由 Coxeter 积分导出的椭圆积分恒等式

Jean-Christophe Pain*

[1]原子能委员会，军事应用部，法伊夫，F-91297 阿尔帕容，法国[2]巴黎萨克雷大学，原子能委员会，极端条件下物质实验室，F-91680布吕耶尔勒沙泰勒，法国

arXiv:2603.04637v1 [math.CA] 4 Mar 2026

摘要

我们重新审视 Coxeter 引入的经典积分，并非为了重新计算其众所周知的精确值，而是将其用作推导椭圆积分恒等式的工具。通过将 Coxeter 的第一个积分嵌入一参数族

$$I(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{\cos\theta}{1+\lambda\cos\theta}\right) d\theta,$$

并对参数 λ 求导，我们证明导数 $I'(\lambda)$ 可以表示为椭圆型积分。将 $I'(\lambda)$在 0 与 2 之间积分，可得该恒等式

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+s\cos\theta)\sqrt{(1+s\cos\theta)^2-\cos^2\theta}}\, d\theta\, ds = A - B = \frac{\pi^2}{12},$$

其中 A 和 B 是前两个所谓的 Coxeter 积分

$$A = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right) d\theta,$$

and

$$B = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right) d\theta.$$

导数 $I'(\lambda)$ 可以用第一类不完全椭圆积分 F 和第三类椭圆积分 Π 表示。这种方法建立了经典Coxeter积分与椭圆函数之间的直接联系。该方法揭示了著名的三角积分如何充当探索椭圆积分性质及其关系的桥梁，并带来超越原始 Coxeter 求值的新解析见解。

*jean-christophe.pain@cea.fr

1 引言

在一篇后来成为经典的短文中，Coxeter 研究了以下三个引人注目的积分 [4, 9]:

$$A = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right) d\theta,$$

$$B = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right) d\theta,$$

and

$$C = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right) d\theta.$$

这些积分具有一个引人注目的性质：其值为 π^2 的有理倍数：

$$A = \frac{5\pi^2}{24}, \qquad B = \frac{\pi^2}{8}, \qquad C = \frac{11\pi^2}{72}.$$

除了分析上的形式之外，这些公式还具有深刻的几何解释。它们与球面和双曲四面体的几何，以及 Schläfli [8,9], 的微分公式密切相关。该公式将多面体（处于常曲率几何中）体积的变化与其二面角的变化联系起来：

$$dV = -\frac{1}{2}\sum_{\text{edges}} \ell_i \, d\alpha_i.$$

在这一框架下，Coxeter 积分自然地表现为沿特定形变对二面角进行积分；它们化为 π^2 的有理倍数，反映了底层几何构形高度对称的结构。因此，积分 A、B 和 C 构成了初等分析、球面几何与多面体理论之间一个非凡的交汇点，优雅地展现了看似简单的三角表达式如何蕴含着由 Schläfli公式 [5, 6]所支配的深刻几何结构。

人们提出了不同的方法来计算这类积分。其中一种方法与所谓的 Ahmed积分 [1, 3, 7]有关。在这项工作中，我们为经典Coxeter积分提供了一种新视角：我们并非重新计算其已知的精确值，而是将其用作工具，以建立三角积分与椭圆积分之间的新关系。我们将其中一个积分嵌入以下一参数族

$$I(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{\cos\theta}{1+\lambda\cos\theta}\right) d\theta,$$

并证明对参数 λ 求导自然会得到一个椭圆型表达式。积分后得到一个恒等式，其中包含在区间 $[0, 2]$, 上对 $I'(\lambda)$进行的积分，该积分等于前两个 Coxeter 积分之差 $A - B$。

本文结构如下。第2节中，我们引入一参数族 $I(\lambda)$，并计算其对参数的导数。经过基于魏尔斯特拉斯代换的细致化简，我们得到 $I'(\lambda)$ 的显式四次表示，展现出其

椭圆结构。第3节中，我们在区间 $[0,2]$，上对 $I'(\lambda)$ 积分，给出用不完全椭圆积分 F 和 Π 表示的结果，并说明 Coxeter 的前两个积分的经典求值（严格意义上，尤其是第一个 A 实际上）如何自然地作为参数族的边界值出现，从而得到恒等式

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+s\cos\theta)\sqrt{(1+s\cos\theta)^2-\cos^2\theta}}\,d\theta\,ds = \frac{\pi^2}{12}.$$

我们还简要评论第三个 Coxeter 积分，并讨论如何将这一框架扩展到其他参数变形。

2 积分的一个参数族

我们考虑这一族

$$I(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{\cos\theta}{1+\lambda\cos\theta}\right) d\theta, \quad \lambda > -1.$$

令

$$u(\theta,\lambda) = \frac{\cos\theta}{1+\lambda\cos\theta}.$$

那么，导数为

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} I(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial u}{\partial\lambda} d\theta,$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda} = -\frac{\cos^2\theta}{(1+\lambda\cos\theta)^2}.$$

因此我们得到

$$I'(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+\lambda\cos\theta)\sqrt{(1+\lambda\cos\theta)^2-\cos^2\theta}} d\theta,$$

以及恒等式

$$(1+\lambda\cos\theta)^2 - \cos^2\theta = 1 + 2\lambda\cos\theta + (\lambda^2-1)\cos^2\theta.$$

令

$$a = \lambda^2 - 1.$$

利用魏尔斯特拉斯代换

$$t = \tan\frac{\theta}{2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2},$$

我们得到

$$\cos^2\theta = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}.$$

让我们将分母中平方根下的表达式定义为 $\Delta(\theta)$。代入 $\cos\theta$，我们有

$$\Delta(\theta) = 1 + 2\lambda\frac{1-t^2}{1+t^2} + a\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}.$$

将一切 都通分至公分母 $(1+t^2)^2$, ，分子 $Q(t)$ 变为

$$Q(t) = (1+t^2)^2 + 2\lambda(1-t^2)(1+t^2) + a(1-t^2)^2.$$

我们仔细展开:

$$(1+t^2)^2 = 1 + 2t^2 + t^4,$$
$$2\lambda(1-t^2)(1+t^2) = 2\lambda - 2\lambda t^4,$$
$$a(1-t^2)^2 = a(1 - 2t^2 + t^4).$$

合并 t 的各次幂后，常数项为:

$$1 + 2\lambda + a = 1 + 2\lambda + (\lambda^2 - 1) = \lambda^2 + 2\lambda,$$

t^2 的系数为:

$$2 - 2a = 2 - 2(\lambda^2 - 1) = 4 - 2\lambda^2,$$

t^4 的系数为:

$$1 - 2\lambda + a = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda.$$

因此我们得到

$$\Delta(\theta) = \frac{(\lambda^2 + 2\lambda) + (4 - 2\lambda^2)t^2 + (\lambda^2 - 2\lambda)t^4}{(1+t^2)^2},$$

从而

$$\sqrt{\Delta(\theta)} = \frac{\sqrt{(\lambda^2 + 2\lambda) + (4 - 2\lambda^2)t^2 + (\lambda^2 - 2\lambda)t^4}}{1+t^2}.$$

该积分变为

$$I'(\lambda) = \int_0^1 \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}}{\left(\frac{(1+t^2)+\lambda(1-t^2)}{1+t^2}\right)\frac{\sqrt{Q(t)}}{1+t^2}} dt,$$

其中 $Q(t)$ 是关于 $u = t^2$ 的二次多项式。消去 $(1+t^2)$ 的因子后得到

$$I'(\lambda) = 2\int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)\left((1+\lambda) + (1-\lambda)t^2\right)\sqrt{Q(t)}} dt.$$

The 多项式 $Q(u) = (\lambda^2 - 2\lambda)u^2 + (4 - 2\lambda^2)u + (\lambda^2 + 2\lambda)$ 的判别式 is

$$\Delta_u = (4 - 2\lambda^2)^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda).$$

由于 $(\lambda^2 - 2\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$，我们得到

$$\Delta_u = (16 - 16\lambda^2 + 4\lambda^4) - 4(\lambda^4 - 4\lambda^2) = 16.$$

因此，根 $u_\pm$ 是实数，而且极为简单：

$$u_\pm = \frac{2\lambda^2 - 4 \pm 4}{2(\lambda^2 - 2\lambda)}.$$

因此，当 $\lambda \neq 0,1$ 时，我们得到精确表示式

$$I'(\lambda) = 2\int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)\left((1+\lambda)+(1-\lambda)t^2\right)\sqrt{(\lambda^2+2\lambda)+(4-2\lambda^2)t^2+(\lambda^2-2\lambda)t^4}}dt,$$

这是经魏尔斯特拉斯代换后得到的正确椭圆四次表示。

3 对 $I'(\lambda)$ 积分并使用 Coxeter 积分

我们有

$$I'(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+\lambda\cos\theta)\sqrt{(1+\lambda\cos\theta)^2 - \cos^2\theta}}\,d\theta.$$

从 0 积分到 $\lambda > 1$，得到积分

$$I(\lambda) - I(0) = \int_0^\lambda I'(s)\,ds = \int_0^\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+s\cos\theta)\sqrt{(1+s\cos\theta)^2 - \cos^2\theta}}\,d\theta\,ds,$$

对于 $0 < \lambda < 2$，利用含有两个实根的四次积分的标准化简，可将其表示为第一类不完全椭圆积分 F 和第三类不完全椭圆积分 Π [2]:

$$\begin{aligned} I'(\lambda) = \frac{2i}{\sqrt{2-\lambda}\,\lambda(\lambda^2-1)}\sqrt{\frac{1}{2+\lambda}}\Bigg[&\lambda(1+\lambda)\,F\left(i\,\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\,\middle|\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-4}\right) \\ &-2\Bigg((\lambda^2-1)\,\Pi\left(-\frac{\lambda}{\lambda-2};\,i\,\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\,\middle|\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-4}\right) \\ &+\Pi\left(\frac{(\lambda-1)\lambda}{(\lambda-2)(1+\lambda)};\,i\,\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\,\middle|\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-4}\right)\Bigg)\Bigg]. \end{aligned}$$

更准确地说，对于 $-\frac{\pi}{2} < \phi <-\frac{\pi}{2}$，有：-

$$F(\phi \mid m) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}},$$

and

$$\Pi(n;\phi \mid m) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-m\sin^2\theta}}.$$

对于 $\lambda = 2$，可得

$$I(2) - I(0) = \int_0^2 I'(s)\,ds = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+s\cos\theta)\sqrt{(1+s\cos\theta)^2 - \cos^2\theta}}\,d\theta\,ds.$$

注意，由于被积函数在 (0，2) $\times[0,\pi/2]$ 的紧子集上连续且非负，根据 Fubini 定理，我们可以交换积分次序。结果是

$$I(2) = A,$$

第一个 Coxeter 积分。

尽管被积函数不同，Coxeter 的求值表明

$$B = \pi^2/8 = \int_0^{\pi/2} \arccos(\cos\theta)\ d\theta = \int_0^{\pi/2} \theta\, d\theta = I(0).$$

因此，两个 Coxeter 积分 A 和 B 都包含在同一个函数族 $I(\lambda)$ 中： A 对应于$\lambda = 2$，而 B 则出现在边界值 $\lambda = 0$处。由此可得

$$\int_0^2 I'(s)\, ds = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+s\cos\theta)\sqrt{(1+s\cos\theta)^2 - \cos^2\theta}}\, d\theta\, ds = A - B = \frac{5\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8}$$

从而得到

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+s\cos\theta)\sqrt{(1+s\cos\theta)^2 - \cos^2\theta}}\, d\theta\, ds = A - B = \frac{\pi^2}{12}.$$

第三个 Coxeter 积分 C 经过简单变换后，也可以与同一个参数框架联系起来。回顾

$$C = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right) d\theta.$$

令

$$\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{2}\left(\sec\theta - 1\right),$$

并进行变量替换 $\theta \mapsto \frac{\pi}{2} - \theta$ 后，可得到一个涉及

$$\arccos\left(\frac{\sin\theta}{1+2\sin\theta}\right),$$

的积分，其结构类似于定义 $I(\lambda)$ 的被积函数，只是将 $\cos\theta$ 替换为 $\sin\theta$。因此， C 可被视为同一变形方案的另一个成员，对应于旋转后的三角参数化。与 A和 B的情形一样，Coxeter 求值得出

$$C = \frac{11\pi^2}{72}.$$

4 结论

在本工作中，我们证明：经典Coxeter积分除了其众所周知的精确求值为 π^2 的有理倍数之外，还揭示了 Coxeter 积分所蕴含的椭圆结构。通过将第一个 Coxeter 积分 A 嵌入一参数族

$$I(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \arccos\left(\frac{\cos\theta}{1+\lambda\cos\theta}\right) d\theta,$$

并对 λ 求导，我们得到了显式关系

$$I'(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{(1+\lambda\cos\theta)\sqrt{(1+\lambda\cos\theta)^2 - \cos^2\theta}}\, d\theta,$$

或者等价地

$$I'(\lambda) = 2\int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)\left((1+\lambda)+(1-\lambda)t^2\right)\sqrt{(\lambda^2+2\lambda)+(4-2\lambda^2)t^2+(\lambda^2-2\lambda)t^4}} dt.$$

我们还可以写成

$$\begin{aligned} I'(\lambda) = \frac{2i}{\sqrt{2-\lambda}\,\lambda(\lambda^2-1)}\sqrt{\frac{1}{2+\lambda}}\Bigg[& \lambda(1+\lambda)\,F\left(i\,\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\,\middle|\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-4}\right) \\ & - 2\Bigg((\lambda^2-1)\,\Pi\left(-\frac{\lambda}{\lambda-2};\, i\,\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\,\middle|\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-4}\right) \\ & + \Pi\left(\frac{(\lambda-1)\lambda}{(\lambda-2)(1+\lambda)};\, i\,\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\,\middle|\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-4}\right)\Bigg)\Bigg], \end{aligned} \tag{1}$$

其中， F 是不完全第一类椭圆积分， Π 是第三类不完全椭圆积分。

积分后得到以下恒等式：

$$\int_0^2 I'(\lambda)\, d\lambda = A - B = \frac{\pi^2}{12},$$

其中可采用上文提到的 $I'(\lambda)$的三种表达式中的任意一种。由于显式椭圆表示（见公式（1））仅对

$$0 < \lambda < 2,$$

$[0,2]$ 上的积分必须在广义积分意义下理解：

$$\int_0^2 I'(\lambda)\, d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{2-\varepsilon} I'(\lambda)\, d\lambda.$$

有两个事实确保极限存在。定义 $I'(\lambda)$ 的原始积分并不存在真正的奇点。椭圆参数化在 $\lambda = 0$ 处退化，但 $I'(\lambda)$ 本身仍然有限。因此，当 $\lambda \to 0^+$ 时，极限存在且有限。显式公式产生的因子表现为

$$(2-\lambda)^{-1/2}.$$

因此，在 $\lambda = 2$ 附近，

$$I'(\lambda) \sim \frac{D}{\sqrt{2-\lambda}}$$

其中 D 为某个常数。由于

$$\int^2 \frac{d\lambda}{\sqrt{2-\lambda}}$$

是有限的，因此该奇点是可积的。所以该反常积分收敛。

这种方法凸显了 Coxeter 积分能够在统一的分析框架中充当桥梁，将初等三角积分与椭圆积分联系起来。这为进一步探索开辟了道路：对其他参数变形或 Coxeter 型积分进行推广，或许能得到更多涉及椭圆积分的积分恒等式，从而为经典分析与椭圆函数之间的相互作用带来新的见解。

参考文献

[1] Z. Ahmed，《这确实是一个积分》，《美国数学月刊》109 (2002), 670–6 71.

[2] P. F. Byrd 和 M. D. Friedman，《工程师与科学家椭圆积分手册》，第 2 版，施普林格出版社，纽约，1971 年。[3] J. Borwein、D. Bailey 和 R. Girgensohn，《Ahmed 积分问题》，载于《数学实验：通往发现的计算之路》第 1.6 节。马萨诸塞州韦尔斯利：A K Peters，第 17–20 页，2004 年。[4] H. S. M. Coxeter，《与三角学相关的一些积分》，《数学公报》，21 (1937), 55–57。[5] H. S. M. Coxeter，《Schläfli 与 Lobatschefsky 函数》，载于：《十二篇几何论文》，卡本代尔，南伊利诺伊大学出版社，1968 年。[6] H. S. M. Coxeter，《正多胞体》，第 2 版，多佛出版社，纽约，1973 年。[7] P. J. Nahin，《有趣积分探秘》，施普林格，2015 年。[8] L. Schläfli，《多重连续性理论》，载于《数学论文集》，第 I 卷，比尔克豪泽出版社，巴塞尔，1950 年（原作发表于 1858–1860 年）。[9] G. Vidiani，《Coxeter 积分》，《Quadrature》、《纯粹与趣味数学杂志》，第 50 期，2003 年 10 月至 12 月，第 7–12 页（法文）。