arXiv:2603.04640v1 [math.PR] 4 Mar 2026

刘维尔量子引力度量的坐标变换公式对所有共形映射同时成立

Charles Devlin VI

2026年3月4日

摘要

刘维尔量子引力（*LQG*）启发式地说，是一套随机黎曼几何理论，其黎曼度量张量为 $e^{\gamma h}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$，其中 h 是高斯自由场的一种变体，$\gamma>0$ 是一个参数。若 $U\subset\mathbb{C}$ 是一个开集，$\phi: U\to\phi(U)$ 是一个共形映射，且 $h^\phi = h\circ\phi^{-1}+Q\log|(\phi^{-1})'|$（其中 $Q=Q(\gamma)$ 是一个参数），那么以场 h 定义在 U上的 LQG 曲面，与以场 h^ϕ定义在 $\phi(U)$ 上的 LQG 曲面等价。这里的等价是指，这些曲面上的面积测度和距离函数几乎必然等价。对于面积测度，已知事实上这种等价几乎必然对所有共形映射 ϕ 同时成立（Sheffield-Wang 2016）。我们证明了距离函数的相应结果。这使得一种常用的启发式定义变得精确：量子曲面是一个随机等价类，由配备 LQG 面积测度和 LQG 距离函数的区域构成。

目录

1 引言 1 1.1 LQG度量的公理 . 3 1.2 主要结果概述 . 3 **2 预备知识** 5 2.1 符号 . 5 2.2 LFPP 的变体 . 5 **3 LFPP 与小尺度下坐标变换后的LFPP的比较** 7 **4 坐标变换后的LFPP与大尺度下LQG度量的比较** 16 4.1 初始 Lipschitz 条件 . 17 4.2 迭代改进 Lipschitz 常数 . 24 4.3 坐标变换后的LFPP的收敛 . 37

5 定理1.1的证明 **45**

致谢我们感谢 Ewain Gwynne 富有帮助的讨论。作者部分 y
s得到美国国家科学基金会 DMS-2245832 号资助。

1 引言

一个刘维尔量子引力 (LQG)曲面是一个随机二维黎曼流形，其黎曼度量张量为 $e^{\gamma h}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$，其中 $\gamma\in(0,2)$ 是一个参数，h 是一个高斯自由场 (GFF)，而 $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2$ 是欧几里得度量张量。这个定义在严格意义上并不成立，因为 h 不是一个函数。LQG 的严格定义并不直接尝试在黎曼度量集合上定义概率测度，而是定义黎曼流形关键可观测量的概率分布：体积形式（面积测度）

以及距离函数（度量）。我们将在下文简要讨论严格定义。有关更多详情，请参见[Gwy19], [She22], 和 [BP25]。

令 $p_t(z) := \frac{1}{2\pi t} e^{-|z|^2/2t}$ 为热核。给定一个 GFF型分布 h，定义面积测度为几乎必然弱极限 [RV14] [Ber17]

$$\mu := \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma h_\epsilon^*(z)} \, \mathrm{d}z, \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}z$ 是 $\mathbb{C}$ 上的勒贝格测度，且

$$h_\epsilon^*(z) := \left(h * p_{\epsilon^2/2}\right)(z) = \int_{\mathbb{C}} h(w) p_{\epsilon^2/2}(z-w) \, \mathrm{d}w,$$

其中，积分应按分布配对的意义来理解。值得注意的是，式（ $h_\epsilon^*(z)$ 中的（1）的热核平滑 $h_\epsilon^*(z)$ 可以替换为其他连续正则化方法，例如圆平均过程。我们用热核平滑来表述定义，因为它是下文定义 LQG度量时所用的 GFF 的光滑近似。

类比黎曼几何，LQG曲面上两点之间的距离应为路径长度的下确界，其中路径长度按 $e^{\xi h}$ 加权。这里， $\xi = \xi(\gamma) := \gamma/d_\gamma$ 其中 d_γ 是 LQG度量的豪斯多夫维数[1]。与面积测度（1）类似，我们通过平滑化并取极限来精确定义这一概念。对于 $\epsilon > 0$，定义 ϵ-李乌维尔首次通过渗流 (LFPP) 度量，其参数为 ξ：

$$D_h^\epsilon(z,w) := \inf_{P\colon z \to w} \int_0^1 e^{\xi h_\epsilon^*(P(t))} |P'(t)| \, \mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中，下确界取遍所有从 z 到 w 的分段连续可微路径 $P\colon [0,1] \to \mathbb{C}$。定义归一化常数

$$\mathfrak{a}_\epsilon := \text{median of } \inf\left\{ \int_0^1 e^{\xi h_\epsilon^*(P(t))} |P'(t)| \, \mathrm{d}t \right\},$$

其中，下确界取遍所有分段连续可微路径 $P\colon [0,1] \to [0,1]^2$ 满足 $P(0) \in \{0\} \times [0,1]$ 且 $P(1) \in \{1\} \times [0,1]$。虽然 $\mathfrak{a}_\epsilon$ 的精确值未知，但已知 [DG22a，命题 1。1]

$$\mathfrak{a}_\epsilon = \epsilon^{1-\xi Q + o_\epsilon(1)}, \quad \epsilon \to 0$$

对于一个未明确给出的指数 $Q = Q(\xi) > 0$。随后定义 γ-LQG度量如下

$$D_h(z,w) := \lim_{\epsilon \to 0} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon(z,w). \tag{3}$$

这个定义对任意 $\xi > 0$ 都有意义，但存在一个临界参数 $\xi_{\mathrm{crit}} \approx 0.41$ (参见 [DG22a] 和 [GM21b]），在此处会发生相变。对于 ξ 处于 亚临界和临界区间，即 $0 < \xi \le \xi_{\mathrm{crit}}$，存在相应的 $\gamma \in (0,2]$ 使得 $\xi = \gamma/d_\gamma$。在超临界区间中， $\xi > \xi_{\mathrm{crit}}$，相应的 γ 是复数。

在次临界区间，已知极限（3）相对于 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ [Dev24] 上的紧子集上一致收敛拓扑几乎必然存在。几乎必然收敛的证明建立在以下结果之上：[DDDF20], [GM21b], [DFGPS20], [GM20b], 和 [GM20a]，这些结果共同证明了依概率收敛；此外， [DG23], 对 LFPP 和 LQG度量进行了更定量的比较。对于临界相和超临界相，目前只知道依概率收敛，因此必须使用 [Bee82] 中引入的函数空间上的较弱拓扑，而不能使用局部一致收敛，参见 [DG22b], [DG22a], 和 [Pfe24]。

[1]精确的 定义 d_γ 并非 LQG 度量的豪斯多夫维数。它在 [DG20],和 被证明与 LQG 度量在 [GP19]中的豪斯多夫维数一致。

1.1 LQG度量的公理

一个重要问题是，是否可能存在多个不同的度量，满足对 LQG度量的启发式定义，即“与黎曼度量张量 $e^{\gamma h}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$ 相关联的黎曼距离函数”。[GM21b] 和 [DG22b] 通过给出一系列任何合理的 LQG度量概念都应满足的公理，并证明这些公理唯一刻画了相差一个乘法常数的 LQG度量，从而回答了这一问题。由于极限（3）满足这些公理 [DFGPS20] [GM21b] [GM21a], , 因此将（3）称为LQG度量。

设(X, D)为一个度量空间。 X 中的一条曲线 是连续函数 $P\colon [a,b]\to X$，其D-长度为

$$\mathrm{Len}(P;D) \;:=\; \sup_{T}\sum_{i=1}^{\#T} D\left(P(t_i),P(t_{i-1})\right), \tag{4}$$

其中上确界取遍 $[a,b]$的所有有限划分 $T=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_{\#T}=b\}$。若$Y\subset X$，则 Y 上 D 的内在度量 定义为

$$D(x,y;Y) \;:=\; \inf_{P}\mathrm{Len}(P;D),\quad \forall x,y\in Y,$$

其中下确界取遍 Y中从 x 到 y的所有曲线。于是 $D(\cdot,\cdot;Y)$是 Y上的一个度量，只是它可能取值为 ∞。

我们称 (X,D) 是一个长度空间 ，如果对于每个 x、$y\in X$ 以及每个 $\epsilon>0$，都存在一条从 x 到 y 的曲线，其 D-长度至多为 $D(x,y)+\epsilon$。

如果度量 D 定义在开集 $U\subset\mathbb{C}$ 上，并且诱导欧几里得拓扑，即恒等映射 $(U,|\cdot|)\to(U,D)$ 是一个同胚，我们就称其为连续 度量。我们将在 U 上的连续度量空间赋予函数的局部一致收敛拓扑 $[0,\infty$ ），并配备其关联的 Borel σ-代数。如果 U 不连通，当 x 和 y 位于 U 的不同连通分支中时，我们允许 $D\,x\;y\;=\infty$ (,)。在这种情况下，为了使一列连续度量 D^n 局部一致收敛到 D，我们要求当且仅当 D $(x,y)=\infty$ 时，对于所有充分大的 n，都有 $D^n(x,y)=\infty$。

若 $U\subset\mathbb{C}$ 是一个开集，记 $\mathcal{D}'(U)$ 为赋予弱拓扑的 U 上的分布空间。固定 $\gamma\in(0,2)$，并令 $\xi:=\gamma/d_\gamma$。一个 γ-*LQG*度量 是一族可测函数 $D^U\colon \mathcal{D}'(U)\to\{$ 上的连续度量，其中每个开集 $U\subset\mathbb{C}$ 对应一个度量；当 h 是 U 上的高斯自由场加连续函数时，以下公理成立。

I **长度空间**。几乎必然，(U,D_h^U) 是一个长度空间。

II **局部性**。若 $V\subset U$ 是一个确定性开子集，则几乎必然， $D_h^U(\cdot,\cdot;V)$ $=$ $D_{h|_V}^V$ · · (,)。

III **韦尔缩放**。对于每个连续函数 $f\colon U\to\mathbb{R}$，定义

$$\left(e^{\xi f}\cdot D_h^U\right)(z,w) \;:=\; \inf_{P\colon z\to w}\int_0^{\mathrm{Len}(P;D_h^U)} e^{\xi f(P(t))}\,\mathrm{d}t,\ \forall z,w\in\mathbb{C},$$

其中下确界取遍所有从 z 到 w、按 D_h^U-长度参数化的曲线 P。那么几乎必然，对于所有连续函数 $f\colon U\to\mathbb{R}$， $e^{\xi f}\cdot D_h^U=D_{h+f}^U$。

IV **坐标变换**。 对于每个共形变换 $\phi\colon U\to\phi(U)$，几乎必然，

$$D_h^U(z,w) \;=\; D^{\phi(U)}_{h\circ\phi^{-1}+Q\log|(\phi^{-1})'|}(\phi(z),\phi(w))\ \forall z,w\in U.$$

参见[GM21b，第 1 节。2] 其中讨论了这些公理为何自然。注意，这些公理只规定了 D_h^U 在 h 为高斯自由场加连续函数时的性质；对于其他分布， D_h^U 可以任意定义。

1.2 主要结果概述

公理IV中，坐标变换公式成立这一几乎必然事件可以依赖于共形映射 ϕ。这有几个不尽理想之处。人们常常希望使用随机坐标变换，但却必须依赖一些临时性的论证，例如

[GS24 第 2.4 节中的论证。1]此外，在黎曼几何中，人们通常将等距曲面视为同一曲面的不同参数化，因此研究的核心对象是等距曲面的等价类，而不是具体的等价类代表元。若将 LQG 视为“随机黎曼几何”，那么 LQG 曲面就应被看作随机曲面等价类，其中等价关系由坐标变换公式给出。要使这一启发式观点成立，同一 LQG 曲面的所有参数化都必须同时等价。对于 LQG 面积测度，这一点已在 [SW16],中得到证明，但由于还需面对路径上的非线性最小化这一额外难题，他们的证明并不容易推广到 LQG 度量。本文的主要结果是证明 LQG 度量也有类似的结论。

定理 1.1。 若 $\xi < \xi_{crit}$，则存在一个 *LQG* 度量的版本 $(D^U)_{U\subset\mathbb{C}}$，使其满足 :

***V* 强坐标变换公式** 固定一个开集 $U \subset \mathbb{C}$。若 h 是定义在 U 上的全平面高斯自由场加一个连续函数，则几乎必然地，对于每个共形变换 $\phi\colon U \to \phi(U)$，

$$D_h^U(z,w) = D_{h\circ\phi^{-1}+Q\log|(\phi^{-1})'|}^{\phi(U)}(\phi(z),\phi(w)) \ \forall z,w\in U.$$

我们只证明定理 1.1 对 $\xi < \xi_{\text{crit}}$成立，但我们的论证中有些部分也适用于 $\xi \geq \xi_{\text{crit}}$。具体而言，第 3 节中的所有结果都适用于任意 ξ。第 4节和 5节中的结果只适用于 $\xi < \xi_{\text{crit}}$，因为这些结果依赖于 LFPP 在局部一致意义下几乎必然收敛，而目前只有对 $\xi < \xi_{\text{crit}}$ [Dev24] 才知道这一点。

我们简要介绍定理 1.1 证明中的主要思路。令 h 为一个全平面高斯自由场，并固定一个开集 $U \subset \mathbb{C}$。为简化符号，若 $\phi\colon U \to \phi(U)$ 是一个共形映射，记 $h^\phi := h\circ\phi^{-1} + Q\log|(\phi^{-1})'|$。我们的目标大致是证明，对于所有共形变换 $\phi\colon U \to \phi(U)$，度量 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 都沿二进序列 $\epsilon = \{2^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 同时收敛到同一个极限度量。随后，我们可以在同时收敛这一事件发生时定义 D_h^U 为 $\lim_{\epsilon\to 0}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon$，否则任意定义它。不难验证，函数族 $(h\mapsto D^U)_{U\subset\mathbb{C}}$ 满足 LQG 度量公理以及强坐标变换公式。

为概述同时收敛的证明，固定一个共形变换 $\phi\colon U\to\phi(U)$，并假设 $0\in U$。在 0 附近，ϕ看起来像仿射变换 $z\mapsto az+b$，且 $a=\phi'(0)$ 和 $b=\phi(0)$ $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon(a^{-1}(\cdot-b)+Q\log|a|)\ a\cdot(),$ 因此 $(()())$ $+b\ a\cdot+b$ 6 应该可以很好地近似为 $(()())_{\log}(,)$。利用 LFPP 的精确缩放关系 $(),$

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_{h(a^{-1}(\cdot-b))+Q\log|a|}^\epsilon(a\cdot+b,a\cdot+b) = \frac{|a|\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{|a|^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon|a|}^{-1}}\mathfrak{a}_{\epsilon|a|}^{-1}D_h^{\epsilon|a|}(\cdot,\cdot).$$

根据 $\epsilon\mapsto\mathfrak{a}_\epsilon$ [GM21b 的正则变差，因子 $\frac{|a|\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{|a|^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon|a|}^{-1}}$ 应接近 1，见推论 1.11]。 [Dev24] 证明了，$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon$ 沿连续指标 $\epsilon\in(0,1)$ 几乎必然局部一致收敛到 $\mathbb{C}$ 上的一个度量，我们将其记为 D_h。因此，度量$\mathfrak{a}_{\epsilon|a|}^{-1}D_h^{\epsilon|a|}(\cdot,\cdot)$ 收敛到 D_h。请注意，沿连续指标 (0, 1) 而非子序列的几乎必然收敛，对于证明所有 ϕ 的同时收敛至关重要，因为 $\epsilon|a|$ 取决于 ϕ。由于这一论证只适用于“0 附近”，即半径随 $\epsilon\to 0$趋于零的球上，我们借助高斯自由场的局部独立性，证明存在许多这样的球，使得这一小尺度论证成立；由此可以推导出 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 在整体上收敛到 D_h。

要使这份证明概要严谨化，还需要处理若干问题。首先，度量 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_{h^\phi}^\epsilon$ 没有意义，因为 $h\circ\phi^{-1}$ 只在 $\phi(U)$ 上有定义，而热核在整个 $\mathbb{C}$上都不为零。为避免这一问题，我们将采用一种局部依赖于高斯自由场的 LFPP 变体。这个局部化变体不满足精确的空间缩放性质（6），因此我们需要先与使用热核平滑定义的普通 LFPP 进行比较，再进行缩放。

其次，我们需要以对所有共形映射 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon(a^{-1}(\cdot-b)+Q\log|a|)\ a\cdot+b\ a\cdot(()())$ 一致的方式，用 $+b$ ϕ $(()())_{\log}(,)$ 来逼近。这将通过畸变估计来完成，仔细比较 $h\circ\phi^{-1}$ 与 $h(a^{-1}(\cdot-b))$的平滑化。这一比较将在第 3节进行。

第三，由于我们对 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 与 $\mathfrak{a}_{\epsilon|a|}^{-1}D_h^{\epsilon|a|}$ 的比较只在小尺度上成立，我们将使用多尺度论证，将其提升为 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 之间的全局比较

和 D_h。这一论证的灵感来自 [GM21a] 第 3.2 节中的论证，以及 [Dev24] 对其的改编。其思路是利用高斯自由场的局部独立性，以及上文所述的小尺度估计，证明 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 与 D_h “几乎是利普希茨等价的”。随后我们将证明，当 1 趋于 $\epsilon \to 0$ 时，利普希茨常数可以任意接近，这意味着所有坐标变换后的 LFPP 度量都收敛到同一个极限。该论证将在第 4 节中展开。

2 预备知识

2.1 符号

对于 $z \in \mathbb{C}$和 $r > 0$，令 $B_r(z) = \{w \in \mathbb{C}: |z-w| < r\}$。更一般地，对于 $U \subset \mathbb{C}$，令 $B_r(U) := \cup_{z\in U} B_r(z)$。对于 $z \in \mathbb{C}$和 $0 < r_1 < r_2$，令 $\mathbb{A}_{r_1,r_2}(z) := B_{r_2}(z) \setminus B_{r_1}(z)$。如果$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$和 $g: (0,\infty) \to (0,\infty)$ 是函数，我们称 $f(\epsilon) = O_\epsilon(g(\epsilon))$，如果当 $\epsilon \to 0$或 $\epsilon \to \infty$ 时，$f(\epsilon)/g(\epsilon)$ 保持有界，具体取决于上下文。如果 $U, V \subset \mathbb{C}$，我们用 $V \Subset U$表示$\overline{V}$是紧致的且 $\overline{V} \subset U$。如果 h是子域 $U \subset \mathbb{C}$上的广义函数，且 $\phi: U \to \phi(U)$ 是共形变换，我们通过 $h^\phi := h \circ \phi^{-1} + Q \log |(\phi^{-1})'|$定义 $\phi(U)$ 上的广义函数。

若 D 是 $\mathbb{C}$ 的子域 U 上的一个度量，且 $A \subset U$ 是一个拓扑结构为环域的区域，我们将 D（绕 A）定义为所有能分离内边界与外边界的 A 中路径的 D-长度的下确界。

在[Dev24中，定理 1.4], 构造了定义在 $\mathbb{C}$ 上的一个满足公理V 的 LQG度量版本，适用于所有仿射变换。本文将始终使用这一函数，并记作 $\mathcal{D}'(\mathbb{C}) \ni h \mapsto D_h$。Dev [定理 1.4][24] 指出，几乎必然地，对所有 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 $b \in \mathbb{C}$，

$$D_h(a\cdot + b, a\cdot + b) = D_{h(a\cdot+b)+Q\log|a|}(\cdot,\cdot). \tag{5}$$

2.2 LFPP 的变体

下面讨论本文后续部分将用到的 LFPP 变体。如引言所述，对高斯自由场（2）进行热核平滑并作适当重整化后得到的 LFPP，已知当 $\epsilon \to 0$ 趋于 γ时，会在紧集上一致收敛到 -LQG度量。采用热核平滑的主要原因是，对于这种高斯自由场的连续近似，LFPP 的紧性已有所证明[DDDF20]。不过，h_ϵ^* 也是一种便捷的正则化选择，因为 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon$ 对于仿射变换满足精确的坐标变换公式：若 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且 $b \in \mathbb{C}$，则

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon(az+b, aw+b) = \frac{|a|\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{|a|^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/|a|}^{-1}} \mathfrak{a}_{\epsilon/|a|}^{-1} D_{h(a\cdot+b)+Q\log|a|}^{\epsilon/|a|}(z,w). \tag{6}$$

这是用来 [定义24] LQG度量的一个版本，该度量作用于 $\mathbb{C}$ 并且满足坐标 e c变换公式对所有仿射变换同时成立。

使用$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon$ 的一个不便之处在于，$p_{\epsilon^2/2}(\cdot)$在整个 $\mathbb{C}$上都不为零，因此$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon$ 在局部上依赖于场。如果我们希望利用高斯自由场的局部独立性（见下文引理 4.3），这就会带来麻烦。此外，我们希望考虑由形如 $h\circ\phi^{-1}$的场定义的LFPP变体，其中 h 是子域$U \subset \mathbb{C}$ 上的高斯自由场，而 $\phi: U \to \phi(U)$是一个共形变换。用热核对这样的场进行光滑化没有意义，因为 ϕ^{-1} 只定义在 $\phi(U)$上。基于这些原因，我们将考虑LFPP的一个截断版本。令 $\psi = \psi_1: \mathbb{C} \to [0,1]$ 为一个光滑的径向对称凸起函数，它在 $B_{1/2}(0)$上恒等于1，并在 $B_1(0)$之外为零。定义

$$\psi_\epsilon(z) := \psi\left(\frac{z}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}\right).$$

缩放因子 $R = R(\epsilon) = \epsilon\log\epsilon^{-1}$ 的原因如下。我们在开集 U 上的 ϵ-LFPP 局部化变体将由限制在 $B_R(U)$ 上的高斯自由场决定。我们的论证将依赖于高斯自由场限制在半径为 $\approx \epsilon^{1-\zeta}$ 、且 $\zeta \in (0,1)$ 接近 0 的不相交同心圆环上时所具有的局部独立性，因此对任意 $\zeta \in (0,1)$，我们需要 $R(\epsilon) = o(\epsilon^{1-\zeta})$。这表明 $R(\epsilon) = \epsilon$ 是合适的，但选择 $R(\epsilon) = \epsilon\log\epsilon^{-1}$ 使我们能够将普通 LFPP (2) 与我们的局部化变体进行比较（见下文引理 2.1 中的 4）。

定义

$$Z_\epsilon \coloneqq \int_{\mathbb{C}} \psi_\epsilon(w) p_{\epsilon^2/2}(w)\,\mathrm{d}A(w),$$
$$\hat{h}^*_\epsilon(z) = Z_\epsilon^{-1} h * (\psi_\epsilon p_{\epsilon^2/2})(z) \coloneqq Z_\epsilon^{-1}\left\langle h, \psi_\epsilon(\cdot - z) p_{\epsilon^2/2}(\cdot - z)\right\rangle.$$

参数为 $\xi > 0$ 的局部化 ϵ-*LFPP* 度量定义为

$$\hat{D}^\epsilon_h(z,w) \coloneqq \inf_{P:\, z\to w} \int_0^1 e^{\xi \hat{h}^*_\epsilon(P(t))} |P'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

其中，下确界取遍分段 C^1 路径 P 从 z 到 w。在[Dev24定理 1 的证明中1] 证明了 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}\, D^\epsilon_h$ 几乎必然在紧集上一致收敛。使用 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}\, D^\epsilon_h$ 的优点是它在局部依赖于该场。特别地，若 $\phi\colon U \to \phi(U)$ 是一个共形变换，且 $V \Subset U$，则该度量

$$\hat{D}^\epsilon_{h\circ\phi^{-1}+Q\log|(\phi^{-1})'|}(\phi(z),\phi(w);\phi(V))$$
$$\coloneqq \inf_{\substack{P:\, z\to w\\ P\subset V}} \int_0^1 e^{\xi Z_\epsilon^{-1}(h\circ\phi^{-1}+Q\log|(\phi^{-1})'|)*(\psi_\epsilon p_{\epsilon^2/2})(\phi(P(t)))} |(\phi\circ P)'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

其中，下确界取遍包含于 V内、从 z到 w的分段 C^1路径 P；只要$B_\epsilon\log\epsilon^{-1}(\phi(V)) \subset \phi(U)$，该定义良好。注意，若 $\tau > 1$，则由Koebe四分之一定理，存在$\epsilon_0 > 0$，使得对于所有$(0,\epsilon_0)$内的 $\epsilon \in$ 以及所有满足 $\tau^{-1} \le |\phi'(z)| \le \tau$（对所有 $z \in V$）的共形映射 $\phi\colon U \to \phi(U)$，都有$B_\epsilon\log\epsilon^{-1}(\phi(V)) \subset \phi(U)$，因此 $\hat{}D^\epsilon_{h\circ\phi^{-1}+Q}\log|(\phi^{-1})'|(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot);\ \phi(V)$ 均定义良好。

以下引理总结了...这些基本性质中使用。

引理 2.1。
1. 若 $c \in \mathbb{R}$ 是随机变量，则对所有 $z \in \mathbb{C}$，有$\widehat{(h+c)}^*_\epsilon(z) = \hat{}h^*_\epsilon(z) + c$。*2.* $\hat{}\ h^*_\epsilon(z)$几乎必然由$h|_{B_\epsilon}\log\epsilon^{-1}(z)$决定。因此，对任意确定性开集 $U \subset \mathbb{C}$，内在度量$\hat{}D^\epsilon_h(\cdot,\cdot;U)$几乎必然由$h|_{B_\epsilon}\log\epsilon^{-1}(U)$决定。*3.* $\hat{}\ h^*_\epsilon(z)$存在一个关于 z 与 ϵ联合连续的修正版。我们将始终假定所使用的是这样一个修正版。*4.* 设 $U \subset \mathbb{C}$ 为连通有界开集。几乎必然，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{z\in\overline{U}} \left|h^*_\epsilon(z) - \hat{h}^*_\epsilon(z)\right| = 0,$$

and

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{D}^\epsilon_h(z,w;V)}{D^\epsilon_h(z,w;V)} = 1, \quad \textit{uniformly over all } z,w\in V \textit{ with } z\neq w \textit{ and all connected } V\subset U.$$

5. 若 $b \in \mathbb{C}$ 且若 $H(z) \coloneqq h(z+b)$，则

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_h(z+b,z+w) = \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_H(z,w)\ \forall (z,w)\in\mathbb{C}^2.$$

6. 若 h 是全平面高斯自由场，则 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}\, D^\epsilon_h \to D_h$ 几乎必然局部一致收敛。

证明。 1和 5是常规计算，而 2由以下事实推出： ψ_ϵ的支集位于 $B_{\epsilon^{\text{对数}}\epsilon^{-1}}(0)$上。对于 3和 4，参见 [DG23，引理 2。2]最后， 6已在 [Dev24]中定理 1.1 的证明里得到。 □

3 小尺度下 LFPP 与经过坐标变换的 LFPP 的比较

给定开集 $V \Subset U$ 和 $\tau > 1$，定义

$$\Lambda_\tau(V,U) := \left\{\phi\colon U \to \phi(U) : \phi \text{ is conformal, } |\phi'(z)| \in [\tau^{-1},\tau]\ \forall z \in \overline{V}\right\}.$$

在本节中，h 表示一个全平面高斯自由场，LQG度量参数 $\xi > 0$ 是任意的。在本节中，我们将以对h^ϕ 一致的方式，将 h 的光滑化与 $\phi \in \Lambda_\tau(V,\ U)$的光滑化进行比较。其基本要素是共形映射的畸变估计。我们的主要目标是证明以下结论。

命题 *3.1*。固定开集 $W \Subset V \Subset U$，$\tau > 1$，以及 $\zeta, p, \delta \in (0,1)$。存在$\epsilon_0 = \epsilon_0(W,V,U,\tau,\zeta,p,\delta) \in (0,1)$，使得对每个 $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ 和每个 $z_0 \in W$，以至少 p 的概率，以下结论成立：对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 以及所有分段 C^1 路径 P，其中 $B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)$，

$$\begin{aligned}(1+\delta)^{-1}\operatorname{Len}\left(P;\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\right) &\le \operatorname{Len}\left(\phi\circ P;\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^{\epsilon}\right)\\ &\le (1+\delta)\operatorname{Len}\left(P;\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\right).\end{aligned}$$

为便于本节全文的符号表述，若 $\phi\colon U \to \phi(U)$ 是共形变换，且$z, w \in U$，则定义

$$\begin{aligned}\Psi_\epsilon^{\phi,z}(w) &:= \frac{|\phi'(w)|^2}{Z_\epsilon}\psi_\epsilon(\phi(w)-\phi(z))p_{\epsilon^2/2}(\phi(w)-\phi(z))\\ &= \frac{|\phi'(w)|^2}{Z_\epsilon\epsilon^2}\psi\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon\log\epsilon^{-1}}\right)p_{1/2}\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right).\end{aligned}$$

下述引理总结了函数 $\Psi^{\phi}_{\cdot,\epsilon}{}^{z}$ 的基本性质。此处及全文中，$*$ 表示卷积。

引理 3.2. 固定开集 $V \Subset U$ 与 $\tau > 1$。

(i) 若 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 且 $z \in V$，则 $\Psi^{\phi}_{\cdot,\epsilon}{}^{z}$支撑在 $B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z)$ 上；
(ii) $Z_\epsilon^{-1}(h\circ\phi^{-1}) * (\psi_\epsilon p_{\epsilon^2/2})(\phi(z)) = \langle h, \Psi^{\phi}_{\cdot,\epsilon}{}^{z}\rangle$; *(iii)* $Z_\epsilon^{-1}\log|(\phi^{-1})'| * (\psi_\epsilon p_{\epsilon^2/2})(\phi(z)) = \langle -\log|\phi'|, \Psi^{\phi}_{\cdot,\epsilon}{}^{z}\rangle$。

证明。证明 (i)：由于 ψ 的支撑集包含于 $\mathbb{D}$，Ψ^ϕ 的支撑集包含于 $\phi^{-1}\left(B_{\epsilon\log\epsilon^{-1}}(\phi(z))\right)$。由Koebe四分之一定理，$\mathbb{D}$ 在 $\omega \mapsto \phi(z+4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}\omega)$ 下的像包含 $B_{\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}|\phi'(z)|}(\phi(z))$。由于 $|\phi'(z)| \ge \tau^{-1}$，可得 $B_{\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}|\phi'(z)|}(\phi(z)) \supset B_{\epsilon\log\epsilon^{-1}}(\phi(z))$。因此，$\Psi^{\phi}_{\cdot,\epsilon}{}^{z}$ 的支撑集包含于

$$\phi^{-1}\left(B_{\epsilon\log\epsilon^{-1}}(\phi(z))\right) \subset \phi^{-1}\left(B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}|\phi'(z)|/4}(\phi(z))\right) \subset B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z).$$

证明*(ii)*:

$$\begin{aligned}Z_\epsilon^{-1}(h\circ\phi^{-1}) * (\psi_\epsilon p_{\epsilon^2/2})(\phi(z)) &= \left\langle h\circ\phi^{-1}, Z_\epsilon^{-1}\psi_\epsilon(\cdot-\phi(z))p_{\epsilon^2/2}(\cdot-\phi(z))\right\rangle\\ &= \left\langle h, Z_\epsilon^{-1}|\phi'(\cdot)|^2\psi_\epsilon(\phi(\cdot)-\phi(z))p_{\epsilon^2/2}(\phi(\cdot)-\phi(z))\right\rangle\\ &= \left\langle h, \Psi_\epsilon^{\phi,z}\right\rangle.\end{aligned}$$

证明*(iii)*:

$$\begin{aligned}Z_\epsilon^{-1}\log|(\phi^{-1})'| * \psi_\epsilon(\phi(z)) &= \left\langle \log|(\phi^{-1})'(\cdot)|, Z_\epsilon^{-1}\psi_\epsilon(\cdot-\phi(z))p_{\epsilon^2/2}(\cdot-\phi(z))\right\rangle\\ &= \left\langle \log|(\phi^{-1})'(\phi(\cdot)), Z_\epsilon^{-1}|\phi'(\cdot)|^2\psi_\epsilon(\phi(\cdot)-\phi(z))p_{\epsilon^2/2}(\phi(\cdot)-\phi(z))\right\rangle\\ &= \left\langle -\log|\phi'|, \Psi_\epsilon^{\phi,z}\right\rangle.\end{aligned}$$

□

下一个引理给出了比较 $\Psi^{\phi}_{\cdot,\epsilon}{}^{z}$和 $\Psi^{\mathrm{id}}_{\cdot,\epsilon/|\phi'(z_0)|}{}^{z}$ 的主要估计，其中 z 接近 z_0。

引理 3.3。 固定开集 $W \Subset V \Subset U$、 $\tau > 1$和 $\zeta \in (0,1)$。存在 $C = C(W,V,\tau,\zeta) > 0$以及 $\epsilon_0 = \epsilon_0(W, V, \tau, \zeta) \in (0,1)$，使得对所有 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$,

$$\sup_{z_0 \in W} \sup_{z \in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left\| \Psi_\epsilon^{\phi,z} - \Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|} \right\|_{L^\infty(U)} \leq C\epsilon^{-1-\zeta} \log \epsilon^{-1}, \tag{7}$$

$$\sup_{z_0 \in W} \sup_{z \in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left\| \nabla\Psi_\epsilon^{\phi,z} - \nabla\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|} \right\|_{L^\infty(U)} = C\epsilon^{-2-\zeta} \log \epsilon^{-1}. \tag{8}$$

证明。 其思路是，如果 z 接近 z_0，那么在 z附近的一个小球上， $w \mapsto \phi(w)$ 看起来就像仿射变换 $w \mapsto \phi'(z_0)(w-z) + \phi(z)$，其中根据畸变型不等式，该估计的误差关于 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 是一致的。因此，

$$\begin{aligned} p_{\epsilon^2/2}(\phi(w) - \phi(z)) &\approx p_{\epsilon^2/2}\left(\left(\phi'(z_0)(w-z) + \phi(z)\right) - \phi(z)\right) \\ &= p_{1/2}\left(\frac{w-z}{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\right) \\ &= p_{(\epsilon/|\phi'(z_0)|)/2}(z-w). \end{aligned} \tag{9}$$

由于凸起函数 ψ_ϵ 在 $B_{\epsilon \log \epsilon^{-1}/2}(0)$ 处为 $\equiv 1$，且当 $z \notin B_{\epsilon \log \epsilon^{-1}/2}(0)$ 时，$p_{\epsilon^2/2}(\hat{w}) \leq C_2 e^{-(\log \epsilon^{-1})^2/4}$，我们将使用 (9)$_{z_0}$来证明，对于所有接近 . 的情形， $\psi_\epsilon(\phi(z \quad w-z \quad w \quad z \quad) - \phi(\ )) (\phi(\ ) - \phi(\ )) \approx \psi_{\epsilon/|\phi'()}(\ ) p_{(\epsilon/|\phi'(z_0)|)/2}(\ )$。

由于 $\int_{\mathbb{C}} p_{\epsilon^2/2}(w)\, \mathrm{d}A(w) = 1$，我们看到

$$0 \leq 1 - Z_\epsilon = \frac{2}{\epsilon^2} \int_0^\infty r\left(1 - \psi_\epsilon(r)\right) e^{-r^2/\epsilon^2}\, \mathrm{d}r \leq \frac{2}{\epsilon^2} \int_{\epsilon \log \epsilon^{-1}/2}^\infty r e^{-r^2/\epsilon^2} = e^{-(\log \epsilon^{-1})^2/4}, \tag{10}$$

其中，我们利用了 ψ 的径向对称性，将积分 Z_ϵ 改写为极坐标下的形式。因此， $\|\Psi^{\phi,}{}_{\epsilon}{}^{z} - Z_\epsilon \Psi^{\phi,\epsilon}{}^{z}\|_{L^\infty(U)} \leq C\epsilon^{-2}\epsilon^{\frac{1}{4}} \log \epsilon^{-1}$，且 $\|\nabla\Psi^{\phi,}{}_{\epsilon}{}^{z} - Z_\epsilon \nabla\Psi^{\phi,\epsilon}{}^{z}\|_{L^\infty(U)} \leq C\epsilon^{-3}\epsilon^{\frac{1}{4}} \log \epsilon^{-1}$，其中常数 C仅依赖于 τ（而不依赖于 ϕ）。因此，只需证明将 $Z_\epsilon \Psi^{\phi,}{}_{\epsilon}{}^{z}$和 $Z_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\Psi^{\mathrm{id},}{}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{z}$分别替换为 $\Psi^{\phi,}{}_{\epsilon}{}^{z}$和 $\Psi^{\mathrm{id},}{}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{z}$时的 (7) 和 (8)。

注意

$$\begin{aligned} Z_\epsilon \Psi_\epsilon^{\phi,z}(w) &= \frac{|\phi'(w)|^2}{\epsilon^2} \psi\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}\right) p_{1/2}\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right), \\ \partial_x Z_\epsilon \Psi_\epsilon^{\phi,z}(w) &= \frac{2\phi'(w)\cdot\phi''(w)}{\epsilon^2} \psi\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}\right) p_{1/2}\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right) \\ &\quad + \frac{|\phi'(w)|^2}{\epsilon^2} p_{1/2}\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right) (\nabla\psi)\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}\right) \cdot \frac{\phi'(w)}{\epsilon \log \epsilon^{-1}} \\ &\quad + \frac{|\phi'(w)|^2}{\epsilon^2} \psi\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}\right) (\nabla p_{1/2})\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right) \cdot \frac{\phi'(w)}{\epsilon}, \end{aligned}$$

对于 $\partial_y Z_\epsilon \Psi^{\phi,}{}_{\epsilon}{}^{z}$ 也有类似结论，其中 $\cdot$ 表示标准欧几里得点积，而 ∂_x、 ∂_y 分别表示对 $w = x + \mathrm{i}y$ 的实部和虚部求导。回忆一下， $\psi \equiv 1$ 在 $B_{1/2}(0)$ 上，因此

$$\left| Z_\epsilon \Psi_\epsilon^{\phi,z}(w) - \frac{|\phi'(w)|^2}{\epsilon^2} p_{1/2}\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right) \right| \leq \begin{cases} 0 & \phi(w) \in B_{\epsilon \log \epsilon^{-1}/2}(\phi(z)) \\ C\epsilon^{-2} e^{-\frac{1}{4}(\log \epsilon^{-1})^2} & \text{otherwise} \end{cases},$$

其中常数 C 仅取决于 τ。对于 $\partial_x Z_\epsilon \Psi^{\phi,}{}_{\epsilon}{}^{z}$ 中的每一项、 $\partial_y Z_\epsilon \Psi^{\phi,}{}_{\epsilon}{}^{z}$ 中的各项，以及以 $Z_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\Psi^{\mathrm{id},}{}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{z}$ 代替 $Z_\epsilon \Psi^{\phi,}{}_{\epsilon}{}^{z}$ 时，也有类似的估计。因此，若

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_\epsilon^{\phi,z}(w) &:= \frac{|\phi'(w)|^2}{\epsilon^2} p_{1/2}\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right), \\ \tilde{\Psi}_{\epsilon,x}^{\phi,z}(w) &:= \frac{2\phi'(w)\cdot\phi''(w)}{\epsilon^2} p_{1/2}\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right) + \frac{|\phi'(w)|^2}{\epsilon^2} (\nabla p_{1/2})\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right) \cdot \frac{\phi'(w)}{\epsilon}, \\ \tilde{\Psi}_{\epsilon,y}^{\phi,z}(w) &:= \frac{2\phi'(w)\cdot \mathrm{i}\phi''(w)}{\epsilon^2} p_{1/2}\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right) + \frac{|\phi'(w)|^2}{\epsilon^2} (\nabla p_{1/2})\left(\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right) \cdot \frac{\mathrm{i}\phi'(w)}{\epsilon}, \end{aligned}$$

只需证明存在一个常数 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}\|\tilde{\Psi}_{\epsilon}^{\phi,z}-\tilde{\Psi}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{\mathrm{id},z}\|_{L^\infty(U)} &\le C\epsilon^{-1-\zeta}\log\epsilon^{-1},\\ \|\tilde{\Psi}_{\epsilon,x}^{\phi,z}-\tilde{\Psi}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|,x}^{\mathrm{id},z}\|_{L^\infty(U)} &\le C\epsilon^{-2-\zeta}\log\epsilon^{-1},\\ \|\tilde{\Psi}_{\epsilon,y}^{\phi,z}-\tilde{\Psi}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|,y}^{\mathrm{id},z}\|_{L^\infty(U)} &\le C\epsilon^{-2-\zeta}\log\epsilon^{-1}.\end{aligned}$$

为得到这些估计，请注意 $p_{1/2}$ 的 0、1 阶和 2 阶导数均有界，并且 $|\phi'|$ 在 τ 上由 V控制，因此根据中值定理，只需证明存在一个常数C，使得对所有 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$、所有 $z_0\in W$、所有 $z\in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)$以及所有 $w\in B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z)$，

$$\begin{aligned}\left|\phi'(w)-\phi'(z_0)\right| &\le C\epsilon^{1-\zeta}, &(11)\\ \left|\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}-\frac{w-z}{\epsilon/\phi'(z_0)}\right| &\le C\epsilon^{1-\zeta}\log\epsilon^{-1}, &(12)\\ |\phi''(w)| &\underset{z_0}{\le} C. &(13)\end{aligned}$$

在（12）中，请注意我们写的是 $\phi'(p_{1/2}\frac{w-z}{\epsilon/\phi'z_0})$（$p_{(\epsilon/|\phi'z_0|/2}w-z=$ 11 12 13），而不是 $|\phi'()|$，因为根据热核的旋转对称性，$()()()$。现在我们来证明（）、（）和（）。

取 $r>0$，使得 $B_r(W)\subset V$，并取 $\epsilon_0\in(0,1)$，使得对于所有 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$，都有 $\frac{4\tau\epsilon}{\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}}\log\frac{}{r}<\frac{1}{2}$。对于任意 $z\in W$，对函数 $\omega\mapsto\frac{1}{r}\phi(z+r\omega)-\phi(z)\phi'(z)=\omega+\sum_{n=2}^\infty a_n\omega^n$ 在 $\mathbb{D}$上进行泰勒展开，并应用 de Branges 定理[2] [Bra85]，可知对于所有 n，都有 $|a_n|\le n$。因此，对于所有 $\omega\in\mathbb{D}$，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\phi'(z_0+(4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta})\omega)}{\phi'(z_0)}-1\right|\\ &\quad=\left|\frac{\phi'(z_0+r\frac{(4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta})\omega}{r})}{\phi'(z_0)}-1\right|\\ &\quad\le\sum_{n=2}^\infty n^2\left|\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}}{r}\right|^{n-1}\\ &\quad=\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}}{r}\frac{4-3\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}}{r}+(\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}}{r})^2}{(1-\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}}{r})^3}\\ &\quad\le 34\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}}{r},\qquad\left(\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}}{r}<\frac{1}{2}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

对于任意 $z\in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}z_0$ $w\in B_{4\tau\epsilon}{}_{\epsilon^{-1}}z$ $\omega\in\mathbb{D}$ $w=z_0+4\tau\epsilon\epsilon^{-1}+2\epsilon^{1-\zeta}\omega$ 14 $|\phi'z_0|\le\tau$ ()并且 $\log()$，我们可以找到满足 (log)的 。将此选择代入 (()，并两边同乘 11，即可证明 (。

类似地，对于每个 $\omega\in\mathbb{D}$，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\phi(z+4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}\omega)-\phi(z)}{\phi'(z)\epsilon}-\frac{(z+4\tau(\epsilon\log\epsilon^{-1})\omega)-z}{\epsilon}\right|\\ &=\frac{r}{\epsilon}\left|\frac{\phi(z+r\frac{4\tau(\epsilon\log\epsilon^{-1})\omega}{r})-\phi(z)}{\phi'(z)r}-\frac{4\tau(\epsilon\log\epsilon^{-1})\omega}{r}\right|\\ &=\frac{r}{\epsilon}\left|\sum_{n=2}^\infty a_n\left(\frac{4\tau(\epsilon\log\epsilon^{-1})\omega}{r}\right)^n\right|\\ &\le\frac{r}{\epsilon}\sum_{n=2}^\infty n\left|\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}\right|^n\\ &=\frac{r}{\epsilon}\left(\frac{\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}}{(1-\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r})^2}-\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}\right)\end{aligned}$$

[2]我们并不需要 de Branges 定理的全部强度，但为方便起见使用它。例如，Littlewood 的结果[Lit25] $|a_n|\le en$ 对所有 n 就足够了。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{16\tau^2\epsilon(\log\epsilon^{-1})^2}{r}\frac{2-\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}}{(1-\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r})^2}\\
&\le \frac{128\tau^2\epsilon(\log\epsilon^{-1})^2}{r} \qquad \left(\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}<\frac{1}{2}\right)\\
&\le \frac{128\tau^2}{r}\epsilon^{1-\zeta} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

对于 $w\in B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z)$，我们可以找到 $\omega\in\mathbb{D}$ 使得 $w=z+4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}\omega=w$，然后应用（15）并采用 ω 的这一选取以得到

$$
\left|\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\phi'(z)\epsilon}-\frac{w-z}{\epsilon}\right| \le \frac{128\tau^2}{r}\epsilon^{1-\zeta}. \qquad (16)
$$

由此可从（12）推出（16），注意到

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}-\frac{w-z}{\epsilon/\phi'(z_0)}\right| &\le \left|\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right|\left|1-\frac{\phi'(z_0)}{\phi'(z)}\right|+|\phi'(z_0)|\left|\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\phi'(z)\epsilon}-\frac{w-z}{\epsilon}\right|\\
&\le \left(4\tau^2\log\epsilon^{-1}\right)C\tau\epsilon^{1-\zeta}+\tau\frac{128\tau^2}{r}\epsilon^{1-\zeta}
\end{aligned}
$$

其中，我们在（11）中用 z 替代 w，以界定 $|1-\frac{\phi'(z_0)}{\phi'(z)}|$，并利用中值定理界定

$$
\left|\frac{\phi(w)-\phi(z)}{\epsilon}\right| \le \frac{|\phi'(c)|4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{\epsilon} \le 4\tau^2\log\epsilon^{-1},
$$

其中，$c\in V$ 是从 z 到 w的线段上的某一点。

最后，界

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{r\phi''(z+4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}\omega)}{\phi'(z)}\right|\\
&\quad\le \sum_{n=2}^{\infty}n^2(n-1)\left|\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}\right|^{n-2}\\
&\quad= \left(\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}\right)^2\frac{2(24-46\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}+34(\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r})^2-9(\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r})^3)}{(1-\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r})^4}\\
&\quad\le 1040\left(\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}\right)^2, \qquad \left(\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}<\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

应用 $\omega\in\mathbb{D}$选择使得 $w=z+4\tau\epsilon$对数 $\epsilon^{-1}\omega$，再结合 $|\phi'(z)|\ge\tau^{-1}$这一事实，足以得到 (13)。 □

^^ 下一个引理将用于比较光滑化场 $h^*_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}$ 和 $h^*_{\epsilon/|\phi'(z_1)|}$，其中 z_0 和 z_1 彼此接近。

引理 3.4. 固定一个紧集 $K\subset\mathbb{C}$ 以及常数 $C>0$ 和 $\zeta\in(0,1)$。几乎必然地 $y,$

$$
\sup_{\substack{t,s\in[\tau^{-1},\tau]\\ 1-C\epsilon^{1-\zeta}\le\frac{t}{s}\le1+C\epsilon^{1-\zeta}}}\sup_{z\in K}\left|\hat{h}^*_{\epsilon t}(z)-\hat{h}^*_{\epsilon s}(z)\right| \overset{\epsilon\to0}{\to} 0.
$$

证明。 我们将证明存在一个依赖于 K 的随机变量 X，使得对于满足 $1\le\frac{\delta}{\epsilon}\le2$ 的 $\epsilon,\delta\in(0,e^{-1})$,

$$
\sup_{z\in K}\left|\hat{h}^*_{\epsilon}(z)-\hat{h}^*_{\delta}(z)\right| \le X\left(\log\epsilon^{-1}\right)^3\log\frac{1}{\epsilon\log\epsilon^{-1}}\left[\left|\frac{\delta\log\delta^{-1}}{\epsilon\log\epsilon^{-1}}-1\right|\vee\left(\frac{\delta}{\epsilon}-1\right)+2e^{-(\log\delta^{-1})^2/4}\right]. \qquad (17)
$$

将（17）中的 ϵt 替换为 ϵ，并将 ϵs 替换为 δ 即可证明该引理。由于

$$
\left|\hat{h}^*_{\epsilon}(z)-\hat{h}^*_{\delta}(z)\right| \le (1-Z_\epsilon)\left|\hat{h}^*_{\epsilon}(z)\right|+\left|Z_\epsilon\hat{h}^*_{\epsilon}(z)-Z_\delta\hat{h}^*_{\delta}(z)\right|+(1-Z_\delta)\left|\hat{h}^*_{\delta}(z)\right|,
$$

只需证明存在一个随机变量 $X \in (0,\infty)$，使得对所有 $z \in K$ 以及所有满足 $1 \le \frac{\delta}{\epsilon} \le 2$ 的 $\epsilon, \delta \in (0, e^{-1})$，

$$(1-Z_\epsilon)\left|\hat{h}^*_\epsilon(z)\right| \le X e^{-(\log \epsilon^{-1})^2/4} \left(\log \epsilon^{-1}\right)^2 \log \frac{1}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}, \tag{18}$$

$$\left|Z_\epsilon \hat{h}^*_\epsilon(z) - Z_\delta \hat{h}^*_\delta(z)\right| \le X \left(\log \delta^{-1}\right)^3 \log \frac{1}{\delta \log \delta^{-1}} \left[\left|\frac{\delta \log \delta^{-1}}{\epsilon \log \epsilon^{-1}} - 1\right| \vee \left(\frac{\delta}{\epsilon} - 1\right)\right]. \tag{19}$$

使用以 z 为中心的极坐标，我们看到

$$\hat{h}^*_\epsilon(z) = \int_0^{\epsilon \log \epsilon^{-1}} r h_r(z) \Psi^{\mathrm{id},0}_\epsilon(r)\, \mathrm{d}r. \tag{20}$$

根据 [DFGPS20，引理 2.2]，$X := \sup_{z\in K} \sup_{r \in (0,e^{-1})} |h_r(z)| \log r^{-1} < \infty$ 几乎必然。由此可得

$$\begin{aligned}
\left|\hat{h}^*_\epsilon(z)\right| &\le X \int_0^{\epsilon \log \epsilon^{-1}} r \log r^{-1} \Psi^{\mathrm{id},0}_\epsilon(r)\, \mathrm{d}r \\
&= \frac{C_1 C_2 X}{Z_\epsilon \epsilon^2} \int_0^{\epsilon \log \epsilon^{-1}} r \log r^{-1}\, \mathrm{d}r \\
&= \frac{C_1 C_2 X}{Z_\epsilon} \frac{1}{4} \left(\log \epsilon^{-1}\right)^2 \left(2 \log \frac{1}{\epsilon \log \epsilon^{-1}} + 1\right),
\end{aligned}$$

其中 $C_1 := \max_{w\in\mathbb{C}} \psi(w)$ 且 $C_2 := \max^{w\in\mathbb{C}} p_{1/2}(w)$。由 (10) 可知，当 $\epsilon \in (0, e^{-1})$，

$$\begin{aligned}
Z_\epsilon &\ge 1 - e^{-(\log \epsilon^{-1})^2/4} > 1 - e^{-1/4}, \\
1 - Z_\epsilon &\le e^{-(\log \epsilon^{-1})^2/4}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$(1-Z_\epsilon)\left|\hat{h}^*_\epsilon(z)\right| \le \frac{C_1 C_2 X}{1 - e^{-1/4}} e^{-(\log \epsilon^{-1})^2/4} \left(\log \epsilon^{-1}\right)^2 \left(2 \log \frac{1}{\epsilon \log \epsilon^{-1}} + 1\right),$$

这证明了（18），其中以 $\frac{4C_1C_2X}{1-e^{-1/4}}$ 代替 X。

为证明（19），假设 $1 \le \frac{\delta}{\epsilon} \le 2$，并利用（20）可知

$$\left|Z_\epsilon \hat{h}^*_\epsilon(z) - Z_\delta \hat{h}^*_\delta(z)\right| \le X \int_0^{\delta \log \delta^{-1}} r \log r^{-1} \left|Z_\epsilon \Psi^{\mathrm{id},0}_\epsilon(r) - Z_\delta \Psi^{\mathrm{id},0}_\delta(r)\right| \mathrm{d}r. \tag{21}$$

我们将使用以下界

$$\begin{aligned}
\left|Z_\epsilon \Psi^{\mathrm{id},0}_\epsilon(r) - Z_\delta \Psi^{\mathrm{id},0}_\delta(r)\right| &= \left|\frac{1}{\epsilon^2}\psi\left(\frac{r}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}\right) p_{1/2}\left(\frac{r}{\epsilon}\right) - \frac{1}{\delta^2}\psi\left(\frac{r}{\delta \log \delta^{-1}}\right) p_{1/2}\left(\frac{r}{\delta}\right)\right| \\
&\le \left|\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\delta^2}\right| \psi\left(\frac{r}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}\right) p_{1/2}\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\delta^2}\left|\psi\left(\frac{r}{\epsilon \log \epsilon^{-1}}\right) - \psi\left(\frac{r}{\delta \log \delta^{-1}}\right)\right| p_{1/2}\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\delta^2}\psi\left(\frac{r}{\delta \log \delta^{-1}}\right)\left|p_{1/2}\left(\frac{r}{\epsilon}\right) - p_{1/2}\left(\frac{r}{\delta}\right)\right| \\
&\le \frac{C_1 C_2}{\delta^2}\left|\frac{\delta^2}{\epsilon^2} - 1\right| + \frac{C_2 L_1}{\delta^2}\left|\frac{r}{\epsilon \log \epsilon^{-1}} - \frac{r}{\delta \log \delta^{-1}}\right| + \frac{C_1 L_2}{\delta^2}\left|\frac{r}{\epsilon} - \frac{r}{\delta}\right|,
\end{aligned}$$

其中 $L_1 :=$ 最大值$_{w\in\mathbb{C}} |\nabla \psi(w)|$ 且 $L_2 :=$ 最大值$_{w\in\mathbb{C}} |\nabla p_{1/2}(w)|$。将其与（21）结合，我们发现当 $\frac{\delta}{\epsilon} \le 2$,

$$\left|Z_\epsilon \hat{h}^*_\epsilon(z) - Z_\delta \hat{h}^*_\delta(z)\right| \le \frac{3 X C_1 C_2}{4}\left(\frac{\delta}{\epsilon} - 1\right)\left(\log \delta^{-1}\right)^2 \left(2 \log \frac{1}{\delta \log \delta^{-1}} + 1\right)$$

$$+\frac{XC_2L_1}{9}(\log\delta^{-1})^2\left|\frac{\delta\log\delta^{-1}}{\epsilon\log\epsilon^{-1}}-1\right|\left(3\log\frac{1}{\delta\log\delta^{-1}}+1\right)$$
$$+\frac{XC_1L_2}{9}\left(\frac{\delta}{\epsilon}-1\right)(\log\delta^{-1})^3\left(3\log\frac{1}{\delta\log\delta^{-1}}+1\right).$$

将常数吸收到 X 中后，即可得到方程（19）。 □

命题 3.1 的证明中的主要要点如下。

引理 3.5。取开集 $W \Subset V \Subset U$、$\tau > 1$ 和 $\delta,\ \zeta \in (0,\ 1)$。则

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{z_0\in W}\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)}\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\left|\langle h,\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\rangle\right|>\delta\right\}=0. \tag{22}$$

在证明引理 3.5之前，我们先证明引理 3.5 的以下一个更定量的变体，稍后将用它来估计欧几里得距离相差 $\epsilon^{1-\zeta}$ 的点之间的 LFPP 距离。它也用于引理 3.5的证明。我们强调，引理 3.6 仅适用于 $\zeta\in(0,\ 1/3)$，而引理 3.5 对所有 $\zeta\in(0,\ 1)$均成立。

引理 *3.6*。取开集 $W \Subset V \Subset U$、$\tau > 1$ $\delta \in (0, 1)$ 和 $\zeta \in (0, 1/3)$。存在常数 $c = c(W, V, \tau, \zeta, \delta) > 0$, $\epsilon_0 = \epsilon_0(W, V, \tau, \zeta, \delta) \in (0, 1)$，使得对每个 $z_0 \in W$ 以及每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$，

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)}\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\left|\langle h,\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\rangle\right|>\delta\right\}\le\exp\left(-c\frac{\epsilon^{-2+6\zeta}}{(\log\epsilon^{-1})^5}\right).$$

证明。基本思路是将 h 视为索伯列夫空间$\mathcal{H}^1(2\epsilon^{1-\zeta}\mathbb{D})$上的连续线性泛函，然后用高斯自由场的范数乘以$\Psi^{\phi,z}_\epsilon-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}$的范数来界定 $|\langle h,\Psi^{\phi,z}_\epsilon-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\rangle|$。高斯自由场的范数将借助 Borel-TIS 不等式加以控制。$\Psi^{\phi,z}_\epsilon-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}$ 的范数将借助引理 3.3加以控制。这里我们将使用索伯列夫范数 $\|f\|_{\mathcal{H}^1}=(\|f\|_{L^2}+\|f'\|_{L^2})^{1/2}$ 以及 $\mathcal{H}^{-1}$上的对偶范数。

固定一个开集 $\tilde{W}$，使得 $W \Subset \tilde{W} \Subset V$。令 ϵ_0与 C如引理 3.3中所述，并以 $\tilde{W}$代替 W。我们可以假设 ϵ_0 足够小，使得对所有 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$，都有 $\epsilon^\zeta\log\epsilon^{-1}<1$ 以及$B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1+2\epsilon^{1-\zeta}}}(W)\subset\tilde{W}$。固定 $z_0\in W$、$\epsilon\in(0,\epsilon_0)$以及$z\in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)$。注意，由于 $\Psi^{\phi,z}_\epsilon$与 $\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}$支撑于$B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z)\subset\tilde{W}$，故 $\Psi^{\phi,z}_\epsilon(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)$的支撑包含于$B_{4\tau\epsilon^\zeta\log\epsilon^{-1}}(\epsilon^{-(1-\zeta)}(z-z_0))\subset 6\tau\mathbb{D}$。因此，

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle h,\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\right\rangle\right|\\&\quad=\left|\left\langle h(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0),\epsilon^{2(1-\zeta)}\left(\Psi_\epsilon^{\phi,z}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)\right)\right\rangle\right|\\&\quad\le\|h(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}\epsilon^{2(1-\zeta)}\|\Psi_\epsilon^{\phi,z}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)\|_{\mathcal{H}_0^1(6\tau\mathbb{D})}.\end{aligned} \tag{23}$$

我们首先估计上一行的 $\mathcal{H}_0^1$范数。思路是，根据引理 $\Psi^{\phi,z}_\epsilon$和 $\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}$ 的支集位于 $B_{4\tau\epsilon^{-1}}(z)$上，因此由引理 3.2，$\Psi^{\phi,z}_\epsilon(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)$的支集包含在一个半径为 $4\tau\epsilon^\zeta\log\epsilon^{-1}$的圆盘中。因此，我们将用该函数及其导数的最大值乘以其支集面积，来估计它们的范数（使用引理 3.3）$\pi 16\tau^2\epsilon^{2\zeta}(\log\epsilon^{-1})^2$。梯度的处理方式类似。更准确地说，利用引理 3.3，

$$\begin{aligned}&\|\Psi_\epsilon^{\phi,z}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)\|_{L^2(6\tau\mathbb{D})}\\&\qquad\le\left(C^2\epsilon^{2(-1-\zeta)}(\log\epsilon^{-1})^2\pi 16\tau^2\epsilon^{2\zeta}(\log\epsilon^{-1})^2\right)^{1/2}\\&\qquad=C\sqrt{\pi}4\tau\epsilon^{-1}\left(\log\epsilon^{-1}\right)^2,\\&\|\nabla(\Psi_\epsilon^{\phi,z}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0))\|_{L^2(6\tau\mathbb{D})}\\&\qquad=\epsilon^{1-\zeta}\|(\nabla\Psi_\epsilon^{\phi,z})(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)-(\nabla\Psi_\epsilon^{\mathrm{id},z})(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)\|_{L^2(6\tau\mathbb{D})}\\&\qquad\le\epsilon^{1-\zeta}\left(C^2\epsilon^{2(-2-\zeta)}\left(\log\epsilon^{-1}\right)^2\pi 16\tau^2\epsilon^{2\zeta}(\log\epsilon^{-1})^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

$$= C\sqrt{\pi}4\tau\epsilon^{-1-\zeta}\left(\log\epsilon^{-1}\right)^2.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{2(1-\zeta)}\|\Psi_\epsilon^{\phi,z}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)\|_{\mathcal{H}_0^1(6\tau\mathbb{D})}\\
&\quad\le \epsilon^{2(1-\zeta)}\left(C^2\pi 16\tau\epsilon^{-2}(\log\epsilon^{-1})^4+C^2\pi 16\tau\epsilon^{-2-2\zeta}(\log\epsilon^{-1})^4\right)^{1/2}\\
&\quad= C\sqrt{\pi}4\tau\left(\epsilon^{2-4\zeta}+\epsilon^{2-6\zeta}\right)^{1/2}\left(\log\epsilon^{-1}\right)^2\\
&\quad\le C\epsilon^{1-3\zeta}\left(\log\epsilon^{-1}\right)^2, \qquad (24)
\end{aligned}$$

其中我们已将常数吸收到 C中。因此,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)}\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\left|\langle h,\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\rangle\right|>\delta\right\}\\
&\quad\le \mathbf{P}\left\{\|h(\epsilon^{1-\zeta}\cdot+z_0)\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}>\frac{\delta\epsilon^{3\zeta-1}}{C(\log\epsilon^{-1})^2}\right\} \qquad \text{(by (23), (24))}\\
&\quad\le \mathbf{P}\left\{\|H\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}>\frac{\delta\epsilon^{3\zeta-1}}{2C(\log\epsilon^{-1})^2}\right\}+\mathbf{P}\left\{|h_{\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)|>\frac{\delta\epsilon^{3\zeta-1}}{2C(\log\epsilon^{-1})^2}\right\},
\end{aligned}$$

其中 H 是一个全平面高斯自由场，其规范化使得 $H_1(0)=0$。由于$\|H\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}<\infty$ 几乎必然[BP25，定理1.45], Borell-TIS 不等式 [Bor75] [CIS76] （参见例如 [AT07，定理2.1.1]）蕴含：若

$$\sigma^2 := \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{H}^1(6\tau\mathbb{D})\\ \|\varphi\|_{\mathcal{H}^1(6\tau\mathbb{D})}\le 1}}\mathbf{E}\left|\langle H,\varphi\rangle\right|^2,$$

则 $\sigma^2<\infty$ 且 $\mathbf{E}[\|H\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}]<\infty$，并且对每个 $u>0$,

$$\mathbf{P}\left\{\|H\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}>\mathbf{E}\left[\|H\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}\right]+u\right\}\le\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right).$$

将此应用于 u 等于

$$u(\epsilon) := -\mathbf{E}\left[\|H\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}\right]+\frac{\delta\epsilon^{3\zeta-1}}{2C(\log\epsilon^{-1})^2},$$

当 ϵ 足够小时，该值为正，因为 $3\zeta-1<0$。我们得到

$$\mathbf{P}\left\{\|H\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(6\tau\mathbb{D})}>\frac{\delta\epsilon^{3\zeta-1}}{2C(\log\epsilon^{-1})^2}\right\}\le\exp\left(-\frac{u(\epsilon)^2}{2\sigma^2}\right).$$

由于 $h_{\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)$ 是均值为零、方差有界的高斯随机变量，其方差上界为仅依赖于 W 加上 $\log\epsilon^{-(1-\zeta)}$ 的常数 c_0，根据高斯随机变量尾概率的标准估计可知

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{|h_{\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)|>\frac{\delta\epsilon^{3\zeta-1}}{2C(\log\epsilon^{-1})^2}\right\}\\
&\quad\le\frac{2C(\log\epsilon^{-1})^2\sqrt{c_0+\log\epsilon^{-(1-\zeta)}}}{\sqrt{2\pi}\delta}\epsilon^{1-3\zeta}\exp\left(-\frac{\delta^2\epsilon^{6\zeta-2}}{8C^2(\log\epsilon^{-1})^4\left(c_0+\log\epsilon^{-(1-\zeta)}\right)}\right).
\end{aligned}$$

由于 $1-3\zeta>0$，我们看到，缩小 ϵ_0后，将有 $\frac{2C(\log\epsilon^{-1})^2\sqrt{c_0+\log\sqrt{2\pi}\delta}\ \epsilon^{1-3\zeta}}{}<1$。
因此，引理得证，其中常数

$$c := \min\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\inf_{\epsilon\in(0,\epsilon_0)}\frac{u(\epsilon)^2}{\frac{\epsilon^{-2+6\zeta}}{(\log\epsilon^{-1})^5}},\frac{\delta^2}{8C^2}\inf_{\epsilon\in(0,\epsilon_0)}\frac{\log\epsilon^{-1}}{c_0+\log\epsilon^{-(1-\zeta)}}\right\}.$$

□

引理 3.5 的证明。大致思路如下。引理 3.6 在 $\zeta \in (0,1/3)$ 时蕴含引理 3.5，但我们希望即使 ζ 接近 1，结论仍然成立。为此，我们将固定某个 $\zeta_- \in (0,1/3)$，比如 $\zeta_- = 1/4$，并利用引理 3.6 估计 $\langle h, \Psi^{\phi,}_{\epsilon}{}^{z} - \Psi^{\mathrm{id},}_{\epsilon/|\phi'(z_1)|}{}^{z} \rangle$，其中某个 z_1 满足 $|z - z_1| \approx \epsilon^{1-\zeta_-}$；接着利用畸变估计和引理 3.4，在 $|z_1 - z_0| \approx \epsilon^{1-\zeta}$时估计 $\langle h, \Psi^{\mathrm{id},}_{\epsilon/|\phi'(z_1)|}{}^{z} - \Psi^{\mathrm{id},}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}{}^{z} \rangle$。

让我们将其表述得更为精确。固定 $0 < \zeta_- < \frac{1}{3} \wedge \zeta$。对于每个 $z_0 \in W$，式（22）中的概率由以下概率之和所界定

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{z \in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)} \sup_{z_1 \in B_{2\epsilon^{1-\zeta_-}}(z) \cap (\frac{\epsilon^{1-\zeta_-}}{4}\mathbb{Z}^2)} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left| \langle h, \Psi^{\phi,z}_\epsilon - \Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_1)|} \rangle \right| > \frac{\delta}{2} \right\}, \tag{25}$$

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{z \in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)} \sup_{z_1 \in B_{2\epsilon^{1-\zeta_-}}(z) \cap (\frac{\epsilon^{1-\zeta_-}}{4}\mathbb{Z}^2)} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left| \langle h, \Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_1)|} - \Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|} \rangle \right| > \frac{\delta}{2} \right\}. \tag{26}$$

由并集界可知，式（25）至多为

$$\sum_{z_1 \in B_{2\epsilon^{1-\zeta}+2\epsilon^{1-\zeta_-}}(z_0) \cap (\frac{\epsilon^{1-\zeta_-}}{4}\mathbb{Z}^2)} \mathbf{P}\left\{ \sup_{z \in B_{2\epsilon^{1-\zeta_-}}(z_1)} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left| \langle h, \Psi^{\phi,z}_\epsilon - \Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_1)|} \rangle \right| > \frac{\delta}{2} \right\},$$

根据引理 3.6，该式关于 $z_0 \in W$一致收敛于 0。为估计式（26），令 $r := \operatorname{dist}(\partial W, \partial V)$，并注意到，根据畸变估计，如果 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 以及 $z_0 \in W$和 $z_1 \in V$满足 $|z_0 - z_1| < r$，那么

$$\frac{|\phi'(z_1)|}{|\phi'(z_0)|} \in \left[\frac{1 - r^{-1}|z_0 - z_1|}{(1 + r^{-1}|z_0 - z_1|)^3}, \frac{1 + r^{-1}|z_0 - z_1|}{(1 - r^{-1}|z_0 - z_1|)^3} \right]. \tag{27}$$

特别地，如果 $z_0 \in W$ 且 $z_1 \in V$满足 $|z_0 - z_1| < 2\epsilon^{1-\zeta} + 2\epsilon^{1-\zeta_-}$，那么

$$1 - C\epsilon^{1-\zeta} \le \frac{|\phi'(z_1)|}{|\phi'(z_0)|} \le 1 + C\epsilon^{1-\zeta}$$

其中常数 C 仅取决于 r。由引理 3.4 (其中 $s = 1/|\phi'(z_0)|$ 和 $t = 1/|\phi'(z_1)|$)，(26) 当 $\epsilon \to 0$ 时关于 $z_0 \in W$一致收敛到 0。 □

对于下一个引理，注意到由于 $Z_\epsilon^{-1}\psi_\epsilon p_{\epsilon^2/2}$是一个近似恒等元，根据 (iii) 引理 3.2，我们有 $\langle -\log|\phi'|, \Psi^{\phi,}_{\epsilon}{}^{z} \rangle \to -\log|\phi'(z)|$ 当 $\epsilon \to 0$时。下一个引理表明，这种收敛关于 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$一致。这用于处理坐标变换公式中出现的 $\log|(\phi^{-1})'|$ 项。

引理 3.7。 若 $V \Subset U$ 是开集且 $\tau > 1$，则

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{z \in V} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left| \left\langle -\log|\phi'|, \Psi^{\phi,z}_\epsilon \right\rangle - (-\log|\phi'(z)|) \right| = 0.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
&\langle -\log|\phi'|, \Psi^{\phi,z}_\epsilon \rangle \\
&\quad = -\int_{\phi^{-1}(B_{\epsilon\log\epsilon^{-1}}(\phi(z)))} \log|\phi'(\omega)| \Psi^{\phi,z}_\epsilon(\omega)\, \mathrm{d}A(\omega) \\
&\quad = -\int_{B_{\epsilon\log\epsilon^{-1}}(\phi(z))} \log|\phi'(\phi^{-1}(w))| \Psi^{\mathrm{id},\phi(z)}_\epsilon(w)\, \mathrm{d}A(w) \qquad (28) \\
&\quad = \int_{B_{\epsilon\log\epsilon^{-1}}(\phi(z))} \left(-\log|\phi'(\phi^{-1}(w))| + \log|\phi'(z)|\right) \Psi^{\mathrm{id},\phi(z)}_\epsilon(w)\, \mathrm{d}A(w) - \log|\phi'(z)|, \qquad (29)
\end{aligned}$$

其中最后一步利用了如下事实：$\int_{B_{\epsilon^{-1}}} \Psi^{\mathrm{id}}_{\epsilon,\phi(z)}(w)\,\mathrm{d}A(w) = 1$。注意，由(28)中所用的变量替换公式得到的项$|(\phi^{-1})'(w)|^2 = 1/|\phi'(\omega)|^2$与$\Psi^{\phi}_{\epsilon,z}(\omega)$的定义中的$|\phi'(\omega)|^2$相互抵消。假设$\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$与$z \in V$，则Koebe四分之一定理蕴含$\phi^{-1}(B_{\epsilon^{-1}}(\phi(z))) \subset B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z)$。因此，

$$\begin{aligned}\sup_{w\in B_{\epsilon\log\epsilon^{-1}}(\phi(z))} \left|-\log|\phi'(\phi^{-1}(w))| + \log|\phi'(z)|\right| &\le \sup_{\omega\in B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z)} \left|-\log|\phi'(\omega)| + \log|\phi'(z)|\right| \\ &= \sup_{\omega\in B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z)} \left|\log\left|\frac{\phi'(\omega)}{\phi'(z)}\right|\right|. \end{aligned} \tag{30}$$

根据畸变估计，若$r := \operatorname{dist}(\partial V, \partial U)$，$z \in V$，且$\omega \in B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(z)$，其中$\epsilon$足够小，使得$4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1} < r$，则

$$\left|\frac{\phi'(\omega)}{\phi'(z)}\right| \in \left[\frac{1-\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}}{(1+\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r})^3}, \frac{1+\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r}}{(1-\frac{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}{r})^3}\right]. \tag{31}$$

结合（29）、（30）和（31）即可证明该引理。 □

以下结果将用于控制（6）中出现的缩放比。

引理 3.8。 对于I的任意紧子区间$(0, \infty)$，

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathfrak{a}_{C\epsilon}}{\mathfrak{a}_\epsilon} = C^{1-\xi Q}$$

在$C \in I$上一致成立。

证明。 文献 [GM21b的推论 111] 证明，当$\xi < \xi_{\mathrm{crit}}$时，$\epsilon \mapsto \mathfrak{a}_\epsilon$是指数为$1-\xi Q$的正则变差函数。事实上，[GM21b的推论 111] 的证明在$\xi \ge \xi_{\mathrm{crit}}$时仍然适用，因为这可由 LFPP 依概率收敛推出（文献$\xi \ge \xi_{\mathrm{crit}}$中在 [DG22b的定理 13]中证明了这一点）。

正则变差的$\epsilon \mapsto \mathfrak{a}_\epsilon$意味着 极限$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathfrak{a}_{C\epsilon}}{\mathfrak{a}_\epsilon} = C^{1-\xi Q}$对任意固定的$C \in (0,\infty)$都成立。一个标准结果是，对于任意正则变差函数，该极限在$(0,\infty)$ [KAB49] 的紧子集上一致收敛（例如，参见 [BGT87，定理 1.21]）。 □

命题 *3.1* 的证明。 应用引理 3.5、3.7 和 3.8 来选取$\epsilon_0 \in (0,1)$使得对每个$\epsilon \in (0,\epsilon_0)$以及每个$z_0 \in W$，以下结论均成立：

$$P\left\{\sup_{z\in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)} \sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} \left|\left\langle h, \Psi^{\phi,z}_\epsilon - \Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\right\rangle\right| > \delta\right\} < 1-p, \tag{32}$$

$$\left|\frac{\mathfrak{a}_{t\epsilon}}{\mathfrak{a}_\epsilon} - t^{1-\xi Q}\right| \le \frac{\delta}{1+\delta}\tau^{1-\xi Q} \ \forall t \in [\tau^{-1},\tau], \tag{33}$$

$$\sup_{z\in V}\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} \left|\langle -\log|\phi'|, \Psi^{\phi,z}_\epsilon\rangle - (-\log|\phi'(z)|)\right| < \delta. \tag{34}$$

注意到，(33) 蕴含

$$(1+\delta)^{-1}t^{1-\xi Q} \le \frac{\mathfrak{a}_{t\epsilon}}{\mathfrak{a}_\epsilon} \le (1+\delta)t^{1-\xi Q} \ \forall t \in [\tau^{-1},\tau]. \tag{35}$$

令$r = \operatorname{dist}(\partial W, \partial V)$。我们可以假设$\epsilon_0$足够小，使得$B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(W) \subset V$，并且

$$\left(\frac{1+r^{-1}2\epsilon_0^{1-\zeta}}{1-r^{-1}2\epsilon_0^{1-\zeta}}\right)^{3(\xi Q-1)} < 1+\delta. \tag{36}$$

根据畸变定理，对于$\epsilon \in (0,\epsilon_0)$、$z_0 \in W$，$\phi \in \Lambda_\tau(V, U)$，以及$\omega \in B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)$，

$$\frac{1-r^{-1}2\epsilon^{1-\zeta}}{(1+r^{-1}2\epsilon^{1-\zeta})^3} \le \left|\frac{\phi'(\omega)}{\phi'(z_0)}\right| \le \frac{1+r^{-1}2\epsilon^{1-\zeta}}{(1-r^{-1}2\epsilon^{1-\zeta})^3}. \tag{37}$$

由此可知，对于每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 以及每个 $z_0 \in W$，以至少 p 的概率，对于每个 $\phi \in \Lambda_\tau(V, U)$ 以及每条分段 C^1 路径 P，在 $B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)$中，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \int_0^1 e^{\xi(h\circ\phi^{-1} + Q\log|(\phi^{-1})'|) * (Z_\epsilon^{-1}\psi_\epsilon p_{\epsilon^2/2})(\phi(P(t)))} |(\phi\circ P)'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1} \int_0^1 e^{\xi\langle h, \Psi_\epsilon^{\phi,P(t)} - \Psi_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{\mathrm{id},P(t)}\rangle} e^{\xi Q(\langle -\log|\phi'|, \Psi_\epsilon^{\phi,P(t)}\rangle + \log|\phi'(P(t))|)} \\
&\qquad \cdot \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}}{\mathfrak{a}_\epsilon} |\phi'(P(t))|^{1-\xi Q} e^{\xi \hat{h}^*_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(P(t))} |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\le e^{\xi\delta} e^{\xi Q\delta} (1+\delta)\, \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1} \int_0^1 \left|\frac{\phi'(P(t))}{\phi'(z_0)}\right|^{1-\xi Q} e^{\xi \hat{h}^*_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(P(t))} |P'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{(by (32), (35), (34))} \\
&\le e^{\xi\delta} e^{\xi Q\delta} (1+\delta)^2\, \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1} \int_0^1 e^{\xi \hat{h}^*_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(P(t))} |P'(t)|\,\mathrm{d}t,. \qquad \text{(by (36), (37))}
\end{aligned}
$$

这就证明了命题陈述中的上界，其中用 $e^{\xi\delta}e^{\xi Q\delta}(1+\delta)^2$ 替代 $1+\delta$。下界的证明类似。

□

4 大尺度下坐标变换后的 LFPP 与 LQG 度量的比较

本节中，我们给出一个多尺度论证，将命题 3.1 中的小尺度路径估计改进为 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\epsilon_\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 与 D_h 之间的全局比较。该论证与 [GM20b 定理 1 、 6], [DG23 定理 1 、 8], [GM21a 第 3], 节以及 [Dev24 第 3], 节中的论证相似，但有一个关键区别：那些证明每次只处理两个度量，而我们必须考虑由所有共形映射 $U \to \phi(U)$ 参数化的无穷多个度量 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D^\epsilon_{h^\epsilon_\phi}$，并且估计必须对所有 ϕ 一致。总体思路是证明，当 ϵ 很小时， $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\epsilon_\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 与 D_h 粗略而言是利普希茨等价的，其利普希茨常数事先可能很大，但关键是不依赖于 ϕ。具体做法是利用命题 3.1，将 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\epsilon_\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 上界为 $\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1} D^{\epsilon/|\phi'(z_0)|}_h$，再利用 LFPP 的几乎必然收敛，将 $\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1} D^{\epsilon/|\phi'(z_0)|}_h$ 与 D_h 进行比较。由于 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\epsilon_\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 与 $\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1} D^{\epsilon/|\phi'(z_0)|}_h$ 的比较仅在小尺度下成立，我们将利用高斯自由场的局部独立性（见下文引理 4.3）证明存在许多环带，在这些环带上小尺度估计成立，再沿这些环带连接路径，从而得到全局 Lipschitz 条件。我们的结果并非真正的利普希茨等价，因为 D_h 是分形的，而度量 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\epsilon_\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 是光滑的；相反，我们将证明一个近似的 Lipschitz 条件：用一种度量测得的小欧几里得球之间的距离，与另一种度量测得的点之间的距离可比。更精确的表述见命题 4.1。这部分论证与 [DG23 定理 1.8], 最为相似，并将在下文第 4.1 节中给出。

我们得到的 Lipschitz 常数可能相当大，因为路径的串联依赖于将穿过窄环域的距离上界估计为横跨该环域距离的某个常数倍（类似于渗流理论中的 RSW 论证）。为了使这一 Lipschitz 条件有用，我们需要 Lipschitz 常数接近 1。我们将使用类似的论证来实现这一点：证明在小尺度上，Lipschitz 常数接近 1。这大致源于以下事实：在 δ 命题 3.1 中， 可以使其接近 0 ，并且 LFPP 收敛到 D_h。与之前的论证类似，我们可以证明存在许多满足这一更优 Lipschitz 条件的环带。关键在于，我们将证明存在足够多的环带，使得任意两点之间的任意一条测地线，都有一个统一为正的比例由包含在这些环带中的线段组成，而在这些环带中，Lipschitz 常数接近 1。测地线的其余线段具有 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\epsilon_\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$-长度和 D_h-长度，其可比性由命题 4.1中的初始 Lipschitz 常数保证。由于包含在“良好环带”中的比例是普适的、与任何参数无关，因此得到的结果是一个全局 Lipschitz 条件，其常数比我们开始时的 1 更接近

开始时的常数。通过反复迭代这一论证，我们可以使该常数任意接近 1 。需要注意的是，我们再次比较的是半径为 $\epsilon^{1-\zeta}$ 的球之间的距离与点之间的距离，并且每一步都需要使 ζ 更接近 0。这一论证类似于 [Dev24 的第 3], 节，而后者又以 [GM21a 的第 3]节为基础。这就是下面第 4.2 节的内容，而该节的主要结果是命题 4.10。

命题 4.10 的一个问题在于，新的 Lipschitz 常数依赖于形如 $\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}$ 的项，这些项来自 (6)。对于固定的 r，由 $\epsilon \mapsto \mathfrak{a}_\epsilon$ 的正则变差，当 ϵ 较小时 $\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}$ 应接近 1，但我们将对 $\zeta \in (0,1)$ 取 $r \approx \epsilon^{1-\zeta}$，并需要 $\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$ 对紧区间中的所有 t 都接近 1（大致而言，对 $x \in U$ 以及作为共形映射的 ϕ，有 $t = 1/|\phi'(x)|$ ）。对 [Dev24，引理 3.11] 的证明稍作表面修改即可表明，存在许多半径 r，使得对紧区间中的所有 t， $\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$ 都接近 1。我们在引理 4.20 中给出精确陈述。

最后，利用第 4.2 节的结果和引理 4.20，我们将证明所有坐标变换后的 LFPP 度量都同时收敛到 D_h，且该收敛在 U的对角线邻域内成立。这将在第 4.3节中完成。

在本节中，我们固定 $\xi < \xi_{\text{crit}}$。

4.1 初始 Lipschitz 条件

固定 $\xi < \xi_{\text{crit}}$。本节的目标是证明以下结果。

命题 4.1。固定 $\xi > 0$, $\tau > 1$，连通开集 $W \Subset V \Subset U$和 ζ_+， $\zeta \in (0,1)$ 满足 $1-\zeta_+ < \frac{1}{2}(1-\zeta)$。存在 $C_0 = C_0(\tau,\zeta) > 0$，使得以下结论成立。当 $\epsilon \to 0$ 时，对所有 $z, w \in W$，该结论以概率 $1 - O_\epsilon(\epsilon^{2(1-\zeta)})$ 成立，

$$\begin{aligned}
&\sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z)), \phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w)); \phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(W))\right) \\
&\qquad \le C_0 D_h(z,w;W), \qquad (38)\\
&D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z), B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w); B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(W)\right) \\
&\qquad \le C_0 \inf_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon (\phi(z), \phi(w); \phi(W)). \qquad (39)
\end{aligned}$$

注意，常数 C_0 可能很大。它将作为初始条件，用于迭代论证，以在第 1 节 4.2 中证明一个更强的 Lipschitz 条件，其 Lipschitz 常数接近于 1 。

命题 4.1 的证明分两步进行。首先，我们将证明命题 4.1 的以下较弱版本。

引理 4.2 $\tau > 1$ $W \Subset V \Subset U$ ζ_+ $\zeta \in (0,1)$ $1-\zeta_+ <$. 固定连通 $\frac{1}{2}(1-\zeta)$ $C_0 > 0$ $\epsilon \in (0,1)$ 开集 和 ，以及 ()， 满足()。存在 使得以下结论成立。对于每个()，选取 $\mathcal{R}_\epsilon \subset (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$，满足# $\mathcal{R}_\epsilon \ge \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$。当 $\epsilon \to 0$ 趋于无穷时，概率为$1 - O_\epsilon(\epsilon^{2(1-\zeta)})$，对所有 $z, w \in W$，

$$\begin{aligned}
&\sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z)), \phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w)); \phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(W))\right) \\
&\qquad \le C_0 \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} D_h(z,w;W), \qquad (40)\\
&D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z), B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w); B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(W)\right) \\
&\qquad \le C_0 \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} \inf_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon (\phi(z), \phi(w); \phi(W)). \qquad (41)
\end{aligned}$$

证明引理4.2后，我们将说明集合 $\mathcal{R}_\epsilon$ 可以选取为使缩放比项 $\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$ 和 $\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}$ 都是关于 ϵ的有界函数。这便推出命题 4.1。

证明引理4.2 的关键是如下结论，它是 [GM20b引理 3.1]的一个特例。

引理 4.3. 固定 $0 < s_1 < s_2 < 1$ 与 $x \in \mathbb{C}$。设$(r_k)_{k=1}^{\infty}$ 为正数的递减序列，使得
$r_{k+1}/r_k \le s_1$ k E_{r_k} $_{k=1}^{\infty}$ E_{r_k} ∈对每一个成立，并设()为事件，
$\sigma\{\ h-h_{r_k}\ x\ \ |_{\mathbb{A}_{s_1 r_k\ s_2 r_k}\ x}\ \}$ k $a>0$ $p=p\ a\ s_1\ s_2\ \in\ 0,1$
使得$((\,))_{.()}$对每一个成立。则对每一个，存在$(,)\,()$与 $c=c(a,s_1,s_2)>0$，使得若 $P[E_{r_k}]\ge p$对所有 $k\in\mathbb{N}$成立，则

$$P\{E_{r_k}\ \textit{occurs for at least one } k\le K\}\ \ge\ 1-ce^{-aK}\ \forall K\in\mathbb{N}.$$

我们将把引理 4.3 应用于以下事件。

定义 4.4。 对于开集 $V \Subset U$, $C>1$, $\epsilon\in(0,1)$, $\tau>1$, $x\in V$, $r>0$ 且满足 $B_{2r}(x)\subset U$，令 $E_{r,\epsilon}(x) = E_{r,\epsilon}(x;\,C,V,U,\tau)$ 为如下事件：

$$\begin{aligned}
&\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}\left(\textit{around }\phi\left(\mathbb{A}_{\frac{3r}{4},\frac{7r}{4}}(x)\right)\right)\\
&\qquad\le\ C\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}D_h\left(\partial B_{\frac{3r}{4}}(x),\partial B_r(x)\right),\\
&D_h\left(\textit{around }\mathbb{A}_{\frac{3r}{4},\frac{7r}{4}}(x)\right)\\
&\qquad\le\ C\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}\inf_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}\left(\phi\left(\partial B_{\frac{3r}{4}}(x)\right),\phi\left(\partial B_r(x)\right)\right).
\end{aligned}$$

_定义 $\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$ ^{1} 4.4 中的比值 源自 LFPP 缩放关系（6）。在确立 $E_{r,\epsilon}(x)$的可测性之前，我们先证明，在定义 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$ 4.4 中，对共形映射取上确界和下确界时，可以限制在一个可数集上。

引理 4.5。 存在一个（确定性的）可数集 $\lambda_\tau(V,U)\subset\Lambda_\tau(V,U)$ 使得几乎必然，对于每个 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$，每个 $\epsilon\in(0,1)$，都存在一个序列 $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}\subset\lambda_\tau(V,U)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{P\subset V}\frac{\mathrm{Len}(\phi\circ P;\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi})}{\mathrm{Len}(\phi_n\circ P;\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^{\epsilon}_{h\circ\phi_n^{-1}+Q\log|(\phi_n^{-1})'|})}\ =\ 1,$$

其中上确界取遍所有包含于 V 中的非平凡分段 C^1 路径 P。

证明。 $C^0(\overline{V},\mathbb{C})$ 和 $C^1(\overline{V}\times B_{4\tau\epsilon\text{对数}\ \epsilon^{-1}}(V)\ \mathbb{R})$ 是可分赋范向量空间，其范数分别为$\|\cdot\|_{C^0}$和 $\|\cdot\|_{C^0}+\|\nabla\cdot\|_{C^0}$。因此， $C^0(\overline{V},\mathbb{C})\times C^1(\overline{V}\times B_{4\tau\epsilon\text{对数}\ \epsilon^{-1}}(V)\ \mathbb{R})$ 关于范数 (f,g) $\mapsto\|f\|_{C^0}+\|g\|_{C^0}+\|\nabla g\|_{C^0}$ 是可分的。集合

$$\left\{\overline{V}\times\overline{V}\times\overline{B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(V)}\ni(x,z,w)\to(\phi'(x),\Psi_\epsilon^{\phi,z}(w)):\phi\in\Lambda_\tau(V,U)\right\}\tag{42}$$

包含于 $C^0(\overline{V}、\mathbb{C})\times C^1(\overline{V}\times B_{4\tau\epsilon\text{对数}\ \overline{\epsilon^{-1}(V)\ \mathbb{R}}}$中，因此存在一个可数子集 $\lambda_\tau(V、U)\subset\Lambda_\tau(V、U)$ 使得

$$\left\{\overline{V}\times\overline{V}\times\overline{B_{4\tau\epsilon\log\epsilon^{-1}}(V)}\ni(x,z,w)\to(\phi'(x),\Psi_\epsilon^{\phi,z}(w)):\phi\in\lambda_\tau(V,U)\right\}$$

在范数 42 下稠密于 $(f,\ g)\ \mapsto\|f\|_{C^0}+\|g\|_{C^0}+\|\nabla g\|_{C^0}$。根据 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge}D_h^\epsilon$ 的定义，引理即得，因为对于每个 $\epsilon\in(0,\ 1)$, ϕ, $\Phi\in\Lambda_\tau(V,\ U)$，以及 $z\in V$，

$$\begin{aligned}
&\left|\langle h,\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi_\epsilon^{\Phi,z}\rangle\right|\\
&\qquad\le\ \|h\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(V)}\|\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi_\epsilon^{\Phi,z}\|_{\mathcal{H}_0^1(V)}\\
&\qquad\le\ \sqrt{\mathrm{area}(V)}\|h\|_{\mathcal{H}_0^{-1}(V)}\left(\|\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi_\epsilon^{\Phi,z}\|_{C^0(\overline{V})}+\|\nabla(\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi_\epsilon^{\Phi,z})\|_{C^0(\overline{V})}\right),\\
&\left|\langle-\log|\phi'|,\Psi_\epsilon^{\phi,z}\rangle-\langle-\log|\Phi'|,\Psi_\epsilon^{\Phi,z}\rangle\right|\\
&\qquad=\ \left|\langle-\log\left|\frac{\phi'}{\Phi'}\right|\Psi_\epsilon^{\phi,z}\rangle+\langle-\log|\Phi'|,\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi_\epsilon^{\Phi,z}\rangle\right|\\
&\qquad\le\ \frac{\tau^2\mathrm{area}(V)}{Z_\epsilon\epsilon^2}\left[\log(1+\tau\|\phi'-\Phi'\|_{C^0(\overline{V})})\vee\log\frac{1}{1-\tau\|\phi'-\Phi'\|_{C^0(\overline{V})}}\right]
\end{aligned}$$

$$+\log(\tau)\|\Psi_\epsilon^{\phi,z}-\Psi_\epsilon^{\Phi,z}\|_{C^0(\overline{V})},$$
$$\left|\frac{|\phi'(z)|}{|\Phi'(z)|}-1\right| \le \tau\|\phi'-\Phi'\|_{C^0(\overline{V})},$$

其中我们将 h 视为索伯列夫空间 $\mathcal{H}_0^{-1}$ [BP25 定理 1 中的随机元素，45] 该空间配备与索伯列夫范数 $\|f\|_{\mathcal{H}_0^1}$ 对应的对偶范数：$=(\|f\|_{L^2}^2+\|\nabla f\|_{L^2}^2)^{1/2}$。 □

引理 4 6 $\epsilon \in 0,1 \quad r \in 4\epsilon \quad \epsilon^{-1}\ 1 \quad x \in V \quad E_{r\,\epsilon}\ x\ \in \sigma\{\ h-..$对于每个 ()、(log ,) 和 ，都有 ,() $h_{4r}\ x\ \ |_{\mathbb{A}_{r/2\ 2r}\ x}\}$ (()).()。

证明。 对 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 取上确界和下确界时，可根据 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 引理 4.5将其限制在一个可数集上，因此，只要知道对每个 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$，以下事件

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\text{around }\phi\left(\mathbb{A}_{\frac{3r}{4},\frac{7r}{4}}(x)\right)\right) \le C\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}D_h\left(\partial B_{\frac{3r}{4}}(x),\partial B_r(x)\right), \tag{43}$$

$$D_h\left(\text{around }\mathbb{A}_{\frac{3r}{4},\frac{7r}{4}}(x)\right) \le C\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi\left(\partial B_{\frac{3r}{4}}(x)\right),\phi\left(\partial B_r(x)\right)\right) \tag{44}$$

由 $(h-h_{4r}(x))|_{\mathbb{A}_{r/2,2r}(x)}$ 决定。将 $-h_{4r}(x)$ 加到 h 上，会使 (43) 和 (44) 中的每个度量都缩放 $e^{-\xi h_r(x)}$，因此可以假设 h 已归一化，使得 $h_{4r}(x)=0$。由于 $\frac{7r}{4}+\epsilon\log\epsilon^{-1}<2r$ 且 $\frac{3r}{4}-\epsilon\log\epsilon^{-1}>\frac{r}{2}$，根据引理 2.1 的第 2 条，(43) 和 (44) 的可测性成立。 □

为了证明定义 4.4 中的事件以足够高的概率发生，从而能够应用引理4.3，我们将使用命题 3.1 和引理 2.1 ，将问题归结为比较固定环域周围的 $\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}D_h^{\epsilon/|\phi'}(\quad x\ |\ )$-距离与穿过固定环域的 D_h-距离。由于指标$\epsilon/|\phi'(x)|$ 取决于 ϕ，我们需要以下结果来同时控制无穷多个 ϵ 取值下环带周围的 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon$-距离。

引理 4.7. 对于任意 $p\in(0,1)$ 和 $0<\alpha<\beta<\infty$，存在 $c,\epsilon_0>0$，使得其概率至少为 p，

$$D_h\left(around\ \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right)\vee\sup_{\epsilon\in(0,\epsilon_0)}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon\left(around\ \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right) \le c.$$

证明。 令 $\eta:=\frac{\alpha+\beta}{2}$。思路是在 $\partial B_\eta(0)$ 上选取足够稠密的有限点集，使得沿圆周逆时针方向相邻两点之间的 D_h-距离小于 $D_h(\partial B_\eta(0)\partial\mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0))$。然后，我们可以利用长度空间性质将这些路径首尾相接，构造出一条绕着 $\mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)$ 的路径，其 D_h-长度至多为 $D_h(\partial B_\eta(0)\partial\mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0))$ 乘以一个随机整数。利用 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon$ 到 D_h的收敛，对于每个足够小的 ϵ，都可以使用同一组点为 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon$ 构造类似的路径。

Let

$$R := D_h(\partial B_\eta(0),\partial\mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)) \wedge D_h([-\beta,\beta],[-\beta-\alpha\mathrm{i}/2,\beta-\alpha\mathrm{i}/2])\wedge D_h([-\beta,\beta],[-\beta+\alpha\mathrm{i}/2,\beta+\alpha\mathrm{i}/2]).$$

定义 $q_1:=0$ 和

$$q_{j+1} := \sup\left\{q\in[q_j,\pi]: D_h(\eta e^{\mathrm{i}q_j},\eta e^{\mathrm{i}q})<R\right\}.$$

于是，$(q_j)_{j=1}^\infty$是一个由上方的 π 所界的递增序列，因此收敛到某个极限 $L=\sup\{q_j\}_{j=1}^\infty$。由连续性，$D_h(\eta e^{\mathrm{i}q_j},\eta e^{\mathrm{i}L})\to 0$，因此对于所有充分大的 j，都有 $D_h(\eta e^{\mathrm{i}q_j},\eta e^{\mathrm{i}L})<R$。固定这样一个指标 j。若 $L<\pi$，则由连续性再次可知，对于足够接近 L 的 $q\in(L,\pi)$，$D_h(\eta e^{\mathrm{i}q_j},\eta e^{\mathrm{i}q})<R$，这与 $L=\sup\{q_j\}_{j=1}^\infty$矛盾。因此 $L=\pi$，并且对于所有充分大的 j，都有 $D_h(\eta e^{\mathrm{i}q_j},-\eta)<R$，例如取 $j\ge J^+$。令 $u_j^+:=\eta e^{\mathrm{i}q_j}$（$j\le J^+$），并令 $u_{J^++1}^+:=-\eta$。由长度空间性质及 u_j^+ 的定义可知，对于每个 $j\le J^+$，都存在一条从 u_j^+ 到 u_{j+1}^+ 的路径，其 D_h-长度小于 R。特别地，每条这样的路径都不能离开 $\mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\cap\{z\in\mathbb{C}:\Im[z]\ge-\alpha/2\}$。将这些路径首尾相接，我们

得到一条路径 P^+，它位于 $\mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0) \cap \{z \in \mathbb{C}\colon \Im[z] \geq -\alpha/2\}$ 内，从 η 到 $-\eta$，且其 D_h-长度不超过 $J^+ D_h(\partial B_\eta(0)\, \partial \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0))$。对环域的下半部分作类似处理，我们可以逆时针绕着 $\partial B_\eta(0)$ 选取点 $u_1^- = -\eta$, $u_2^-, \ldots, u_{J^-+1}^- = \eta$，使得对于所有 $j \leq J^-$，都有 $D_h(u_j^-, u_{j+1}^-) < R$；像之前那样，将 u_j^- 与 u_{j+1}^- 之间的路径首尾相接，便得到一条从 $-\eta$ 到 η、位于 $\mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0) \cap \{z \in \mathbb{C}\colon \Im[z] \leq \alpha/2\}$ 内的路径 P^-，其 D_h-长度不超过 $J^- D_h(\partial B_\eta(0)\, \partial \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0))$。将 P^+ 和 P^- 首尾相接可得

$$D_h\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right) \leq \left(J^+ + J^-\right) D_h\left(\partial B_\eta(0), \partial \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right). \tag{45}$$

为得到关于 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon$ 的类似结果，定义

$$\begin{aligned} R_\epsilon \coloneqq\ & \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(\partial B_\eta(0), \partial \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right) \wedge \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left([-\beta, \beta], [-\beta - \alpha \mathrm{i}/2, \beta - \alpha \mathrm{i}/2]\right) \\ & \wedge \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left([-\beta, \beta], [-\beta + \alpha \mathrm{i}/2, \beta + \alpha \mathrm{i}/2]\right) \wedge D_h\left(\partial B_\eta(0), \partial \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right), \end{aligned}$$

并注意到 $R_\epsilon \to R$ 几乎必然成立。利用 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon$ 收敛到 D_h 的几乎必然收敛性，我们可以找到 ϵ_0，使得

$$\mathbf{P}\left\{\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(u_j^\pm, u_{j+1}^\pm\right) < R_\epsilon\ \forall j \leq J^\pm\ \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)\right\} \geq 1 - \frac{1-p}{2}. \tag{46}$$

然后像之前一样利用长度空间性质可得，在（46）中的事件发生时，对每个 $\epsilon < \epsilon_0$,

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right) \leq \left(J^+ + J^-\right) D_h\left(\partial B_\eta(0), \partial \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right). \tag{47}$$

通过选取足够大的 c，使得，引理的结论由（45）、（46）和（47）得出

$$\mathbf{P}\left\{\left(J^+ + J^-\right) D_h\left(\partial B_\eta(0), \partial \mathbb{A}_{\alpha,\beta}(0)\right) \leq c\right\} \geq 1 - \frac{1-p}{2}.$$

□

引理*4.8*。固定开集 $W \Subset V \Subset U$，$\tau > 1$，以及 $p, \zeta, \zeta_+ \in (0,1)$，其中 $\zeta < \zeta_+$。存在 $\epsilon_0 = \epsilon_0(p, V, W, \tau, \zeta, \zeta_+) \in (0,1)$ 和 $C_0 = C_0(p) > 1$，使得对于每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$、每个 $x \in W$ 以及每个 $r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+})$，$P[E_{r,\epsilon}(x; C_0)] \geq p$。

证明。根据命题 ϵ_0 选择 3.1，使得 $\delta = 1$，ζ_+ 替代 ζ，并且 $1 - \frac{1-p}{4}$ 替代 p。使用 4 引理 2.1 来缩小 ϵ_0，从而以概率 $1 - \frac{1-p}{4}$，

$$\sup_{z \in V} \left| h_\epsilon^*(z) - \hat{h}_\epsilon^*(z) \right| < 1\ \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0^\zeta \tau). \tag{48}$$

利用 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon$ 到 D_h的几乎必然收敛，我们可以减小 ϵ_0 并找到 $c_0 > 0$，使得概率至少为$1 - \frac{1-p}{4}$，

$$D_h\left(\partial B_{3/4}(0), \partial B_1(0)\right) \wedge \inf_{\epsilon \in (0, \epsilon_0^\zeta \tau)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(\partial B_{3/4}(0), \partial B_1(0)\right) \geq c_0^{-1}. \tag{49}$$

利用引理4.7，我们可以缩小 ϵ_0 并找到 $c_1 > 0$，使得概率至少为 $1 - \frac{1-p}{4}$ ，

$$D_h\left(\text{around } \mathbb{A}_{3/4,7/4}(0)\right) \vee \sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0^\zeta \tau)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(\text{around } \mathbb{A}_{3/4,7/4}(0)\right) \leq c_1. \tag{50}$$

由此可知，若 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$、$r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+})$ 且 $x \in W$，那么以至少 p 的概率，

$$\begin{aligned} & \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\text{around } \phi\left(\mathbb{A}_{\frac{3r}{4}, \frac{7r}{4}}(x)\right)\right) \\ & \leq 2\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(\text{around } \mathbb{A}_{\frac{3r}{4}, \frac{7r}{4}}(x)\right) && \text{(Proposition 3.1)} \\ & \leq 2e^\xi \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1} D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(\text{around } \mathbb{A}_{\frac{3r}{4}, \frac{7r}{4}}(x)\right) && \text{(by (48))} \\ & = 2e^\xi \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}{r^{\xi Q} \mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1} D_{h(r\cdot + x) - h_r(x)}^{\epsilon/r|\phi'(x)|}\left(\text{around } \mathbb{A}_{\frac{3}{4}, \frac{7}{4}}(0)\right) && \text{(by (6))} \\ & \leq 2e^\xi \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}{r^{\xi Q} \mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} c_1 && \text{(by (50))} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2e^{\xi}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}c_1c_0D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\partial B_{3/4}(0),\partial B_1(0)\right) && \text{(by (49))}\\
&= 2e^{\xi}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}c_1c_0D_h\left(\partial B_{\frac{3r}{4}}(x),\partial B_r(x)\right), && \text{(axioms III, IV)}\\
&D_h\left(\text{around }\mathbb{A}_{\frac{3r}{4},\frac{7r}{4}}(x)\right)\\
&= r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\text{around }\mathbb{A}_{\frac{3}{4},\frac{7}{4}}(0)\right) && \text{(axioms III, IV)}\\
&\leq r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)c_1} && \text{(by (50))}\\
&\leq r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}c_1c_0\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}D^{\epsilon/r|\phi'(x)|}_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\partial B_{\frac{3}{4}}(0),\partial B_1(0)\right) && \text{(by (49))}\\
&= \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}}c_1c_0\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}D^{\epsilon/|\phi'(x)|}_h\left(\partial B_{\frac{3r}{4}}(x),\partial B_r(x)\right) && \text{(by (6))}\\
&\leq e^{\xi}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}}c_1c_0\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}\hat{D}^{\epsilon/|\phi'(x)|}_h\left(\partial B_{\frac{3r}{4}}(x),\partial B_r(x)\right) && \text{(by (48))}\\
&\leq 2e^{\xi}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}}c_1c_0\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}\hat{D}^{\epsilon}_{h^{\phi}}\left(\phi\left(\partial B_{\frac{3r}{4}}(x)\right),\phi\left(\partial B_r(x)\right)\right). && \text{(Proposition 3.1)}
\end{aligned}
$$

于是，引理在 $C_0 := 2e^{\xi}c_1c_0$ 的条件下得证。 □

引理的证明 *4.2*。策略与以下证明类似： [GM20b，定理 1。6] 以及 [DG23，定理 1。8]；引理 4.3 表明，存在许多环带，其中定义 4.4中的事件会发生。沿着这些环带周围的路径依次连接起来，我们便能得到坐标变换后的 LFPP 度量与 D_h之间的近似利普希茨等价。

根据引理选择 p和 c，4.3其中 $s_2 = 1/8$， $s_1 = 1/2$，以及 $a = 24\log 8$。根据引理选择 ϵ_0和 C_0，4.8在此 p的选择下，并取一个开 $\tilde{W}$，使得 $W \Subset \tilde{W} \Subset V$代替 W。由于$1-\zeta_+ < \frac{1}{2}(1-\zeta)$，因此可得

$$
\#\mathcal{R}_\epsilon \;>\; \frac{1}{3}\#\left(\{8^{-k}\}_{k=1}^{\infty}\cap\left(\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+}\right)\right) \;\geq\; \frac{1-\zeta}{6\log 8}\log\epsilon^{-1}-\frac{1}{3}. \tag{51}
$$

在引理 4.3的符号中，令 $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ 表示以下元素

$$
\left\{4\cdot 8^{-k} : 8^{-k}\in(0,\epsilon^{1-\zeta})\cup\mathcal{R}_\epsilon\right\},
$$

˜和 $E_{r_k} = E_{r_k/4,\,\epsilon}(x;\;C_0)$ 对于固定的 $x\in W$ 当 $r_k/4\in\mathcal{R}_\epsilon$ 且 E_{r_k} 否则为平凡事件，其中 $E_{r,\,\epsilon}(x;\;C_0)$ 如定义 4.4中所定义。则引理 4.3 与（51）一起推出

$$
\mathbf{P}\left\{\exists r\in\mathcal{R}_\epsilon \text{ such that } E_{r,\epsilon}(x;C_0) \text{ occurs}\right\} \;\geq\; 1-e^{8\log 8}c\epsilon^{4(1-\zeta)}.
$$

令 F_ϵ表示如下事件：对于每个 $x\in\tilde{W}\cap(\frac{\epsilon^{1-\zeta}}{8}\mathbb{Z}^2)$，存在 $r\in\mathcal{R}_\epsilon$使得 $E_{r,\,\epsilon}(x;\;C_0)$发生。于是由并集界可知，$\mathbf{P}[F_\epsilon] = 1-O(\epsilon^{2(1-\zeta)})$，其中大-$O$常数取决于 V。

现在假设 F_ϵ发生，固定满足$|z-w|>4\epsilon^{1-\zeta_+}$的 z、$w\in W$，固定$\phi\in\Lambda_\tau(V$、$U)$，并固定一条从 z到 w的 D_h-长度参数化路径 $P\subset W$，其长度至多为 $2D_h(z$、$w;\;W)$。定义$t_0=0$，并按如下方式归纳定义 t_j。令 t_j为 P在 t_{j-1}之后首次离开$B_{r_{j-1}}(x_{j-1})$的时间，然后选择 $x_j\in\frac{\epsilon^{1-\zeta}}{8}\mathbb{Z}^2$和 $r_j\in\mathcal{R}_\epsilon$使得 $P(t_j)\in B_{r_j/4}(x_j)$，$E_{r_j,\,\epsilon}(x_j$、$C_0)$发生。若不存在这样的时间 t_j，则令 $t_j := \mathrm{Len}(P;\;D_h)$。令 J表示满足 $t_{J+1}=\mathrm{Len}(P;\;D_h)$的最小索引。

假设 $j<J$。那么 $P(t_j)\in W$且 $|P(t_j)-x_j|<r_j/4$，所以$\overline{B_{\frac{7r_j}{4}}(x_j)}\subset B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(W)$。此外，由于 $P(t_j)\in B_{r_j/4}(x_j)$且 $P(t_{j+1})\in\partial B_{r_j}(x_j)$，我们知道 P在时间 t_j和 t_{j+1}之间穿过$\mathbb{A}_{\frac{3r_j}{4},\,r_j}(x_j)$。由此可得

$$
D_h\left(\partial B_{\frac{3r_j}{4}}(x_j),\partial B_{r_j}(x_j)\right) \;\leq\; \mathrm{Len}\left(P|_{[t_j,t_{j+1}]};D_h\right) \;=\; t_{j+1}-t_j. \tag{52}
$$

根据 $E_{r_j,\ \epsilon}(x;\ C_0)$ 的定义，我们可以找到一条曲线 π_j，它将 $\mathbb{A}_{\frac{3r_j}{4},\ \frac{7r_j}{4}}(x_j)$ 的内边界和外边界分隔开，且4、4

$$\operatorname{Len}\left(\phi\circ\pi_j,\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\right)\ \le\ C_0\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r_j\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r_j^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r_j}}D_h\left(\partial B_{\frac{3r_j}{4}}(x_j),\partial B_{r_j}(x_j)\right). \tag{53}$$

根据 [DG23，引理 3。4]，$\cup_{j<J}\pi_j$ 包含一条从 $B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z)$ 到 $B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w)$。因此 e,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z)),\phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w));\phi(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(W))\right)\\
&\quad\le\ \sum_{j=0}^{J-1}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\text{around }\phi\left(\mathbb{A}_{\frac{3r_j}{4},\frac{7r_j}{4}}(x_j)\right)\right)\\
&\quad\le\ \sum_{j=0}^{J-1}C_0\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r_j\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r_j^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r_j}}D_h\left(\partial B_{\frac{3r_j}{4}}(x_j),\partial B_{r_j}(x_j)\right) &&\text{(by (53))}\\
&\quad\le\ C_0\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}\sum_{j=0}^{J-1}(t_{j+1}-t_j) &&\text{(by (52))}\\
&\quad\le\ 2C_0\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}D_h\left(z,w;W\right).
\end{aligned}$$

对 $\phi\in\Lambda_\tau(V,\ U)$ 取上确界即可证明（40），其中用 $2C_0$ 代替 C_0。类似地可证明（41）。 □

引理 4 9 $\mathcal{R}_\epsilon\ \subset\ \epsilon^{1-\zeta}\ \epsilon^{1-\zeta_+}\ \cap\{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}_\epsilon\ >\ \frac{1}{3}$ $\epsilon^{1-\zeta}\ \epsilon^{1-\zeta_+}\ \cap$..存在(,)使得##((,))满足 $\{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$

$$\limsup_{\epsilon\to0}\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}\ <\ \infty, \tag{54}$$

$$\limsup_{\epsilon\to0}\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}\ <\ \infty. \tag{55}$$

证明。证明方法与 [DG23, 引理 3.5], 类似，不同之处在于，该引理对每个 ϵ 找到一大组半径 r，使比值 $\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r}}$ 不会太大；而我们需要找到一大组半径 r，使得当 t 在某个紧区间内变化时，所有比值 $\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}$ 都不会太大。思路是，如果存在许多 r 的取值，使得至少对某个 t 的取值，$\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}$ 非常小或非常大，那么引理 4.2 蕴含 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge}D_h^\epsilon$ 和 D_h 满足（38）或（39），且常数 C_0 严格小于 1。这与 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon$ 收敛到 D_h 矛盾。

为使这一论证严谨，设

$$\mathcal{S}_\epsilon\ :=\ \left\{\mathcal{R}\subset(\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+})\cap\{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}}:\#\mathcal{R}>\frac{2}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+})\cap\{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})\right\}$$

and

$$\begin{aligned}
X_\epsilon^+\ &:=\ \min_{\mathcal{R}\in\mathcal{S}_\epsilon}\sup_{r\in\mathcal{R}}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}},\\
Y_\epsilon^+\ &:=\ \min_{\mathcal{R}\in\mathcal{S}_\epsilon}\sup_{r\in\mathcal{R}}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}},\\
X_\epsilon^-\ &:=\ \min_{\mathcal{R}\in\mathcal{S}_\epsilon}\sup_{r\in\mathcal{R}}\inf_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}},\\
Y_\epsilon^-\ &:=\ \min_{\mathcal{R}\in\mathcal{S}_\epsilon}\sup_{r\in\mathcal{R}}\inf_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}.
\end{aligned}$$

假设引理不成立，并设 C_0 如引理 4.2 所述。于是存在一个子序列 $\mathcal{E}$，使得对于所有 $\epsilon \in \mathcal{E}$，都有 $X_\epsilon^+ \vee Y_\epsilon^+ > 4(C_0+1)$。事实上，如果对于所有充分小的 $\epsilon \in (0,1)$，都有 $X_\epsilon^+ \vee Y_\epsilon^+ \le 4(C_0+1)$，那么令 $\mathcal{R}_\epsilon$ 为 X_ϵ^+ 的一个极小化子与 Y_ϵ^+ 的一个极小化子的交集，则集合 $\mathcal{R}_\epsilon$ 的基数为 $> \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$，且满足 (54) 和 (55)，这就导致矛盾。

根据引理3.8，存在 $\epsilon_0 \in (0,1)$ 使得对所有 $\epsilon \in (0, \tau\epsilon_0^\zeta)$ 以及所有 $C \in [\tau^{-2}, \tau^2]$，

$$\frac{\mathfrak{a}_{\epsilon C}}{\mathfrak{a}_\epsilon} \ge \frac{1}{2} C^{1-\xi Q}.$$

这意味着，对所有 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$、所有 $r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+})$，以及所有 $s,t \in [\tau^{-1}, \tau]$，

$$\frac{\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}}{\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon s}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon s/r}^{-1}}} = \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon s}}{\mathfrak{a}_{\epsilon t}} \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}}{\mathfrak{a}_{\epsilon s/r}} = \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon t(s/t)}}{\mathfrak{a}_{\epsilon t}} \frac{\mathfrak{a}_{(\epsilon s/r)(t/s)}}{\mathfrak{a}_{\epsilon s/r}} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t}\right)^{1-\xi Q} \frac{1}{2}\left(\frac{t}{s}\right)^{1-\xi Q} = \frac{1}{4}, \tag{56}$$

$$\frac{\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}}{\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon s/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon s}^{-1}}} = \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon t}}{\mathfrak{a}_{\epsilon s}} \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon s/r}}{\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}} = \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon s(t/s)}}{\mathfrak{a}_{\epsilon s}} \frac{\mathfrak{a}_{(\epsilon t/r)(s/t)}}{\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{t}{s}\right)^{1-\xi Q} \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t}\right)^{1-\xi Q} = \frac{1}{4}. \tag{57}$$

结合（56）和（57），再利用 $X_\epsilon^+ \vee Y_\epsilon^+ > 4(C_0+1)$ 对所有 $\epsilon \in \mathcal{E}$ 成立，可得对所有 $\epsilon \in \mathcal{E} \cap (0, \epsilon_0)$，有 $X_\epsilon^- \vee Y_\epsilon^- > C_0 + 1$。因此，对每个 $\epsilon \in \mathcal{E} \cap (0, \epsilon_0)$，以下集合中至少有一个

$$\mathcal{R}_\epsilon^+ := \left\{ r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}} : \inf_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} > C_0 + 1 \right\}, \tag{58}$$

$$\mathcal{R}_\epsilon^- := \left\{ r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}} : \inf_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} > C_0 + 1 \right\}, \tag{59}$$

基数为 $> \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$。当 $\epsilon \in \mathcal{E} \cap (0, \epsilon_0)$ 时令 $\mathcal{R}_\epsilon$ 等于 $\mathcal{R}_\epsilon^+$，且 $\#\mathcal{R}_\epsilon^+ > \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$；当 $\epsilon \in \mathcal{E} \cap (0, \epsilon_0)$ 时令 $\mathcal{R}_\epsilon$ 等于 $\mathcal{R}_\epsilon^-$，且 $\#\mathcal{R}_\epsilon^+ \le \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$；并在 $\epsilon \notin \mathcal{E} \cap (0, \epsilon_0)$ 时任意定义 $\mathcal{R}_\epsilon$。再取开集 $W = \mathbb{D}$, $V = 2\mathbb{D}$, $U = 3\mathbb{D}$。我们得到，随着 $\epsilon \to 0$，其概率至少为 $1 - O_\epsilon(\epsilon^{2(1-\zeta)})$；对所有 $z, w \in \mathbb{D}$，

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_h^\epsilon \left(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z), B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w); B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(\mathbb{D})\right) \le C_0 \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} D_h(z, w; \mathbb{D}), \tag{60}$$

$$D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z), B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w); B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}\mathbb{D})\right) \le C_0 \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_h^\epsilon(z, w; \mathbb{D}). \tag{61}$$

集合 $\{\epsilon \in \mathcal{E} \cap (0, \epsilon_0) : \mathcal{R}_\epsilon = \mathcal{R}_\epsilon^+\}$ 或 $\{\epsilon \in \mathcal{E} \cap (0, \epsilon_0) : \mathcal{R}_\epsilon = \mathcal{R}_\epsilon^-\}$ 中至少有一个是无限集。假设前者是无限集，并将其记为 $\mathcal{E}'$。那么由 (61) 以及 $\mathcal{R}_\epsilon = \mathcal{R}_\epsilon^+$ 对所有 $\epsilon \in \mathcal{E}'$ 成立这一事实可知，以概率 $1 - O_\epsilon(\epsilon^{2(1-\zeta)})$ 当 $\epsilon \to 0$ 沿着 $\mathcal{E}'$ 时，

$$D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z), B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w); B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(\mathbb{D})\right) \le \frac{C_0}{C_0+1} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_h^\epsilon(z, w; \mathbb{D}) \ \forall z, w \in \mathbb{D}. \tag{62}$$

对稀疏子序列 $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}'$ 应用 Borel-Cantelli 引理可知，(62) 几乎必然对所有 z、$w \in \mathbb{D}$ 以及所有充分小的 $\epsilon \in \mathcal{E}''$ 成立。固定 $R > 0$，使得对所有 z、$w \in B_R(0)$，$D_h(z, w) < D_h(z, \partial\mathbb{D})$，且其概率至少为 $1 - 2$；于是，以至少 $1 - 2$ 的概率，对所有充分小的 ϵ，

$$D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(0), B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(R/2)\right) \le \frac{C_0}{C_0+1} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_h^\epsilon(0, R/2).$$

这是不可能的，因为左边依连续性收敛到 $D_h(0, R/2)$，而右边收敛到 $\frac{C_0}{C_0+1} D_h(0, R/2) < D_h(0, R/2)$。

对于 $\mathcal{E}' := \{\epsilon \in \mathcal{E} \cap (0,\epsilon_0) : \mathcal{R}_\epsilon = \mathcal{R}_\epsilon^-\}$ 为无穷大的情形，论证类似。我们取一个子序列$\mathcal{E}''$，使得几乎必然，对于所有足够小的 $\epsilon \in \mathcal{E}''$，

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_h^\epsilon \left(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(z), B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(w); B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(\mathbb{D})\right) \leq \frac{C_0}{C_0+1} D_h(z,w;\mathbb{D}) \ \forall z,w \in \mathbb{D}.$$

那么，当 $R>0$ 足够小时，以至少 $1-2$ 的概率，对所有足够小的 $\epsilon \in \mathcal{E}''$，

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_h^\epsilon \left(B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(0), B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(R/2)\right) \leq \frac{C_0}{C_0+1} D_h(0,R/2).$$

但左边收敛到 $D_h(0,R/2) > \frac{C_0}{C_0+1} D_h(0,R/2)$，矛盾。 □

命题的证明 *4.1*。设 $\mathcal{R}_\epsilon$ 如引理 4.9中所述，因此存在 $0<L<\infty$ 使得

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \vee \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} < L.$$

应用引理 4.2 并采用此处选择的 $\mathcal{R}_\epsilon$。那么，命题 4.1 成立，其常数 C_0 等于引理 C_0 中的常数 乘以 L。 □

4.2 迭代改进 Lipschitz 常数

现在我们将证明，命题 4.1 中的常数 C_0 可以变得接近 1。我们始终假设 $\xi < \xi_{\text{crit}}$。论证与[GM21a 的命题 3.6], 中的证明类似；该文作者证明，对于每个固定的 ϕ，$D_{h^\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 与 D_h 几乎必然是 Lipschitz 等价的，且 Lipschitz 常数为 1。对我们而言，关键区别在于，我们只有一个“近似的”Lipschitz 条件：对于一种度量，半径为 $\epsilon^{1-\zeta}$ 的小欧几里得球之间的距离，与另一种度量下点之间的距离是可比的。因此，我们将采用与[Dev24 命题 3.1] 类似的论证，迭代构造一个收敛到 1 的 Lipschitz 常数序列，但代价是逐步增大半径 $\epsilon^{1-\zeta}$ 的尺度（即逐步增大 ζ）。

更具体地说，引理 4.8 表明，对于 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon$-测地线中都有一个统一正比例的部分由若干线段组成，并且对于这些线段，D_h 与 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon$ 在 Lipschitz 常数接近1的意义下 Lipschitz 等价。由于这一比例对所有测地线都是统一的，我们（几乎）得到了一个全局 Lipschitz 条件，其 Lipschitz 常数更接近1。

需要注意的是，D_h 在开集上的内在度量未必存在连接相距较远点的测地线，因此我们只考虑距离足够近、能够由一条完全留在 V内的测地线连接的点。实际上，由于我们需要像命题4.1的证明中那样，用环带覆盖每条测地线，而每个环带都需要完全包含在 V内才能使用界 $|\phi'| \in [\tau^{-1},\tau]$，因此每条测地线都需要与 ∂V保持固定的正距离。这就是命题 $\tilde{W}$中额外引入开集4.10的原因。

若 $W \Subset \tilde{W}$是开集，令 $G(W,\tilde{W})$ 表示满足以下条件的 $(z,w) \in W^2$ 的集合：存在一条从 z到 w、包含于 $\tilde{W}$中的 D_h-测地线。类似地，对于定义在 $\tilde{W}$ 的某个邻域 U 上的共形映射 ϕ，令 $G_\epsilon^\phi(W,\tilde{W})$ 表示满足以下条件的 $(z,w) \in W^2$的集合：存在一条从 z到 w、包含于 $\tilde{W}$中的 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot);\ \phi(U))$-测地线。

本节的主要结果如下。

命题 *4.10*。固定 $0<\xi<\xi_{crit}$、开集 $W \Subset \tilde{W} \Subset V \Subset U$ 和 $\tau>1$。存在一个常数 $A>0$，使得以下结论成立。假设存在 $\zeta_- \in (0,1)$、$\beta>0$ 和 $C_0(\epsilon)\ C_0'(\epsilon) > 0$，使得当 $\epsilon\to 0$ 时，对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$，以概率 $1-O_\epsilon(\epsilon^\beta)$ 成立，

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(z)\right), \phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(w)\right); \phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(\tilde{W}))\right)$$
$$\leq C_0(\epsilon) D_h\left(z,w;\tilde{W}\right) \ \forall (z,w) \in G(W,\tilde{W}), \tag{63}$$

$$D_h\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(z), B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(w); B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(\tilde{W})\right)$$
$$\leq C_0'(\epsilon)\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi(z),\phi(w);\phi(\tilde{W})\right) \ \forall (z,w) \in G_\epsilon^\phi(W,\tilde{W}). \tag{64}$$

选取 δ、ζ、$\zeta_+ \in \in (0,1)$，使得 $\zeta_- < \zeta < \zeta_+$ 且 $1-\zeta_+ < \frac{1}{2}(1-\zeta)$。对每个 $\epsilon \in \in (0,1)$，选取 $\mathcal{R}_\epsilon \subset (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-k}\}_{k=1}^{\infty}$，满足 $\#\mathcal{R}_\epsilon > \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-k}\}_{k=1}^{\infty})$。那么，以概率 $1 - O_\epsilon(\epsilon^{\beta \wedge 2(1-\zeta)})$，对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$，

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(z)\right), \phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(w)\right); \phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})) \right) \\ &\qquad \leq C_1(\epsilon) D_h\left(z, w; \tilde{W}\right) \quad \forall (z,w) \in G(W, \tilde{W}), \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} &D_h\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(z), B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(w); B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})\right) \\ &\qquad \leq C_1'(\epsilon) \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi(z), \phi(w); \phi(\tilde{W})\right) \quad \forall (z,w) \in G_\epsilon^\phi(W, \tilde{W}), \end{aligned} \tag{66}$$

其中，$O_\epsilon(\epsilon^{\beta \wedge 2(1-\zeta)})$ 中的大O 常数取决于 $O_\epsilon(\epsilon^\beta)$中的大$O$ 常数、V和 ζ，并且

$$C_1(\epsilon) := \frac{A}{A+1}\left[\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \vee C_0(\epsilon)\right] + \left[\frac{1}{A+1} + 3\delta\right] \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}, \tag{67}$$

$$C_1'(\epsilon) := \frac{A}{A+1}\left[\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} \vee C_0'(\epsilon)\right] + \left[\frac{1}{A+1} + 3\delta\right] \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}. \tag{68}$$

直观地说，命题 4.10 表明，如果 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge} D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$与 D_h 以高概率近似双 Lipschitz 等价（“近似”的含义与命题 4.1 中相同），且 Lipschitz 常数分别为 C_0 和 C_0'，那么只要将半径 $\epsilon^{1-\zeta_-}$增大到$\epsilon^{1-\zeta}$，它们就会以高概率近似双 Lipschitz 等价，且 Lipschitz 常数分别为 C_1 和 C_1'。常数 C_1 大致等于$\frac{A}{A+1}C_0$ 加上 $\frac{1}{A+1}$ 乘以一个涉及缩放比$\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}$的项。如果比值 $\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}$接近 1，那么 C_1 会比 C_0更接近 1。C_1'也同样如此。注意，我们允许 C_0、C_0' 依赖于 ϵ。这样做是为了迭代应用命题 4.10，以 C_1、C_1' 代替 C_0、C_0'，从而得到 Lipschitz 常数 C_2、C_2'。以此方式重复，我们便得到 Lipschitz 常数 C_n、C_n'。由于常数 A是普适的，我们可以证明，当 $n\to\infty$时，C_n、$C_n' \to 1$。

与命题 4.1的证明类似，我们将使用引理 4.3 来找到许多环带，使得 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge} D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 与 D_h 在 Lipschitz 常数接近 1的意义下双 Lipschitz 等价。我们将应用引理 4.3 的事件如下。

定义4.11。固定 $x \in W$，$\epsilon, \zeta_-, \delta \in (0,1)$，$\alpha \in (7/8, 1)$，$A > 1$，和 $r \in (\frac{4\epsilon^{1-\zeta_-}}{\alpha - 3/4}, 1)$。令 $E_{r,\epsilon}$ 为以下事件的交集。</output>

1. $E_r^{(1)}{}_{,\epsilon}(x) = E_r^{(1)}{}_{,\epsilon}(x;\ \alpha, \delta)$: 对于每个满足以下条件的 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$、$u \in \partial B_{\alpha r}(x)$ 和 $v \in \partial B_r(x)$：存在一条从 u 到 v 且包含于 $\mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)$ 中的 $D_h(\cdot,\cdot; \mathbb{A}_{3r/4, 5r/4}(x))$-测地线（分别地，$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge} D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot);\ \phi(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)))$-测地线），我们分别有

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi(u), \phi(v); \phi\left(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right)\right) \\ &\leq \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} (1+\delta) D_h\left(u, v; \mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right), \\ &D_h\left(u, v; \mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) \\ &\leq \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} (1+\delta)\, \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi(u), \phi(v); \phi\left(\mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right)\right). \end{aligned}$$

2. $E_r^{(2)}{}_{,\epsilon}(x) = E_r^{(2)}{}_{,\epsilon}(x;\ \alpha)$: 若 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$，$u \in \partial B_{\alpha r}(x)$，且 $v \in \partial B_r(x)$，则
   - $D_h(u,\ v;\ \overline{\mathbb{A}_{\alpha r,\ r}(x)}) = D_h(u,\ v;\ \mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x))$ 意味着对于所有 $t \in [\tau^{-1}, \tau]$，
   $$\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}(u,v) < \mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}\left(u, \partial\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right)$$
   - $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge} D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(u)\ \phi(v);\ \phi(\overline{\mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)})) = \mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge} D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(u)\ \phi(v);\ \phi(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)))$ 对于某个 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$，意味着
   $$D_h(u,v) < D_h\left(u, \partial\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right).$$

3. $E_r^{(3),\epsilon}(x) = E_r^{(3),\epsilon}(x;\alpha,A)$：对于所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$,

$$\begin{aligned} D_h\left(around\ \mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)\right) &\leq AD_h\left(\partial B_{\alpha r}(x),\partial B_r(x)\right), \\ \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(around\ \phi(\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x))\right) &\leq A\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi(\partial B_{\alpha r}(x)),\phi(\partial B_r(x))\right). \end{aligned}$$

4. $E_r^{(4),\epsilon}(x) = E_r^{(4),\epsilon}(x;\alpha,\delta,\zeta_-)$：对所有$\overline{u\in\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)}$，$\overline{v\in B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(u)}$，以及 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$，我们有

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi(u),\phi(v);\phi\left(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right)\right) \\ &\qquad\leq \delta\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}D_h\left(\partial B_{\alpha r}(x),\partial B_r(x)\right), \\ &D_h\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) \\ &\leq \delta\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi\left(\partial B_{\alpha r}(x)\right),\phi\left(\partial B_r(x)\right)\right). \end{aligned}$$

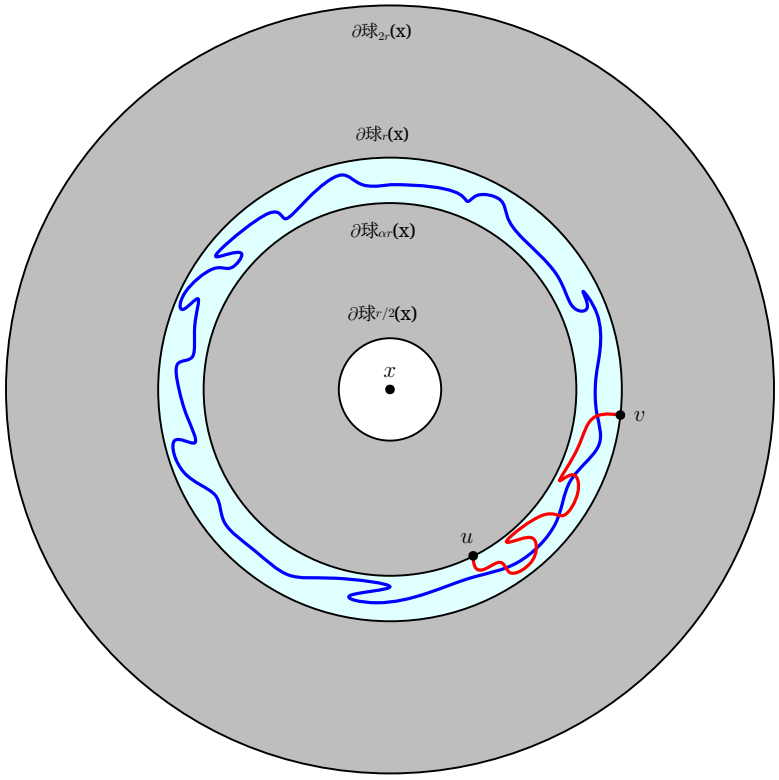

图1 定义4.11的示意图。条件1表示，如果红色路径是一条 D_h-测地线，那么$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(u)\ \phi(v)) \leq \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}(1+\delta)D_h(u,v)$，而交换 D_h 和 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D_{h^\phi}^\epsilon$ 时结论类似。条件2的第二条表示，如果 $D_h(u,v)$与灰色环带边界的距离至少为 D_h距离，那么对于任意 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$，红色路径都不可能是 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D_{h^\phi}^\epsilon$-测地线。条件2的第一条表示，如果存在某个 $t\in[\tau^{-1},\tau]$使得 $\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}\hat{}D_h^{\epsilon t}(u,v)$与灰色环带边界的距离至少为 $\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}\hat{}D_h^{\epsilon t}$-距离，那么红色路径就不可能是 D_h-测地线。条件3表示，存在一条路径（以蓝色绘出）绕过青色环带，其 D_h-长度至多为青色环带横向 D_h-距离的 A 倍；对于每个满足 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$的度量 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D_{h^\phi}^\epsilon$，结论也类似。

条件 $r > \frac{4\epsilon^{1-\zeta_-}}{\alpha-3/4}$的存在是为了确保第四个条件中的内部度量有意义。

根据命题，条件1应以高概率出现3.1 以及$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D_h^\epsilon$ 到 D_h的收敛。这几乎是正确的，但条件1中的内部度量使论证略为复杂。需要这些内部度量，才能应用命题3.1 来比较$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D_{h^\phi}^\epsilon$ 与$\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}\hat{}D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}$，但为了将$\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}\hat{}D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}$与 D_h进行比较，我们需要去掉内部度量。条件2使我们能够做到这一点。

条件3用于说明一条测地线的 $\frac{1}{A+1}$比例部分位于环带$\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)$之一中。条件4用于控制由球到球距离估计点到点距离所产生的误差项。

我们首先验证$E_{r,\epsilon}(x)$由限制在一个环域上的场所决定。

引理4.12. 对每个满足 $\epsilon^\zeta\log(\tau\epsilon^{-1})<\frac{1}{16\tau}$的 $0<\zeta_-<\zeta<\zeta_+<1$，$\epsilon\in(0,1)$，每个$r\in(\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+})$，$x\in W$，$\delta\in(0,1)$，$\alpha\in(7/8,1)$以及 $A>1$，我们有

$$E_{r,\epsilon}(x)\in\sigma\left\{(h-h_{4r}(x))|_{\mathbb{A}_{r/2,2r}(x)}\right\}.$$

证明。将 $-h_{4r}(x)$加到 h 上会使定义4.11中的每个度量按 $e^{-\xi h_{4r}}(x)$缩放，这不影响$E_{r,\epsilon}(x)$的出现。因此，定义4.11的条件1、3和4由$D_{h-h_{4r}}(x)$在$\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)$上的内在度量，以及在 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$条件下 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D_{h^\phi-h_{4r}}^\epsilon(x)$在$\phi(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))$上的内在度量所决定。由引理 4.5，我们可以用可数子集 $\lambda_\tau(V,U)\subset\Lambda_\tau(V,U)$替换 $\Lambda_\tau(V,U)$。由公理II，$D_{h-h_{4r}}(x)$在$\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)$上的内在度量由$(h-h_{4r}(x))|_{\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)}$决定。对每个$\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$，引理 3.2表明 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D_{h^\phi-h_{4r}}^\epsilon(x)$在 $\phi(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))$上的内在度量由$(h-h_{4r}(x))|_{B_{4\tau\epsilon}\log\epsilon^{-1}(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))}$决定。条件 $\epsilon^\zeta\log(\tau\epsilon^{-1})<\frac{1}{16\tau}$蕴含$B_{4\tau\epsilon}\log\epsilon^{-1}(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))\subset\mathbb{A}_{r/2,2r}(x)$。这表明 $E_r^{(1)},\epsilon(x)\ E_r^{(3)},\epsilon(x)\ E_r^{(4)},\epsilon(x)\in\sigma\{(h-h_{4r}(x))|_{\mathbb{A}_{r/2,2r}(x)}\}$。

为了看出 $E_{r\epsilon}^{(2)},(x)\in\sigma\{(h-h_{4r}(x))|_{\mathbb{A}_{r/2,\ 2r}(x)}\}$，注意由 $(\epsilon,z)\mapsto\hat{}h_\epsilon^*(z)$ 的连续性以及引理 4.5，条件 2 等价于同一条件，其中 $[\tau^{-1},\tau]$被替换为 $[\tau^{-1},\tau]\cap\mathbb{Q}$，且 $\Lambda_\tau(V,U)$ 被替换为一个可数子集 $\lambda_\tau(V,U)$。然后注意，对每个 $t\in[\tau^{-1},\tau]$，$\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}\hat{}D_{h-h_{4r}}^{\epsilon t}(x)(u,v)<\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}\hat{}D_{h-h_{4r}}^{\epsilon t}(x)(u,\partial\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))$ 这一陈述等价于说 v包含在以 u 为中心、半径为 $\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}\hat{}D_{h-h_{4r}}^{\epsilon t}(x)(u,\partial\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))$的开 $\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}\hat{}D_{h-h_{4r}}^{\epsilon t}(x)$- 球中。由定义，该球包含在 $\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)$ 中，因此条件 2 的第一个要点由 $(h-h_{4r}(x))|_{B_{\epsilon\tau}\log(\tau\epsilon^{-1})(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))}$ 决定。由于 $\epsilon^\zeta\log(\tau\epsilon^{-1})<\frac{1}{16\tau}$，我们有 $B_{\epsilon\tau}\log(\tau\epsilon^{-1})(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))\subset\mathbb{A}_{r/2,2r}(x)$。

同样，条件 $D_{h-h_{4r}(x)}(u,v)<D_{h-h_{4r}(x)}(u,\partial\mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x))$ 的意思是，v 包含在以 u 为中心、半径为 $D_h(u,\partial\mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x))$ 的开$D_{h-h_{4r}(x)}$-球内，而该球包含在 $\mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x)$ 中。因此，条件 2 中的第二个项目符号也由 $(h-h_{4r}(x))|_{\mathbb{A}_{r/2,\ 2r}(x)}$ 确定。□

现在我们将证明，可以选择 $E_{r,\ \epsilon}(x)$ 中的参数，使得 $E_{r,\ \epsilon}(x)$ 以高概率发生。

命题 *4.13*。固定开集 $W\Subset V\Subset U\subset\mathbb{C}$。对于任意 $p\in(0,1)$、$\tau>1$，$\delta\in(0,1)$、$0<\zeta_-<\zeta<\zeta_+<1$，存在 $\alpha=\alpha(p)\in(7/8,1)$、$A=A(p)>1$，以及 $\epsilon_0=\epsilon_0(p,\zeta_-,\zeta,\zeta_+,\delta)\in(0,1)$，使得对所有 $x\in W$，$\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ 和 $r\in(\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+})$，$P[E_{r,\epsilon}(x)]\geq p$。

为证明命题 4.13，只需证明在适当选择参数时，事件 $E_{r\epsilon}^{(j)},(x)$ 与 $j=1$、2、3、4 各自以高概率发生。此方法与 [GM21a, 第 3 节.2] 以及 [Dev24, 命题 3.1], 中的论证类似，关键区别在于我们必须选择适用于所有共形映射 ϕ 的参数。为此，关键是利用命题 3.1，将问题化简为处理$\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}^{-1}\hat{}D_h^{\epsilon/|\phi'(z_0)|}$。接下来，可以参照 [Dev24, 第 3] 节中的类似论证来选择参数。

证明 $E_{r\epsilon}^{(2)},(x)$ 以高概率发生时将用到以下结果，它是 [DFGPS20，命题 4.1] 的一个特例。

引理 4.14。固定 $b>0$、$p\in(0,1)$ 以及 $S>0$。存在 $7/8<\alpha_0<1<\alpha_1$，使得对于每个 $r>0$ 和每个 $x\in\mathbb{C}$，以至少 p 的概率有

$$\inf\{D_h(u,v;\mathbb{A}_{\alpha_0 r,\alpha_1 r}(x):u,v\in\mathbb{A}_{\alpha_0 r,\alpha_1 r}(x),|u-v|\geq br\}\geq Sr^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}.$$

引理 *4.15*。对于任意 $p\in(0,1)$、$\tau>1$和 $0<\zeta<\zeta_+<1$，存在 $\alpha=\alpha(p)\in(7/8,1)$ 以及 $\epsilon_0=\epsilon_0(p,\zeta,\zeta_+)\in(0,1)$，使得对于每个 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$、每个 $r\in(\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+})$，以及每个 $x\in W$，$E_r^{(2)},\epsilon(x)$，该情形发生的概率至少为 p。

证明。思路是，当 u、$v \in \mathbb{A}_{\alpha r,\, r}(x)$ 相对于 D_h相距较远时，它们相对于欧几里得距离也相距较远。引理 4.14 再结合 LFPP 的收敛，便可推出 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon(u,v;\mathbb{A}_{\alpha r,\, r}(x)) > \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x))$。

令 C_0 如命题4.1中所述。我们声称存在 $0 < s < S$ 和 $\epsilon_0 > 0$，使得对每个 $\epsilon \in (0,\ \epsilon_0)$、每个 $r \in (\epsilon^{1-\zeta},\ \epsilon^{1-\zeta_+})$以及每个 $x \in W$，以至少 p的概率，对所有 $t \in [\tau^{-1}, \tau]$，都有，

$$\sup_{u,v \in \mathbb{A}_{7r/8,r}(x)} \mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) < \frac{1}{16} C_0^{-1} S \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}, \tag{69}$$

$$\sup_{u,v \in \mathbb{A}_{7r/8,r}(x)} D_h\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) < S r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}, \tag{70}$$

$$\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}\left(\partial\mathbb{A}_{7r/8,r}(x), \partial\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) > s \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}, \tag{71}$$

$$D_h\left(\partial\mathbb{A}_{7r/8,r}(x), \partial\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) > s r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}. \tag{72}$$

假设我们有 (69)、(70)、(71) 和 (72)，下面推导引理 4.15。取 $s, S > 0$ 如 (69)、(70)、(71) 和 (72) 中所述，并以 $1 - \frac{1-p}{7}$ 替换 p，公理 IV 蕴含存在 $b = b(s) > 0$，使得对每个 $r > 0$ 和每个 $x \in \mathbb{C}$，以至少 $1 - \frac{1-p}{7}$ 的概率，

$$\left(u, v \in \overline{B_r(x)},\ D_h(u,v) > \frac{1}{3} s r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}\right) \implies |u - v| \geq br. \tag{73}$$

固定 $b' \in (0,\ b)$。令 $7/8 < \alpha_0 < 1 < \alpha_1$ 如引理 4.14 中所述，用 b' 代替 b，并用 $1 - \frac{1-p}{7}$ 代替 p，从而对每个 $r > 0$ 以及每个 $x \in \mathbb{C}$，以至少 $1 - \frac{1-p}{7}$ 的概率成立，即

$$\inf\left\{D_h\left(u,v;\mathbb{A}_{\alpha_0 r,\alpha_1 r}(x)\right) : u, v \in \mathbb{A}_{\alpha_0 r,\alpha_1 r}(x), |u-v| \geq b'r\right\} \geq S r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}. \tag{74}$$

固定 $\alpha \in (\alpha_0,\ 1)$。由[DFGPS20，引理 3.8] 以及 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon$ 与$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge} D_h^\epsilon$ 到 D_h 在紧集上一致的几乎必然收敛，我们可以找到 $R > 0$ 以及 $\epsilon_0 \in (0,\ 1)$ 使得 $\overline{U} \subset B_R(0)$，并且使得以至少 $1 - \frac{1-p}{7}$ 的概率，

$$\sup_{z,w \in B_2(0)} \left|\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon(z,w) - D_h(z,w)\right| < \frac{1}{2} D_h\left(\partial B_\alpha(0), \partial B_1(0)\right) \ \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0^\zeta \tau), \tag{75}$$

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon(u,v) < \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(U, \partial B_R(0)\right) \ \forall u, v \in U, \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0 \tau), \tag{76}$$

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_h^\epsilon(u,v) < \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_h^\epsilon\left(U, \partial B_R(0)\right) \ \forall u, v \in U, \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0 \tau). \tag{77}$$

由引理 2.1，我们可以减小 ϵ_0，使得以至少 $1 - \frac{1-p}{7}$ 的概率，

$$\sup_{z \in \overline{B_R(0)}} \left|h_\epsilon^*(z) - \hat{h}_\epsilon^*(z)\right| < \frac{1}{\xi} \log 2 \ \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0 \tau). \tag{78}$$

命题 3.1 意味着我们可以进一步缩小 ϵ_0，使得对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 以及每个 $x \in W$，以至少 $1 - \frac{1-p}{7}$ 的概率，对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 以及所有分段 C^1 路径 P在 $B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(x)$中，

$$\frac{1}{2} \text{长度}\left(P; \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1\wedge} D^{\epsilon/|\phi'(x)|}\right) \leq \text{Len}\left(\phi \circ P;\ \mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge} D_{h^\phi}^\epsilon\right) \leq 2 \text{勒}\left(P; \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1\wedge} D^{\epsilon/|\phi'(x)|}\right). \tag{79}$$

根据命题 4.1，我们可以进一步减小 ϵ_0，使得对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0^\zeta)$，以概率至少 $1 - \frac{1-p}{7}$，对所有 $\Phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 以及所有 $z, w \in W$，

$$D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z), B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(w); B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(W)\right) \leq C_0 \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\Phi}^\epsilon\left(\Phi(z), \Phi(w); \Phi(W)\right). \tag{80}$$

减小 ϵ_0，使得以下成立：

$$\epsilon_0^{\zeta(1-\zeta)} < \frac{b - b'}{4} \wedge \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \wedge \frac{\alpha_1 - 1}{2}, \tag{81}$$

$$\frac{\mathfrak{a}_{\epsilon t}}{\mathfrak{a}_\epsilon} \leq 2 t^{1-\xi Q} \ \forall t \in [\tau^{-1}, \tau], \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0^\zeta). \tag{82}$$

特别地，注意到（81）蕴含 $B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^\zeta}(\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)) \subset \overline{\mathbb{A}_{\alpha_0 r,\alpha_1 r}}(x)$ 对所有 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 以及所有 $r \in (\epsilon^{1-\zeta},\ \epsilon^{1-\zeta_+})$ 成立。

假设上述每一个事件都发生，其概率至少为 p，我们来证明 $E^{(2)}_{r\,\epsilon,}(x)$ 发生。假设 $u \in \partial B_{\alpha r}(x)$、$v \in \partial B_r(x)$ 和 $t \in [\tau^{-1}, \tau]$ 使得

$$\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}(u,v) \geq \mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}\left(u, \partial \mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right).$$

Then

$$\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}(u,v) > \mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}\left(\partial \mathbb{A}_{7r/8,r}(x), \partial \mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) \geq s \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}. \quad \text{(by (71))}$$

因此，若 $u' := \frac{u-x}{r}$ 且 $v' := \frac{v-x}{r}$，

$$\begin{aligned}
D_h(u,v) &= r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}(u',v') && \text{(axiom IV)}\\
&\geq \frac{2}{3} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1} D^{\epsilon t/r}_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}(u',v') && \text{(by (75))}\\
&= \frac{2}{3} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} \mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} D_h^{\epsilon t}(u,v) && \text{(by (6))}\\
&\geq \frac{1}{3} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} \mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}(u,v) && \text{(by (76), (77), (78))}\\
&> \frac{1}{3} s r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}.
\end{aligned}$$

根据（73），我们有 $|u-v| \geq br$。因此，

$$\begin{aligned}
D_h\left(u, v; \overline{\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)}\right) &\geq S r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} && \text{(by (74))}\\
&> D_h\left(u, v; \mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right). && \text{(by (70))}
\end{aligned}$$

这就证明了 $E^{(2)}_{r\,\epsilon,}(x)$ 定义中的第一个要点。

为证明第二个要点，假设 $u \in \partial B_{\alpha r}(x)$ 和 $v \in \partial B_r(x)$ 满足 $D_h(u,v) \geq D_h(u, \partial \mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x))$。那么

$$D_h(u,v) > D_h\left(\partial \mathbb{A}_{7r/8,r}(x), \partial \mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) \geq s r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}, \quad \text{(by (72))}$$

因此（73 $|u-v| \geq br$ $z \in B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}} u$ $w \in B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}} v$ $|z-w| \geq$）推出。如果（）且（），那么。
$br - 4\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta} > b'r$ $B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}} \mathbb{A}_{\alpha r\, r}\, x \subset \mathbb{A}_{\alpha_0 r\, \alpha_1 r}\, x$ 74
因此，由于（，（））、（）、（）推出

$$\begin{aligned}
&D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}}(u), B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}}(v); B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}}(\overline{\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)})\right)\\
&\quad \geq D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}}(u), B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}}(v); \mathbb{A}_{\alpha_0 r, \alpha_1 r}(x)\right)\\
&\quad \geq S r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}. \qquad (83)
\end{aligned}$$

假设$\phi \in \Lambda_\tau(V,\ U)$ 并令 $t := 1/|\phi'(x)|$ 以及 $H(\cdot) := h(r\cdot+x) - h_r(x)$，我们看到

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}\left(\phi(u), \phi(v); \phi\left(\overline{\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)}\right)\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}\left(u, v; \overline{\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)}\right) && \text{(by (79))}\\
&\geq \frac{1}{4}\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} D_h^{\epsilon t}\left(u, v; \overline{\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)}\right) && \text{(by (78))}\\
&= \frac{1}{4} \frac{rt\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{t^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}} e^{\xi h_r(x)} \mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1} D^{\epsilon/r}_{H(t\cdot)+Q\log t}\left(\frac{u'}{t}, \frac{v'}{t}; \frac{1}{t}\overline{\mathbb{A}_{\alpha,1}(0)}\right) && \text{(by (6))}\\
&\geq C_0^{-1} \frac{1}{4} \frac{rt\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{t^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}} e^{\xi h_r(x)} D_H\left(B_{2(\epsilon/r)^{1-\zeta}}(u'), B_{2(\epsilon/r)^{1-\zeta}}(v'); B_{2(\epsilon/r)^{1-\zeta}}(\overline{\mathbb{A}_{\alpha,1}(0)})\right) && (*)\\
&= C_0^{-1} \frac{1}{4} \frac{rt\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{(rt)^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}} D_h\left(B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}}(u), B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}}(v); B_{2\epsilon^{1-\zeta} r^{\zeta}}(\overline{\mathbb{A}_{\alpha r,r}(x)})\right) && \text{(axiom IV)}\\
&\geq C_0^{-1} \frac{1}{4} \frac{rt\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{(rt)^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}} S r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} && \text{(by (83))}
\end{aligned}$$

$$> 4\frac{rt\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{(rt)^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon t}\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) \quad \text{(by (69))}$$

$$\geq 2\frac{t\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{t^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^{\epsilon}\left(\phi(u),\phi(v);\phi\left(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right)\right) \quad \text{(by (79))}$$

$$\geq \mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^{\epsilon}\left(\phi(u),\phi(v);\phi\left(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right)\right), \quad \text{(by (82))}$$

其中（$*$）是通过对（80）应用 $\Phi(z) := z/t$ 得到的。这表明，$E_{r\epsilon}^{(2)}$的定义中的第二个项目符号（x）成立。

仍需证明存在 s、S，使得（69）、（70）、（71）和（72）均以至少 p的概率成立。由 D_h 的连续性，我们可以找到 $0 < s < S$，使得以至少 $1 - \frac{1-p}{6}$ 的概率，

$$\sup_{u,v\in\mathbb{A}_{7/8,1}(0)} D_h\left(u,v;\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right) < S, \tag{84}$$

$$D_h\left(\partial\mathbb{A}_{7/8,1}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right) > 2s. \tag{85}$$

于是公理IV 表明，对每个 $r > 0$，（70）和（72）以至少 $1 - \frac{1-p}{6}$ 的概率成立。此外，（85）、（6）、引理2.1以及 $\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}D_h^{\epsilon}$ 到 D_h 的几乎必然收敛表明，我们可以找到 $\epsilon_0 > 0$，使得以至少$1 - 2\frac{1-p}{6}$的概率，

$$\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon}\left(\partial\mathbb{A}_{7r/8,r}(x),\partial\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) > s\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}\ \forall\epsilon\in(0,\epsilon_0\tau),$$

从而证明了（71）。

由连续性，我们可以找到 $R > 0$，使得以至少$1 - \frac{1-p}{6}$ 的概率，

$$D_h(z,w) < \frac{1}{3}D_h\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right)\ \forall z,w\in\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0),|z-w|\leq R. \tag{86}$$

利用 $\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}D_h^{\epsilon}$ 到 D_h 的几乎必然收敛，我们可以找到 $\epsilon_0 > 0$，使得概率至少为 $1 - \frac{1-p}{6}$，

$$\sup_{z,w\in\overline{B_2(0)}}\left|\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}D_h^{\epsilon}(z,w) - D_h(z,w)\right| < \frac{1}{3}D_h\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right)\quad\forall\epsilon\in(0,\epsilon_0). \tag{87}$$

注意，如果（86）和（87）成立，那么

$$\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}D_h^{\epsilon}\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right) > \frac{2}{3}D_h\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right), \tag{88}$$

因此，如果 $z,w\in\mathbb{A}_{13/16,\ 17/16}(0)$ 满足 $|z-w|\leq R$，那么

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}D_h^{\epsilon}(z,w) &< D_h(z,w) + \frac{1}{3}D_h\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right)\\ &< \frac{2}{3}D_h\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right)\\ &< \mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}D_h^{\epsilon}\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right),\end{aligned} \tag{89}$$

这意味着 $\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}D_h^{\epsilon}(z,\ w) = \mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}D_h^{\epsilon}(z,\ w;\ \mathbb{A}_{3/4,\ 5/4}(0))$。利用引理 2.1，我们可以减小 ϵ_0，使得概率至少为 $1 - \frac{1-p}{6}$，

$$\sup_{z\in V}\left|\hat{h}_{\epsilon}^{*}(z) - h_{\epsilon}^{*}(z)\right| < \frac{1}{\xi}\log 2\ \forall\epsilon\in(0,\epsilon_0). \tag{90}$$

最后，增大 S，使得概率至少为 $1 - \frac{1-p}{6}$，

$$32C_0\left[2 + \#((R\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0))\right]\frac{2}{3}D_h\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right) < S \tag{91}$$

由此可知，若 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$、$r\in(\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+})$ 且 $x\in W$，则以至少 p 的概率，若$u,v\in\mathbb{A}_{7r/8,r}(x)$ 且 $u' := \frac{u-x}{r}$ 且 $v' := \frac{v-x}{r}$，则

$$\mathfrak{a}_{\epsilon}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon}\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) && \text{(by (90))}\\
&= 2\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1} D^{\epsilon/r}_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(u',v';\mathbb{A}_{3/4,5/4}(x)\right) && \text{(by (6))}\\
&\leq 2\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \#(2+(R\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0)) && \text{(triangle inequality)}\\
&\qquad \cdot \sup_{z,w\in(R\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0)} \mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1} D^{\epsilon/r}_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(z,w;\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right)\\
&= 2\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \#(2+(R\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0)) && \text{(by (89))}\\
&\qquad \cdot \sup_{z,w\in(R\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0)} \mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1} D^{\epsilon/r}_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}(z,w)\\
&\leq 2\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \#(2+(R\mathbb{Z}^2)\cap\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0)) && \text{(by (86), (87))}\\
&\qquad \cdot \frac{2}{3} D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\partial\mathbb{A}_{13/16,17/16}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right)\\
&\leq \frac{1}{16} C_0^{-1} S r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)}, && \text{(by (91))}
\end{aligned}
$$

这就证明了（69）。 □

引理 *4.16.* 对于每个 $\delta,p\in(0,1)$ 和 $0<\zeta<\zeta_+<1$，存在 $\alpha=\alpha(p)\in(7/8,1)$ 和 $\epsilon_0=\epsilon_0(\delta,\zeta,\zeta_+,p)>0$，使得对于每个 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$、每个 $r\in(\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+})$ 以及每个 $x\in W$，$P[E^{(1)}_{r,\epsilon}(x)]\geq p$。

证明。 思路是使用命题 3.1 将 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 与 $\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}\hat{D}^{\epsilon/|\phi'(\quad x\ |)}_h$ 进行比较，误差至多为一个 $1+\delta$ 因子；使用引理 2.1比较 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_h$ 和 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D^\epsilon_h$；再利用 (6) 按 r 缩放（由此在 $E^{(1)}_{r\,\epsilon,}(x)$ 的定义中产生缩放比项 $\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}$），使得我们处理的是一个半径不依赖于 ϵ 的环域；然后比较 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D^\epsilon_h$ 和 D_h。

固定 $\delta'\prec(1+\delta)^2-1$，使得由引理 4.15，我们可以选取 $\alpha\in(7/8,1)$ 和 $\epsilon_0>0$，使得对于所有 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$、$r\in(\epsilon^{1-\zeta},\epsilon^{1-\zeta_+})$ 以及 $x\in W$，都有 $P[E^{(2)}_{r,\epsilon}(x;\alpha)]\geq 1-\frac{1-p}{5}$。利用命题 3.1，我们可以减小 ϵ_0，使得对于每个 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$，以至少 $1-\frac{1-p}{5}$ 的概率，对于 $B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(x)$ 中的所有分段 C^1 路径 P 以及所有 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$，

$$
\begin{aligned}
(1+\delta')^{-1}\operatorname{Len}\left(P;\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\right) &\leq \operatorname{Len}\left(\phi\circ P;\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\right)\\
&\leq (1+\delta')\operatorname{Len}\left(\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\right). \qquad (92)
\end{aligned}
$$

利用 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_h$ 和 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D^\epsilon_h$ 几乎必然收敛到 D_h，我们可以找到 $R>0$ 并减小ϵ_0，使得 $V\subset B_R(0)$，且以至少 $1-\frac{1-p}{5}$ 的概率，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_h(u,v) &= \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_h(u,v;B_R(0))\ \ \forall u,v\in V,\forall\epsilon\in(0,\epsilon_0\tau) \qquad (93)\\
\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D^\epsilon_h(u,v) &= \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D^\epsilon_h(u,v;B_R(0))\ \ \forall u,v\in V,\forall\epsilon\in(0,\epsilon_0\tau). \qquad (94)
\end{aligned}
$$

引理 2.1 意味着在进一步缩小 ϵ_0 之后，我们可以确保概率至少为$1-\frac{1-p}{5}$，

$$
\sup_{z\in B_R(0)}\left|\hat{h}^*_\epsilon(z)-h^*_\epsilon(z)\right| < \delta'\ \forall\epsilon\in(0,\epsilon_0\tau). \qquad (95)
$$

利用 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D^\epsilon_h$ 到 D_h的几乎必然收敛，我们可以再次减小 ϵ_0，使得以至少 $1-\frac{1-p}{5}$ 的概率，

$$
\sup_{u,v\in B_2(0)}\left|\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D^\epsilon_h(u,v)-D_h(u,v)\right| < \frac{\delta'}{\delta'+1}D_h(\partial B_\alpha(0),\partial B_1(0))\ \forall\epsilon\in(0,\epsilon_0^\zeta\tau). \qquad (96)
$$

由此可知，对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$、$r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+})$、$x \in W$，以至少 p 的概率，若存在一条从 $u \in \partial B_{\alpha r}(x)$ 到 $v \in \partial B_r(x)$ 且包含于 $\mathbb{A}_{\alpha r}$ 中的 $D_h(\cdot,\cdot; \mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x))$-测地线，则对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}\left(\phi(u), \phi(v); \phi\left(\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right)\right) \\
&\leq \left(1+\delta'\right) \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u, v; \mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) && \text{(by (92))} \\
&= \left(1+\delta'\right) \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u, v\right) && (E^{(2)}_{r,\epsilon}(x) \text{ occurs}) \\
&= \left(1+\delta'\right) \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u, v; B_R(0)\right) && \text{(by (93))} \\
&\leq e^{\xi\delta'}\left(1+\delta'\right) \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|} D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u, v; B_R(0)\right) && \text{(by (95))} \\
&= e^{\xi\delta'}\left(1+\delta'\right) \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|} D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u, v\right) && \text{(by (94))} \\
&= e^{\xi\delta'}\left(1+\delta'\right) \frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|} D^{\epsilon/r|\phi'(x)|}_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\frac{u-x}{r}, \frac{v-x}{r}\right) && \text{(by (6))} \\
&\leq e^{\xi\delta'}\left(1+\delta'\right)^2 \frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\frac{u-x}{r}, \frac{v-x}{r}\right) && \text{(by (96))} \\
&= e^{\xi\delta'}\left(1+\delta'\right)^2 \frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}} D_h\left(u, v\right) && \text{(axiom IV)} \\
&\leq (1+\delta) \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}} D_h\left(u, v; \mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right).
\end{aligned}
$$

同样，如果存在一条从 u 到 v、包含在 $\mathbb{A}_{\alpha r,\ r}(x)$ 中的 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot);\ \phi(\mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x)))$-测地线，那么

$$
\begin{aligned}
&D_h\left(u, v; \mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x)\right) \\
&= D_h\left(u, v\right) && (E^{(2)}_{r,\epsilon}(x) \text{ occurs}) \\
&= r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\frac{u-x}{r}, \frac{v-x}{r}\right) && \text{(axiom IV)} \\
&\leq \left(1+\delta'\right) r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|} D^{\epsilon/r|\phi'(x)|}_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\frac{u-x}{r}, \frac{v-x}{r}\right) && \text{(by (96))} \\
&= \left(1+\delta'\right) \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}} \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|} D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u, v\right) && \text{(by (6))} \\
&\leq \left(1+\delta'\right) \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}} \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|} D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u, v; \mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right) \\
&\leq e^{\xi\delta'}\left(1+\delta'\right) \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}} \mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u, v; \mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right) && \text{(by (95))} \\
&\leq e^{\xi\delta'}\left(1+\delta'\right)^2 \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}\left(\phi(u), \phi(v); \phi\left(\mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right)\right) && \text{(by (92))} \\
&\leq (1+\delta) \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/}} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}\left(\phi(u), \phi(v); \phi\left(\mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right)\right).
\end{aligned}
$$

□

引理 4.17。对于任意 $\alpha,\ p \in (0,\ 1)$、$\tau > 1$ 和 $0 < \zeta < \zeta_+ < 1$，存在 $A = A(\alpha,\ p) > 1$ 以及 $\epsilon_0 = \epsilon_0\ p\ \alpha\ \zeta\ \zeta_+ > 0$ $\epsilon \in\ 0\ \epsilon_0$ $r \in\ \epsilon^{1-\zeta}\ \epsilon^{1-\zeta_+}$ $[E^{(3)}_{r,\epsilon}\ x\ ] \geq (,\ ,\ ,\ )$，使得对于每个 $(,\ )$ 和每个 $(,\ )$，p $\mathbf{P}()$。

证明。对于 D_h，环域的环绕距离与横穿距离可以通过重新缩放到量级 1 来比较，然后利用横穿环域的距离为正且环绕距离有限这一事实。对于 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$，想法类似，但由于常数 A 不允许依赖于 ϵ 或 ϕ，我们使用命题 3.1 将 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^{\epsilon}_{h^\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 替换为 $\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(x)|}\hat{D}^{\epsilon/|\phi'(}_{h}\ \ \ x\ |\ )$，然后利用 LFPP 到 D_h 的收敛来选取 A。

根据命题 3.1，我们可以选取 $\epsilon_0 > 0$，使得对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 以及每个 $x \in W$，以至少 $1 - \frac{1-p}{4}$ 的概率对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V, U)$ 以及所有分段 C^1 路径 P 在 $B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(x)$，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\operatorname{Len}\left(P; \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\right) &\leq \operatorname{Len}\left(\phi \circ P; \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\right) \\ &\leq 2\operatorname{Len}\left(P; \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\right). \end{aligned} \tag{97}$$

应用引理4.7 来选择 $A > 0$ 并减小 ϵ_0 使得

$$\mathbf{P}\left\{ D_h\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha,1}(0)\right) \vee \sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0^\zeta \tau)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha,1}(0)\right) \leq c_1 \right\} \geq 1 - \frac{1-p}{4}. \tag{98}$$

根据引理2.1，我们可以缩小 ϵ_0 使得

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{z \in V} |h_\epsilon^*(z) - \hat{h}_\epsilon^*(z)| < 1 \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0 \tau) \right\} \geq 1 - \frac{1-p}{4}. \tag{99}$$

利用 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon$ 到 D_h 的几乎必然收敛以及 $D_h(\partial B_\alpha(0)\ \partial B_1(0)) > 0$，我们可以找到 $c_0 > 0$ 并缩小 ϵ_0，使得

$$\mathbf{P}\left\{ D_h\left(\partial B_\alpha(0), \partial B_1(0)\right) \wedge \inf_{\epsilon \in (0, \epsilon_0^\zeta \tau)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_h^\epsilon\left(\partial B_\alpha(0), \partial B_1(0)\right) \geq c_0^{-1} \right\} \geq 1 - \frac{1-p}{4}. \tag{100}$$

由此可知，对于每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$、每个 $x \in W$ 以及每个 $r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+})$，以至少 p 的概率有

$$\begin{aligned} D_h\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right) &= r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} D_{h(r\cdot + x) - h_r(x)}\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha,1}(0)\right) && \text{(by axioms III, IV)} \\ &\leq r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} c_1 c_0 D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\partial B_\alpha(0), \partial B_1(0)\right) && \text{(by (98), (100))} \\ &= c_1 c_0 D_h\left(\partial B_{\alpha r}(x), \partial B_r(x)\right), && \text{(by axioms III, IV)} \end{aligned}$$

并且对于所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V, U)$，

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \quad (\text{围绕 } \phi(\mathbb{A}_{\alpha r, r}(x))) \\ &\leq 2\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right) && \text{(by (97))} \\ &\leq 2e^\xi \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1} D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)\right) && \text{(by (99))} \\ &= 2e^\xi \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} \mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1} D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}^{\epsilon/r|\phi'(x)|}\left(\text{around } \mathbb{A}_{\alpha,1}(0)\right) && \text{(by (6))} \\ &\leq 2e^\xi \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}} r^{\xi Q} e^{\xi h_r(x)} c_1 c_0 \mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1} D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}^{\epsilon/r|\phi'(x)|}\left(\partial B_\alpha(0), \partial B_1(0)\right) && \text{(by (98), (100))} \\ &= 2e^\xi c_1 c_0 \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1} D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(\partial B_{\alpha r}(x), \partial B_r(x)\right) && \text{(by (6))} \\ &\leq 2e^{2\xi} c_1 c_0 \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(\partial B_{\alpha r}(x), \partial B_r(x)\right) && \text{(by (99))} \\ &\leq 4e^{2\xi} c_1 c_0 \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi\left(\partial B_{\alpha r}(x)\right), \phi\left(\partial B_r(x)\right)\right) && \text{(by (97))}. \end{aligned}$$

因此，所需结果在 $A := 4e^{2\xi} c_1 c_0$ 的条件下成立。 □

引理 4.18。对于每个 $\delta, p \in (0, 1)$、$\alpha \in (7/8, 1)$ 和 $0 < \zeta_- < \zeta < \zeta_+ < 1$，存在 $\epsilon_0 = \epsilon_0(\zeta_-, \zeta, \zeta_+, \alpha, p, \delta) \in (0, 1)$，使得对于每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$、每个 $r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+})$ 以及每个 $x \in W$，$P[E_{r,\epsilon}^{(4)}(x)] \geq p$。

证明。主要思路是，通过按 r 重新缩放，只需证明 $B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}/r}(0)$ 的 D_h 直径远小于横跨 $\mathbb{A}_{\alpha,1}(0)$ 的 D_h 距离。这是因为 $r \in (\epsilon^{1-\zeta}, \epsilon^{1-\zeta_+})$，且 D_h 是连续度量。利用命题 3.1、(6) 以及 LFPP 收敛到 D_h，我们可以将这一结论转移到 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 上。

根据命题 3.1，存在 $\epsilon_0 > 0$，使得对于每个 $\epsilon \in (0,\ \epsilon_0)$ 和每个 $x \in W$，以至少 $1 - \frac{1-p}{4}$ 的概率，对于所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,\ U)$ 以及其中所有分段 C^1 路径 P，在 $B_{2\epsilon^{1-\zeta_+}}(x)$ 中，以下结论成立：

$$\frac{1}{2}\operatorname{Len}\left(P;\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\right) \leq \operatorname{Len}\left(\phi\circ P;\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^{\epsilon}\right) \leq 2\operatorname{Len}\left(P;\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\right). \tag{101}$$

利用引理 2.1，我们可以缩小 ϵ_0，使得以至少 $1 - \frac{1-p}{4}$ 的概率，

$$\sup_{z\in V}\left|\hat{h}_\epsilon^*(z) - h_\epsilon^*(z)\right| < \frac{1}{\xi}\log 2\ \forall \epsilon \in (0,\epsilon_0). \tag{102}$$

由连续性可知，我们可以进一步减小 ϵ_0，使得以至少 $1 - \frac{1-p}{4}$ 的概率，对所有$\epsilon \in (0,\epsilon_0)$,

$$\sup_{z\in B_2(0)}\sup_{w\in B_{4\epsilon^{\zeta-\zeta_-}}(z)} D_h(z,w) < \frac{\delta}{12+\delta}\left(D_h(\partial B_\alpha(0),\partial B_1(0)) \wedge D_h\left(\partial\mathbb{A}_{\alpha,1}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right)\right). \tag{103}$$

利用 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon$ 到 D_h 的几乎必然收敛，我们可以再次缩小 ϵ_0，使得以至少 $1 - \frac{1-p}{4}$ 的概率，对所有 $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$,

$$\begin{aligned}&\sup_{z,w\in B_2(0)}\left|\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}D_h^\epsilon(z,w) - D_h(z,w)\right| \\ &\quad< \frac{\delta}{12+\delta}\left(D_h(\partial B_\alpha(0),\partial B_1(0)) \wedge D_h\left(\partial\mathbb{A}_{\alpha,1}(0),\partial\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right)\right).\end{aligned} \tag{104}$$

由此可知，对于每个 $\epsilon \in (0,\ \epsilon_0)$，$r \in (\epsilon^{1-\zeta},\ \epsilon^{1-\zeta_+})$，以及 $x \in W$，以至少 p 的概率，以下结论成立：对所有 $u \in \mathbb{A}_{\alpha r,\ r}(x)$，所有 $v \in B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(u)$，以及所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,\ U)$ 满足

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\wedge}D_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi(u)\ \phi(v);\phi\left(\mathbb{A}_{3r/4,\ 5r/4}(x)\right)\right) \\
&\leq 2\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) && \text{(by (101))} \\
&\leq 4\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) && \text{(by (102))} \\
&= 4\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}}r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}^{\epsilon/r|\phi'(x)|}\left(\frac{u-x}{r},\frac{v-x}{r};\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right) && \text{(by (6))} \\
&= 4\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}}r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}^{\epsilon/r|\phi'(x)|}\left(\frac{u-x}{r},\frac{v-x}{r}\right) && \text{(by (103), (104))} \\
&\leq 4\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}}r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}\frac{2\delta}{12+\delta}D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}(\partial B_\alpha(0),\partial B_1(0)) && \text{(by (103), (104))} \\
&< \delta\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}}D_h(\partial B_{\alpha r}(x),\partial B_r(x)) && \text{(axiom IV).}
\end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned}
&D_h\left(u,v;\mathbb{A}_{3r/4,5r/4}(x)\right) \\
&= r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\frac{u-x}{r},\frac{v-x}{r};\mathbb{A}_{3/4,5/4}(0)\right) && \text{(axiom IV)} \\
&= r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}\left(\frac{u-x}{r},\frac{v-x}{r}\right) && \text{(by (103))} \\
&\leq r^{\xi Q}e^{\xi h_r(x)}\frac{3\frac{\delta}{12+\delta}}{1-\frac{\delta}{12+\delta}}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}D_{h(r\cdot+x)-h_r(x)}^{\epsilon/r|\phi'(x)|}(\partial B_\alpha(0),\partial B_1(0)) && \text{(by (103), (104))} \\
&= \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}\frac{\delta}{4}\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}D_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}(\partial B_{\alpha r}(x),\partial B_r(x)) && \text{(by (6))} \\
&\leq \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}}\frac{\delta}{2}\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(x)|}(\partial B_{\alpha r}(x),\partial B_r(x)) && \text{(by (102))}
\end{aligned}$$

$$\leq \delta \frac{r^{\xi Q} \mathfrak{a}_{\epsilon/r|\phi'(x)|}^{-1}}{r \mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(x)|}^{-1}} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi\left(\partial B_{\alpha r}(x)\right), \phi\left(\partial B_r(x)\right)\right). \qquad \text{(by (101))}$$

□

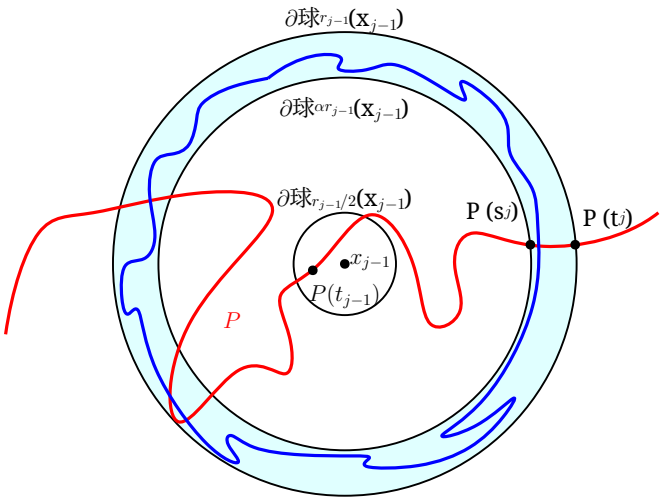

图2 命题 4.10 证明示意图。青色环带为 $\mathbb{A}_{\alpha r_{j-1}, r_{j-1}}(x_{j-1})$，红色路径为 D_h-测地线 P，蓝色路径则是由定义 4.11中的条件3保证的、绕过 $\mathbb{A}_{\alpha r_{j-1}, r_{j-1}}(x_{j-1})$的路径。时间 t_j是 t_{j-1}之后 P首次离开 $B_{r_{j-1}}(x_{j-1})$的时刻，而 s_j是 t_j之前 P最后一次离开 $B_{\alpha r_{j-1}}(x_{j-1})$的时刻。根据定义4.11中的条件1， $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{} D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(P(s_j)) \ \phi(P(t_j)))$ $\leq \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r_{j-1}\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r_{j-1}^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r_{j-1}}^{-1}}(1+\delta)(t_j - s_j)$。根据定义 4.11 中的条件 3，蓝色路径的 D_h- 长度至多为 $A($ $t_j - s_j)$。由于 P是测地线，且它在 t_{j-1}之前和 s_j之后与蓝色路径相交，因此必有 $s_j - t_{j-1} \leq A(t_j - s_j)$。这用于说明 P中有 $\frac{1}{A+1}$比例由线段 $P|_{[s_j,t_j]}$构成。

命题 4.10 的证明。证明与 [GM21a 的命题 3.6] 以及其在 [Dev24 命题 3.1]中的改编类似。我们将一条测地线分解为包含在“良好环带”$\mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)$ 中的线段，其中会发生 $E_{r, \epsilon}(x)$，以及不包含在良好环带中的线段。对于良好环带中的线段，定义4.11中的条件1大致表明， $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{} D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot) \ \phi(\cdot))$ 与 D_h 在 $\mathbb{A}_{\alpha r, r}(x)$ 上是双 Lipschitz 等价的，其 Lipschitz 常数为 $1+\delta$ 乘以一个涉及缩放比 $\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}$ 的项。对于其余线段，我们可以使用 (63) 和 (64) 中的 Lipschitz 常数 C_0、C_0' 来比较度量，并利用定义4.11中的条件4处理用球到球距离逼近点到点距离所产生的误差项。定义4.11中的条件3大致意味着，任意测地线位于良好环带中的比例为 $\frac{1}{A+1}$，因此我们得到一个新的 Lipschitz 条件，其常数约为 $\frac{A}{A+1}C_0 + \frac{1}{A+1}(1+\delta)\frac{r\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon/r}^{-1}}$。我们假设 ϵ 足够小，使得 $B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W}) \subset V$。令 F_ϵ 表示如下事件：对于每个 $x \in B_{\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W}) \cap (\frac{\epsilon^{1-\zeta}}{4}\mathbb{Z}^2)$，存在 $r \in \mathcal{R}_\epsilon$ 使得 $E_{r, \epsilon}(x)$ 发生。令 H_ϵ 表示 (63) 和 (64) 对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V, U)$ 均成立的事件。由并集界，$\mathbb{P}[F_\epsilon \cap H_\epsilon] \geq 1 - O_\epsilon(\epsilon^{\beta \wedge 2(1-\zeta)})$。现在固定 ϵ 并假设 $F_\epsilon \cap H_\epsilon$ 发生，我们将证明 (65) 和 (66) 成立。由于 (65) 和 (66) 的证明几乎相同，我们只证明 (65)。注意，如果 $C_0(\epsilon) < \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$，则 $C_1(\epsilon) \geq \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} > C_0(\epsilon)$，因此 (65) 成立，因为 (63) 成立。因此，我们可以假设 $C_0(\epsilon) \geq \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$。

固定 $(z, w) \in G(W, \tilde{W})$ 以及 $\phi \in \Lambda_\tau(V, U)$。则存在一条从 z 到 w、包含于 $\tilde{W}$ 中的 D_h-测地线 P，并且不妨假设 P按 D_h-长度参数化。令 $t_0 = 0$，并选择 $x_0 \in (\frac{\epsilon^{1-\zeta}}{4}\mathbb{Z}^2) \cap B_{\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})$ 以及 $r_0 \in \mathcal{R}_\epsilon$，使得 $z \in B_{r_0/2}(x_0)$ 且 $E_{r_0, \epsilon}(x_0)$ 发生。然后归纳地定义 t_j 为在时间 t_{j-1} 之后 P 离开 $B_{r_{j-1}}(x_{j-1})$ 的第一个时间，并选择

$x_j \in (\frac{\epsilon^{1-\zeta}}{4}\mathbb{Z}^2) \cap B_{\epsilon^{1-\zeta}}(\tilde{W})$ 以及 $r_j \in \mathcal{R}_\epsilon$，使得 $P(t_j) \in B_{r_j/2}(x_j)$ 且 $E_{r_j,\epsilon}(x_j)$ 发生。如果不存在这样的时间 t_j，则将 t_j 留为未定义。若 t_j 存在，则令 s_j 表示在 t_j 之前 P 离开 $B_{\alpha r_{j-1}}(x_{j-1})$ 的最后时刻。图2 展示了相关示意图。定义

$$\begin{aligned}\underline{J} &:= \max\left\{j \geq 1 : |P(t_{j-1}) - z| \leq 2\epsilon^{1-\zeta_+}\right\},\\ \overline{J} &:= \min\left\{j \geq 0 : |P(t_{j+1}) - w| \leq 2\epsilon^{1-\zeta_+}\right\}.\end{aligned}$$

假设 $j \in [\underline{J}+1, \overline{J}] \cap \mathbb{Z}$，那么 $P|_{[s_j,t_j]}$ 是从 D_h-测地线，从 $P(s_j) \in \partial B_{\alpha r_j}(x_j)$ 到 $P(t_j) \in \partial B_{r_j}(x_j)$ 包含在 $\mathbb{A}_{\alpha r_j, r_j}(x_j)$，因此根据定义4.11中的条件1，

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi\left(\mathbb{A}_{3r_j/4,7r_j/4}(x_j)\right)\right) \leq \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r_j\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r_j^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r_j}}(1+\delta)(t_j - s_j).$$

假设 $j \in [\underline{J}, \overline{J}+1] \cap \mathbb{Z}$，定义4.11 中的条件4和（63）可推出

$$\begin{aligned}&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(P(t_j)),\phi(P(s_{j+1}));\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})\right)\right)\\ &\quad\leq \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(P(t_j))\right),\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(P(s_{j+1}))\right);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(\tilde{W})\right)\right)\\ &\qquad+\sup_{\omega\in\partial B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(P(t_j))}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(P(t_j)),\phi(\omega);\phi\left(\mathbb{A}_{3r_{j-1}/4,5r_{j-1}/4}(x_{j-1})\right)\right)\\ &\qquad+\sup_{\omega\in\partial B_{4\epsilon^{1-\zeta_-}}(P(s_{j+1}))}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(P(s_{j+1})),\phi(\omega);\phi\left(\mathbb{A}_{3r_j/4,5r_j/4}(x_j)\right)\right)\\ &\quad\leq C_0(\epsilon)(s_{j+1}-t_j)\\ &\qquad+\delta\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r_{j-1}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r_{j-1}^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r_{j-1}}}D_h\left(\partial B_{\alpha r_{j-1}}(x_{j-1}),\partial B_{r_{j-1}}(x_{j-1})\right)\\ &\qquad+\delta\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r_j\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r_j^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r_j}}D_h\left(\partial B_{\alpha r_j}(x_j),\partial B_{r_j}(x_j)\right).\end{aligned}$$

若 $j \in [\underline{J}-1, \overline{J}-1] \cap \mathbb{Z}$，那么由于 $P(t_j) \in B_{r_j/2}(x_j)$ 且 $P(t_{j+1}) \in \partial B_{r_j}(x_j)$，我们知道 P 在时间 t_j 到 t_{j+1} 之间至少一次穿过 $\mathbb{A}_{\alpha r_j, r_j}(x_j)$。由此可得

$$\begin{aligned}&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(P(t_j)),\phi(P(s_{j+1}));\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})\right)\right)\\ &\qquad\leq C_0(\epsilon)(s_{j+1}-t_j)+\delta\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r_{j-1}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r_{j-1}^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r_{j-1}}}(t_j - t_{j-1})\\ &\qquad\quad+\delta\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r_j\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r_j^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r_j}}(t_{j+1}-t_j).\end{aligned}$$

因此，根据三角不等式，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi\left(P(t_{\underline{J}})\right),\phi\left(P(t_{\overline{J}})\right);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})\right)\right)\\ &\quad\leq\sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi\left(P(t_j)\right)\phi\left(P(s_{j+1})\right);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})\right)\right)\\ &\qquad+\sum_{\underline{J}+1}^{\overline{J}}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi\left(P(s_j)\right),\phi\left(P(t_j)\right);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})\right)\right)\\ &\quad\leq C_0(\epsilon)\sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1}(s_{j+1}-t_j)+\delta\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}\sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1}(t_j - t_{j-1})\\ &\qquad+\delta\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}\sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1}(t_{j+1}-t_j)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (1+\delta) \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \sum_{j=\underline{J}+1}^{\overline{J}} (t_j - s_j) \\
&\leq \left[C_0(\epsilon) - \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \right] \sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1} (s_{j+1} - t_j) \\
&\quad + \delta \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1} (t_j - t_{j-1}) \\
&\quad + \delta \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1} (t_{j+1} - t_j) \\
&\quad + (1+\delta) \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1} (t_{j+1} - t_j) .
\end{aligned}
$$

若$j \in [\underline{J}+1, \overline{J}] \cap \mathbb{Z}$，则 $|P(t_{j-1}) - z| > 2\epsilon^{1-\zeta_+} > 2r_{j-1}$且 $|P(t_{j-1}) - x_{j-1}| < r_{j-1}/2$，因此 $|z - x_{j-1}| > r_{j-1}$。类似地，$|w - x_{j-1}| > r_{j-1}$。于是 P必须穿过$\mathbb{A}_{\alpha r_{j-1}, r_{j-1}}(x_{j-1})$在时间 t_{j-1}之前至少一次，且在时间 s_j之后至少一次。因此，根据定义4.11中的条件3，

$$
s_j - t_{j-1} \;\leq\; A D_h\left(\partial B_{\alpha r_{j-1}}(x_{j-1}), \partial B_{r_{j-1}}(x_{j-1})\right) \;\leq\; A\,(t_j - s_j)\,.
$$

两边同时加上 $A(s_j - t_{j-1})$，我们得到

$$
s_j - t_{j-1} \;\leq\; \frac{A}{A+1}\,(t_j - t_{j-1})\,.
$$

将上述估计与 $|P(t_{\underline{J}}) - z| \leq 4\epsilon^{1-\zeta_+}$ 以及 $|P(t_{\overline{J}}) - w| \leq 4\epsilon^{1-\zeta_+}$这一事实结合起来，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(z)\right), \phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(w)\right); \phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+}}(\tilde{W})\right)\right) \\
&\leq \left[C_0(\epsilon) - \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \right] \frac{A}{A+1} \sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1} (t_{j+1} - t_j) \\
&\quad + \delta \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1} (t_j - t_{j-1}) \\
&\quad + \delta \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1} (t_{j+1} - t_j) \\
&\quad + (1+\delta) \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}-1} (t_{j+1} - t_j) \\
&\leq \left[\frac{A}{A+1} C_0(\epsilon) + \left(\frac{1}{A+1} + 3\delta\right) \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} \right] D_h\left(z, w; \tilde{W}\right).
\end{aligned}
$$

□

4.3 坐标变换后的LFPP的收敛

我们现在的目标是证明，对于所有的（，），坐标变换后的度量

$$
\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} D_{h^\phi}^\epsilon \;\phi\cdot\;\; \phi\cdot\;\; \phi\; V \qquad\qquad \phi \in \hat{}\,(\,)\,(\,);(\,)
$$

$\Lambda_\tau \;\; V \;\; U \qquad\qquad D_h \;\cdot\;\cdot\; V$

在对角线的某个邻域上一致收敛到（，；）。我们的思路是迭代应用命题 4.10，得到一个依赖于缩放比 $\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$的 Lipschitz 常数序列 $C_j(\epsilon)$。我们将论证，当 $\mathcal{R}_\epsilon$ 选取得当时，这些比值接近 1（引理 4.20），并且这意味着当 j 足够大时，$C_j(\epsilon) < 1 + \delta$。由于命题 4.10 中的 Lipschitz 条件以多项式级高概率成立（当 $\epsilon \to 0$ 时），对 $\epsilon = 2^{-n}$ 应用 Borel-Cantelli 引理可知，对于任意固定的 $\delta > 0$，我们都得到一个几乎必然成立的近似 Lipschitz 条件，其 Lipschitz 常数为 $1 + \delta$。令 $\delta \to 0$ 趋于极限，即可推出几乎必然收敛。

在全文中，$\xi < \xi_{\text{crit}}$。我们先陈述本节的主要结果。为简化符号，若 $\rho > 0$ 且 $W \subset \mathbb{C}$，定义

$$\Delta_\rho(W) \coloneqq \left\{(z,w) \in W^2 : |z-w| \le \rho\right\}.$$

定理 4.19。设 h 为全平面高斯自由场。固定开集 $W \Subset V \Subset U$ 和 $\tau > 1$。存在随机的 $\rho = \rho_{W,V,U,\tau} > 0$，使得几乎必然，$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \curlywedge D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot);\ \phi(V))$ 在 $\Delta_\rho(W)$ 上一致收敛于 $D_h(\cdot,\cdot;V)$，且该收敛关于 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$ 一致，其中 $\epsilon \to 0$ 沿 $\{2^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$。

我们指出，对于所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$，$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \curlywedge D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$ 的同时收敛仅在离散子序列 $\{2^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 上得到证明。要证明其沿 $(0,1)$ 收敛，需要在 ϵ、δ 较小且 $\frac{\epsilon}{\delta} \approx 1$ 时，比较 $(h\circ\phi^{-1})_\epsilon^*(\phi(z))$ 与 $(h\circ\phi^{-1})_\delta^*(\phi(z))$。对于固定的 ϕ，这并不困难；但要同时对所有 ϕ 做到这一点，似乎需要新的思路。

在证明定理 4.19 之前，我们先证明几个引理。我们的第一个引理大致表明，$r \in (\epsilon^{1-\zeta_-}, \epsilon^{1-\zeta_+}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 中至多有 $\frac{2}{3}$ 比例的部分具有 $\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$ or $\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}$ far from 1.

我们先引入引理陈述所需的一些符号。对于一个序列 $0 < \zeta(0) < \zeta_+(0) = \zeta_-(1) < \zeta(1) < \zeta_+(1) = \zeta_-(2) < \zeta(2) < \zeta_+(2) = \zeta_-(3) < \cdots < 1$ with $1-\zeta_+(n) < \frac{1}{2}(1-\zeta(n))$，若对所有 n 都成立，则定义

$$\mathcal{S}_\epsilon^{(n)} \coloneqq \left\{\mathcal{R} \subset (\epsilon^{1-\zeta(n)}, \epsilon^{1-\zeta_+(n)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}} : \#\mathcal{R} > \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta(n)}, \epsilon^{1-\zeta_+(n)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})\right\},$$

$$X_\epsilon^{(n)} \coloneqq \min_{\mathcal{R}\in\mathcal{S}_\epsilon^{(n)}} \sup_{r\in\mathcal{R}} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}, \tag{105}$$

$$Y_\epsilon^{(n)} \coloneqq \min_{\mathcal{R}\in\mathcal{S}_\epsilon^{(n)}} \sup_{r\in\mathcal{R}} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}. \tag{106}$$

根据引理 4.9，存在 $\mathcal{R}_\epsilon^{(0)} \subset (\epsilon^{1-\zeta(0)}, \epsilon^{1-\zeta_+(0)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $L_0 = L_0(\zeta(0)\ \zeta_+(0)) \in (0,\infty)$，满足 $\#\mathcal{R}_\epsilon^{(0)} > \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta(0)}, \epsilon^{1-\zeta_+(0)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$，使得

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon^{(0)}} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}} < L_0, \tag{107}$$

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon^{(0)}} \sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} < L_0. \tag{108}$$

以下引理用于控制缩放比 $\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}$。

引理 4.20. *固定一个序列 $0 < \zeta(0) < \zeta_+(0) = \zeta_-(1) < \zeta(1) < \zeta_+(1) = \zeta_-(2) < \zeta(2) < \zeta_+(2) = \zeta_-(3) < \cdots < 1$，使得对所有 n 有 $1-\zeta_+(n) < \frac{1}{2}(1-\zeta(n))$。按 (105) 和 (106) 定义 $X_\epsilon^{(n)}$ 和 $Y(n)_\epsilon$，并令 $L_0 \in (0,\infty)$ 使得 (107) 和 (108) 同时成立。令 C_0 如命题 4.1 中那样，但以 $(\zeta(0)\ \zeta_+(0))$ 代替 (ζ,ζ_+)，并令 A 如命题 4.10 中那样。固定 $\delta \in (0,1)$，并选取足够大的 N，使得 $(\frac{A}{A+1})^N C_0 L_0 < \frac{\delta/4}{1+\delta}$。存在 $\epsilon_N \in (0,1)$，使得对所有 $\epsilon \in (0,\epsilon_N)$，*

$$\#\left\{1 \le n \le 3N : X_\epsilon^{(n)} > \frac{1}{1+\delta}\right\} > 2N, \tag{109}$$

$$\#\left\{1 \le n \le 3N : Y_\epsilon^{(n)} > \frac{1}{1+\delta}\right\} > 2N. \tag{110}$$

证明。论证与 [Dev24 中的引理 4.19], 基本相同，因此我们只作简要概述。思路是，若结论不成立，则存在一个指标集 S，其中包含 N，使得沿着一列趋于 0 的 ϵ，例如对所有 $n \in S$ 都有 $Y(\epsilon^n \le \frac{1}{1+\delta})$。如果我们反复应用命题 4.10，其中 $(\zeta_-,\zeta,\zeta_+) = (\zeta_-(n)\ \zeta(n)\ \zeta_+(n))$，且 $\mathcal{R}_\epsilon$ 是 $Y_\epsilon^{(n)}$ 的一个极小化子，那么我们将得到 D_h 与 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \curlywedge D_h^\epsilon$ 之间的一个近似利普希茨条件，其 Lipschitz 常数严格小于 1（只要 N 足够大）。这与 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \curlywedge D_h^\epsilon \to D_h$ 这一事实矛盾。

□

利用引理 4.20，现在我们可以将以下想法精确表述：对所有足够大的 $C_j(\epsilon)$ $C'_j(\epsilon)$ $< 1+\delta$ 均成立。 j

命题 4.21. 设 $W \Subset \tilde{W} \Subset V \Subset U$ 是开集。存在 $\beta = \beta(\delta)$ > 0 以及$\zeta = \zeta(\delta) \in (0,1)$ 使得以概率 $1 - O_\epsilon(\epsilon^\beta)$ 当 $\epsilon \to 0$ 时，对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V,U)$,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z)\right), \phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(w)\right); \phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(\tilde{W})\right)\right) \\ &\qquad \le (1+\delta) D_h\left(z, w; \tilde{W}\right) \quad \forall (z,w) \in G(W,\tilde{W}), \end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned} &D_h\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z), B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(w); B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(\tilde{W})\right) \\ &\qquad \le (1+\delta)\, \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z), \phi(w); \phi(\tilde{W})\right) \quad \forall (z,w) \in G^\phi_\epsilon(W,\tilde{W}). \end{aligned} \tag{112}$$

证明。选取一个序列 $0 < \zeta(0) < \zeta_+(0) = \zeta_-(1) < \zeta(1) < \zeta_+(1) = \zeta_-(2) < \zeta(2) < \zeta_+(2) = \zeta_- 3 < \cdots$ $1 - \zeta_+ n < \frac{1}{2}\, 1 - \zeta\, n$ n C_0 4 1 ( )，使得对所有 , ( ) (( ))。令 为命题 . . 中的对象。令 A 为命题 4.10 中的对象。令 L_0 为式 (107) 和 (108) 中的对象。选取足够大的 N，使得 $(\frac{A}{A+1})^N C_0 L_0 < \frac{\delta/4}{1+\delta}$。采用引理 4.20 及其前一段中的符号。根据引理 4.20，对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_N)$，集合

$$I_\epsilon := \left\{1 \le n \le 3N : X^{(n)}_\epsilon \wedge Y^{(n)}_\epsilon > \frac{1}{1+\delta}\right\}$$

h因为基数至少为 N . 引理 3 .8，这意味着我们可以缩小 ϵ_N，使得对于每个 $\epsilon \in (0, \tau\epsilon_N^{\zeta\,(N)})$ and each $t \in [\tau^{-2}, \tau^2]$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} t^{1-\xi Q} \le \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon t}}{\mathfrak{a}_\epsilon} \le \sqrt{1+\delta}\, t^{1-\xi Q}. \tag{113}$$

对于每个满足 $\#S \ge N$ 的 $S \subset \{1,2,\dots,3N\}$，令

$$\mathcal{E}_S := \{\epsilon \in (0,\epsilon_N) : S \subset I_\epsilon\}.$$

注意，对于每个 $\epsilon \in (0,\epsilon_N)$，$\epsilon \in \mathcal{E}_{I_\epsilon}$ 都成立，因此 $(0,\epsilon_N)$ 是当 S 遍历一个 a 时这些 $\mathcal{E}_S$ 的并集 ll s基数至少为 N 的 $\{1,2,\dots,3N\}$ 的子集。

固定满足 $\#S \ge N$ 且 $\inf \mathcal{E}_S = 0$ 的 $S \subset \{1,2,\dots,3N\}$。我们需要以下引理。

引理 4.22。 对于每个 $n \in S$ 和 $\epsilon \in \mathcal{E}_S$，集合

$$\mathcal{R}^{(n)}_\epsilon := \left\{r \in (\epsilon^{1-\zeta(n)}, \epsilon^{1-\zeta_+(n)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}} : \frac{1}{(1+\delta)^2} \le \frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}} \le (1+\delta)^2 \ \forall t \in [\tau^{-1},\tau]\right\}$$

的基数至少为 $_{1\,3}\#((\epsilon^{1-\zeta(n)}, \epsilon^{1-\zeta_+(n)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$。

证明。 确实，若此结论不成立，则其中一个集合

$$\mathcal{U}^{(n)}_\epsilon := \left\{r \in (\epsilon^{1-\zeta(n)}, \epsilon^{1-\zeta_+(n)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}} : \inf_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}} < \frac{1}{(1+\delta)^2}\right\},$$

$$\mathcal{L}^{(n)}_\epsilon := \left\{r \in (\epsilon^{1-\zeta(n)}, \epsilon^{1-\zeta_+(n)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}} : \inf_{t\in[\tau^{-1},\tau]} \frac{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}} < \frac{1}{(1+\delta)^2}\right\}$$

其基数为 $>\#\,_{1\,3}((\epsilon^{1-\zeta(n)}, \epsilon^{1-\zeta_+(n)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$。但若 $\#\mathcal{U}^{(n)}_\epsilon > \frac{1}{3}\#((\epsilon^{1-\zeta(n)}, \epsilon^{1-\zeta_+(n)}) \cap \{8^{-j}\}_{j\in\mathbb{N}})$，那么由于对每个 $r \in \mathcal{U}^{(n)}_\epsilon$ 以及每个 $t, s \in [\tau^{-1},\tau]$,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t/r}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon t}}}{\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon s/r}}{r\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon s}}} &= \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon s/r}}{\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}} \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon t}}{\mathfrak{a}_{\epsilon s}} \\ &= \frac{\mathfrak{a}_{(\epsilon t/r)(s/t)}}{\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}} \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon s(t/s)}}{\mathfrak{a}_{\epsilon s}} \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{1+\delta}\left(\frac{s}{t}\right)^{1-\xi Q}\sqrt{1+\delta}\left(\frac{t}{s}\right)^{1-\xi Q} \qquad \text{(by (113))}$$
$$= 1+\delta,$$

我们看到

$$Y_\epsilon^{(n)} \leq \sup_{r\in\mathcal{U}_\epsilon^{(n)}}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} \leq (1+\delta)\sup_{r\in\mathcal{U}_\epsilon^{(n)}}\inf_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}} < \frac{1}{1+\delta},$$

这与以下事实矛盾： $n\in S$ 和 $\epsilon\in\mathcal{E}_S$。 □

将 S的前 N个元素记为 $n_1<n_2<\cdots<n_N$，并令 $n_0=0$。令 $\delta':=\delta(A+1)$，并令 $\mathcal{R}_\epsilon^{(0)}$ 如(107)和(108)中所定义。递归地定义 $C_j(\epsilon)$和 $C_j'(\epsilon)$，使得 $C_0(\epsilon):=C_0L_0$,$C_0'(\epsilon):=C_0L_0$，且

$$C_j := \frac{A}{A+1}\left[\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon^{(n_j)}}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}\vee C_{j-1}(\epsilon)\right]+\left[\frac{1}{A+1}+3\delta'\right]\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon^{(n_j)}}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}},$$
$$C_j' := \frac{A}{A+1}\left[\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon^{(n_j)}}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}\vee C_{j-1}'(\epsilon)\right]+\left[\frac{1}{A+1}+3\delta'\right]\sup_{r\in\mathcal{R}_\epsilon^{(n_j)}}\sup_{t\in[\tau^{-1},\tau]}\frac{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}.$$

将$(\zeta(0)\ \zeta_+(0)\ \mathcal{R}_\epsilon^{(0)},\tilde{W})$代入命题4.1 中的$(\zeta,\zeta_+,\mathcal{R}_\epsilon,W)$，再将$(\zeta_-(n_j)\ \zeta(n_j)\ \zeta_+(n_j)\ \mathcal{R}^{(n_j)_\epsilon},C_{j-1}(\epsilon)\,C_{j-1}'(\epsilon)\ \delta')$代入命题4.10中的$(\zeta_-,\zeta,\zeta_+,\mathcal{R}_\epsilon,C_0(\epsilon)\ C_0'(\epsilon)\ \delta)$，可知存在某个 $\beta=\beta(S)>0$，其概率为 $1-O_\epsilon(\epsilon^\beta)$，当 $\epsilon\to 0$时，

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+(n_N)}}(z)\right),\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+(n_N)}}(w)\right);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+(n_N)}}(\tilde{W})\right)\right)$$
$$\leq C_N(\epsilon)D_h\left(z,w;\tilde{W}\right)\ \forall(z,w)\in G(W,\tilde{W}), \tag{114}$$
$$D_h\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_+(n_N)}}(z),B_{4\epsilon^{1-\zeta_+(n_N)}}(w);B_{4\epsilon^{1-\zeta_+(n_N)}}(\tilde{W})\right)$$
$$\leq C_N'(\epsilon)\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(z,w;\tilde{W}\right)\ \forall(z,w)\in G_\epsilon^\phi(W,\tilde{W}). \tag{115}$$

我们断言，对所有 $\epsilon\in\mathcal{E}_S$ 都有 $C_N(\epsilon)\vee C_N'(\epsilon)\leq(1+\delta)^3$。事实上，如果对某个 $1\leq j\leq N-1$有 $C_j(\epsilon)\leq(1+\delta)^3$，则

$$C_{j+1}(\epsilon) \leq \frac{A}{A+1}(1+\delta)^3+\left[\frac{1}{A+1}+3\delta'\right](1+\delta)^2$$
$$< \frac{A}{A+1}(1+\delta)^3+\frac{1}{A+1}(1+\delta)^2+3\frac{\delta}{3(A+1)}(1+\delta)^2 \qquad \left(\delta'<\frac{\delta}{3(A+1)}\right)$$
$$= (1+\delta)^3,$$

因此 $C_N(\epsilon)\leq(1+\delta)^3$。反之，如果对所有 $1\leq j\leq N-1$都有 $C_j(\epsilon)>(1+\delta)^3$，则由归纳法以及如下事实：对所有 $r\in\mathcal{R}^{(n_j)_\epsilon}$和所有$t\in[\tau^{-1},\tau]$，都有 $\frac{r\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1}}{r^{\xi Q}\mathfrak{a}_{\epsilon t/r}^{-1}}\leq(1+\delta)^2$，

$$C_N(\epsilon) \leq \left(\frac{A}{A+1}\right)^N C_0L_0+\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{A}{A+1}\right)^j\left[\frac{1}{A+1}+3\delta'\right](1+\delta)^2$$
$$\leq \frac{\delta}{2}(1+\delta)^2+\left[1+3(A+1)\delta'\right](1+\delta)^2 \qquad \left(\left(\frac{A}{A+1}\right)^N C_0L\leq\frac{\delta/4}{1+\delta}<\frac{\delta}{2}(1+\delta)^2\right)$$
$$= \frac{\delta}{2}(1+\delta)^2+(1+\delta)^2+3(A+1)\frac{\delta}{6(A+1)}(1+\delta)^2 \qquad \left(\delta'=\frac{\delta}{6(A+1)}\right)$$
$$= (1+\delta)^3.$$

类似地，$C_N'(\epsilon)\leq(1+\delta)^3$。

将界 $C_N(\epsilon)\vee C_N'(\epsilon)\leq(1+\delta)^3$与 (114) 和 (115) 相结合，我们已证明，当 $\epsilon\to 0$沿 $\mathcal{E}_S$，并以 $(1+\delta)^3$代替 $1+\delta$、以 $\zeta_+(n_N)$ 代替 ζ 时，(111) 和 (112) 以概率 $1-O_\epsilon(\epsilon^{\beta(S)})$ 成立。对所有有限多个满足 $\#S\geq N$ 且 $\inf\ \mathcal{E}_S=0$的 $S\subset\{1,2,\ldots,3N\}$ 重复此过程，并令 β为诸 $\beta(S)$中的最小者，令 ζ 为诸 $\zeta_+(n_N)$ 中的最大者，从而在以 $(1+\delta)^3$ 代替 $1+\delta$ 的情形下证明该命题。□

我们的下一个引理将使我们能够控制用球到球距离估计点到点距离所产生的误差项。它将依赖于以下结果，即 [Dev24，方程 (40)]。

引理4.23。设 h 为一个全平面高斯自由场，并固定 $R > 0$ 和 $\eta \in (0,1)$。存在一个随机变量 $C > 0$，使得几乎必然地，对所有充分小的 ϵ，

$$\sup_{z \in B_R(0)} \left| \hat{h}_\epsilon^*(z) \right| \leq (2+\eta) \log \epsilon^{-1} + C.$$

引理4.24。固定 $\zeta \in (0,1)$ 和开集 $W \Subset \tilde{W} \Subset V \Subset U$。几乎必然地，

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{z,w \in W \\ |z-w| \leq 4 \cdot 2^{-n(1-\zeta)}}} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_{2^{-n}}^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^{2^{-n}} \left(\phi(z), \phi(w); \phi\left(\tilde{W}\right) \right) = 0. \tag{116}$$

证明。证明的思路是，当 $\zeta \in (0, 1/3)$时，引理 3.6 和 Borel-Cantelli 引理表明，只需证明116即可得到 (

$$\sup_{\substack{z,w \in W \\ |z-w| \leq 4 \cdot 2^{-n(1-\zeta)}}} \sup_{t \in [\tau^{-1}, \tau]} \mathfrak{a}_{2^{-n}t}^{-1} \hat{D}_h^{2^{-n}t} \left(z, w; \tilde{W} \right) \to 0. \tag{117}$$

通过估计一条欧几里得长度为 $\epsilon^{1-\zeta}$ 的线段的 $\mathfrak{a}_{\epsilon t}^{-1} \hat{D}_h^{\epsilon t}$-长度，我们可以证明，对于所有充分接近 0 的 $\zeta \in (0, 1)$，(117) 都成立。为了将其推广到任意的 $\zeta \in (0, 1)$，我们固定一个充分接近 0、使前述情形适用的 $\zeta' \in (0, 1)$，然后用 $\phi(z)$（分别为 $\phi(w)$）到 $\phi(\partial B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(z))$（分别为 $\phi(\partial B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(w))$）中某一点的距离，加上 $\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(z))$ 与 $\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(w))$ 之间的距离，来估计 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon(\phi(z)\ \phi(w);\ \phi(\tilde{W}))$。由于 ζ' 充分接近 0，前述距离沿序列 $\epsilon = 2^{-n}$ 几乎必然收敛到 0。为了处理 $\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z))$ 与 $\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(w))$ 之间的距离，我们利用命题 4.1 将其与 D_h-距离进行比较；根据连续性，z 与 w 之间的距离收敛到 0。

首先固定 $\zeta \in (0, 1/3)$。我们始终假设 n 足够大使得 $4 \cdot 2^{-n(1-\zeta)} < d(W, \partial W')$ 且 $B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(W') \subset \tilde{W}$。由引理 3.6 以及对 $(\frac{\epsilon^{1-\zeta}}{4}\mathbb{Z}^2) \cap W'$ 应用并集界，可知存在常数 c、$\tilde{c}$、$\epsilon_0 > 0$，使得对每个 $\epsilon \in (0,\ \epsilon_0)$，

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{ \sup_{z_0 \in (\frac{\epsilon^{1-\zeta}}{4}\mathbb{Z}^2) \cap W'} \sup_{z \in B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left| \langle h, \Psi_\epsilon^{\phi,z} - \Psi^{\mathrm{id},z}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|} \rangle \right| > 1 \right\} \\ &\qquad \leq \tilde{c}\epsilon^{-2(1-\zeta)} \exp\left(-c \frac{\epsilon^{-2+6\zeta}}{(\log \epsilon^{-1})^3} \right). \end{aligned} \tag{118}$$

取 $\epsilon = 2^{-n}$，(118) 可求和，因此由 Borel-Cantelli 引理，几乎必然地，对所有充分大的 n，

$$\sup_{z_0 \in (\frac{2^{-n(1-\zeta)}}{4}\mathbb{Z}^2) \cap W'} \sup_{z \in B_{4 \cdot 2^{-n(1-\zeta)}}(z_0)} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left| \langle h, \Psi_{2^{-n}}^{\phi,z} - \Psi^{\mathrm{id},z}_{2^{-n}/|\phi'(z_0)|} \rangle \right| \leq 1. \tag{119}$$

由引理 3.7 和引理 3.8，我们可以减小 ϵ_0，使得对所有 $\epsilon \in (0,\ \epsilon_0)$，

$$\sup_{z \in \tilde{W}} \sup_{\phi \in \Lambda_\tau(V,U)} \left| \langle -\log|\phi'|, \Psi_\epsilon^{\phi,z} \rangle - (-\log|\phi'(z)|) \right| < 1, \tag{120}$$

$$\sup_{t \in [\tau^{-1}, \tau]} \left| \frac{\mathfrak{a}_{t\epsilon}}{\mathfrak{a}_\epsilon} - t^{1-\xi Q} \right| \leq \tau^{1-\xi Q}. \tag{121}$$

注意，若 (121) 成立，则对于 $s,\ t \in [\tau^{-1}, \tau]$，

$$\frac{\mathfrak{a}_{\epsilon/t}}{\mathfrak{a}_\epsilon} s^{1-\xi Q} = s^{1-\xi Q} \left(\frac{\mathfrak{a}_{\epsilon/t}}{\mathfrak{a}_\epsilon} - t^{-(1-\xi Q)} \right) + (s/t)^{1-\xi Q} \leq 2\tau^{2(1-\xi Q)}. \tag{122}$$

现在假设 $\epsilon = 2^{-n}$，且 n 足够大，使得 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$。固定 z、$w \in W$，使得 $|z-w| \leq \epsilon^{1-\zeta}$。固定 $z_0 \in (\frac{\epsilon^{1-\zeta}}{4}\mathbb{Z}^2) \cap W'$，使得 $|z - z_0| < \epsilon^{1-\zeta}$。那么 z、$w \in B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z_0) \subset \tilde{W}$，因此

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon \left(\phi(z), \phi(w); \phi(\tilde{W}) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z_0))\right)\\
&\leq e^\xi e^{\xi Q}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|} && \text{(by (119), (120))}\\
&\qquad\cdot \inf_{\substack{P:\, z\to w\\ P\subset B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)}}\int_0^1 \frac{\mathfrak{a}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}}{\mathfrak{a}_\epsilon}|\phi'(P(t))|^{1-\xi Q}e^{\xi\hat{h}^*_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(P(t))}|P'(t)|\,\mathrm{d}t\\
&\leq e^\xi e^{\xi Q}2\tau^{2(1-\xi Q)}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\inf_{\substack{P:\, z\to w\\ P\subset B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)}}\int_0^1 e^{\xi\hat{h}^*_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}(P(t))}|P'(t)|\,\mathrm{d}t && \text{(by (122))}\\
&= e^\xi e^{\xi Q}2\tau^{2(1-\xi Q)}\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\left(z,w;B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)\right).
\end{aligned}
$$

用从 z 到 w 的线段长度来上界右侧的度量，引理 4.23 以及 $\mathfrak{a}_\epsilon \geq c'\epsilon^{1-\xi Q}(\log\epsilon^{-1})^{-b}$（其中 b），$c'>0$ [DG23，定理 1。11] 可推出

$$
\mathfrak{a}^{-1}_{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\hat{D}_h^{\epsilon/|\phi'(z_0)|}\left(z,w;B_{2\epsilon^{1-\zeta}}(z_0)\right) \leq C|z-w|\epsilon^{-\xi(2+\eta)}\epsilon^{\xi Q-1}\left(\log\epsilon^{-1}\right)^b
$$

对任意 $\eta\in(0,1)$，其中 $C>0$ 是随机的，但不依赖于 z_0 或 ϕ。由于 $|z-w|\leq 4\epsilon^{1-\zeta}$和 $Q>2$，若 η 和 ζ 足够接近0，则右端至多为 $2C$ 乘以 ϵ 的某个正幂再乘以$(\log\epsilon^{-1})^b$，因此当 $\epsilon\to 0$时收敛于0。这就证明了 ζ 充分接近0时的引理。

为了对任意的 $\zeta\in(0,1)$，令 $\zeta'\in(0,\zeta)$ 足够接近0 以使前述论证适用，并利用命题4.1 将 ζ' 替换 ζ_+，从而看出以概率 $1-O_\epsilon(\epsilon^\beta)$ 对某个 $\beta=\beta(\zeta')>0$，对所有 $z,w\in W$ 且 $|z-w|\leq\epsilon^{1-\zeta}$，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi(\tilde{W})\right)\\
&\qquad\leq \sup_{u\in B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(z)}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(u);\phi(\tilde{W})\right)\\
&\qquad\qquad+\sup_{v\in B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(w)}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(v),\phi(w);\phi(\tilde{W})\right)\\
&\qquad\qquad+\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(z)\right),\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(w)\right);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(W')\right)\right)\\
&\qquad\leq \sup_{u\in B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(z)}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(u);\phi(\tilde{W})\right)\\
&\qquad\qquad+\sup_{v\in B_{4\epsilon^{1-\zeta'}}(w)}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(v),\phi(w);\phi(\tilde{W})\right)\\
&\qquad\qquad+C_0D_h\left(z,w;W'\right),
\end{aligned}
$$

其中 C_0 如命题 4.1所述。根据 Borel-Cantelli，该不等式对 $\epsilon=2^{-n}$ 所有 n 充分大时成立。右侧的前两项根据前一种情形（取一个开集 W' 使得 $W\Subset W'\Subset\tilde{W}$代替 W以确保 $B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z)\subset W'$ 对所有 $z\in W$ 以及所有 ϵ 充分小时成立）收敛到 0，而第三项根据 D_h的连续性几乎必然收敛到 0。 □

回顾一下，对于 $\rho>0$，我们定义了

$$
\Delta_\rho(W) := \left\{(z,w)\in W^2:|z-w|\leq\rho\right\}.
$$

我们的下一个引理表明，$\cap_{\phi\in\Lambda_\tau(V,\ U)}G^\phi_\epsilon(W,\ \tilde{W})$ 包含 $\Delta_\rho(W)$ 对于一个随机 $\rho>0$。

引理4.25。对于每个连通开集 $U\subset\mathbb{C}$，存在一个可测集 $F_U\subset\mathcal{D}'(U)$ 满足以下条件。

˜ (*i*) 如果 $h\in F_U$，那么对于所有开 $W\Subset W\Subset V\Subset U$ 和 $\tau>1$，都存在 $\rho>0$ 和 $N\in\mathbb{N}$，使得

$$
\Delta_\rho(W)\subset\bigcap_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}G^\phi_{2^{-n}}\left(W,\tilde{W}\right)\ \forall n\geq N.
$$

(ii) 若 h 是全平面高斯自由场，则 $h|_U\in F_U$ 几乎必然。

(iii) 若 $h \in \mathcal{D}'(U)$ 且 $\phi\colon U \to \phi(U)$ 是共形映射，则 $h \in F_U$ 当且仅当 $h^\phi \in F_{\phi(U)}$。证明。给定开集 $W \Subset \tilde{W} \Subset V \Subset U$、$\tau > 1$、$\rho > 0$ 和 $M \in \mathbb{N}$，定义 $F_{W,\,\tilde{W},\,V,\,U,\,\tau,\,\rho,\,M}$ 为满足对所有 $\phi \in \Lambda_\tau(V, U)$ 均有 $h \in \mathcal{D}'(U)$ 的集合，

$$\mathfrak{a}_{2^{-m}}^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^{2^{-m}}(\phi(z), \phi(w); \phi(V)) < \frac{1}{2} \mathfrak{a}_{2^{-m}}^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^{2^{-m}}\left(\phi(W), \phi(\partial\tilde{W})\right) \ \forall m \geq M \ \forall (z,w) \in \Delta_\rho(W). \tag{123}$$

注意，如果（123）成立，那么对所有 $m \geq M$，$\Delta_\rho(W) \subset G_{2^{-m}}^\phi(W, \tilde{W})$。此外，根据引理 4.5，$\Lambda_\tau(V, U)$ 可以替换为 $\lambda_\tau(V, U)$，因此 $F_{W,\,\tilde{W},\,V,\,U,\,\tau,\,\rho,\,M}$ 是 $\mathcal{D}'(U)$ 的可测子集。

现在取一列递增到 U 的开集 $W_n \Subset \tilde{W}_n \Subset V_n \Subset U$。定义 F_U 为如下事件：对所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $j \geq n$，使得对所有 $\tau \geq 2$，都存在 M、$\ell \in \mathbb{N}$，使得 $F_{W_n,\,\tilde{W}_j,\,V_j,\,U,\,\tau,\,1/\ell,\,M}$ 成立。

由 (123) 可知 (i) 成立。为证明 (iii)，利用以下事实：若 $\phi\colon U \to \phi(U)$ 和 $\psi\colon \phi(U) \to \psi(\phi(U))$ 是共形映射，且 $W \Subset \tilde{W} \Subset V \Subset \phi(U)$，则 $(h^\phi)^\psi = h^{\psi\circ\phi}$（回忆一下，$h^\phi := h \circ \phi^{-1} + Q \log |(\phi^{-1})'|$）并且

$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{(h^\phi)^\psi}^\epsilon(\psi(z), \psi(w); \psi(V)) = \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^{\psi\circ\phi}}^\epsilon((\psi\circ\phi)(\phi^{-1}(z)), (\psi\circ\phi)(\phi^{-1}(w)); (\psi\circ\phi)(\phi^{-1}(V)))$$
$$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{(h^\phi)^\psi}^\epsilon\left(\psi(W), \psi(\partial\tilde{W})\right) = \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^{\psi\circ\phi}}^\epsilon\left((\psi\circ\phi)(\phi^{-1}(W)), (\psi\circ\phi)(\partial\phi^{-1}(\tilde{W}))\right)$$

˜再结合 $h \in F_U$ ρ $h \in F_{\phi^{-1}\,W\,\phi^{-1}\,\tilde{W}\,\phi^{-1}\,V\,U\,\tau\,\rho\,M}$ M $W \Subset$ 蕴含()( )(),,,对足够大的 和足够小的 ( ) $V \Subset \phi\ U$ 成立这一事实。

现在来验证 (ii)。设 h 是一个全平面高斯自由场。证明思路是，根据连续性，当 ρ 足够小时，$D_h(z,w) < \frac{1}{2} D_h(W, \partial\tilde{W})$ 对所有 $z, w \in W$ 满足 $|z - w| \leq \rho$。利用命题 4.1，我们可以将这个不等式转移到 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1\hat{}} D_{h^\phi}^\epsilon$ 上，其中 ϵ 足够小。

固定 $\zeta \in (0,1)$。由引理 4.24 (将 W 替换为 $\overline{W}$ 包含于˜中的一个邻域 W，几乎必然有，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in W} \sup_{w\in\partial B_{4n^{-a(1-\zeta)}}(z)} \sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_{2^{-n}}^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^{2^{-n}}\left(\phi(z), \phi(w); \phi\left(\tilde{W}\right)\right) = 0.$$

固定一个开集 W'，使得 $\tilde{W} \Subset W' \Subset V$。利用命题 4.1 找出 $C_0, \beta > 0$，使得概率至少为 $1 - O_\epsilon(\epsilon^\beta)$ 当 $\epsilon \to 0$ 时，

$$\begin{aligned} &\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z)\right), \phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(w)\right); \phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(\tilde{W})\right)\right) \\ &\qquad \leq C_0 D_h\left(z, w; \tilde{W}\right) \ \forall z, w \in \tilde{W}, \end{aligned} \tag{124}$$

$$\begin{aligned} &D_h\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z), B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(w); B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(W')\right) \\ &\qquad \leq C_0 \inf_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi(z), \phi(w); \phi\left(W'\right)\right) \ \forall z, w \in W'. \end{aligned} \tag{125}$$

Borel-Cantelli 引理意味着，几乎必然地，(124) 和 (125) 对 $\epsilon = 2^{-n}$ 一切充分大的 n 都成立。固定 $\eta > 0$，使得 $\inf_{z\in W, w\in\partial\tilde{W}} |z - w| > 2\eta$ 且 $\inf_{z\in\tilde{W}, w\in\partial W'} |z - w| > 2\eta$。由 D_h 的连续性，存在 $\rho > 0$ 使得

$$\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)} D_h(z, w) < \frac{1}{4} C_0^{-2} D_h\left(B_\eta(W), B_\eta(\partial\tilde{W})\right). \tag{126}$$

选取 N 足够大，使得 $4 \cdot 2^{-n(1-\zeta)} < \eta$, (124) 和 (125) 对 $\epsilon = 2^{-n}$ 满足 $n \geq N$，并且对每个 $n \geq N$,

$$\begin{aligned} &\sup_{z\in W} \sup_{w\in\partial B_{4\cdot 2^{-n(1-\zeta)}}(z)} \sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_{2^{-n}}^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^{2^{-n}}\left(\phi(z), \phi(w); \phi\left(\tilde{W}\right)\right) \\ &\qquad < \frac{1}{8} C_0^{-1} D_h\left(B_\eta(W), B_\eta(\partial\tilde{W})\right). \end{aligned} \tag{127}$$

那么，对于每个 $n \geq N$ 以及每个 $\phi \in \Lambda_\tau(V, U)$，若 $\epsilon = 2^{-n}$，

$$\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1} \hat{D}_{h^\phi}^\epsilon(\phi(z), \phi(w); \phi(V))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(\tilde{W})\right)\right)\\
&\leq \sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(z)),\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(w));\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(\tilde{W}))\right)\\
&\qquad + 2\sup_{u\in W}\sup_{v\in\partial B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(u)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(u),\phi(v);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(\tilde{W})\right)\right)\\
&\leq C_0\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)} D_h\left(z,w;\tilde{W}\right) \qquad \text{(by (124))}\\
&\qquad + 2\sup_{u\in W}\sup_{v\in\partial B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(u)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(u),\phi(v);\phi\left(\tilde{W}\right)\right)\\
&< \frac{1}{2}C_0^{-1}D_h\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(W),B_{4\epsilon^{1-\zeta}}(\partial\tilde{W})\right) \qquad \text{(by (126), (127))}\\
&\leq \frac{1}{2}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(W,\partial\tilde{W}\right), \qquad \text{(by (125))}
\end{aligned}
$$

□

定理 *4.19* 的证明。取一个开集 $\tilde{W}$ 使得 $W \Subset \tilde{W} \Subset V$。由命题 4.21，对于每个 $j\in\mathbb{N}$，我们可以找到 $\beta_j>0$ 和 $\zeta_j\in(0,1)$ 使得以概率 $1-O_\epsilon(\epsilon^{\beta_j})$ 当 $\epsilon\to 0$ 时，对所有 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(z)\right),\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(w)\right);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(\tilde{W})\right)\right)\\
&\qquad \leq \frac{j+1}{j}D_h\left(z,w;\tilde{W}\right)\ \forall(z,w)\in G(W,\tilde{W}), \qquad (128)\\
&D_h\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(z),B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(w);B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(\tilde{W})\right)\\
&\qquad \leq \frac{j+1}{j}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi\left(\tilde{W}\right)\right)\ \forall(z,w)\in G^\phi_\epsilon(W,\tilde{W}). \qquad (129)
\end{aligned}
$$

固定一个开集 W' 使得 $W\Subset W'\Subset\tilde{W}$。由引理4.24和引理4.25，我们可以找到一个随机 $\rho>0$ 和确定的 $N_j\in\mathbb{N}$ 使得对每个 j，几乎必然有：

$$
\sup_{(z,w)\in\Delta_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(W')} D_h\left(z,w;\tilde{W}\right) < \frac{1}{j},\quad \epsilon=2^{-n},\ \forall n\geq N_j, \qquad (130)
$$

$$
\sup_{(z,w)\in\Delta_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(W')}\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi(\tilde{W})\right) < \frac{1}{j}\quad \epsilon=2^{-n},\ \forall n\geq N_j, \qquad (131)
$$

$$
\Delta_\rho(W) \subset G(W,\tilde{W})\cap\bigcap_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} G^\phi_\epsilon\left(W,\tilde{W}\right)\quad \epsilon=2^{-n},\ \forall n\geq N_1. \qquad (132)
$$

根据 Borel-Cantelli，我们可以增大 N_j，使得对于所有 $n\geq N_j$，(128) 和 (129) 对 $\epsilon=2^{-n}$ 均成立。我们可以假设 $(N_j)_{j=1}^\infty$ 严格递增，且 $B_{4\cdot 2^{-N_1}}(W)\Subset W'$。令 $\epsilon=2^{-n}$，并假设 $n\geq N_j$。对于 $(z,w)\in\Delta_\rho(W)$ 和 $\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi(V)\right)\\
&= \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(\tilde{W})\right)\right) \qquad \text{(by (132))}\\
&\leq \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(z)),\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(w));\phi(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(\tilde{W}))\right)\\
&\qquad + 2\sup_{(u,v)\in\Delta_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(W')} \mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(u),\phi(w);\phi(\tilde{W})\right)\\
&\leq \frac{j+1}{j}D_h\left(z,w;\tilde{W}\right)+\frac{2}{j} \qquad \text{(by (128), (131))}\\
&= \frac{j+1}{j}D_h\left(z,w;V\right)+\frac{2}{j},. \qquad \text{(by (132))}
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\limsup_{2^{-n}=\epsilon\to 0}\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)}\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\left[\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi(V)\right)-D_h\left(z,w;V\right)\right]
$$

$$\leq \limsup_{j\to\infty}\left[\frac{1}{j}\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)} D_h(z,w;V)+\frac{2}{j}\right]$$
$$= 0, \tag{133}$$

其中我们用到了以下事实：上确界$_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)} D_h(z,w;\ V) < \infty$根据连续性几乎必然成立。类似地，若$(z,w)\in\Delta_\rho(W)$且$\phi\in\Lambda_\tau(V,U)$，

$$\begin{aligned}
&D_h(z,w;V)\\
&= D_h\left(z,w;B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(\tilde{W})\right) && \text{(by (132))}\\
&\leq D_h\left(B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(z),B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(w);B_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(\tilde{W})\right)+2\sup_{(u,v)\in\Delta_{4\epsilon^{1-\zeta_j}}(W')} D_h\left(u,v;\tilde{W}\right)\\
&\leq \frac{j+1}{j}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}\left(\phi(z),\phi(w);\phi(\tilde{W})\right)+\frac{2}{j} && \text{(by (129), (130))}\\
&= \frac{j+1}{j}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}(\phi(z),\phi(w);\phi(V))+\frac{2}{j},, && \text{(by (132))}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\liminf_{2^{-n}=\epsilon\to 0}\inf_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)}\inf_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\left[\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}(\phi(z),\phi(w);\phi(V))-D_h(z,w;V)\right]\\
&\geq \liminf_{j\to\infty}\inf_{2^{-n}=\epsilon<2^{-N_j}}\inf_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)}\inf_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\left[-\frac{1}{j}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}(\phi(z),\phi(w);\phi(V))-\frac{2}{j}\right]\\
&\geq -\limsup_{j\to\infty}\sup_{2^{-n}=\epsilon<2^{-N_j}}\left[\frac{1}{j}\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)}\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}(\phi(z),\phi(w);\phi(V))+\frac{2}{j}\right]\\
&= 0,
\end{aligned}$$

其中最后一步利用133) 可知

$$\begin{aligned}
&\limsup_{j\to\infty}\sup_{2^{-n}=\epsilon<2^{-N_j}}\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)}\sup_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)}\mathfrak{a}_{\epsilon_j}^{-1}\hat{D}^{\epsilon_j}_{h^\phi}(\phi(z),\phi(w);\phi(V))\\
&\qquad\leq \sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)} D_h(z,w;V) < \infty.
\end{aligned}$$

□

5 定理 1.1 的证明

最后，我们将构造一个满足强坐标变换公式的 LQG 度量。我们必须定义一族可测函数 D^U: $\mathcal{D}'(U)\to$ {个定义在 U}上的连续度量，每个开集 $U\subset\mathbb{C}$对应一个，并且满足 LQG 度量公理以及公理 V。我们的思路是：我们已经证明，当 h 是限制在 U上的全平面高斯自由场时，在 U的对角线的一个邻域内，对于所有共形映射 ϕ，形如 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D^\epsilon_{h^\phi}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot);\ \phi(U))$ 的度量同时收敛到同一个极限。通过取对角线邻域内极限度量所诱导的长度度量，可以将该极限延拓为定义在 $U\times U$ 上的函数。当 h 是全平面高斯自由场时，度量 $D^U_{h|_U}$ 几乎必然等于 $D_h(\cdot,\cdot;\ U)$（其中 D_h 是 $\mathbb{C}$ 上的 LQG 度量，构造见 [Dev24]），这说明 D^U 满足 LQG 度量公理 I–III。强坐标变换公式则由以下事实推出：$\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D^\epsilon_{h^\phi}(\cdot,\cdot;\phi(U))$ 与 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{}D^\epsilon_h(\phi^{-1}(\cdot)\ \phi^{-1}(\cdot);\ U)$ 收敛到同一个极限。

更精确地说。固定一个连通开集 $U\subset\mathbb{C}$。设 F_U 为引理 4.25中的事件。固定开集 $W\Subset V\Subset U$ 和 $\tau>1$。根据引理 4.25 的 (i)（应用于 $\tilde{W}$ 任意˜开集 $W\Subset W\Subset V$），若 $h\in F_U$，则存在 $\rho>0$ 使得

$$\Delta_\rho(W)\subset\bigcap_{\phi\in\Lambda_\tau(V,U)} G^\phi_{2^{-n}}(W,V)\ \forall n\gg 0, \tag{134}$$

令 $A_{W、V、U、\tau}$ 为满足以下条件的 $h\in F_U$： 存在 $\rho>0$ 使得

$$\lim_{2^{-j}=\epsilon\to 0}\sup_{\phi,\psi\in\Lambda_\tau(V,U)}\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)}\left|\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\phi}(\phi(z),\phi(w);\phi(V))-\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}^\epsilon_{h^\psi}(\psi(z),\psi(w);\psi(V))\right|=0, \tag{135}$$

$$\lim_{2^{-j}=\epsilon\to 0}\sup_{2^{-k}=\delta\le\epsilon}\sup_{(z,w)\in\Delta_\rho(W)}\left|\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_h^\epsilon(z,w;V)-\mathfrak{a}_\delta^{-1}\hat{D}_h^\delta(z,w;V)\right|=0. \tag{136}$$

根据引理 4.5 以及 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_h^\epsilon(\cdot,\cdot)$ 的连续性，$A_{W,V,U,\tau}$ 是 $\mathcal{D}'(U)$ 的可测子集。取递增趋于 U 的开集 $W_n \Subset V_n \Subset U$。然后定义

$$A_U := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{j=n}^{\infty}\bigcap_{\tau=2}^{\infty} A_{W_n,V_j,U,\tau}.$$

定理4.19 意味着，如果 h 是一个全平面高斯自由场，那么 $h|_U \in A_U$ 几乎必然成立。注意，如果 $\phi: U\to\phi(U)$ 是一个共形映射，那么 $A_{\phi(U)}=\{h^\phi : h\in A_U\}$。

若$h\in A_{W,V,U,\tau}$，则 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_h^\epsilon(\cdot,\cdot;V)$在$\Delta_\rho(W)$上一致收敛，其中 ρ 足够小，使得(134)、(135)和(136)均成立。此外，(134)意味着，如果 $V\subset V'$，那么 $\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_h^\epsilon(\cdot,\cdot;V')$在$\Delta_\rho(W)$上收敛到同一极限。因此，如果 $h\in A_U$，我们可以明确地定义

$$\tilde{D}_h^U(z,w) := \lim_{2^{-k}=\epsilon\to 0}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat{D}_h^\epsilon(z,w;V_j) \text{ if } h\in A_{W_n,V_j,U,\tau},(z,w)\in\Delta_\rho(W_n). \tag{137}$$

这在 $U\times U$中对角线的某个邻域上定义了$\tilde{D}_h^U$。回顾一下，若 d 是U上的一个度量，其诱导长度度量是由下式定义的度量 d^I

$$d^I(x,y) := \inf_{P:\ x\to y}\mathrm{Len}(P;d),$$

其中，下确界取遍所有从 x 到 y的连续路径 $P:[0,1]\to U$，而 Len(P; d) 的定义与式 (4) 中相同。根据三角不等式，即使 d仅在对角线的某个邻域上定义，这一定义也仍然有意义。因此，我们可以将 $\tilde{D}_h^U$延拓为定义在 $U\times U$上的函数，令其等于由 $\tilde{D}_h^U$诱导的长度度量。注意，由 $\tilde{D}_h^U$诱导的长度度量确实是 $\tilde{D}_h^U$的一个延拓，其意义是它与式 (137) 一致。要证明这一点，必须证明当 $(z,w)\in\Delta_\rho(W_n)$ 且 $\epsilon>0$时，存在一条从 z到 w的路径 P，其 $\tilde{D}_h^U$-长度至多为$\tilde{D}_h^U(z,w)+\epsilon$。这可以通过近似中点论证来完成，方法类似于 BBI22 定理 2.4 的证明。16]当 $h\notin A_U$时，我们定义 $\tilde{D}_h^U$为由欧几里得度量诱导的长度度量。

我们希望得到函数 $\tilde{D}_h^U$是度量，但严格来说，我们不知道 $\tilde{D}_h^U$对每个 $h\in\mathcal{D}'(U)$ 都是连续度量（事实上，当 $h\notin A_U$ 时，或者对于限制在 U上的全平面高斯自由场的几乎每个实现，它都是连续度量；但我们需要 $\tilde{D}_h^U$对每个 $h\in\mathcal{D}'(U)$都能诱导欧几里得拓扑）。为了解决这个问题，引入集合

$$B_U := \left\{h\in A_U : \tilde{D}_h^U \text{ induces the Euclidean topology}\right\}.$$

如果 $\phi:\ U\to\phi(U)$是一个共形变换，且 $h\in A_U$，那么 $\tilde{D}_h^U=\tilde{D}_{h^\phi}^{\phi(U)}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$在 U的对角线的某个邻域上成立。由此可见，$\tilde{D}_h^U$诱导欧几里得拓扑，当且仅当 $\tilde{D}_{h^\phi}^{\phi(U)}$也如此，即 $B_{\phi(U)}=\{h^\phi:h\in B_U\}$。

最后，我们定义：当 $h\in B_U$ 时，D_h^U 等于 $\tilde{D}_h^U$；当 $h\notin B_U$ 时，D_h^U 等于由 U 上的欧几里得度量诱导的长度度量。本节余下部分将证明，$(D^U)_{U\subset\mathbb{C}}$ 是满足强坐标变换公式的 LQG度量。

定理 4.19 表明，若 h 是全平面高斯自由场，则 $h|_U\in B_U$ 几乎必然成立，因为 $\tilde{D}_{h|_U}^U=D_h(\cdot,\ \cdot;\ U)$，且右侧的度量诱导欧几里得拓扑。由于 LQG 度量公理要求对 U 上的高斯自由场加连续函数成立，我们需要以下引理。

引理 5.1。若 h 是 U上的高斯自由场加连续函数 f，则 $h\in B_U$ 几乎必然成立。此外，若 $\mathfrak{h}^U$ 是 U 上的随机调和函数，且 $h-f+\mathfrak{h}^U$ 在 U 上服从全平面高斯自由场的分布，则 $D_h^U=e^{\xi(f-\mathfrak{h}^U)}\cdot D_{h-f+\mathfrak{h}^U}^U$，只要 $h\in B_U$。

证明。根据标准事实，存在调和函数 $\mathfrak{h}^U$：若 X、Y、Z 是满足 $X\overset{d}{=}Y$ 的随机变量，则存在随机变量 W，使得 $(X,Z)\overset{d}{=}(Y,W)$（将此结论应用于 X 和 Z，即全平面高斯自由场限制在 U 上的零边界部分和调和部分，以及 $Y=h-f$）。由于 $h-f+\mathfrak{h}^U$ 的分布与限制在 U 上的全平面高斯自由场相同，基于本引理前一段给出的理由，我们知道 $h-f+\mathfrak{h}^U\in B_U$ 几乎必然成立。现在用类似于 DF19 引理 7] 的证明，说明 $h-f+\mathfrak{h}^U\in B_U$ 蕴含 $h\in B_U$，且 $D_h^U=e^{\xi(f-\mathfrak{h}^U)}\cdot D_{h-f+\mathfrak{h}^U}^U$。 □

定理5.2。 $(D^U)_{U\subset\mathbb{C}}$ 满足 *LQG* 度量公理 *I*、 *II*和 *III*，以及强坐标变换公式 *V*。

证明。 由于 D_h^U 按照定义是 所有 $h\in\mathcal{D}'(U)$的长度度量，因此公理 I 无需证明。

为证明公理 II 和 III，设 h 是加上连续函数 f 的高斯自由场，定义在 U上，并令 $\mathfrak{h}^U$ 如引理 5.1所述。那么对于任意连续函数 g: $U\to\mathbb{R}$，由引理 5.1

$$D_{h+g}^U = e^{\xi(f+g-\mathfrak{h}^U)}\cdot D_{h-f+\mathfrak{h}^U}^U = e^{\xi g}\cdot e^{\xi(f-\mathfrak{h}^U)}\cdot D_{h-f+\mathfrak{h}^U}^U = e^{\xi g}\cdot D_h^U.$$

因此，公理 III成立。

对于公理 II，若 $V\subset U$ 是开集，则由于

$$D_h^U(\cdot,\cdot;V) = e^{\xi(f|_V-\mathfrak{h}^U|_V)}\cdot\left(D_{h-f+\mathfrak{h}^U}^U(\cdot,\cdot;V)\right),$$

其中 $h-f+\mathfrak{h}^U$的分布是限制在 U上的全平面高斯自由场，因此只需验证：若 H是全平面高斯自由场，则几乎必然有 $D_{H|_U}^U(\cdot,\cdot;\ V)=D_{H|_V}^V$。这是因为 $D_{H|_U}^U=D_H(\cdot,\cdot;\ U)$ 几乎必然成立，这由定理 4.19得出，因此

$$D_{H|_U}^U(\cdot,\cdot;V) = \text{internal metric of } D_H(\cdot,\cdot;U) \text{ on } V = D_H(\cdot,\cdot;V) = D_{H|_V}^V.$$

现在我们来解释为什么强坐标变换公式成立。关键事实是，对于共形映射 ϕ: $U\to\phi(U)$，有 $B_{\phi(U)}=\{h^\phi:\ h\in B_U\}$。假设 h是 U上的高斯自由场加连续函数，并且事件 $\{h\in B_U\}$发生。对于共形映射ϕ: $U\to\phi(U)$，令 W_n^ϕ,V_n^ϕ为 $A_{\phi(U)}$的定义中给出的开集，并记 $W_n=W_{\text{恒等映射}n}$和 $V_n=V_{\text{恒等映射}n}$。固定 $n\in\mathbb{N}$。我们将证明，在 $W_n\times W_n$中对角线的某个邻域上，度量 $D_{h^\phi}^{\phi(U)}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$与 D_h^U相等。令 $n\to\infty$趋近于 $W_n\nearrow U$；由于 D_h^U和 $D_{h^\phi}^{\phi(U)}(\phi(\cdot)\ \phi(\cdot))$都是长度度量，它们必然相等。

由于 $\phi(W_n)\Subset\phi(U)$，我们可以找到 $N\in\mathbb{N}$使得 $\phi(W_n)\subset W_N^\phi$。固定 $J\geq N$。选取 $j\geq n$使得 $V_J^\phi\Subset\phi(V_j)$。固定 $\tau\geq 2$使得 $\phi\in\Lambda_\tau(V_j,U)$。注意，$h\in A_{W_n,\ V_j,\ U,\ \tau}$以及 $h^\phi\in A_{W_N^\phi,\ V_J^\phi,\ \phi(U),2}$。令 $\rho>0$如 $A_{W_n,\ V_j,\ U,\ \tau}$的定义所述，并令 $\rho^\phi>0$如 $A_{W_N^\phi,\ V_J^\phi,\ \phi(U),2}$的定义所述。我们可以假设 ρ和 ρ^ϕ足够小，使得用 (W_n,V_j,ρ) 和 $(W_N^\phi,V_j^\phi,\rho^\phi)$ 替换 (W,V,ρ) 后，(134) 仍成立。令 $0<\tilde\rho<\rho$使得 $\phi(\Delta_{\tilde\rho}(W_n)):=\{(\phi(z)\ \phi(w)):(z,w)\in\Delta_{\tilde\rho}(W_n)\}\subset\Delta_{\rho^\phi}(W_N^\phi)$。那么在 $\Delta_{\tilde\rho}(W_n)$ 上，

$$\begin{aligned}
&D_{h^\phi}^{\phi(U)}(\phi(\cdot),\phi(\cdot))\\
&\quad= \lim_{2^{-k}=\epsilon\to 0}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat D_{h^\phi}^\epsilon\left(\phi(\cdot),\phi(\cdot);V_J^\phi\right) && (\phi(\Delta_{\tilde\rho}(W_n))\subset\Delta_{\rho^\phi}(W_N^\phi),h^\phi\in B_{\phi(U)})\\
&\quad= \lim_{2^{-k}=\epsilon\to 0}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat D_{h^\phi}^\epsilon(\phi(\cdot),\phi(\cdot);\phi(V_j)) && (A_{W_N^\phi,V_J^\phi,\phi(U),2}\subset A_{W_N^\phi,\phi(V_j),\phi(U),2})\\
&\quad= \lim_{2^{-k}=\epsilon\to 0}\mathfrak{a}_\epsilon^{-1}\hat D_h^\epsilon(\cdot,\cdot;V_j) && (h\in A_{W_n,V_j,U,\tau})\\
&\quad= D_h^U && (h\in B_U).
\end{aligned}$$

□

参考文献

[AT07] Adler, Robert J. 和 Taylor, Jonathan E. 随机场与几何。Springer 数学专著。Springer，2007。

[Bee82] Beer, Gerald。“上半连续函数与 Stone 逼近定理”。载于：《逼近理论杂志》34（1，1982），第 1–11 页。

[Ber17] Berestycki, Nathanaël.《高斯乘性混沌的初等方法》。载于：《电子概率通讯》22 (2017)，第 1–12 页。arXiv：1506.09113 [数学.PR]。

[BP25] Berestycki, Nathanaël 和 Powell, Ellen。《高斯自由场、刘维尔量子引力与高斯乘性混沌》。2025 年 2 月。arXiv：2404.16642 [数学.PR].[BGT87] Bingham, N. H., Goldie, C. M. 和 Teugels, J. L.《正则变差》。数学及其应用百科全书，第 27 卷。剑桥大学出版社，1987 年。[Bor75] Borell, Christer.《高斯空间中的布伦－明可夫斯基不等式》。载于：《数学发明》30 (1975)，第 207–216 页。[Bra85] Branges, Louis de.《比伯巴赫猜想的一个证明》。载于：《数学学报》154 (1985 年 3 月)，第 137–152 页。[BBI22] Burago, Dmitri, Burago, Yuri 和 Ivanov, Sergei.《度量几何教程》。第 33 卷。《数学研究生教程》。美国数学会，2022 年。[CIS76] Cirel'son, B. S., Ibragimov, I. A. 和 Sudakov, V. N.《高斯样本函数的范数》。载于：第三届日苏概率论研讨会。第 550 卷。《数学讲义》。Springer-Verlag，1976 年，第 20–41 页。[Dev24] Devlin VI, Charles.《李乌维尔首次通过渗流的几乎必然收敛》。载于：《概率论及相关领域》193 (2024 年 11 月)，第 247–288 页。arXiv：2309.08001 [数学.PR].[DDDF20] Ding, Jian, Dubédat, Julien, Dunlap, Alexander 和 Falconet, Hugo.《$\gamma \in (0, 2)$ 上李乌维尔首次通过渗流的紧性》。载于：《IHÉS 数学出版物》132 (2020 年 12 月 1 日)，第 353–403 页。arXiv：1904.08021 [数学.PR].[DG20] Ding, Jian 和 Gwynne, Ewain.《刘维尔量子引力的分形维数：普适性、单调性与界》。载于：《数理物理通讯》374 (2020 年 3 月 3 日)，第 1877–1934 页。arXiv：1807.01072 [数学.PR].[DG22a] Ding, Jian 和 Gwynne, Ewain.《超临界李乌维尔首次通过渗流的紧性》。载于：《欧洲数学会杂志》（2022 年 9 月）。arXiv：2005.13576 [数学.PR].[DG22b] Ding, Jian 和 Gwynne, Ewain.《临界与超临界刘维尔量子引力度量的唯一性》。载于：《伦敦数学会会刊》126 (2022 年 11 月 1 日)，第 216–333 页。arXiv：2110.00177 [数学.PR].[DG23] Ding, Jian 和 Gwynne, Ewain.《李乌维尔首次通过渗流与刘维尔量子引力度量的常数阶比较》。载于：《中国科学：数学》66 (2023 年 5 月)，第 1053–1072 页。arXiv：2108.12060 [数学.PR].[DF19] Dubédat, Julien 和 Falconet, Hugo.《星尺度不变场的刘维尔度量：尾部与韦尔缩放》。载于：《概率论及相关领域》176 (2019)，第 293–352 页。arXiv：1809.02607 [数学.PR].[DFGPS20] Dubédat, Julien, Falconet, Hugo, Gwynne, Ewain, Pfeffer, Joshua 和 Sun, Xin.《弱 LQG 度量与李乌维尔首次通过渗流》。载于：《概率论及相关领域》178 (2020 年 10 月 1 日)，第 369–436 页。arXiv：1905.00380 [数学.PR].[Gwy19] Gwynne, Ewain.《随机曲面与刘维尔量子引力》。载于：《美国数学会通报》（2019 年 8 月）。arXiv：1908.05573 [数学.PR].

[GM20a] Gwynne, Ewain 和 Miller, Jason。“刘维尔量子引力中 $\gamma \in (0, 2)$ 的测地线的汇合”。载于：《概率年鉴》（2020年2月）。arXiv: 1905.00381 [math.PR].[GM20b] Gwynne, Ewain 和 Miller, Jason。“高斯自由场的局部度量”。载于：Annales de l’Institut Fourier 70.5（2020年1月），第2049–2075页。arXiv: 1905.00379 [math.PR].[GM21a] Gwynne, Ewain 和 Miller, Jason。“刘维尔量子引力度量对 $\gamma \in (0, 2)$ 的共形协变性”。载于：Annales de l’Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques 57.2（2021年5月），第1016–1031页。arXiv: 1905.00384 [math.PR].[GM21b] Gwynne, Ewain 和 Miller, Jason。“$\gamma \in (0, 2)$ 的刘维尔量子引力度量的存在性与唯一性”。载于：《数学发明》223（2021年1月1日），第213–333页。arXiv: 1905.00383 [math.PR].[GP19] Gwynne, Ewain 和 Pfeffer, Joshua。“刘维尔量子引力度量的KPZ公式”。载于：Transactions of the American Mathematical Society（2019年5月）。arXiv: 1905.11790 [math.PR].[GS24] Gwynne, Ewain 和 Sung, Jinwoo。“刘维尔量子引力度量的闵可夫斯基容度”。载于：《概率年鉴》52.2（2024年3月），第658–712页。arXiv: 2211.04701 [math.PR].[KAB49] Korevaar, J., Aardenne-Ehrenfest, T. van 和 Brujin, N. G. de。“关于缓慢振荡函数的一则注记”。载于：《新数学档案》23.2（1949年），第77–86页。[Lit25] 李特尔伍德。“函数论中的不等式”。载于：Proceedings of the London Mathematical Society s2-23（1925年第1期），第481–519页。[Pfe24] Pfeffer, Joshua。“具有物质中心荷 $\boldsymbol{c} \in (-\infty, 25)$ 的弱刘维尔量子引力度量”。载于：《概率与数学物理》5.3（2024年6月）。arXiv: 2104.04020 [math.PR].[RV14] Rhodes, Rémi 和 Vargas, Vincent。“高斯乘性混沌及其应用：综述”。载于：《概率综述》11（2014年），第315–392页。arXiv: 1305.6221 [math.PR].[She22] Sheffield, Scott。“什么是随机曲面？”2022年3月。arXiv: 2203.02470 [math.PR].[SW16] Sheffield, Scott 和 Wang, Menglu。“刘维尔量子引力中的场-测度对应几乎必然与所有共形映射同时交换。”2016年5月。arXiv: 1605.06171 [math.PR]。