波导量子电动力学中的光子统计：II 热力学极限下的精确解

M. Eltohfa[1], * 和 F. Robicheaux[1, 2, †]

[1] *Department of Physics and Astronomy, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47906 USA* [2] *Purdue Quantum Science and Engineering Institute, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, USA*（日期：2026年3月6日）

波导量子电动力学（WQED）为控制光-物质相互作用、实现超辐射和亚辐射等集体现象提供了强有力的框架。一般的波导系统中，量子动力学涉及整个希尔伯特空间，使得精确理论处理在计算上呈指数级困难，目前仍难以实现，只有少数模型具有精确解析解。受近期实验启发，我们研究原子数 $N \to \infty$趋于热力学极限的情形，同时保持均匀的原子-波导耦合 $\beta \to 0$，并固定光学深度 $4N\beta$。在此极限下，二阶平均场方法是精确的，可为完全反转初态下手性和对称构型中波导所发射光子的统计提供解析解。随着 $N \to \infty$，自由空间中的发射趋近于独立系综的情形。然而，在单原子寿命 $\approx 1.59\times$ 所对应的特殊时刻之前，我们证明，随着光学深度增大，波导中的超辐射会得到指数增强。特殊时刻之后，波导中的发射呈现亚辐射。我们还表明，波导中发射速率的初始逐次涨落在手性系统中会减小，并在对称系统中随着 N 趋近于 ∞而消失。此外，等时二阶关联变得平凡，这表明有限尺寸效应对于观察二阶相干性的涌现至关重要。最后，要超越热力学极限，就需要采用高阶平均场方法。我们的结果展示了对称系统和缺乏对称性的系统中的有限体与无限体集体效应。

arXiv:2603.04660v1 [quant-ph] 4 Mar 2026

I. 引言

波导量子电动力学（WQED）为实现有趣的原子-光集体现象提供了适宜的环境，例如超辐射和亚辐射[1–8]。这些现象已在多项理论 [9–13]和实验 [14–17]研究中得到证实。本文聚焦于波导耦合原子构成的反转系综所发射光子的统计特性，包括光子通量和双时光子-光子关联函数；这些特性已通过实验得到验证 [17]。与所有原子之间具有置换对称性的迪克极限不同，一般的波导量子电动力学装置不具备任何对称性 [13] ，因此系统会遍历希尔伯特空间中的所有可用态。这一点已在单激发流形中得到证实 [18]。在本文考虑的多激发情形下，这意味着要获得精确解，就必须模拟一个指数增长的希尔伯特空间，这构成了一项计算挑战。

在一篇配套论文中 [19], , 我们通过开发一种高效的高阶平均场（MF）方法来应对这一挑战，该方法能够模拟文献 [17]中近期实验的光子统计。该实验针对一个手性系统进行，其中许多原子（$N \sim 1000$）主要以较弱的耦合（$\beta \sim 0.01$）与波导的前向传播模耦合。此外，我们还开发了一种解析方法，可扩展至一般的原子数 N，并且可从反转态出发处理均匀耦合强度。文献 [17] 中实验参数的可达范围以及我们解析方法的可扩展性，促使我们考虑一种热力学极限：$N \to \infty$ ，同时保持光学深度 $OD = 4N\beta$ 固定。

在本文中，我们研究手性系统与置换对称系统的此类热力学极限。我们发现，配套论文 [19]中为手性系统建立的复杂有限 N 解析解，在无限 N情形下简化为一种简单形式。此外，我们发现二阶平均场（MF2）在该极限下是精确的。这为将缺乏对称性的手性系统简单地解释为连续介质提供了途径，其可观测量具有闭式（或易于计算的）解析解。

可以从解析解中提取出若干预言。1）进入波导的发射功率随 $N\beta$的增大而呈指数增长。2）对于手性系统，二阶相干性 $g^{(2)}(0, t)$ [17] 在超辐射峰附近的所有时刻几乎保持平坦。这表明实验 [17] 中所展示的光子率逐次涨落在热力学极限下减弱。然而，逐次涨落随 $N\beta$增大。这与置换对称系统形成对比，在该系统中 $g^{(2)}(0, t) = 2$ 对所有 t、所有 $N\beta$均成立。3）同时二阶相干性 $g^{(2)}(t, t) = 2$ 对手性系统和置换对称系统均成立。

我们指出，文献 [20] 针对对称系统推导出了另一种 $N \to \infty$ 在固定 非零β 条件下的极限。在此极限下，原子中储存的几乎全部能量都会辐-

* meltohfa@purdue.edu

† robichf@purdue.edu

射到波导中，尽管存在自由空间衰减，而且动力学趋近于纯狄克超辐射的情形（β=1）。本文研究的极限则有所不-同，其含义是 $\beta \to 0$；它也是针对缺乏对称性的手性系统推导出来的。在这种极限下，经波导发射的能量比例趋于 0。对于有限的 N，只要辐射到波导中的能量比例为 $\lesssim 1\%$，$\beta \to 0$ 极限在实际中就能很好地近似辐射动力学。我们针对对称系统，在很宽的参数范围内进行了数值验证。

本文组织如下。在第 II 节中，我们定义所研究的系统及相关的平均场方程。在第 II A 节中，我们考察从完全反转状态出发的手性系统解析解的热力学极限。在第 II B 节中，我们给出手性系统二阶平均场（MF2）方法的连续统近似，并通过将其与第 II A 节中的解进行比较，展示该近似的精确性。在第二节C中，我们将 MF2 的热力学极限应用于置换对称系统；与手性系统相比，该系统的动力学更为简单。在第 III A 节中，我们探讨光子发射率和二阶相干性趋近热力学极限的过程。在第三节B中，我们探讨上述关于热力学极限的预言。在第 III C 节中，我们考察手性系统中关联的建立以及增强的激发衰减。在附录中，我们给出对称系统中 MF2 精确性的数学证明，并研究为探讨热力学极限之外的修正所需的平均场阶数。

II. 方法

所研究的系统已在参考文献 [10, 15, 21] 中详细描述，并如图1所示。该系统由一条波导及其附近俘获的 N 个二能级原子组成。激发态记为 $|e\rangle$，基态记为 $|g\rangle$。我们将沿波导排列的原子位置记为 z_i（$1 \le i \le N$），使得当 $i < j$时，$z_i < z_j$。单个原子以速率 Γ_0 自发辐射，其辐射分别以 β^+、β^-和 $1-\beta^+-\beta^-$ 的概率进入波导的前向和后向传播方向以及自由空间模式。本文考虑两种情形：1）单向（亦称手性）波导（$\beta^- = 0$），记作 $\beta^+ \equiv \beta$；2）双向且具有置换对称性的情形，$\beta^+ = \beta^- \equiv \beta/2$。此外，我们假设每个原子的耦合相同。

通常情况下，我们采用将光场迹掉的马尔可夫图像。此外，选取跃迁频率（ω_0）对应的旋转参考系。正如配套论文中所述，一维波导的运动方程可以简洁地写为如下形式。首先，我们定义单原子常数$r_i = \sqrt{\beta_i^+}e^{-\mathrm{i}k_{1D}z_i}$ 和 $l_i = \sqrt{\beta_i^-}e^{+\mathrm{i}k_{1D}z_i}$，其中 k_{1D}是

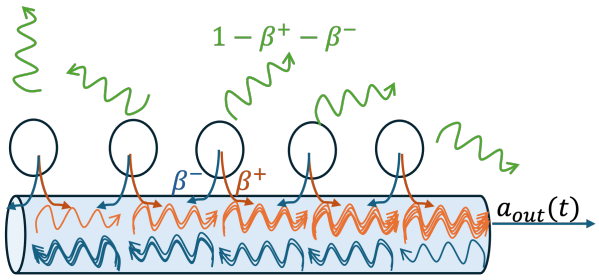

图1：装置示意图。 N 二能级原子与波导耦合。与右行波导模式的耦合常数为 β^+，与左行波导模式的耦合常数为 β^-，与自由空间模式的耦合常数为 $1-\beta^+-\beta^-$。本文研究两种极端情形：1）单向波导（$\beta^- = 0$、$\beta^+ = \beta$）；2）双向且置换对称的情形，其中 $\beta^+ = \beta^- = \beta/2$，并且原子以镜像构型排列，相邻原子之间的相位为$\pi$ 或 2π 。

跃迁的波数，而 β_i^+ （β_i^- ）是原子 i 的正向（反向）耦合（在本文中假设所有原子的耦合均相同）。对于手征情形，通过参考系变换 [10], 可以消去原子的位置，因此原子位置不会影响动力学。对于置换对称情形，当整数 n [11]取值时，原子位于镜像构型 $k_{1D}(z_j - z_i) = n\pi$ 中。然后，我们定义入射到 j^{th} 原子上的右行（$\hat{a}_j$）和左行（b_j）模式

$$\hat{a}_j = \alpha_f - \mathrm{i}\sum_{i<j} r_i \hat{\sigma}_i, \tag{1}$$

$$\hat{b}_j = \alpha_b - \mathrm{i}\sum_{i>j} l_i \hat{\sigma}_i, \tag{2}$$

其中，α_f 和 α_b 分别与正向和反向输入场成正比（在本文中始终取为0），而$\hat{\sigma}_n = |g_n\rangle\langle e_n|$ 是n^{th} 原子的自旋降算符。运动方程随后写为

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\mathrm{i}\sum_n \{r_n^*[\hat{\sigma}_n^\dagger, \hat{a}_n\hat{\rho}] + l_n^*[\hat{\sigma}_n^\dagger, \hat{b}_n\hat{\rho}]\} + \mathrm{h.c.} + \mathcal{L}_{ng}[\hat{\rho}], \tag{3}$$

其中 $\mathcal{L}_{ng}[\hat{\rho}] = \sum_n \hat{\sigma}_n\hat{\rho}\hat{\sigma}_n^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_n^\dagger\hat{\sigma}_n, \hat{\rho}\}$ 且h.c.表示前述各项的厄米共轭。我们还采用 $\Gamma_0 = 1$的单位制，因此时间以单原子激发的寿命（$1/\Gamma_0$）为单位。对易子项描述原子与左侧及右侧原子的集体模式之间的相互作用，并导致集体动力学和原子间关联。$\mathcal{L}_{ng}$ 描述原子向自由空间和波导的单体衰减。我们指出，式(3)中主方程的紧凑形式等价于包含相干哈密顿量的标准形式

以及参考文献 [10] 和配套论文 [19]中的林德布拉德耗散子。然而，此处采用的形式明确揭示了该体系的集体性质，即一个原子与其所有左侧或右侧原子的集体模式发生相互作用。

本文旨在为波导输出模式的含时关联函数在热力学极限下找到解析预测，

$$\hat{a}_{\rm out} = \hat{a}_{N+1}, \quad \hat{b}_{\rm out} = \hat{b}_{N+1}. \tag{4}$$

例如右向、左向和总输出通量

$$P_r(t) = \langle \hat{a}^\dagger_{\rm out}(t)\hat{a}_{\rm out}(t)\rangle, \quad P_l(t) = \langle \hat{b}^\dagger_{\rm out}(t)\hat{b}_{\rm out}(t)\rangle,$$
$$P(t) = P_r(t) + P_l(t), \tag{5}$$

以及双时二阶关联

$$G^{(2)}(t_1,t_2) = \langle \hat{a}^\dagger_{\rm out}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm out}(t_2)\hat{a}_{\rm out}(t_2)\hat{a}_{\rm out}(t_1)\rangle, \tag{6}$$

和归一化关联

$$g^{(2)}(t_1,t_2) = \frac{G^{(2)}(t_1,t_2)}{P_r(t_1)P_r(t_2)}. \tag{7}$$

ˆ 对于手性系统， $b_{\rm out} = 0$；对于对称 ˆ 系统，ˆ $a_{\rm out} = b_{\rm out}$。配套论文 [19]中提到了计算双时关联函数的方法和参考文献。配套论文 [19], 中基于 β 展开推导了主方程方程 (3) 对手性系统的解析解，本文利用该解析解在第 II A 节探讨热力学极限。

由于主方程方程 (3) 的指数计算复杂度，我们转而采用高效的近似方法。主要方法是平均场或累积量展开。n 阶平均场方法会跟踪最多涉及 n 个原子的原子算符，同时对高阶算符[22]进行近似。这种方法记为 MF-n [23]。如下文所示，二阶平均场方法（MF2）在热力学极限下是精确的。这与有限 N和非零 β的情况相反，在后者中，MF2 是一种近似，可能需要更高阶的 MF [19]。正文中我们仅使用 MF2 来描述极限 $N \to \infty$。对于有限 N，如附录 C 所示，需要基于更高阶 MF 的修正。MF2 方程的推导以及用于在有限 N 下传播这些方程的高效算法，见配套论文 [19]的附录。

在本工作中，我们关注 $\beta \to 0$ ，并且适用于手性系统的连续极限。MF2 方程的连续极限及其解见第 II B 节。对称系统的相应极限见第 IIC 节。

A. 分析方法

在配套论文 [19], 中，我们概述了一种提取辐射功率解析 β 展开的方法

在手性波导中， $P(t)$，以及二阶关联函数 $G^{(2)}(t,t)$和 $G^{(2)}(0,t)$，从完全反转出发，并采用均匀耦合。例如，$P(t)$ 可以展开为

$$P(t,N,\beta) = \sum_{k=1} \beta^k f_k(N,t). \tag{8}$$

在文献 [19], 中，对于一般的 N，系数函数 $f_k(N, t)$ 会变得越来越复杂；由于计算困难，我们只能求得最高至 $k_{max} = 8$ 的结果。这是因为越来越多的多时间尺度逐渐参与动力学过程。然而，在热力学极限下，函数 $f_k(N, t)$ 具有更简单的结构；在此极限下保持光学深度 $OD = 4N\beta$ 固定 $N \to \infty$ 。为便于记号，我们定义标度光学深度

$$\mathcal{B} = N\beta. \tag{9}$$

例如，手性波导中的辐射功率 $P(t)$ 可写为

$$P(t,\mathcal{B}) = \mathcal{B}e^{-t}\sum_{n=0} c_n \mathcal{B}^n h^n(t), \tag{10}$$

其中

$$h(t) = -(2e^{-t} + t - 2), \tag{11}$$

且 $\{c_n\}$ 是常数序列 $\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{36}, \frac{7}{288}, \frac{7}{2400}, \frac{11}{43{,}200}, \frac{143}{8{,}467{,}200}, \dots\}$。这些系数一直到 $\mathcal{B}^8$ 阶，均由所得 $\beta^k f_k(N, t)$ 的极限显式计算得到，并满足以下递推关系

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)}. \tag{12}$$

有趣的是，如第二节B所示，这些系数可以从连续极限下 MF2 方程的解中求得。这证明了 MF2 的连续极限是精确的，并使我们能够计算更多系数，甚至为若干可观测量的时间依赖性求得闭式解。对于 $G^{(2)}(t, t)$，从完全反转出发也可以进行类似分析；对于 $P(t)$，则可从 $|\psi\rangle_{N-1}$ 出发进行类似分析。

方程（10）中的解析解揭示了一个特殊时刻 $t_{sp} \approx 1.59$，它是 $h(t)$ 的零点。如下文所示，这一时刻标志着超辐射衰减与亚辐射衰减之间的分界。值得注意的是，如第二节C所示，这一特殊时刻也会出现在置换对称系统中。我们将在第三节B介绍其他几项重要结果。

B. 手性系统的连续介质近似

本节中，我们为手征系统的 MF2 方程建立一种连续介质近似，类似于参考文献 [12] 中针对部分反转系统所采用的方法，该方法使用

MF1。在该方法中，完全反转态是非动力学的，这不符合物理实际，因此需要基于 MF2 的近似来描述相干性的建立和增强发射。为此，我们将 MF2 方程（见配套论文 [19]）写成一组耦合的偏积分微分方程。在没有驱动且从反转态出发的情况下，唯一保留下来的项是$\hat{e}_l$，$\hat{}\sigma_l^\dagger\hat{}\sigma_k$，$\hat{e}\hat{\epsilon}_k$，它们可以映射为一个或两个变量的实函数 x 和 y。预期在极限$\beta\to 0$ 下，连续介质近似能够成立，因为特定原子的动力学与邻近原子的动力学不会有显著差异。从这个角度看，β 参数充当“光学空间”的离散步长 $\Delta x=\Delta y=\beta$。这是因为，索引为 l 的原子具有光学深度 $\propto l\beta\equiv x$。具体而言，最左侧原子的光学深度为 $x=0$，而 x沿下游方向不断增大，直至最右侧原子，此时 $x=\mathcal{B}=N\beta$。

我们将带索引变量的期望值$\hat{e}_l$, $\hat{}\sigma_l^\dagger\hat{}\sigma_k$ $\hat{e}\hat{\epsilon}_k$ 映射为如下连续函数

$$\begin{aligned}&\langle\hat{e}_l\rangle\leftrightarrow e(x=l\beta),\quad \langle\hat{\sigma}_l^\dagger\hat{\sigma}_k\rangle\leftrightarrow C(x=l\beta,y=k\beta),\\&\langle\hat{e}_l\hat{e}_k\rangle\leftrightarrow E(x=l\beta,y=k\beta),\end{aligned}\tag{13}$$

为简洁起见，省略时间自变量。利用$\beta\to 0$，运动方程变为

$$(\partial_t+1)\,e(x,t)=-2\int_0^x C(x,x',t)\,dx',\tag{14}$$

$$\begin{aligned}(\partial_t+1)\,C(x,y,t)=[2e(y,t)-1]\int_0^y C(x,y',t)\,dy'+(x\leftrightarrow y)\\+\beta\left[2E(x,y,t)-e(\min\{x,y\},t)\right],\end{aligned}\tag{15}$$

$$(\partial_t+2)\,E(x,y,t)=-2e(x,t)\int_0^y C(x,y',t)\,dy'+(x\leftrightarrow y),\tag{16}$$

其中，∂_t 表示对时间求导，$(x\leftrightarrow y)$表示交换 x 和 y 后的前一项。$\min\{x,y\}$ 表示两个值中的较小者。请注意，在这种设定下，$C(x,y)$和 $E(x,y)$关于交换 x 和 y 是对称的。这是因为它们初始时具有对称形式，并在对称方程的作用下演化。请注意，式（15）中与 β 成正比的项至关重要。这是因为从反转态出发时，该项负责产生关联C的主导阶。若没有这一项，就会得到如下所示的平凡独立衰减系综。

感兴趣的可观测量也可以映射为连续函数。例如，在深度 x 处发射的光功率可表示为

$$P(x,t)=\int_0^x e(x',t)\,dx'+D(x,t),\tag{17}$$

其中我们引入了双重积分关联函数

$$D(x,t)=\frac{\int_0^x\int_0^x C(x',y',t)dx'dy'}{\beta}.\tag{18}$$

请注意，如下所示，关联函数 C 与 β 成正比，因此在 $\beta\to 0$的极限下，D 定义良好。类似地，式（6）中光学深度为 x 时的二阶相干性 $G^{(2)}(t,t)$可映射为函数

$$\begin{aligned}Q(x,t)=2\left[P(x,t)\right]^2\\+2\int_0^x\int_0^x\left[E(x',y',t)-e(x',t)e(y',t)\right]dx'dy',\end{aligned}\tag{19}$$

其可分解为 $2\left[P(x,t)\right]^2$，不含第二个积分项。对于 β 的零阶修正，从激发态 $|ee\ldots e\rangle$ 出发时，第二项为零，如下所示。因此，在热力学极限下，二阶相干性 $g^{(2)}(t,t)=2$ 对所有光学深度均成立。因此，实验中 [17] 以及配套论文 [19] 所观察到的二阶相干性建立，取决于系统的有限尺寸性质；也就是说，即使假设 N 趋于无穷大，β 也必须是非零的。对于对称系统，$g^{(2)}(t,t)$ 的一阶修正 $\mathcal{O}(\beta)$ 在附录 C 中进行了分析。

我们关注从完全反转态出发的解，其初始条件为

$$e(x,0)=1,\quad C(x,y,0)=0,\quad E(x,y,0)=1.\tag{20}$$

上述平均场方程可以通过引入 $\beta(x)$ 将其推广到耦合 β 变化的情况。此外，它们也可以推广到存在驱动激光的情况，但这需要更多变量和更多方程。

值得注意的是，连续 MF2 方程的微扰解得出的动力学，与式（10）中解析公式所描述的完全相同。以完全反转为起点的微扰解设 ansatz 形式为 $F\approx F_0+\beta F_1$，其中 F 表示变量 $e(x)$ $C(x,y)$ $E(x,y)$ 中的任意一个。零阶解是独立衰减系综，其中$e_0(x,t)=e^{-t}$，$C_0(x,y,t)=0$，$E_0(x,y,t)=e^{-2t}$。将这些量代入运动方程，可得到关于 F_1的线性方程。例如，对于 C_1，我们得到

$$\begin{aligned}(\partial_t+1)\,C_1(x,y,t)=\left[2e^{-t}-1\right]\int_0^y C_1(x,y',t)\,dy'\\+(x\leftrightarrow y)+\left[2e^{-2t}-e^{-t}\right].\end{aligned}\tag{21}$$

我们观察到，零阶激发充当关联的源项。这个积分微分方程可以通过一个简单的试探解求解

$$C_1(x,y,t) = e^{-t}\sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j h(t)^{i+j+1}, \tag{22}$$

其中 $h(t) = -(2e^{-t} + t - 2)$ 和 c_{ij} 是可以通过迭代获得的常数

$$c_{0,0} = 1, \tag{23}$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{i+j+1}\left(\frac{c_{i,j-1}}{j} + \frac{c_{i-1,j}}{i}\right), \tag{24}$$

除 $i = 0$ 外，其中 $c_{0,\,j} = \frac{1}{j+1}\left(c_{0,\,j-1}\right)$，$j = 0$ 也同理。公式 (22) 对辐射峰值时刻、特殊时刻 t_{sp} 和晚期时刻 $t > t_{sp}$ 原子之间的关联有着有趣的启示。通过像公式 (14) 中那样对关联进行积分，也可以得出其对激发衰减 e_1 的影响。这些结果见第 III C 节。

推导连续介质 MF2 方程时，我们将离散求和替换为积分。例如，量 $\sum_i^{l-1}\langle\hat{\sigma}_k^\dagger\hat{\sigma}_i\rangle\beta$ 会变为 $\int_0^{y=l\beta} C(x = k\beta, y')\,dy'$。这会引入一个大小为 $\mathcal{O}(y\beta\,\sup[\partial_y C])$ 的误差，其中 sup 表示上确界函数。不过，C 与 β 成正比。这意味着误差为 $\mathcal{O}(\beta^2)$。这一阶上有多个误差源，因此正文中我们只求得 $\mathcal{O}(\beta)$ 阶的解，而这些解在热力学极限下变为精确解。值得注意的是，热力学极限的修正（即有限 N 或非零 β 的情形）通常需要超越 MF2。这一点在附录 C 的对称系统中有所展示。

在得到关联 C后，方程(18)中的量 D 有趣地归结为一个基于广义超几何函数的简单公式

$$D(x,t) = xe^{-t}\left[{}_1F_2\left(\frac{1}{2};1,2;4xh(t)\right) - 1\right], \tag{25}$$

由此可以得到波导中的辐射功率公式

$$P(x,t) = xe^{-t}\,{}_1F_2\left(\frac{1}{2};1,2;4xh(t)\right), \tag{26}$$

该公式等价于方程(10)中的级数展开，其中 x 表示 $\mathcal{B}$。该公式在 β 中对零阶而言是精确的，因此在 $\beta \to 0$的极限下也是精确的。有趣的是，这个超几何函数满足以下关系

$${}_1F_2\left(\frac{1}{2};1,2;z\right) = I_0(\sqrt{z})^2 - I_1(\sqrt{z})^2, \tag{27}$$

其中 I_0 和 I_1 是第一类修正贝塞尔函数。贝塞尔函数自变量中的平方根表明，系统的行为取决于$\sqrt{xh(t)}$，这被称为拉伸行为。换言之，光学深度的影响受到二次抑制。这与对称系统形成对比，正如我们在第二节C中所示。平方根还导致系统在后期呈现振荡行为。第三节将探讨这一解析公式的后果，其渐近行为见附录 A。

为了测量 $g^{(2)}(0,\ t)$，我们还需要狄克态 $|\psi\rangle_{N-1} \propto \sum_n \hat{\sigma}_n |ee\ldots e\rangle$的功率。这对应于该系统的另一个解，其初始条件为

$$e(x,0) = 1 - \frac{\beta}{\mathcal{B}}, \quad C(x,y,0) = \frac{\beta}{\mathcal{B}}, \quad E(x,y,0) = 1 - \frac{2\beta}{\mathcal{B}}, \tag{28}$$

其中 $\mathcal{B}$ 与阵列的光学深度$\mathcal{B} = N\beta$成正比。

这个特定的初始态通过添加另一项，改变了方程(23)中的展开系数；该项具有略有不同的递推关系和种子

$$d_{0,0} = -1, \tag{29}$$

$$d_{i,j} = \frac{1}{i+j}\left(\frac{d_{i,j-1}}{j} + \frac{d_{i-1,j}}{i}\right), \tag{30}$$

除了 $i = 0$ 之外，其中 $d_{0,\,j} = \frac{1}{j}\left(d_{0,\,j-1}\right)$，$j = 0$ 也同样如此。然而，这一改变使我们无法为 D 找到闭式。因此，我们通过数值求解递推关系来获得计算所需的系数。尽管如此，其复杂度仍为 $\mathcal{O}(k_{max}^2)$，其中 k_{max} 是级数展开中的截断阶数，并且可以轻松地生成足够多的系数，从而保证 $\mathcal{B} \sim 10^4$ 计算的收敛性。我们在第 III 节B的图6中展示了光学深度对 $g^{(2)}(0,\ t)$ 的影响。

C. 对称系统的热力学极限

在本节中，我们求解置换对称系统的 MF2 方程。当原子以镜像构型 [11] 对称地耦合到向左和向右传播的光子时，就形成了对称系统。MF2 中的运动方程比手性系统中的简单得多，从而产生了更加简单的动力学。在这种情况下，所有原子都具有相同的动力学，并且量 $e(x)$、$C(x,\ y)$ 和 $E(x,\ y)$ 中的位置依赖性被省略。

比较手性系统与置换对称系统的动力学颇具意义。首先，对称系统可作为基准点，用以与更为复杂的手性系统进行比较。这些系统仅在相干哈密顿量上有所不同，因此从完全反转 [11, 24], 出发时具有相同的初始动力学，这可用作合理性检验，以验证所推导的运动方程。其次，这一比较阐明了手征性或对称性破缺对集体光-原子相互作用的复杂性及其物理所起的作用。此外，有可能

从数学上证明MF2对于对称系统的精确性，正如我们在附录B中所示。

对于对称系统，有限 N 方程可通过参考文献 [25], 中的程序包得到，进而获得无限N 极限。结合 $\beta \to 0$ 和 $\beta N = \mathcal{B}$，运动方程变为

$$(\partial_t + 1)\, e(t) = -\mathcal{B}C(t), \tag{31}$$

$$(\partial_t + 1)\, C(t) = \mathcal{B}\left[2e(t) - 1\right] C(t) + \beta\left[2E(t) - e(t)\right], \tag{32}$$

$$(\partial_t + 2)\, E(t) = -2\mathcal{B}e(t)C(t). \tag{33}$$

在这种情况下，沿波导两个方向的总发射功率为

$$P(t) = \mathcal{B}e(t) + \frac{\mathcal{B}^2 C(t)}{\beta}, \tag{34}$$

进而可以证明，当系统从具有有限数目基态原子的狄克态出发，使得$e(0) = 1 - \mathcal{O}(\beta)$，且当 $\beta \to 0$时 $e(0) \to 1$，它服从一个简单的齐次常微分方程。该常微分方程为

$$(\partial_t + (\mathcal{B} + 1 - 2\mathcal{B}e^{-t}))P(t) = 0. \tag{35}$$

我们未能为功率公式更为复杂的手性系统找到该齐次常微分方程的类似形式。方程(35)具有一个简单解

$$P(t) = P(0)e^{-t}\exp\{\mathcal{B}h(t)\}, \tag{36}$$

其中 $h(t)$来自方程(11)。方程(36)导致从 $|\psi\rangle_N$ 态出发时二阶关联 $g^{(2)}(0,t) = 2$ 是平凡的。这是因为从态 $|\psi\rangle_N$ 和 $|\psi\rangle_{N-1}$ 出发的 $P(t)$除初始因子2外具有相同形式。这与手性系统中非平凡的 $g^{(2)}(0,t)$形成对比。此外，由于第 II B 节中针对手性系统所指出的相同因子分解，$g^{(2)}(t,t) = 2$ 。特殊时刻 $t_{sp} \approx 1.59$也出现在该系统中，并将超辐射与亚辐射区分开来。在第 III 节中，我们绘制对称系统与手性系统的功率 $P(t)$，以比较辐射动力学。

从完全反转态（其中$P(0) = \mathcal{B}/2$）出发，沿波导两个方向发射的总能量 E_{wg} 可通过对式（36）中的 $P(t)$积分得到，结果为

$$E_{wg} = \frac{e^{2\mathcal{B}}}{2(2\mathcal{B})^{\mathcal{B}}}\gamma(\mathcal{B}+1, 2\mathcal{B}) \sim \sqrt{\frac{\pi\mathcal{B}}{2}}(\frac{e}{2})^{\mathcal{B}}, \tag{37}$$

其中，γ 是下不完全伽马函数，而最后的渐近行为适用于较大的 $\mathcal{B}$，并基于斯特林近似。这里的能量以原子跃迁能量或发射光子能量为单位。这表明，在热力学极限下，辐射到波导中的能量呈指数增强。如第三节B所示，这意味着达到热力学极限所需的最小 N 也会随光学深度呈指数增长。在另一种热力学极限下，$N \to \infty$，但固定 β，参考文献 [20] 表明 $E_{wg} \to N$，因此几乎全部 能量都辐射到波导中。

III. 结果

本节将介绍热力学极限下手性波导系统和对称波导系统中光子统计的结果。首先，我们分别采用解析和 MF2 近似，展示系统趋近热力学极限的过程，并证明它们收敛于第 II B 节中给出的手性系统精确解。其次，我们展示热力学极限下光子率和光子-光子关联的行为。最后，我们研究手性系统中的关联发展和增强的激发衰减。

A. 固定 $N\beta$时趋近热力学极限

本节将探讨在 $N\beta \equiv \mathcal{B}$ 固定时，系统如何趋近热力学极限 $N \to \infty$。我们观察到，不同可观测量的动力学会达到一种极限行为，这与第 II A 节和第 II B 节中的讨论相符。例如，在图 2 中，我们针对手性系统固定 $\mathcal{B} = 10$ 。考察时间窗口$t < 1.2$内波导中由 $|ee\ldots e\rangle$ 态发射的功率时，当$N \gtrsim 3 \times 10^4$，系统便达到极限。 $\mathcal{B}$ 越大或时间窗口越长，达到极限所需的 N 越高。此外，在达到极限时，我们发现 MF2 与收敛的解析解完全一致，而该解析解具有式（26）所示的解析形式。这证实了 MF2 方法的精确性，也表明系统在热力学极限下会呈现相对简单的行为。MF2 精确性的另一项证据是，式（26）中预测功率公式的展开系数与通过式（10）中的完整动力学解显式计算得到的前八个系数相符。附录 B 中，我们给出了 MF2 对对称系统精确性的数学证明。

虽然热力学极限是一种理想化情形，但大规模 $N \sim 900$ 情形已在实验中得到验证[17, 21]。然而，如图2所示，一个 $N = 900$装置的行为与其热力学极限相似，而利用所提供的解析公式计算热力学极限要容易得多。因此，热力学极限可以帮助我们快速了解未来实验的表现。

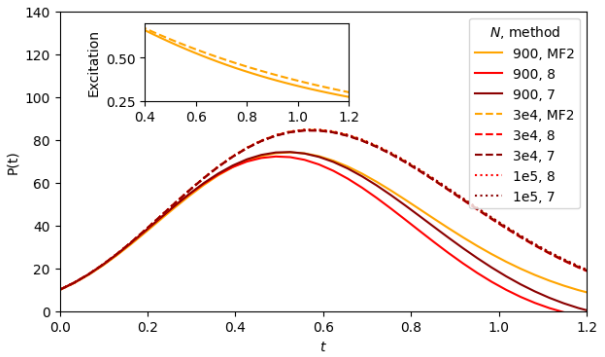

图2：比较从反转态出发时，MF2近似（橙色）下辐射到手性波导中的功率动力学，以及截断阶数为 8（红色）和 7（深红色）的 k_{max}解析解在 $N \in \{900, 3\times10^4, 1\times10^5\}$ 下的结果，分别以实线、虚线和点线表示。插图显示了 MF2 的激发。

我们还可以考察二阶关联$g^{(2)}(0,\ t)$，它与光子发射率初始的逐次噪声和强度涨落有关。在图3中，我们固定 $\mathcal{B}=10$ 并增大 N。我们观察到，较小的N 情形下，$g^{(2)}(0,\ t)$的变化更大，因此强度涨落也更明显。在热力学极限下，这种变化最小 $N\to\infty$。有趣的是，在此极限下，置换对称系统的 $g^{(2)}(0,\ t)$没有变化，而手性系统则存在一些明显变化，尤其是在 $t=0$ 和特殊时刻 $t_{sp}\approx 1.59/\Gamma_0$。

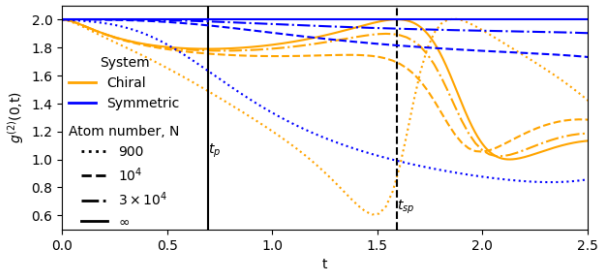

图3：比较从反转态出发时，手性系统（橙色）和置换对称系统（蓝色）的 MF2近似下二阶关联 $g^{(2)}(0,\ t)$ 的动力学。 $N\beta\equiv\mathcal{B}$ =10 以及 $N\in\{900, 1\times10^4, 3\times10^4, \infty\}$。无限 N曲线（实线）来自解析公式，其他有限 N 曲线则通过数值积分得到。

由于我们研究的是固定 $\mathcal{B}=N\beta$ 时的极限，因此只有在耦合 β 极小时，才会趋近热力学极限。举例来说，对于一个满足$\mathcal{B}=20$的对称系统，当 $N\sim2^{20}$时即可达到热力学极限。这意味着 $\beta\lesssim 2\times10^{-5}$。然而，由于集体增强，系统中储存的初始能量有一部分远大于 β，会被释放到波导中。如图 4 所示。

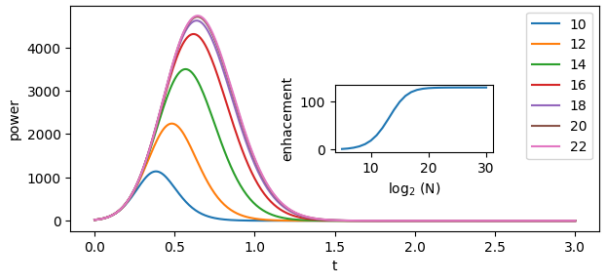

图 4：从完全反转态出发时，MF2 对对称波导两个方向发射功率的预测。 $\mathcal{B}=N\beta$ 固定为 20，同时增大 N，直至在 $N\sim2^{20}$处达到热力学极限。图例显示 $\log_2(N)$。插图显示集体效应使波导中辐射的总能量增加的增强因子。

图 4 显示了随着 $\mathcal{B}=20$ 接近热力学极限，按照 MF2 预测的波导两个方向的发射功率。我们观察到，随着 N 增大，功率也随之增加，直至在 $N\sim2^{20}$处达到热力学极限。对于更大的 N，功率保持不变。进入波导的总能量等于功率的积分。随着热力学极限的到来，这一能量增加；当 $N=2^{20}$时，对应于 ≈2600 个光子。这只是最初储存能量的一小部分，最初的能量对应于2^{20}个光子，约为 0.26%。不过，与独立发射相比，这一能量大幅增强；独立发射时，波导中将发射 $\mathcal{B}=20$ 个光子。如插图所示，增强幅度为 ≈130 倍。如果选择较小的原子数 $N=2^{14}$，根据 MF2，增强因子会更小（≈83）。然而，这个因子只是一个近似，因为 $N=2^{14}$ 低于热力学阈值$N\sim2^{20}$，而 MF2 在达到极限之前并不精确。尽管如此， $N=2^{14}$ 时发射到波导中的光子比例仍高于热力学极限下的比例，为 $\approx10\%$。同样，这一比例远高于独立发射时的比例（ $\beta\approx0.12\%$）。

在实际实验中， N 是有限的，因此用热力学极限近似该系统会产生误差。我们发现，只要波导捕获的总能量占比足够小（$\lesssim1\%$），误差就很小。例如，满足这一能量占比条件时，有限 N 与无限 N 的峰值光子率之间的相对误差为（$\lesssim8\%$）。我们针对一系列从 0 到 45 的 $\mathcal{B}$，对对称系统进行了验证。我们认为手性系统也有类似情况，但尚未对此进行验证。

B. 热力学极限下随 $\mathcal{B}$ 的标度

第 II B 节和第 II A 节表明，当 $\beta \to 0$ 保持 $\mathcal{B} = N\beta$ 有限时，该系统在热力学极限下具有精确的解析解。本节探讨增大 $\mathcal{B}$ 时解析解的行为。首先，我们定义归一化衰减率 $\Gamma(x,\ t)$，用于衡量相对于独立系综的衰减率增强幅度。该归一化衰减率通过将波导中的发射功率除以阵列 $\int_0^{\mathcal{B}} e(x,\ t)\,dx/\beta = Ne^{-t} + \mathcal{O}(1)$中存储的能量，再按耦合 β进行缩放而得到。这与参考文献 [18] 中的定义成正比。等价地，它等于波导中的发射功率除以独立系综的功率 $P^{ind}(x,\ t)$，即 $\mathcal{B}e^{-t}$。

$$\Gamma(\mathcal{B},t) = \frac{P(\mathcal{B},t)}{\beta N e^{-t}} = \frac{P(\mathcal{B},t)}{P^{ind}(\mathcal{B},t)}. \tag{38}$$

我们发现原子集体行为存在指数增强的证据，如图5中进入波导的峰值衰减率所示。此外，在峰值衰减时刻，对称系统比手性系统更具超辐射性。这是因为手性系统具有相干动力学，倾向于使态偏离最大辐射态或协同迪克态。

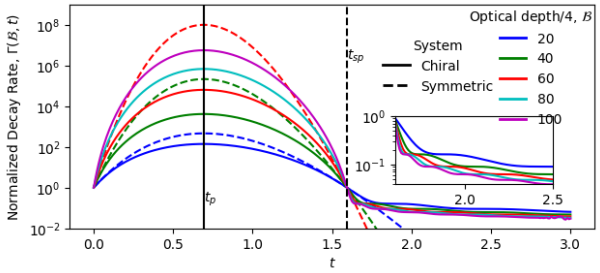

图5：给定光学深度 $\mathcal{B}$的系综进入波导的归一化衰减率$\Gamma(\mathcal{B},t)$，手性系统（实线）与对称系统（虚线）。对称系统的 $\mathcal{B} = 80, 100$曲线超出图框范围，故未显示。插图显示手性系统在后期辐射中的振荡行为，这是穿越希尔伯特空间 [18]中亚辐射流形的标志。

有趣的是，归一化衰减率 $\Gamma(\mathcal{B},t)$对两种系统以及所有光学深度 $\propto \mathcal{B}$均在时刻 $t_p = \ln(2)$达到峰值。该时刻来自令 $h'(t) = 0$。随后，对于对称系统，峰值归一化衰减率为

$$\Gamma^{sym}_{max}(\mathcal{B}) = (\frac{e}{2})^{\mathcal{B}}, \tag{39}$$

这表明其随光学深度呈指数增强。

峰值衰减速率的时间 t_p不同于公式 (26) 中辐射光子率 达到峰值的时间。对于 $\mathcal{B} = 0$ （独立衰减系综），后者为 0；而在较大的 $\mathcal{B}$ 下，它会偏移至 $t_p = \ln(2)$。因此，在大$\mathcal{B}$极限下，峰值光子率简单地为 $P(\mathcal{B},\ t_p)$。对于对称系统，当 $\mathcal{B} > 1$ 时，峰值辐射发生在 $t = \ln\left(\frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{B}+1}\right)$；当 $\mathcal{B} < 1$时，则发生在 $t = 0$。因此，对称系统的最大功率 P^{sym}_{max}（对于$\mathcal{B} > 1$）为

$$P^{sym}_{max}(\mathcal{B}) = B(\frac{\mathcal{B}+1}{2\mathcal{B}})^{\mathcal{B}+1}e^{\mathcal{B}-1} \sim \frac{\mathcal{B}}{2}(\frac{e}{2})^{\mathcal{B}}, \tag{40}$$

其中，最后一个相似性在较大的 $\mathcal{B}$ 时成立，并表明峰值辐射功率存在指数增强，类似于式(37)中的峰值能量。对于手性系统，增强较弱，且为拉伸指数（$\mathcal{B}$ 出现在指数的平方根之下，$e^{4\sqrt{\mathcal{B}}}$），如附录A所示。

$P^{sym}_{max}(\mathcal{B})$的指数增长可用于为达到热力学极限的 N 设定下界。进入波导的最大功率的上界由处于对称迪克阶梯中间态的系统给出。在该态下，辐射功率为 $P \sim \mathcal{B}N/4$。通过令 $P^{sym}_{max}(\mathcal{B}) < \mathcal{B}N/4$，可以求得达到物理性所需的最小 N。例如，对于 $\mathcal{B} = 20,\ N$ 必须大于 ~ 950。此外，该最小 N 随 $\mathcal{B}$的增大而指数增长。

我们还注意到一个特殊时刻 t_{sp} =1.59的涌现。在 t_{sp}之前，进入波导的发射是超辐射的（归一化衰减率 > 1），并且当 $\mathcal{B}$ 增大时，相对于独立衰减的系综呈指数增强。相比之下，在较晚时刻$t > t_{sp}$，系统经历归一化衰减率为 < 1的亚辐射态。对于对称系统，这种亚辐射随 $\mathcal{B}$ 的增大而指数增强。例如，在亚辐射区域，系统在 $\mathcal{B} = 40$ 时进入波导的归一化衰减率远小于 $\mathcal{B} = 20$ 时。对于手性系统，亚辐射行为仅随 $\mathcal{B}$ 的增大而代数增强（见附录A）。此外，手性系统中的亚辐射区间伴随着辐射的振荡行为。这种振荡行为的周期逐渐增大，并已在单激发流形的实验 [18] 中测得。我们在附录A中对这种振荡作了数学刻画。请注意，对于这两种系统，随着光学深度增大，进入波导的超辐射和亚辐射都更为显著。换言之，随着 $\mathcal{B}$ 增大，归一化发射率 $\Gamma(\mathcal{B},t)$在t_{sp}之前增大。在 t_{sp}之后，随着 $\mathcal{B}$ 增大，归一化发射率 $\Gamma(\mathcal{B},t)$减小。

对于手性系统，特殊时刻 $t_{sp} = 1.59$ 也将二阶关联$g^{(2)}(0,\ t)$分为两种行为，如图6所示。在 t_{sp}之前，归一化关联大体上保持平坦，表明辐射光子强度的涨落有所减小。在

t_{sp}之后，$g^{(2)}(0,t)$降至1，并在1附近振荡。这同样表明辐射光子强度的涨落有所减小。大多数涨落发生在 $t=0$ 和 $t=t_{sp}$处，并且随着 $\mathcal{B}$增大而趋于增强。我们还注意到，随着$\mathcal{B}$ 增大，$g^{(2)}(0,t)$的级数展开需要包含更多项才能收敛，尤其是在较晚时刻。当 $t>2$且 $\mathcal{B}=120,200$时，收敛性有所欠缺；而对于较小的 $\mathcal{B}=10,40$，则完全无法收敛。我们注意到，对称系统的行为与此形成对比：如前文图3所示，在热力学极限下，对于所有 t 和 $\mathcal{B}$，$g^{(2)}(0,t)$均为 $=2$。

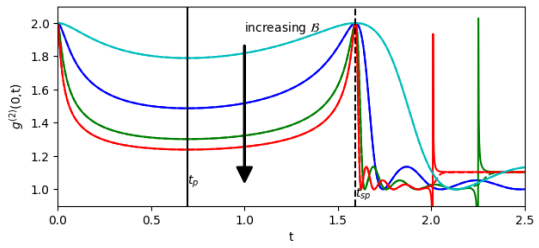

图6：不同$\mathcal{B}=10$取值下的 $g^{(2)}(0,t),40,120,200$。我们在$g^{(2)}(0,t)$分子的级数展开中采用35（实线）和36（虚线）的截断以显示收敛。$\mathcal{B}=120$（绿色）和 $\mathcal{B}=200$（红色）曲线分别在 $t>2.25$ 和2.0处尚未收敛。

C. 手性系统中的关联演化与激发衰减

在第 IIB 节中，我们从数学上刻画了手性系统中阵列上关联演化的解$C(x,y,t)$。在本节中，我们着重指出该关联的若干关键特征。此外，我们研究由一阶 $\mathcal{O}(\beta)$修正 e_1所给出的对激发衰减的影响。

由于关联 $C(x,\ y,\ t)$ 如式（17）所示决定了光子发射率，进而如式（38）所示决定了归一化衰减率，因此值得研究C 在特定时刻的表现：衰减率达到最大值的时刻 t_p、超辐射与亚辐射之间的分界特殊时刻 t_{sp}，以及亚辐射衰减后期的某个时刻，选为$1.5t_{sp}$。t_p 和 $1.5t_{sp}$ 时的关联如图 7 所示。在 t_{sp} 时，关联恒为 0（图 7 中未显示）。在超辐射达到最大值的时刻 t_p，大部分关联存在于阵列下游边缘彼此相近的原子之间（即 x 和 y 较大时）。这可以解释如下：阵列上游边缘的两个原子几乎独立辐射，因为我们考虑耦合 $\beta\to 0$的极限。此外，它们不受下游原子的影响，因此彼此之间形成的关联很弱。这与链中下游的两个原子形成对比：它们受到许多相同的上游原子照射，因此产生较强的它们之间正在演化的关联。

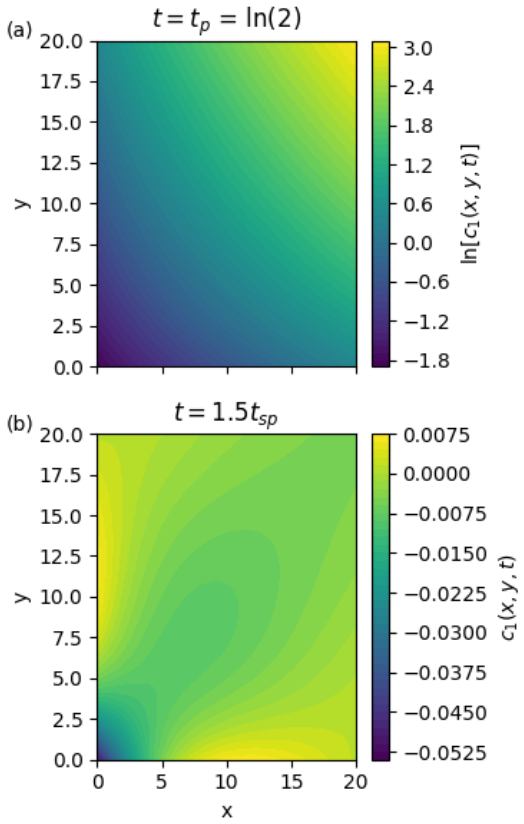

图 7：关联 $C_1(x,\ y,\ t)$ 在若干关注时刻 t_p (a) 和 $1.5t_{sp}$ (b) 的演变。注意 t_p 采用对数标度。在 t_{sp}（未显示）时，所有成对原子 $(x,\ y)$ 的关联恒为 0。

在峰值衰减率时刻，最左侧原子（位于 $x=0$）与其他原子之间的关联由$C(0,\ y,\ t_p)$ 描述。有趣的是，最左侧原子与右边缘最远的原子关联最强。有趣的是，在文献[13]中，相干驱动阵列的稳态下也观察到了这一行为。

这可以直观地理解如下。最左侧原子照射所有中间原子，而这些原子随后充当最右侧原子的源项。因此，关联会随着原子间距离的增加而增强，因为有更多中间原子介导长程关联。从数学上可以证明，该关联为

$$C_1(0,y,t_p)=\frac{1-\ln(2)}{2}\frac{I_1(2\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\sim\frac{1-\ln(2)}{2}\frac{e^{2\sqrt{s}}}{2\sqrt{\pi}s^{3/4}},\tag{41}$$

其中 I_1 是第一类修正贝塞尔函数，$s=y[1-\ln(2)],$，且最后的渐近行为在 s较大时成立。这表明，关联随原子之间的“光学”距离增长呈现出拉伸指数行为。

在 t_{sp}处，关联有趣地在所有原子之间重置为0。然而，这并不意味着原子在 β阶处于乘积态。这是因为测量激发关联的累积量（$E(x,y) - e(x)e(y)$）在 t_{sp}处对所有 x 和 y在 β 阶并不为0。（相比之下，对于对称系统，$E(t_{sp}) - e(t_{sp})e(t_{sp}) = 0$ 在 β阶，意味着原子在该阶处于乘积态。）在 t_{sp}处，激发 $e(x,t) = e^{-t_{sp}}$。此后，系统进入亚辐射行为，其中大多数原子对的关联变为负值。这显示在图 7 底部面板的 $1.5t_{sp}$处。有趣的是，大部分反关联发生在链上游的邻近原子之间。此外，对于相距较远的原子对，或链下游的邻近原子对，关联的幅度趋于消失。

一阶关联 $C_1(x,y,t)$ 的大小为连续介质 MF2 的有效性给出了 β 的上限（因此，当 $\mathcal{B}$ 固定时，也给出了 N 的下限）。由于关联 $C = \beta C_1$ 在物理上有界，$\frac{-1}{2} \leq C \leq \frac{1}{2}$，$\beta$ 需要小于 $\frac{1}{2C_1}$。例如，在图5 中，当 $(x,y,t) = (20,20,t_p)$ 时，$C_1 \approx 20$，因此为了满足物理性，β 必须小于 $1/40$（也就是说，$N \gtrapprox 800$）。实际上，为了使连续介质近似成立，β 必须小得多。

分析了关联演化之后，可以通过按照方程 (14) 对关联进行积分，求得其对激发衰减 e_1 的影响。这需要对函数 $h(t)$ 的幂次进行积分。我们无法找到这类积分的简洁紧凑公式，但 e_1 可以表示为级数

$$e_1(x,t) = -e^{-t} \sum_{i=1} u_i x^i S_i(t), \tag{42}$$

为便于记号表示，我们定义积分

$$S_n(t) = \int_0^t h(t')^n dt' = \int_0^t [-(2e^{-t'} + t' - 2)]^n dt'. \tag{43}$$

u_i 可以通过迭代求得，前几个非零系数为 $\{2, \frac{3}{2}, \frac{5}{9}, \frac{175}{144}, \dots\}$。前两个 S_n 积分为

$$-2S_1(t) = (t^2 - 4t + 4) - 4e^{-t}, \tag{44}$$

$$-3S_2(t) = 12(t-1)e^{-t} + (-t^3 + 6t^2 - 12t + 6) + 6e^{-2t}. \tag{45}$$

类似于第 II A 节中对 MF2 输出功率精确性的验证，我们将连续介质 MF2 得到的 $P(x,t)$ 的前几个系数与 Lindblad 主方程（方程 (3)）的完整解进行了比较，并取 $N \to$ 极限。

请注意，展开是针对光学深度 $\propto x$ 进行的，这表明随着 x 增大，需要纳入更多项。这与级联图像直观上是一致的：在该图像中，一个原子会受到所有上游原子的影响。因此，具有较大光学深度的下游原子的动力学比具有较小光学深度的上游原子更复杂。特别是，光学深度为 0 的最左侧原子不受影响，其衰减呈指数形式$e_1(0,t) = 0$。

为展示不同光学深度下的效应，我们在图8中绘制了 $e_1(x,t)$，对应 $x = 2, 4, 6, 8, 10$。我们观察到，随着光学深度增加，其对激发的影响呈指数增长。在早期，下游的激发往往比上游的激发衰减得更快，这是因为来自左侧的入射辐射增强了（见图1示意图）。在较晚时刻，这种效应会减弱，因为上游原子已经衰减。我们还注意到，在光学深度较高时，e_1往往会稍早达到最小值。此外，随着光学深度 x 增大，为了实现收敛，方程 (42) 中需要保留更多项，尤其是在较晚时刻。

在热力学极限下，一阶修正 e_1 无关紧要，但它有助于近似较大的 N 情形。这是因为，当 N足够大但仍有限时，系统的行为会变得几乎与 $N = \infty$ 相同，正如我们在第 IIIA 节中所展示的那样。

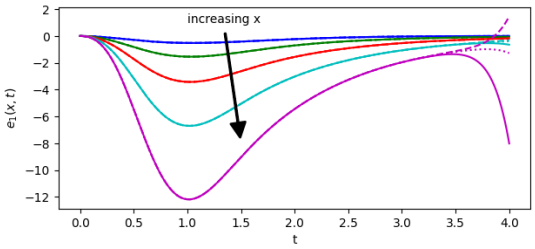

图 8：不同光学深度下，激发所受的一阶效应 $e_1(x,t)$，其中 $x = 2, 4, 6, 8, 10$，如箭头所示。我们将式 (42) 中求和的截断值分别设为 14（实线）、15（虚线）和 16（点线），以展示收敛性。

类似于关于 C物理性的论证，也可以对激发 e作出类似论证。由于 $e(x,t)$ 非负，$x = 10$ 曲线（例如）表明，为了保证 $e(x = 10, t = 1)$ 的物理性，需要满足 $\beta \lessapprox 0.03$。实际上，要达到热力学极限，β 必须小得多。例如，若 $x = 10$，系统会在 $N \gtrsim 3 \times 10^4$时达到热力学极限，因此 $\beta \sim 0.0003$。

IV. 结论

在这项工作中，我们研究了光学深度 $OD = 4N\beta$ 固定时的热力学极限$N \to \infty$，其中反转原子阵列与波导耦合。我们研究了置换对称系统和缺乏对称性的手性系统，并着重比较了它们在复杂性和集体辐射统计方面的差异。对于这两种系统，波导中的辐射功率均随光学深度呈指数增长，而同时

二阶相干性消失。然而，对称系统中光子发射率的逐次测量涨落仅表现出平凡特征，而手性系统则呈现出有趣的特征。

值得探究这样一种中间系统：对于镜像构型和一般晶格常数 [11]，与右向和左向传播模式的耦合都不相等且非零。对于晶格常数一般的系统，会发生动力学镜像对称性破缺，因此值得在热力学极限下探究这一行为。

图中绘制的数据可在 [26]获取。

致谢

我们感谢 Wenqi Tong 和 AbdAlghaffar Amer 提供的宝贵讨论和建议。本研究得到美国国家科学基金会项目（编号 2410890-PHY）的资助。本研究还部分使用了普渡大学西拉斐特校区信息技术部门提供的计算资源。

附录A：手性波导中 P 的渐近行为

在本附录中，我们分析式（26）中 $P(x,t)$的渐近行为，以提取最大功率信息以及晚期行为。首先，为简化记号，我们记$_1F_2\left(\frac{1}{2};\ 1,\ \frac{2}{2};\ 4xh(t)\right)\equiv R(4s)$，其中 $s=xh(t)$。自变量中的函数 $h(t)=-(2e^{-t}+t-2)$在 $t<t_{sp}$ 时为正，在更大的 t时为负。为求得峰值辐射行为，我们求出 $s\to+\infty$ 极限下 $R(4s)$的渐近值。

$$R(4s)\sim\frac{e^{4\sqrt{s}}}{8\pi s}. \tag{A1}$$

该公式表明，辐射功率会随光学深度呈拉伸指数式增强。

当 t较大时，我们得到 $s\to-\infty$ 极限下 $R(4s)$ 的渐近值。

$$R(4s)\sim\frac{1}{\pi\sqrt{-s}}[1-\frac{1}{4\sqrt{-s}}\cos\left(4\sqrt{-s}\right)]. \tag{A2}$$

该公式表明，当 t足够大，使得$h(t)\sim 2-t$，且光学深度 $\propto x$较大时，波导中的辐射功率为

$$P(x,t)\sim xe^{-t}\frac{1}{\pi\sqrt{x(t-2)}}\times\left[1-\frac{1}{4\sqrt{x(t-2)}}\cos\left(4\sqrt{x(t-2)}\right)\right]. \tag{A3}$$

这表明一种代数修正衰减叠加了阻尼振荡行为，且周期逐渐增大，如图5所示。

附录B：对称系统中 MF2 精确性的证明

在本附录中，我们推导对称系统从反转态衰减情形下的矩方程，并证明MF2在热力学极限下的精确性。首先，我们为非零矩定义记号。这些矩具有相同数目的自旋上升（$\hat{}\sigma_i^\dagger$）与下降（$\hat{}\sigma_i$）算符，以及任意数目的激发算符$\hat{e}_i$。例如，$\hat{}\sigma_i^\dagger\hat{}\sigma_j\hat{e}_k\hat{e}_l$在演化过程中不为零。其他自旋上升与下降算符数目不相等的算符初始为零，并在整个演化过程中保持为零。

我们用 c 表示一个矩中的升算符数目，用 p表示激发算符数目。例如，对于 $\hat{}\sigma_i^\dagger\hat{}\sigma_j\hat{e}_k\hat{e}_l$，有 $c=1$和 $p=2$。我们用一个双指标变量 $A_{p,\ c}$表示此类算符的期望值。设 N 为系统中的原子数，并采用简写记号 $N_i=N-i$和 $o=p+2c$，一般$A_{p,\ c}$的运动方程为

$$\begin{aligned}(\partial_t+p+c)A_{p,c}=&-cN_{2c}\beta A_{p,c}\\&+N_o\beta(2cA_{p+1,c}-pA_{p-1,c+1})\\&+c^2\beta(2A_{p+2,c-1}-A_{p+1,c-1}),\end{aligned} \tag{B1}$$

对于反转态 $|ee\dots e\rangle$，我们有以下初始条件

$$A_{p,c}(0)=\delta_{c,0}=\begin{cases}1 & \text{if } c=0\\ 0 & \text{if } c>0.\end{cases} \tag{B2}$$

在热力学极限下，我们有 $\beta\to 0$ 和 $N\to\infty$。因此，我们定义 $\mathcal{B}=N\beta$，并使用无穷小参数 β进行微扰分析。首先，我们将方程 (B1) 改写为

$$\begin{aligned}(\partial_t+p+c)A_{p,c}=&-c(\mathcal{B}-2c\beta)A_{p,c}\\&+[\mathcal{B}-(p+2c)\beta](2cA_{p+1,c}-pA_{p-1,c+1})\\&+c^2\beta(2A_{p+2,c-1}-A_{p+1,c-1}).\end{aligned} \tag{B3}$$

感兴趣的量可以用矩 $A_{p,\ c}$ 以及参数 $\mathcal{B}$ 和 β表示。例如，发射功率的形式为:

$$P=\beta(NA_{1,0}+NN_1A_{0,1})=\mathcal{B}A_{1,0}+\mathcal{B}^2A_{0,1}/\beta-\mathcal{B}A_{0,1}, \tag{B4}$$

因此，要找到零阶的 P，我们需要找到零阶的 $A_{1,\ 0}$，以及一阶的 $A_{0,\ 1}$。同样，相干性$G^{(2)}$ 的形式为

$$\begin{aligned}4G^{(2)}&=\beta^2(2NN_1A_{2,0}+4NN_1N_2A_{1,1}+NN_1N_2N_3A_{0,2})\\&=2\mathcal{B}^2A_{2,0}+4\mathcal{B}^3A_{1,1}/\beta+\mathcal{B}^4A_{0,2}/\beta^2+\mathcal{O}(\beta),\end{aligned} \tag{B5}$$

因此，要找到零阶的 $G^{(2)}$，我们需要找到零阶的 $A_{2,0}$、一阶的 $A_{1,1}$ 以及二阶的 $A_{0,2}$。左侧的系数 4 是为了计入右向传播和左向传播。对于 P 和 $G^{(2)}$，我们注意到，需要将 $A_{p,c}$ 求到 β^c 阶，才能得到 P 或 $G^{(2)}$ 的 β^0 阶项。

可以证明，使用 MF2 方法求得 $A_{p,c}$ 至 β^c 阶的结果是精确的。例如，在第二节C中，我们采用近似 $A_{1,1} \approx A_{0,1}A_{1,0}$。这构成了一个关于 3 个变量的截断系统：$A_{0,1}$、$A_{1,0}$ 和 $A_{2,0}$，它们表示第 IIC 节中的变量。随后可以证明，所得解对于量 $A_{p,c}$ 在 β^c 阶上是精确的，如下所示。

首先注意到，初始条件会从 $c = 0$ 开始，以 β 步传播到更高的 c。这意味着 $A_{p,c}$ 的阶数为 β^c。于是，存在如下形式的解的试探形式：

$$A_{p,c} = ce^{-pt}(A_{0,1})^c + \mathcal{O}(\beta^{c+1}), \tag{B6}$$

它假设采用 β^c 阶的 MF2 近似，并且 $A_{0,1}$ 与方程 (32) 中的量 $C(t)$ 具有相同的解。

$$A_{0,1}(t) = \frac{\beta}{\mathcal{B}}[\exp\{\mathcal{B}h(t)\} - 1] + \mathcal{O}(\beta^2), \tag{B7}$$

其中，$h(t)$ 来自方程 (11)。将试探形式 $A_{p,c} = ce^{-pt}(A_{0,1})^c$ 直接代入方程 (B3)，可以证明它在 β^c 阶上是精确的。这证明了在本文所考虑的热力学极限下，MF2 的精确性。超出热力学极限时，即对于有限但较大的 N 或固定但较小的 β，则需要超越 MF2，才能捕捉更高阶修正；这一点已在附录 C 中通过数值计算展示。

附录C：超越热力学极限

本节总结了对于各种关注的物理量，MF$-n$的精确阶数：激发，$e(t)$、功率，$P(t)$、二阶相干性，$G^{(2)}(t,t)$，以及归一化二阶相干性，$g^{(2)}(t,t)$。此外，在热力学极限之外，我们发现有必要采用更高阶的平均场方法。对于从激发态 $|ee\ldots e\rangle$开始时的物理量 F，其展开为，$F = F_0 + \beta F_1 + \mathcal{O}(\beta^2)$。这等价于有限 N展开，$F = F_0 + (1/N)\mathcal{B}F_1 + \mathcal{O}(1/N^2)$。表I总结了这些结果。

这些结果通过对对称系统进行数值模拟获得。例如，为验证对于 $g^{(2)}$的$(1/N)$修正至少需要四阶，我们使用MF2至MF6方法，对具有固定 $\mathcal{B} = N\beta = 10$ 的大量 $N = 2^{20}$ 进行模拟。随后，我们跟踪 $Q(t) = (g^{(2)}(t,t) - 2)/\beta$。结果如图9所示。对于MF4及更高阶方法，各物理量完全一致。这证明了对于 $Q(t)$，MF4及更高阶方法是精确的，而MF2和MF3无法预测该结果。表I：对于激发 $e(t)$的各种$(1/N)$展开阶数、功率 $P(t)$、二阶相干性 $G^{(2)}(t,t)$以及归一化二阶相干性$g^{(2)}(t,t)$，保证MF-n精确性所需的最低阶数 n。星号（*）表示尚未研究的量。最后一列是基于低阶情形提出的猜想（记作“conj.”）。

数量 \阶 1		$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{1}{N^3}$	$\frac{1}{N^m}(conj.)$
e	1	2	3	*	$m+1$
P	2	3	4	*	$m+2$
$G^{(2)}$	2	4	5	*	$m+3\ (m \geq 2)$
$g^{(2)}$	1	4	5	*	$m+3\ (m \geq 2)$

我们注意到，这种行为与配套论文附录中展示的有限 $N = 300$ 分析相似[19]。表 I 中考察的所有其他量也都通过模拟进行了类似的检验，但结果未展示。

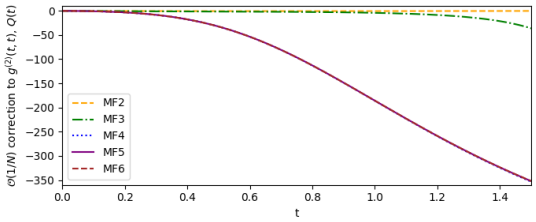

图 9：在 $\mathcal{B} = N\beta = 10$ with$N = 2^{20}$ 条件下，对于使用 MF2 至 MF6 的对称系统，二阶相干性 $g^{(2)}(t,\ t)$ 的一阶（$\mathcal{O}(1/N)$）修正 $Q(t)$。

各种修正的一般特征已被观察到。首先，这些修正的符号交替变化。例如，P_1 为负，而 P_2 为正。其次，更高阶修正仅在较晚时刻才显著。第三，修正的幅度随 $\mathcal{B}$的增大而变大。

[1] Robert H Dicke，“自发辐射过程中的相干性”，《物理评论》**93**，99（1954）。[2]Michel Gross 和 Serge Haroche，“超辐射：集体自发辐射理论综述”，《物理报告》**93**，301–396（1982）。[3]M Gross、C Fabre、P Pillet 和 S Haroche，“在钠原子的级联跃迁中观测近红外迪克超辐射”，《物理评论快报》**36**，1035

(1976)。[4] Marlan O Scully，“单光子狄克超辐射中的集体兰姆位移”，《物理评论快报》**102**，143601（2009）。[5] J Pellegrino、R Bourgain、Stephan Jennewein、Yvan RP Sortais、Antoine Browaeys、SD Jenkins和J Ruostekoski，“冷原子系综中由偶极-偶极相互作用引起的光散射抑制的观测”，《物理评论快报》 **113**，133602（2014）。[6] Sudhakar Prasad和Roy J Glauber，“Polarium 模型：共振介质的相干辐射”，《物理评论A》**61**，063814（2000）。[7] RG DeVoe和RG Brewer，“两个囚禁离子超辐射与亚辐射自发发射的观测”，《物理评论快报》 **76**，2049（1996）。[8] Alexandra S. Sheremet、Mihail I. Petrov、Ivan V. Iorsh、Alexander V. Poshakinskiy和Alexander N. Poddubny，“波导量子电动力学：集体辐射与光子-光子关联”，《现代物理评论》**95**，015002（2023）。[9]Ana Asenjo-Garcia、M Moreno-Cardoner、Andreas Albrecht、HJ Kimble和Darrick E Chang，“利用原子阵列中的亚辐射与“选择性辐射”实现光子存储保真度的指数提升”，《物理评论X》 **7**，031024（2017）。[10]Felix Tebbenjohanns、Christopher D Mink、Constanze Bach、Arno Rauschenbeutel和Michael Fleischhauer，“预测级联量子系统超辐射发射中的关联”，《物理评论A》 **110**，043713 2024( )。[11] Silvia Cardenas-Lopez、Stuart J. Masson、Zoe Zager和Ana Asenjo-Garcia，“波导量子电动力学中的多体超辐射与动力学镜像对称性破缺”，《物理评论快报》**131**，033605（2023）。[12] Bennet Windt 、 Miguel Bello 、 Daniel Malz 和 J. Ignacio Cirac，“手性波导量子电动力学中迟滞效应对多体超辐射的影响”，《物理评论快报》 **134**，173601 2025( )。[13] Kasper Jan Kusmierek、Sahand Mahmoodian、Martin Cordier、Jakob Hinney、Arno Rauschenbeutel、Maximilian Schemmer、Philipp Schneeweiss、J¨urgen Volz和Klemens Hammerer，“手性波导量子电动力学的高阶平均场理论”，SciPost Physics Core **6**，041（2023）。[14] E. Vetsch、D. Reitz、G. Sagu´e、R. Schmidt、S. T. Dawkins和A. Rauschenbeutel，“由囚禁在光学纳米光纤周围倏逝场中的激光冷却原子形成的光学接口”，《物理评论快报》**104**，203603 (2010)。[15] Christian Liedl、Sebastian Pucher、Felix Tebbenjohanns、Philipp Schneeweiss 和 Arno Rauschenbeutel，《级联系统的集体辐射：从定时迪克态到反转系综》，《物理评论快报》**130**, 163602 (2023)。[16] Wouter Verstraelen、Dolf Huybrechts、Tommaso Roscilde 和 Michiel Wouters，《通过截断累积量轨迹研究开放量子自旋晶格中的量子关联与经典关联》，PRX Quantum **4**, 030304 (2023)。[17] Constanze Bach、Felix Tebbenjohanns、Christian Liedl、Philipp Schneeweiss 和 Arno Rauschenbeutel，《超荧光中二阶相干性的涌现》，《物理评论快报》**136**, 063402 (2026)。[18] Riccardo Pennetta、Daniel Lechner、Martin Blaha、Arno Rauschenbeutel、Philipp Schneeweiss 和 J¨urgen Volz，《观测到集体耦合至单一传播光学模式的冷原子系综中超辐射态与亚辐射态之间的相干耦合》，《物理评论快报》**128**, 203601 (2022)。[19] M. Eltohfa 和 F. Robicheaux，《手性波导量子电动力学中的光子统计：I. 平均场与微扰展开》，。[20] Daniel Malz、Rahul Trivedi 和 J. Ignacio Cirac，《狄克超辐射的大-n 极限》，《物理评论A》**106**, 013716 (2022)。[21] Christian Liedl、Felix Tebbenjohanns、Constanze Bach、Sebastian Pucher、Arno Rauschenbeutel 和 Philipp Schneeweiss，《在级联量子系统中观测到超辐射脉冲》，Phys. Rev. X**14**, 011020 (2024)。[22]Sebastian Kr¨amer 和 Helmut Ritsch，《用于模拟具有长程相互作用的大型开放自旋系综动力学的广义平均场方法》，《欧洲物理学杂志D》**69**, 282 (2015)。[23] F Robicheaux 和 Deepak A Suresh，《超越光与原子阵列相互作用的最低阶平均场理论》，《物理评论A》**104**, 023702 (2021)。[24] F. Robicheaux，《原子云和原子阵列早期超辐射的理论研究》，《物理评论A》**104**, 063706 (2021)。[25]David Plankensteiner、Christoph Hotter 和 Helmut Ritsch，《Quantumcumulants.jl：用于开放量子系统广义平均场方程的 Julia 框架》，Quantum**6**, 617 (2022)。[26] 《数据：热力学极限下反转波导耦合原子阵列中的光子统计》。