arXiv:2603.04655v1 [math.FA] 4 Mar 2026

关于 λ-Aluthge 变换与希尔伯特–施密特自交换子的一个猜想

TENG ZHANG

摘要。设 A 为一个复方阵，其极分解为 $A = U|A|$。对于 $0 < \lambda < 1$， A 的 λ-Aluthge变换定义为

$$\Delta_\lambda(A) = |A|^\lambda U |A|^{1-\lambda}.$$

2007年，Huang和Tam猜想，自交换子的弗罗贝尼乌斯范数在 Δ_λ下是收缩的：对于每个 $0 < \lambda < 1$,

$$\| [A^*, A] \|_F \geq \| [\Delta_\lambda(A)^*, \Delta_\lambda(A)] \|_F.$$

如果这个不等式成立，那么迭代自交换子范数

$$\left\{ \left\| [\Delta_\lambda^m(A)^*, \Delta_\lambda^m(A)] \right\|_F \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

将构成一个单调不增序列，并且必然收敛到 0。本文提供一个反例，从而证伪了该猜想。我们还得到了定量界

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \leq \sup_{\substack{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}),\ A^*A \neq AA^* \\ 0<\lambda<1}} \frac{\| [\Delta_\lambda(A)^*, \Delta_\lambda(A)] \|_F}{\| [A^*, A] \|_F} \leq 2.$$

1. 引言

设 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 为所有复 $n \times n$ 矩阵的集合。对于 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，我们用 A^* 表示其共轭转置。A 的迹由 $\mathrm{Tr}\, A$ 定义，而弗罗贝尼乌斯（Hilbert–Schmidt）范数为

$$\|A\|_F := \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)}.$$

对于 $X, Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，它们的交换子为

$$[X, Y] := XY - YX.$$

特别地， A 的自交换子为

$$[A^*, A] = A^*A - AA^*,$$

当且仅当 A 正规时，它为零。对于厄米矩阵 $X, Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，若 $Y - X$ 半正定，则我们记 $X \leq Y$（按洛伊纳序）。我们还用 $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ 表示对角元为 $d_1, \ldots, d_n$ 的对角矩阵。

对于每个 $A \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{C}$），都存在一个极分解 $A = UP$，其中 $P = |A| = (A^*A)^{1/2} \geq 0$，且 U 是偏等距算子（当 A 可逆时为酉算子）。 A [4, 的（通常）Aluthge变换 179] （另见 [1]）定义为

$$\Delta(A) = P^{1/2} U P^{1/2}.$$

尽管当 A 奇异时，极分解中的酉因子可能不唯一，但 Aluthge变换仍然是良定义的：它不依赖于特定的

2020 数学主题分类。47B20, 15A60, 47A30, 47A63.关键词和短语。 λ-Aluthge变换、自交换子、弗罗贝尼乌斯范数、Heinz型偏差不等式。

酉因子的选择。更一般地，对于 $0<\lambda<1$，定义 λ-Aluthge变换[4,定义 3.1，第 181] 页

$$\Delta_\lambda(A)=P^\lambda UP^{1-\lambda},$$

从而 $\Delta=\Delta_{1/2}$。Aluthge变换的迭代及其收敛性质已引起相当大的关注。

Zhan [21, 第 16]节在其出色的问题集“《矩阵理论中的未解决问题》”中记录了关于迭代Aluthge变换收敛性的两个猜想。

第一个猜想涉及Aluthge 序列的收敛性。

猜想1.1 ([21, 猜想 20]). 设 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。则序列 $\{\Delta^m(A)\}_{m=1}^\infty$收敛。

猜想1.1最初由I.B. Jung、E. Ko和C. Pearcy在 [14]中于无限维希尔伯特空间的算子情形下提出。Cho、Jung和Lee [10]证明了Aluthge 序列的范数收敛在无限维情形下可能不成立。Ando和Yamazaki [3] 在 $A\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$的情形下验证了猜想1.1；关于若干特殊情形见 [15] 。Huang和Tam [12] 证明，若 A 的非零特征值具有互异的模，则 λ-Aluthge 序列 $\{\Delta_\lambda^m(A)\}_{m=1}^\infty$ 收敛。通向猜想1.1的一个重要里程碑是Antezana、Pujals和Stojanoff关于Aluthge 映射全局动力学的工作。对于可对角化矩阵，他们 [5] 证明了迭代λ-Aluthge变换的收敛性，并借助谱数据对正规极限给出了详细描述。在随后的论文 [6], 中，他们证明了每个复矩阵的（通常）Aluthge迭代均收敛，从而给出了一个决定性的有限维收敛定理，由此证实了猜想1.1。相关的“Aluthge迭代”也在矩阵与希尔伯特空间框架之外得到研究：Huang和Tam [13] 率先分析了连通非紧半单李群中的Aluthge迭代，Tam和Thompson [19] 随后从李论/几何的视角得到了半单李群的收敛结果。最近，Antezana和Lim [7] 将GL_n 上的 λ-Aluthge变换作为光滑动力系统加以研究（证明当 $\lambda\neq\frac12$ 时它是 C^∞ 微分同胚），并分析了其逆映射的迭代。

此外，已知 $\Delta(A)$ 与 A 具有相同的特征值，而且只要 Aluthge 序列收敛，其极限必定是正规矩阵；参见 [14, 命题 1.10], [15, 命题 3.1], 或 [2, 定理 1]。这些观察支持这样一种看法：Aluthge变换是一种“正规化”过程。此外，对于矩阵 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，自交换子$[A^*,A]$ 为零当且仅当 A 是正规矩阵，因此 $[A^*,A]$ 的范数为非正规性提供了自然的定量度量。以下第二个猜想对这一启发式观点给出了精确表述（另见 Huang–Tam 原始论文 [12, 猜想 3.3]），该猜想预言，自交换子的弗罗贝尼乌斯范数在 Δ_λ下是收缩的。若该猜想成立，则 [12, 定理 1.4] 意味着，序列 $\left\{\left\|[\Delta_\lambda^m(A)^*,\ \Delta_\lambda^m(A)]\right\|_F\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ 单调不增，并收敛到 0。据我们所知，过去二十年来，这一猜想鲜有进展。

猜想 1.2 ([21, 猜想 21])。 设 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。那么对于任意 $0<\lambda<1$,

$$\|\,[A^*,A]\,\|_F\ \geq\ \|\,[\Delta_\lambda(A)^*,\Delta_\lambda(A)]\,\|_F. \tag{1.1}$$

除收敛性与弗罗贝尼乌斯自交换子压缩之外，已有不少工作研究哪些算子理论性质或动力学性质在 Aluthge 型变换及其推广下得以保持。Tran [20]证明，对于希尔伯特空间上的可逆算子，有界跟踪与拟双曲性等动力学概念在 λ-Aluthge变换下保持不变；另见 Morales 与 Linh [17] 关于跟踪、

双曲性与 Aluthge 变换在巴拿赫空间动力系统中的进一步联系。在结构保持方面，Botelho、Molnár 与 Nagy [9] 刻画了冯·诺依曼因子之间与 λ-Aluthge变换交换的双射线性映射。诱导形式与多变量形式也已得到研究：Golla、Osaka、Udagawa 与 Yamazaki [11] 研究了经由算子均值定义的诱导 Aluthge 变换族之绝对范数可达（AN）性质的稳定性，Osaka 与 Yamazaki [18]分析了中心算子的诱导 Aluthge 变换迭代的极限，Benhida、Curto、Lee 与 Yoon [8] 确定了交换 d 元组的广义球面 Aluthge 变换的谱图与联合谱半径。

本文证明，猜想 1.2 对通常的阿卢特格变换 ($\lambda = \frac{1}{2}$) 已经不成立。随后，我们提出以下两个问题:–

问题 1.3. 固定 $0 < \lambda < 1$。求满足以下条件的最小常数 $C_\lambda \geq 1$ ： 对所有$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$,

$$C_\lambda \, \| \, [A^*, A] \, \|_F \;\geq\; \| \, [\Delta_\lambda(A)^*, \Delta_\lambda(A)] \, \|_F. \tag{1.2}$$

问题 1.4. 求一个与 $\lambda \in (0,1)$ 无关的最小常数 C_*，使得对所有 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 以及所有 $0 < \lambda < 1$,

$$C_* \, \| \, [A^*, A] \, \|_F \;\geq\; \| \, [\Delta_\lambda(A)^*, \Delta_\lambda(A)] \, \|_F. \tag{1.3}$$

显然,

$$C_* = \sup_{0<\lambda<1} C_\lambda.$$

对于问题 1.3，在通常的阿卢特格变换这一情形下，我们证明

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \leq C_{1/2} \leq 2.$$

对于问题1.4，我们证明双侧估计

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \;\leq\; C_* \;\leq\; 2.$$

方法与主要思想。 第2节中的反例基于选取 $A = UP$，使 U为循环置换酉算子且 P为对角矩阵，从而 $A^*A = P^2$与 $AA^* = UP^2U^*$均为对角矩阵，并且自交换子的弗罗贝尼乌斯范数可以显式计算。对于第3节中的下界，我们在加权循环移位族$A_{\varepsilon,s} = UP$中进行研究，推导出 $\| \, [A_{\varepsilon,s}^*, A_{\varepsilon,s}] \, \|_F$与 $\| \, [\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^*, \Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})] \, \|_F$的闭式表达式，然后沿适当的参数区域作渐近优化。对于第4节中的上界，我们借助一个利用谱分解与希尔伯特–施密特正交性证明的弗罗贝尼乌斯范数的海因茨型偏差不等式，估计 A^*A与 $\Delta_\lambda(A)^*\Delta_\lambda(A)$之差（对 $\Delta_\lambda(A)\Delta_\lambda(A)^*$亦类似），再由三角不等式论证得出结论。

本文的组织结构。在第 2 节中，我们给出一个明确的 4×4 反例，表明在（通常的）Aluthge变换下， $\| \, [A^*, A] \, \|_F$不一定是收缩的。在第 3 节中，我们引入一个由两个参数构成的加权循环移位族，并利用它为该模型族中的最优常数 $C_{1/2}$ 和 C_* 得到精确下界。最后，在第 4 节中，我们通过针对弗罗贝尼乌斯范数的 Heinz型偏差不等式，证明对所有 $0 < \lambda < 1$ 均成立的一致上界 $C_\lambda \leq 2$ 。

2. A counterexample to Conjecture 1.2 for $\lambda = \frac{1}{2}$

在本节中，我们针对 $\lambda = \frac{1}{2}$ 给出一个反例，以反驳猜想 1.2。

命题 2.1。设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 36 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{C}), \qquad \lambda = \tfrac{1}{2}.$$

则 A 可逆，且

$$\| [A^*, A] \|_F \; < \; \| [\Delta(A)^*, \Delta(A)] \|_F,$$

因此，(1.1) 中的不等式不成立（甚至对通常的阿卢特格变换也如此）。

证明。令

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \operatorname{diag}(1, 36, 49, 36).$$

则 U是酉算子，并且容易验证 $A = UP$。因此， A可逆，且 $|A| = P$。于是，通常的阿卢特格变换为

$$\Delta(A) = |A|^{1/2} U |A|^{1/2} = P^{1/2} U P^{1/2}, \qquad P^{1/2} = \operatorname{diag}(1, 6, 7, 6).$$

我们首先计算 A 的自交换子。由于

$$A^*A = P^2 = \operatorname{diag}(1, 1296, 2401, 1296), \qquad AA^* = UP^2U^* = \operatorname{diag}(1296, 1, 1296, 2401),$$

由此可得

$$[A^*, A] = \operatorname{diag}(-1295,\, 1295,\, 1105,\, -1105),$$

因此

$$\| [A^*, A] \|_F^2 = 2 \cdot 1295^2 + 2 \cdot 1105^2 = 5{,}796{,}100.$$

接下来我们计算 $\Delta(A)$ 的自交换子。我们有

$$\Delta(A)^* \Delta(A) = P^{1/2} U^* P U P^{1/2} = \operatorname{diag}(36, 1764, 1764, 36),$$

and

$$\Delta(A) \Delta(A)^* = P^{1/2} U P U^* P^{1/2} = \operatorname{diag}(36, 36, 1764, 1764).$$

因此

$$[\Delta(A)^*, \Delta(A)] = \operatorname{diag}(0,\, 1728,\, 0,\, -1728),$$

so

$$\| [\Delta(A)^*, \Delta(A)] \|_F^2 = 2 \cdot 1728^2 = 5{,}971{,}968.$$

由于 5，971，$968 > 5$，796，100，我们得到

$$\| [\Delta(A)^*, \Delta(A)] \|_F > \| [A^*, A] \|_F,$$

这就证明了该命题。 □

3. 最优常数的精确下界

我们将使用以下循环移位模型。

命题 3.1. 设 $\varepsilon > 0$ 与 $s > 0$，并定义

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \operatorname{diag}(\varepsilon, 1, s, 1), \qquad A_{\varepsilon,s} := UP \in \mathbb{M}_4(\mathbb{C}).$$

则 $A_{\varepsilon,s}$ 可逆，且 $|A_{\varepsilon,s}| = P$。此外，

$$\|A_{\varepsilon,s}^* A_{\varepsilon,s} - A_{\varepsilon,s} A_{\varepsilon,s}^*\|_F^2 = 2(1-\varepsilon^2)^2 + 2(s^2-1)^2, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\|\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^* \Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s}) - \Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^*\|_F^2 &= (\varepsilon^{2-2\lambda} - \varepsilon^{2\lambda})^2 + (s^{2\lambda} - \varepsilon^{2-2\lambda})^2 \\ &\quad + (s^{2-2\lambda} - s^{2\lambda})^2 + (\varepsilon^{2\lambda} - s^{2-2\lambda})^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

证明. 由于 U是酉算子且 $P > 0$是对角矩阵，$A_{\varepsilon,s} = UP$可逆，且 $A_{\varepsilon,s}^* A_{\varepsilon,s} = P^2$，因此 $|A_{\varepsilon,s}| = (A_{\varepsilon,s}^* A_{\varepsilon,s})^{1/2} = P$。恒等式 (3.1) 由 $A_{\varepsilon,s}^* A_{\varepsilon,s} = P^2$ 与 $A_{\varepsilon,s} A_{\varepsilon,s}^* = UP^2U^*$（它将对角元循环置换）得出。

对于 (3.2)，注意

$$\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s}) = P^\lambda U P^{1-\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon^\lambda \\ \varepsilon^{1-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{1-\lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

这是一个加权循环移位。直接计算可得，$\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^*\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})$和$\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^*$ 均为对角矩阵，其对角元素是权重平方 $\varepsilon^{2-2\lambda}$，$s^{2\lambda}$，$s^{2-2\lambda}$，$\varepsilon^{2\lambda}$的连续循环移位，从而得到 (3.2)。□

接下来，我们给出 $C_{1/2}$的精确下界。

定理 3.2。对于$\lambda = \frac{1}{2}$ 属于(1.2)，

$$C_{1/2} \;\geq\; \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

此外，在命题 *3.1* 的族$A_{\varepsilon,\,s}$ 中，

$$\sup_{s>0} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\|\Delta(A_{\varepsilon,s})^*\Delta(A_{\varepsilon,s}) - \Delta(A_{\varepsilon,s})\Delta(A_{\varepsilon,s})^*\|_F}{\|A_{\varepsilon,s}^* A_{\varepsilon,s} - A_{\varepsilon,s}A_{\varepsilon,s}^*\|_F} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},$$

并且取 $s = 2^{1/4}$ 并令 $\varepsilon \to 0^+$时可趋近此值。

证明。当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，(3.2)可化简为

$$\|\Delta(A_{\varepsilon,s})^*\Delta(A_{\varepsilon,s}) - \Delta(A_{\varepsilon,s})\Delta(A_{\varepsilon,s})^*\|_F^2 = 2(s-\varepsilon)^2,$$

因此，平方之比等于

$$R(\varepsilon,s)^2 := \frac{\|\Delta(A_{\varepsilon,s})^*\Delta(A_{\varepsilon,s}) - \Delta(A_{\varepsilon,s})\Delta(A_{\varepsilon,s})^*\|_F^2}{\|A_{\varepsilon,s}^* A_{\varepsilon,s} - A_{\varepsilon,s}A_{\varepsilon,s}^*\|_F^2} = \frac{(s-\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon^2)^2 + (s^2-1)^2}.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} R(\varepsilon,s)^2 = \frac{s^2}{1+(s^2-1)^2}.$$

记 $x = s^2 > 0$，我们对其取最大值

$$\phi(x) = \frac{x}{1+(x-1)^2} = \frac{x}{x^2-2x+2}.$$

一个导数计算可得 $\phi'(x) = \frac{-x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}$，因此 ϕ 在 $x = \sqrt{2}$ 处取得最大值，

$$\max_{x>0} \phi(x) = \phi(\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

因此，在这一族中，该比值可以任意接近 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$，从而 $C_{1/2} \geq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$。 □

现在，我们给出 C_* 的一个一致的锐下界。

定理 3.3。(1.3) 中的一致最优常数满足

$$C_* \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

此外，在命题 *3.1* 的族 $A_{\varepsilon,s}$ 中，

$$\sup_{\substack{s>0\\0<\lambda<1}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\|\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^*\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s}) - \Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^*\|_F}{\|A_{\varepsilon,s}^*A_{\varepsilon,s} - A_{\varepsilon,s}A_{\varepsilon,s}^*\|_F} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

并且取 $s = \sqrt{2}$，令 $\lambda \to 0^+$ (或 $\lambda \to 1^-$)，再令 $\varepsilon \to 0^+$，即可使该值趋近于此值。

证明。固定 $0 < \lambda < 1$ 并设 $x = s^2 > 0$。在 (3.2) 中令 $\varepsilon \to 0^+$，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^*\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s}) - \Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})\Delta_\lambda(A_{\varepsilon,s})^*\|_F^2 = 2\big(x^{2\lambda} + x^{2-2\lambda} - x\big),$$

而 (3.1) 给出

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|A_{\varepsilon,s}^*A_{\varepsilon,s} - A_{\varepsilon,s}A_{\varepsilon,s}^*\|_F^2 = 2(x^2-2x+2).$$

因此，沿着 $\varepsilon \to 0^+$，平方比值收敛于

$$F_\lambda(x) := \frac{x^{2\lambda} + x^{2-2\lambda} - x}{x^2-2x+2}.$$

固定 $x > 0$，函数 $g(\lambda) := x^{2\lambda} + x^{2-2\lambda}$ 关于 λ 在 $[0,1]$ 上是凸的（因为它是指数函数之和），因此其在 $[0,1]$ 上的最大值在 $\lambda = 0$ 或 1 处取得：

$$x^{2\lambda} + x^{2-2\lambda} \leq 1 + x^2.$$

因此

$$F_\lambda(x) \leq \frac{x^2-x+1}{x^2-2x+2} =: H(x).$$

现在，我们对 $x > 0$ 求 $H(x)$ 的最大值。直接计算导数可知，H 在 $x = 2$ 处取得最大值，且

$$\max_{x>0} H(x) = H(2) = \frac{3}{2}.$$

因此，

$$\sup_{0<\lambda<1} \sup_{x>0} F_\lambda(x) = \frac{3}{2},$$

从而，在族$A_{\varepsilon,s}$中，通过取 $x=2$ （即 $s=\sqrt{2}$）、令 $\lambda\to 0^+$ （或 1^-）并令 $\varepsilon\to 0^+$，可使范数之比任意接近 $\sqrt{3/2}$。这证明了所述关于 C_*的尖锐下界。 □

注记3.4. 定理3.2和定理3.3确定了显式循环移位族$A_{\varepsilon,\ s}$中最优常数$C_{1/2}$ 与 C_* 的精确下界。特别地，(1.2)中对所有矩阵成立的任何常数都必须满足 $C_{1/2}\geq\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ，且(1.3)中的任何一致常数都必须满足 $C_*\geq\sqrt{\frac{3}{2}}$。这些下界是否为所有矩阵上的真正全局最优，仍是一个未决问题。

4. A uniform upper bound via a Heinz-type inequality

在本节中，我们记录最优常数的一个简单一致上界。其关键依据是关于弗罗贝尼乌斯范数的Heinz型偏差估计。此类不等式使人联想到矩阵分析中的Heinz型界；例如，参见 [16]中的相关交换子不等式。

引理 4.1 (Heinz型偏差不等式)。 设 X、$Y\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 为半正定矩阵，且 $0\leq t\leq 1$。则

$$\left\| X^{\frac{1-t}{2}}\,Y^t\,X^{\frac{1-t}{2}}-X\right\|_F\ \leq\ \|Y-X\|_F. \tag{4.1}$$

证明。 $t=0$ 和 $t=1$ 的情形显然成立。假设 $0<t<1$。

步骤 1：化归为单侧项。令 $A:=Y^t-X^t$ （因此 $A=A^*$），并令 $B:=X^{1-t}\geq 0$。则

$$X^{\frac{1-t}{2}}\,Y^t\,X^{\frac{1-t}{2}}-X=X^{\frac{1-t}{2}}(Y^t-X^t)X^{\frac{1-t}{2}}=B^{1/2}AB^{1/2}.$$

利用希尔伯特–施密特内积 $\langle S,\ T\rangle=\mathrm{Tr}(T^*S)$ 和柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}\|B^{1/2}AB^{1/2}\|_F^2&=\mathrm{Tr}\left((B^{1/2}AB^{1/2})^*(B^{1/2}AB^{1/2})\right)\\&=\mathrm{Tr}\left((BA)^*(AB)\right)\\&\leq\|BA\|_F\,\|AB\|_F.\end{aligned}$$

由于 $A=A^*$，我们还有 $\|AB\|_F=\|BA\|_F$，因为

$$\|AB\|_F^2=\mathrm{Tr}\big((AB)^*(AB)\big)=\mathrm{Tr}(BA^2B)=\mathrm{Tr}(A^2B^2)=\mathrm{Tr}(AB^2A)=\|BA\|_F^2.$$

因此，

$$\|B^{1/2}AB^{1/2}\|_F\leq\|AB\|_F.$$

注意到 $AB=(Y^t-X^t)X^{1-t}=Y^tX^{1-t}-X$，我们得到

$$\left\|X^{\frac{1-t}{2}}Y^tX^{\frac{1-t}{2}}-X\right\|_F\leq\|Y^tX^{1-t}-X\|_F. \tag{4.2}$$

步骤 2：谱分解论证（正定情形）。首先假设 X 和 Y 均为正定矩阵。令

$$X=\sum_{j=1}^{m}\mu_jP_j,\qquad Y=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iQ_i$$

是谱分解，其中 $\mu_j>0$、 $\lambda_i>0$ 和 $\{P_j\}$、 $\{Q_i\}$ 是两两正交投影族，且满足 $\sum_jP_j=\sum_iQ_i=I$。令 $H:=Y-X$ （因此 $H=H^*$）。那么，对每个 $i,\ j$，

$$Q_iHP_j=Q_iYP_j-Q_iXP_j=(\lambda_i-\mu_j)Q_iP_j. \tag{4.3}$$

此外,

$$Y^tX^{1-t} - X = \sum_{i,j} \big(\lambda_i^t \mu_j^{1-t} - \mu_j\big)\, Q_i P_j.$$

引入标量函数

$$h_t(r) := \begin{cases} \dfrac{r^t - 1}{r - 1}, & r \neq 1, \\ t, & r = 1, \end{cases} \qquad (r > 0).$$

利用 $\lambda_i^t \mu_j^{1-t} - \mu_j = (\lambda_i - \mu_j)\, h_t(\lambda_i/\mu_j)$ 和 (4.3)，可写为

$$Y^tX^{1-t} - X = \sum_{i,j} h_t\Big(\frac{\lambda_i}{\mu_j}\Big)\, Q_i H P_j. \tag{4.4}$$

我们声称

$$0 \le h_t(r) \le 1 \qquad (r > 0,\ 0 \le t \le 1). \tag{4.5}$$

事实上， r^t 关于 r 单调递增，因此 $r^t - 1$ 和 $r - 1$ 同号，所以 $h_t(r) \ge 0$。若 $r \ge 1$，则 $t \le 1$ 推出 $r^t \le r$，因此 $h_t(r) = (r^t - 1)/(r - 1) \le 1$。若 $0 < r \le 1$，则 $t \le 1$ 推出$r^t \ge r$，因此 $h_t(r) = (1 - r^t)/(1 - r) \le 1$。最后， $h_t(1) = t \in [0, 1]$。

接下来我们使用希尔伯特–施密特正交性。族 $\{Q_i H P_j\}_{i,j}$ 两两正交：若 $(i, j) \neq (i', j')$，则

$$\mathrm{Tr}\big((Q_i H P_j)^* (Q_{i'} H P_{j'})\big) = \mathrm{Tr}\big(P_j H Q_i Q_{i'} H P_{j'}\big) = 0.$$

事实上，若 $i \neq i'$，则 $Q_i Q_{i'} = 0$；而若 $i = i'$ 且 $j \neq j'$，则由迹的循环性，

$$\mathrm{Tr}\big(P_j H Q_i H P_{j'}\big) = \mathrm{Tr}\big(P_{j'} P_j H Q_i H\big) = 0$$

因为 $P_{j'} P_j = 0$。此外，由于$(\sum_i Q_i) H (\sum_j P_j) = H$，我们有正交分解$H = \sum_{i,\ j} Q_i H P_j$，因此

$$\|H\|_F^2 = \sum_{i,j} \|Q_i H P_j\|_F^2. \tag{4.6}$$

综合(4.4)、正交性、(4.5)和(4.6)，我们得到

$$\|Y^tX^{1-t} - X\|_F^2 = \sum_{i,j} \Big|h_t\Big(\frac{\lambda_i}{\mu_j}\Big)\Big|^2 \|Q_i H P_j\|_F^2 \le \sum_{i,j} \|Q_i H P_j\|_F^2 = \|H\|_F^2 = \|Y - X\|_F^2.$$

因此

$$\|Y^tX^{1-t} - X\|_F \le \|Y - X\|_F \qquad \text{when } X, Y > 0. \tag{4.7}$$

步骤3：半正定情形。对于 $\varepsilon > 0$，令 $X_\varepsilon := X + \varepsilon I$ 且 $Y_\varepsilon := Y + \varepsilon I$。则 $X_\varepsilon,\ Y_\varepsilon > 0$，因此将(4.2)–(4.7)应用于$(X_\varepsilon,\ Y_\varepsilon)$，我们有

$$\Big\|X_\varepsilon^{\frac{1-t}{2}} Y_\varepsilon^t X_\varepsilon^{\frac{1-t}{2}} - X_\varepsilon\Big\|_F \le \|Y_\varepsilon - X_\varepsilon\|_F = \|Y - X\|_F.$$

最后，在有限维中，函数演算映射 $Z \mapsto Z^\alpha$ 对每个 $\alpha \in [0, 1]$在半正定矩阵锥上连续。因此，令 $\varepsilon \downarrow 0$ 即对一般$X,\ Y \ge 0$得到(4.1)。□

定理 4.2 (一致上界)。 对于任意 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 以及任意 $0 < \lambda < 1$ ，

$$\|\,[\Delta_\lambda(A)^*, \Delta_\lambda(A)]\,\|_F \ \le\ 2\,\|\,[A^*, A]\,\|_F. \tag{4.8}$$

特别是，

$$C_\lambda \le 2 \qquad (0 < \lambda < 1), \qquad C_* \le 2.$$

证明。设 $A = U|A|$ 为一个极分解。在有限维情形下，我们可以选取 U 为酉算子：从极分解中的典范偏等距算子出发，将其任意扩张为 $\mathrm{Ker}(|A|)$ 上的酉算子（这不会改变 $A = U|A|$，因为 $|A|$ 在 $\mathrm{Ker}(|A|)$ 上为零；也不会影响 $\Delta_\lambda(A)$，因为 $|A|^{1-\lambda}$ 在 $\mathrm{Ker}(|A|)$ 上为零）。

Set

$$H := A^*A = |A|^2, \qquad K := AA^* = UHU^*,$$

使得 $\|H - K\|_F = \|\,[A^*, A]\,\|_F$。直接计算可得

$$\Delta_\lambda(A)^*\Delta_\lambda(A) = |A|^{1-\lambda}U^*|A|^{2\lambda}U|A|^{1-\lambda}, \qquad \Delta_\lambda(A)\Delta_\lambda(A)^* = |A|^{\lambda}U|A|^{2-2\lambda}U^*|A|^{\lambda}. \tag{4.9}$$

我们首先估计 $\Delta_\lambda(A)^*\Delta_\lambda(A) - A^*A$。通过 U 作共轭，并利用 $|A|^{2\lambda} = H^\lambda$ 和 $U|A|U^* = (U|A|^2U^*)^{1/2} = K^{1/2}$，得到

$$U\big(\Delta_\lambda(A)^*\Delta_\lambda(A) - A^*A\big)U^* = K^{\frac{1-\lambda}{2}}\,H^\lambda\,K^{\frac{1-\lambda}{2}} - K.$$

因此，由 $\|\cdot\|_F$ 的酉不变性以及引理 4.1（取 $X = K$、$Y = H$、$t = \lambda$），

$$\|\Delta_\lambda(A)^*\Delta_\lambda(A) - A^*A\|_F \le \|H - K\|_F. \tag{4.10}$$

接下来，我们估计 $A^*A - \Delta_\lambda(A)\Delta_\lambda(A)^*$。由 (4.9) 可得

$$\Delta_\lambda(A)\Delta_\lambda(A)^* = H^{\lambda/2}\,(UH^{1-\lambda}U^*)\,H^{\lambda/2} = H^{\lambda/2}\,K^{1-\lambda}\,H^{\lambda/2},$$

而引理 4.1（取 $X = H$、$Y = K$、$t = 1 - \lambda$）给出

$$\|A^*A - \Delta_\lambda(A)\Delta_\lambda(A)^*\|_F = \|H^{\lambda/2}K^{1-\lambda}H^{\lambda/2} - H\|_F \le \|H - K\|_F. \tag{4.11}$$

最后，根据三角不等式及 (4.10)–(4.11)，

$$\|\,[\Delta_\lambda(A)^*,\ \Delta_\lambda(A)]\,\|_F \le \|\Delta_\lambda(A)^*\Delta_\lambda(A) - A^*A\|_F + \|A^*A - \Delta_\lambda(A)\Delta_\lambda(A)^*\|_F \le 2\|H - K\|_F,$$

这正是 (4.8)。 □

推论 4.3。结合定理 *3.3* 与定理 *4.2*，可得如下定量界

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \;\le\; C_* \;\le\; 2.$$

Declaration of competing interest

作者声明不存在利益冲突。

Data availability

本文所述研究未使用任何数据。

致谢

作者谨向其导师林明华致谢，感谢他提出这一问题。本研究得到国家留学基金管理委员会、博士生青年人才托举工程（中国科学技术协会）以及西安交通大学中央高校基本科研业务费专项资金（项目编号：xzy022024045）的资助。

参考文献

[1] A. Aluthge，关于 $0 < p < 1$ 的 p-次亚正规算子，积分方程与算子理论 13 (1990), 307 315 10 1007 01199886 –。doi: 。/BF T. Ando，Aluthge 变换与矩阵特征值的凸包，线性与多重线性代数 [2] **52** 2004 3 4, 281 292 10 1080 03081080310001653092 ( )，第 – – 期。doi: 。/ T. Ando 和 T. Yamazaki, [3] 2×2 矩阵的迭代 Aluthge 变换收敛，线性代数及其应用 **375** 2003 299 309 10 1016 2003 06 002 ( )，–。doi: 。/j.laa. . . J. Antezana、P. Massey 和 D. Stojanoff, [4] λ-Aluthge 变换与 Schatten 理想，线性代数及其应用 **405** 2005 177 199 10 1016 2005 03 016 ( )，–。doi: 。/j.laa. . . J. Antezana、E. R. Pujals 和 D. Stojanoff, [5] 可对角化矩阵的迭代 Aluthge 变换序列的收敛性 II： λ-Aluthge 变换，积分方程与算子理论 62 (2008)，465–488。doi:10.1007/s00020-008-1637-y [6] J. Antezana、E. R. Pujals 和 D. Stojanoff，矩阵的迭代 Aluthge 变换收敛，Adv. Math. **226** 2011 2, 1591 1620 10 1016 2010 08 012 ( )，第 – 期。doi: 。/j.aim. . . J. Antezana 和 Y. Lim, [7] 逆 Aluthge 变换的迭代，泛函分析杂志 290 2，111202 2026 10 1016 2025 ( )，第 . 期。doi: 。/j.jfa. . 111202 [8] C. Benhida、R. E. Curto、S. H. Lee 和 J. Yoon，广义球面 Aluthge 变换的谱图与联合谱半径，Adv. Math. **408** 2022 108602 10 1016 2022 108602 ( )，。doi: 。/ [9] j.aim. . F. Botelho、L. Molnár 和 G. Nagy，与 λ-Aluthge 变换交换的冯·诺依曼因子上的线性双射，伦敦数学会会报 **48** 2016 1, 74 84 10 1112 092 ( )，第 – 期。doi: 。/blms/bdv [10] M. Cho、I. B. Jung 和 W. Y. Lee，关于 p-次亚正规算子的 Aluthge 变换，积分方程与算子理论 53 (2005)，第 3 期，321–329。doi:10.1007/s00020-003-1324-y [11] R. Golla、H. Osaka、Y. Udagawa 和 T. Yamazaki，诱导 Aluthge 变换的 AN 性质的稳定性，线性代数及其应用 **678** 2023 206 226 10 1016 2023 08 016 ( )，–。doi: 。/j.laa. . . H. [12] Huang 和 T.-Y. Tam，关于 Aluthge 序列的收敛性，Operators Matrices 1 1，121 2007 141 ( )，第 – 期。[13] H. Huang 和 T.-Y. Tam，半单李群中的 Aluthge 迭代，线性代数及其应用 432 (2010), 3250 3257 10 1016 2010 01 022 –。doi: 。/j.laa. . . I. B. Jung、E. Ko 和 C. Pearcy，算子的 Aluthge 变换，积分方程与算子理论 [14] **37** 2000 4, 437 448 10 1007 01192831 ( )，第 – 期。doi: 。/BF I. B. Jung、E. Ko 和 C. Pearcy，算子的迭代 Aluthge 变换，积分方程与算子理论 [15] **45** 2003 4, 375 387 10 1007 000200300012 ( )，第 – 期。doi: 。/s M. Kittaneh，正算子交换子的不等式，泛函分析杂志 250 (2007)，132–143。[16] C. A. Morales 和 T. T. Linh，跟踪、双曲性与 Aluthge 变换，匈牙利数学期刊 89 (2024)，第 2 期，379–387。doi:10.1007/s10998-024-00597-y [17] H. Osaka 和 T. Yamazaki，中心算子诱导的 Aluthge 变换的迭代极限，美国数学会汇刊 378 (2025)，第 10 期，6857–6884。[18] T.-Y. Tam 和 M. C. Thompson，半单李群中的 Aluthge 迭代收敛性，日本数学会杂志 **66** 2014 4, 1127 1131 10 2969 06641127 ( )，第 – 期。doi: 。/jmsj/ L. Tran，动力系统与 λ-Aluthge 变换，忠清数学会杂志 35 3，269 289 2022 275 10 14403 2022 35 3 ( )，第 – 期。doi: 。/jcms. . . . [19] X. Zhan，矩阵理论中的未解决问题，载于《第四届国际华人数学家大会论文集》第 I 卷（L. Ji、K. Liu、L. Yang 和 S.-T. Yau 编），高等教育出版社，北京，2008，第 367–382 页。

西安交通大学数学与统计学院，中华人民共和国西安 710049电子邮件地址：teng.zhang@stu.xjtu.edu.cn