k-连续的（在紧子集上连续）。每个k-空间都是 $k_{\mathbb{R}}$-空间。（3）空间 X 是 k^{∞}-空间，如果对每个 $n \in \mathbb{N}$，笛卡尔幂 X^n 都是k-空间。豪斯多夫空间 X 称为半紧，如果 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ 对于紧集 $K_n \subseteq X$ 的序列 $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$，使得 X 的每个紧子集都是某个 K_n的子集。半紧k-空间也称为 k_{ω}-空间。（4）*Silva*空间 （或DFS-空间）是具有紧连接映射的巴拿赫空间序列 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$的局部凸归纳极限。每个Silva空间都是 k_{ω}-空间。核 Silva 空间是具有核的（迹类）连接映射的希尔伯特空间序列的归纳极限。（5）核弗雷歇空间 是具有核的（迹类）连接映射的希尔伯特空间序列的射影极限。（6）蒙特尔空间 是具有海涅–博雷尔性质的桶化拓扑向量空间（即每个闭且有界的集合都是紧的）。核 Fréchet 或核 Silva 空间是蒙特尔空间。

A.2. **微分演算框架**。我们采用 Keller 的 C_c^r 微分演算框架（见 [11]）以及 Kriegl-Michor 的无穷维微分学便利框架（见 [20]）。

定义 A.1. 设 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$，并设 E, F 是局部凸拓扑向量空间。设$U \subseteq E$ 是一个开集，且 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。若映射 $f\colon U \to F$ 连续，则称其为 $C^0_{\mathbb{K}}$。若连续映射 $f\colon U \to F$ 的迭代方向导数

$$d^k f(x, y_1, \ldots, y_k) := D_{y_k} \cdots D_{y_1} f(x)$$

对所有满足 $k \le r$ 的 $k \in \mathbb{N}$、所有 $x \in U$ 以及所有 $y_1, \dots, y_k \in E$ 都存在，其中这些映射

$$d^k f : U \times E^k \to F, \quad (x, y_1, \dots, y_k) \mapsto d^k f(x, y_1, \dots, y_k)$$

是连续的。方向导数定义为

$$D_y f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t}.$$

如果映射对所有 $r \in \mathbb{N}_0$ 都是 $C^r_{\mathbb{K}}$ $C^\infty_{\mathbb{K}}$-光滑的，则称其为光滑（或 $C^\infty_{\mathbb{K}}$-光滑）。

定义 A.2（复解析函数，[11]）。设 E 和 F 为复局部凸空间，且 $U \subseteq E$ 为开集。映射 $f : U \to F$ 称为复解析（$\mathbb{C}$-解析，或 $C^\omega_{\mathbb{C}}$），如果它是连续的，并且对每个 $x \in U$，都存在一个序列 $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$，由连续齐次多项式组成 $p_k : E \to F$，次数为 k，使得

$$f(x + y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(y)$$

对所有 y，在满足 $x + Y \subseteq U$ 的 0-邻域 $Y \subseteq U$ 中，作为逐点极限成立。

定义 A.3（实解析函数，[11]）。设 E，F 为局部凸实拓扑向量空间。设 $U \subseteq E$ 为开集。若映射 $f : U \to F$ 可延拓为复解析映射 $f : V \to E_{\mathbb{C}}$，定义在 U 中 $E_{\mathbb{C}}$的开子集 V 上，则称其为实解析（$\mathbb{R}$-解析，或 $C^\omega_{\mathbb{R}}$）。

A.3. **便利微积分**。由 Frölicher-Kriegl [20] 提出的便利框架为我们的工作提供了自然框架。

定义 A.4. 局部凸拓扑向量空间 E 称为便利 空间，如果曲线$c : \mathbb{R} \to E$ 光滑当且仅当对所有连续线性泛函$\lambda \in E'$，$\lambda \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 光滑。

对于便利向量空间 E，c^∞-拓扑是相对于所有光滑曲线 $c \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$ 的集合的终拓扑。该拓扑可能与原来的局部凸拓扑不同，但对于弗雷歇空间（因而 Banach 空间）以及 Silva 空间，两种拓扑重合。

A.4. **多重线性映射空间**。设 E，F 为局部凸空间或便利空间。我们记：

- $L_b(E, F)$：从 E到 F的连续线性映射空间，其上带有在 E的有界子集上的一致收敛拓扑。
- $L_c(E, F)$：从 E到 F的连续线性映射空间，赋予其在 E的紧子集上一致收敛的拓扑。
- $L^k(E_1, \dots, E_k, F)$：从 $E_1 \times \cdots \times E_k$到 F的连续 k-线性映射空间。
- E'：E上的有界线性泛函空间。如果 E 是便利空间，这与连续线性映射空间重合，因为便利空间是有界型的。

所有这些空间都具有局部凸拓扑向量空间结构和便利向量空间结构（见 [20, 命题 5.6]）。

A.5. $L^2(T'M)$ **上的光滑向量丛结构**。设

$$L^2_{\text{skew}}(T'M) := \bigcup_{x \in M} L^2_{\text{skew}}(T'_x M)$$

是便利流形 M上的一个丛，其中 $L^2_{\text{skew}}(T'_x M)$表示 $T'_x M$ 上赋予在 $T'_x M \times T'_x M$的有界子集上一致收敛拓扑的斜对称双线性形式空间。那么，$L^2(T'M)$具有在M 上的光滑向量丛结构（见 [20，第 33], [23，节第 1.1 、 3.1] 节）。

定义 A.5（光滑映射）。对于便利局部凸空间 E 和 F，以及一个 c^∞-开子集 $U \subseteq E$，映射 $f : U \to F$ 称为光滑的，若对于所有满足$c(\mathbb{R}) \subseteq U$的光滑曲线 $c : \mathbb{R} \to E$，复合映射 $f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, F)$均为光滑曲线。

注 A.6 ([20, 定理 3.18])。 设 E 和 F 是局部凸空间，并设 $U \subseteq E$ 是c^∞-开子集。那么，微分映射 $d\colon C^\infty(U,F) \to C^\infty(U, L(E,F))$定义如下：

$$df(x)v := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t},$$

存在于 $x \in U$， $v \in E$，且是线性且有界的（光滑）。链式法则成立：

$$d(f\circ g)(x) = df(g(x))dg(x).$$

A.5.1. *(*， F)上的拓扑。（参见 [20, 定义 3.6、定义 3.11]）。设 E和 F是两个便利空间，$U \subset E$ 是一个开集。 E上的光滑曲线空间 C^∞(ℝ， E)，带有便利拓扑结构，该拓扑是相对于以下映射的初始拓扑：

$$C^\infty(\mathbb{R},E) \xrightarrow{d_k} C^\infty(\mathbb{R},E) \xrightarrow{r_{|K}} \ell^\infty(K,E)$$

对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，其中 d_k 表示曲线的第 k 阶导数， K 遍历 ℝ 的紧子集，而 $r_{|K}$ 是将曲线限制到 K 上有界函数空间的映射，该空间配备了关于 K 上一致收敛的拓扑。

光滑映射空间 $U \subseteq E \to F$ 带有便利拓扑结构，该拓扑是相对于以下映射的初始拓扑：

$$C^\infty(U,F) \xrightarrow{c^*} C^\infty(\mathbb{R},F)$$

对于每个 $c \in C^\infty$(ℝ， E)，使得 c(ℝ) $\subseteq U$，其中 c^*： C^∞(U， F) $\to C^\infty$(ℝ， F) 定义为c^*(γ)： $= \gamma \circ c$对于 $\gamma \in C^\infty$(U， F)。

注 A.7. C^∞(U， E) 上的局部凸紧开-C^∞ 拓扑比便利拓扑更细（见 [11, 1.7]）。设 $U \subseteq E$ 为一个开子集。那么对于 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$， C^k(U， E) 上的紧开-C^k 拓扑是关于映射的终拓扑

$$\mathfrak{p} : C^k(U,E) \to \prod_{j\le k} C(U\times E^j, \mathbb{K}), \quad f \mapsto (d^j f)_{j\le k}$$

其中 C($U \times E^j$， $\mathbb{K}$) 赋予了在 $U \times E^j$ 的紧子集上一致收敛的拓扑。

A.6. **便利流形、丛与李群**。

定义 A.8 （便利流形 [20, 27.1]）。 便利流形 M 是一个赋有光滑图册 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 的集合，其中 $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$，且每个坐标图 ϕ_α： $U_\alpha \to E_\alpha$ 都是到便利向量空间 E_α 的某个开子集上的双射。要求过渡映射 $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ 在 convenient 意义下光滑（即将光滑曲线映为光滑曲线）。

给定一个以 E 为模型的流形 M，记作：

- T_xM： $x \in M$ 处的切空间，由运动学切向量构成（即所有满足 c(0) $= x$ 的光滑曲线 $c \in C^\infty$(ℝ, M) 在 0 处的导数 c'(0) 所组成的空间）。 $TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$ 定义了 M 上的一个便利光滑向量丛（见 [20, 28.12]）。
- T'_xM： $x \in M$ 处的运动学余切空间，定义为对偶空间（T_xM）′。运动学 $T'M := \bigcup_{x\in M} T'_xM$ 定义了 M 上的一个光滑向量丛（见 [20, 33.1]）。

定义 A.9 （光滑正则便利流形）。 若便利流形 M 关于光滑函数族 $C^\infty(M,\mathbb{R})$ 的初始拓扑与流形拓扑一致，则称其为光滑正则 。等价地，若光滑函数能分离点并生成 M 的拓扑，则称 M 为光滑正则。

定义 A.10 （光滑正则流形 [11, 定义 3.5.30]）. 设 M 是以实局部凸空间为模型的 C^∞-流形。若下列等价条件（改编自 C^r-正则性于 [11,命题3.5.29]）成立，则称 M 为光滑正则流形：

(a) T M 上的拓扑是相对于光滑函数族 C^∞(M， ℝ) 的初始拓扑 .

(b) 对每个 $x \in M$ 及其邻域 $U \subseteq M$ （其中 x），都存在一个光滑函数$f\colon M \to \mathbb{R}$，使得 $f(x) \neq 0$且 $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$。(c) 对每个 $x \in M$ 及其邻域 $U \subset M$ （其中 x），都存在一个光滑函数$f\colon M \to \mathbb{R}$，使得 $f(M) \subseteq [0,1]$、$\operatorname{supp}(f) \subseteq U$，并且对于某个 x的邻域 $V \subseteq M$，有 $f|_V = 1$。

定义 A.11 （光滑仿紧流形 [20, 27.4]）. 便利流形 M 是光滑仿紧的，如果 M 的每个开覆盖都容许一个从属于它的光滑单位分解。注意，光滑仿紧流形自动是光滑正则的，并且容许光滑凸函数（见 [20, 16.10]）。

定义 A.12 （正则李群）. 具有李代数 $\mathfrak{g}$ 的便利李群 G 称为正则（在 Kriegl 和 Michor [20, 38.4] 的意义下），如果：

（1）对每条光滑曲线 $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g})$，右对数导数的初值问题：

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = R_{g(t)*}\xi(t) \\ g(0) = e \end{cases}$$

有唯一解 $g = \operatorname{Evol}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}, G)$。

（2）演化映射 $\operatorname{Evol}: C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g}) \to C^\infty(\mathbb{R}, G)$ 是光滑的。

参见 [11, 定义 6.1]，了解以局部凸拓扑向量空间为模型的李群的正则性（Milnor [24]）。

A.7. **微分学参考文献**。我们的微分演算框架的标准参考文献如下：

- [20]: Kriegl-Michor, 《全局分析的便利框架》（1997年）。
- [11]: Neeb-Glöckner, 《无限维李群》（2026年）。

参考文献

[1] Abedin, R., Burban, I. 由经典杨-巴克斯特方程解定义的李双代数的代数几何。数学物理通讯 387, 1051–1109（2021年）。[2] Abedin, R., Maximov, S. 环代数上标准李双代数结构的经典扭曲分类。几何与物理学杂志 164, 104149（2021年）。[3] Abedin, R., Maximov, S., Stolin, A., Zelmanov, E. 拓扑李双代数结构及其在$\mathfrak{g}[[x]]$上的分类。数学物理通讯 405, 5（2024年）。[4] Bratteli, O., Robinson, D. W. 算子代数与量子统计力学：第1卷：C^*与 W^*代数。对称群。态分解。第2版，施普林格（2012年）。[5] Cabau, P., Pelletier, F. 几何巴拿赫结构的归纳极限与射影极限。数学专著与研究札记，CRC出版社，美国佛罗里达州博卡拉顿（2024年）。[6] Dahmen, R., Schmeding, A. 实解析微分同胚群并非实解析。数学研究 229, 141–172（2015年）。[7] Drinfeld, V. G. 李群上的哈密顿结构，《可积系统中的杨-巴克斯特方程》。苏联科学院院报 10, 222（1983年）。[8] Drinfeld, V. G. 量子群。POMI科学研讨会笔记 155, 18–49（1986年）。[9] Dubrovin, B., Novikov, S. 关于流体动力学型泊松括号。苏联科学院院报 279, 294–297（1984年）。[10] Fadeev, L. D. 逆散射法的哈密顿诠释，《孤子》（R. K. Bullough 和 P. J. Caudrey 编）。施普林格出版社，339–354（1980年）。[11] Glöckner, H., Neeb, K.-H. 无限维李群（2026年）。[12] Glöckner, H. 无穷维李群的正则性及半正则性（2012年）。[13] Glöckner, H. 实解析函数的李群是 L^1-正则的。非线性分析 252（2025年）。[14] Glöckner, H. 向量值函数的平滑算子与延拓算子（2022年）。[15] Goli´nski, T., Rahangdale, P., Tumpach, A. B. Banach 情形下的泊松结构：不同方法的比较。载于《物理学中的几何方法研讨会》，施普林格，97–118（2024年）。[16] Grabowski, J. 圆周微分同胚群上的泊松–李结构。数学物理通讯快报 32, 307–313（1994年）。[17] Jarchow, H. 局部凸空间。施普林格科学与商业媒体（2012年）。[18] Johnson, R. A. 拓扑向量空间上的紧群表示：一些评述。美国数学学会会刊 61, 131–136（1976年）。[19] Kolev, B. EPDiff 方程的局部适定性：综述。几何力学杂志 9（2017年）。

[20] Kriegl, A., Michor, P. W.《全局分析的便利框架》。数学调查与专著，第53卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州（1997年）。[21] Kriegl, A., Michor, P. W. 正则无穷维李群（1998年）。[22] Léandre, R. 环代数上的连续双代数结构。李理论及其在物理学中的应用：第九届国际研讨会，施普林格，551–554（2013年）。[23] Michor, P. W. 无穷维中的 Schouten-Nijenhuis 括号（2025年）。[24] Milnor, J. W. 关于无穷维李群的评述。《相对论、群与拓扑 II》，北荷兰出版社（1984年）。[25] Neeb, K.-H., Sahlmann, H., Thiemann, T. 无穷维流形上的弱泊松结构与哈密顿作用。李理论及其在物理学中的应用：瓦尔纳，保加利亚，2013年6月，施普林格，105–135（2014年）。[26] Odzijewicz, A., Ratiu, T. S. 巴拿赫李-泊松空间与约化。数学物理通讯 243, 1–54（2003年）。[27] Schaefer, H. H. 拓扑向量空间。数学研究生教材，第3卷，施普林格出版社，纽约（1971年）。[28] Stein, E. M., Shakarchi, R. 复分析。第2卷，普林斯顿大学出版社（2010年）。[29] Thomas, E. G. F. 核流形上的向量场作为导子。数学新闻 176, 277–286（1995年）。[30] Treves, F. 拓扑向量空间、广义函数与核。纯粹与应用数学，第25卷，学术出版社，纽约（1967年）。[31] Tumpach, A. B. 巴拿赫泊松-李群与受限格拉斯曼流形的 Bruhat-泊松结构。数学物理通讯 373, 795–858（2020年）。[32] Vaisman, I.《泊松流形几何讲义》。数学进展，第118卷，比克豪泽出版社（2012年）。[33] Banyaga, A. 经典微分同胚群的结构。施普林格（1997年）。[34] Herman, M. 关于圆周微分同胚与旋转的可微共轭。高等师范学校科学年刊 49, 5–234（1979年）。[35] Navas, A. 圆周微分同胚群。芝加哥大学出版社（2011年）。[36] Tsuboi, T. 关于实解析微分同胚群。高等师范学校科学年刊 42, 601–651（2009年）。[37] Thurston, W. 叶状结构与微分同胚群（1974年）。[38] Beltiţa, D., Goli´nski, T., Tumpach, A. B. 奇异泊松括号。几何与物理学杂志 132, 358–362（2018年）。[39] Michor, P. W., Rahangdale, P. 无穷维流形上的泊松双向量（2025年）。

PRAFUL RAHANGDALE：数学研究所，帕德博恩大学，瓦尔堡大街100号，帕德博恩33098，德国电子邮件地址：praful@math.uni-paderborn.de