# 没有长平面路径的超立方体绘图

**Todor Antić**
查理大学数学与物理学院应用数学系，捷克共和国

**Niloufar Fuladi**
查理大学数学与物理学院计算机科学研究所，捷克共和国

**Anna Margarethe Limbach** #
捷克共和国查理大学数学与物理学院计算机科学研究所

**Pavel Valtr**
捷克共和国查理大学数学与物理学院应用数学系

arXiv:2603.04665v1 [cs.CG] 4 Mar 2026

**摘要**

我们研究了 $d$ 维超立方体图 $Q_d$ 的绘图中平面子结构的存在性。我们构造了 $Q_d$ 的绘图，其中不含边数超过 $2d-2$ 的平面子图、不含边数超过 $2d-3$ 的平面路径，也不含规模超过 $2d-4$ 的平面匹配。另一方面，我们证明，每个顶点处于凸位置的 $Q_d$ 直线绘图，都包含一条长度为 $d$ 的平面路径（若 $d$ 为奇数），或长度为 $d-1$ 的平面路径（若 $d$ 为偶数）。我们还证明，若图 $G$ 在足够大的 $d$ 下是 $Q_d$ 的每个绘图的平面子图，那么 $G$ 必然是毛毛虫森林。最后，我们简要证明了 Alpert 等人关于 $Q_d$ 的最大直线交叉数的一项结果的推广，见 [Cong. Numerantium，2009] 。

**2012年美国计算机协会学科分类** 计算数学 → 离散数学

**关键词和短语** 超立方体、平面图、凸几何图、直线绘图、简单绘图

**资助** *Todor Antić*：获捷克科学基金会（GAČR）23-04949X号资助，以及SVV–2023–260699资助。

*Pavel Valtr*：获捷克科学基金会（GAČR）23-04949X号资助。

**致谢** 感谢KAMAK2025研讨会的组织者和参与者。他们营造了愉快的工作氛围，使本研究得以在该研讨会上启动。

## 1 引言

在本科图论课程中最早介绍的图通常包括完全图、完全二部图和 $d$维超立方体图（我们简称为$d$维立方体）。因此，完全 [2, 22, 20, 27, 40, 6, 7, 8]图和完全二部 [11, 14, 1, 29] 图的绘图是图绘制领域中经常研究的主题，相关成果和有趣的问题层出不穷。然而， $d$维立方体的图示并未引起同样的关注，这或许令人意外。据我们所知，除了交叉数问题的各种变体外，[4, 23, 39, 15, 36, 16, 24, 21]，$d$维立方体的图示迄今尚未得到研究。

$d$维超立方体 $Q_d$ 是一个图，其 $2^d$ 个顶点以长度为 $d$ 的二进制字符串标记；当且仅当两个顶点的标签恰好有一位不同，它们之间才有一条边。直线绘图 是指将图的顶点表示为平面上的点，并将边表示为连接顶点的线段的绘图。若没有两条边相交，我们就称这种绘图为平面 绘图。若一种绘图是直线绘图，且其顶点处于

凸位置。若边由没有自交的简单曲线表示，且任意两条曲线至多相交于一点，该点要么是公共顶点，要么是两条边内部的正常交叉（不包括相切的“接触”），我们就称这种绘图为简单 绘图。

我们研究在 $Q_d$的（直线）绘图中寻找平面子图的问题。对于完全图和完全二部图，这一问题已得到广泛研究。如果我们要寻找一条平面哈密顿路径（或圈），那么对于 $K_n$的直线绘图而言，这个问题几乎微不足道。然而，如果稍微放宽条件，考虑简单绘图，问题就会困难得多。事实上，1988年，Rafla [34], 猜想 $K_n$ 的每个简单绘图中都存在一条平面哈密顿路径；即使经过多位作者 [2, 9, 33, 38, 17, 18, 19, 32, 25],近40年的努力，目前已知的最佳结果仍只是： $K_n$ 的每个简单绘图都包含一条长度为$O$（log($n$)/log log($n$)) [2]的平面路径。还需指出，文献中也研究了寻找较大的平面匹配、圈和树的问题 [32, 18, 2]。对于直线绘图，由于寻找一条平面哈密顿路径很容易，因此已有研究考虑寻找多条这样的路径 [26, 5]。

在完全二部图的直线绘图中寻找平面生成路径，一直是个有趣的问题（不考虑限制较少的绘图）。已知存在一些绘图，其中不存在长度超过 $(4-2\sqrt{2})n+o(n)$ [13],的平面路径，其中 $n$ 是顶点总数。另一方面，已知总是存在一条长度为 $\frac{n}{2}$ 的平面路径 [37]。由于并非每个完全二部图的绘图中都存在平面哈密顿路径，因此有多位作者试图给出绘图包含平面哈密顿路径的充分必要条件 [12, 31, 13, 35, 28, 37]。

## 1.1 我们的结果

我们首先在限制最严格的情形下考察超立方体绘图的平面子图，即只考虑凸几何绘图。作为第一个结果，我们证明，每个 $Q_d$ 的凸几何绘图都包含一条长度为长度 $d$ 的平面路径（也就是说，这是一条含有$d$条边的路径）。事实上，这是 Perles 的一个著名定理的直接推论，该定理在 [30]中提及。为了使论述自足，我们将给出该定理的证明。

▶ **定理 1.** 对于每个 $d \geq 2$， $Q_d$ 的任意凸几何绘图都包含一条平面路径 $h$ 其长度至少为 $d$ （若 $d$ 为奇数），以及 $d-1$ （若 $d$ 为偶数）。

在下面的定理3中，我们证明定理 1在相差一个乘法常数的意义下是紧的。定理3由以下更一般的结果得出（相差加性常数1）。

▶ **定理2.** 对于每个 $d \geq 3$，存在 $Q_d$ 的一个凸几何绘图，它不包含边数超过 $2d-2$ 的平面子图。

▶ **定理3.** 对于每个 $d \geq 4$，存在 $Q_d$ 的一个凸几何绘图，它不包含长度超过 $2d-3$的平面路径。

▶ **定理 4.** 对于每个 $d \geq 4$，存在 $Q_d$ 的一个凸几何绘图，它不包含边数超过 $2d-4$ 的平面匹配。

注意，定理 4 在相差一个乘法常数的意义下再次是紧的，因为根据定理 1，我们知道 $Q_d$ 的每个凸几何绘图都包含一条长度为 $d$ 或 $d-1$ 的平面路径，因此分别包含一个具有 $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ 或 $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ 条边的平面匹配。

作为关于 $Q_d$ 的凸几何绘图平面子图的最后一项结果，我们给出了图 $G$ 成为每个 $Q_d$ 的直线绘图的平面子图的必要条件（当 $d$ 足够大时）。

▶ **定理 5.** 如果存在一个 $d \geq 2$，使得 $Q_d$ 的每个直线绘图都包含固定图 $G$ 作为平面子图，那么 $G$ 就是毛毛虫森林。

接着，我们将关注点从 $d$-立方体绘图的平面子图转移开来，并对构造稍作修改，重新研究如何计算 $d$-立方体的最大直线交叉数 。图$G$ 的最大直线交叉数（记作 $\mathrm{CR}_{\max}(G)$）是对 $G$的所有直线绘图取交叉数的最大值。许多图类都研究过这一参数，例如圈 [10],完全图 [22] 以及 $k$- 正则图 [3]，等。Alpert 等人 [4] 研究了 $Q_d$ 的这一问题。他们证明了 $\mathrm{CR}_{\max}(Q_d) \geq 2^{d-2}(2^{d-1}(d^2-2d+3) - d^2 - 1)$，并猜想此结果是紧的。我们给出以下更一般结果的一个大幅简化的证明（“长度正则”和“长度轮廓”这两个术语定义于第 1.2 小节）。

▶ **定理 6.** 设 $d \geq 2$，且 $G$ 是一个 $d$-正则图。那么，$G$ 的任意长度正则绘图，若其长度轮廓为 $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d)$，则恰有 $\frac{|V(G)|}{2}(\sum_{i=1}^{d}(\ell_i - 1) - (i = \frac{1}{2}))$ 个交叉。

由于我们构造的图示都是长度正则的，因此可以对它们应用定理 6。通过简单计算，可以得到前文提到的 $\mathrm{CR}_{\max}(Q_d)$ 的下界。有趣的是，尽管我们的构造与 Alpert 等人提出的构造不同，但在所得图示中，顶点在凸包上的循环次序相同，而且这些图示弱同构，也就是说，相交的边对相同。

最后，我们考虑 $Q_d$ 的非凸几何图示，并证明如下结论。

▶ **命题 7. </style}对于， 的任意直线绘图都包含一条长度至少为4的平面路径。**

对于 $Q_d$ 的简单绘图，我们证明命题 7 无法直接推广。

▶**命题 8**。 存在一种 $Q_3$ 的绘图，其中不含长度为 4 的平面路径。

本文的组织结构如下。下一节将给出全文所用的一些技术性定义。第 2 节中，我们推导出定理 1，并介绍第一个构造，用以证明定理 2、3、4 和 5。第 3 节中，我们证明定理 6，并介绍第二个构造，用以给出上述 $\mathrm{CR}_{\max}(Q_d)$ 的下界。第 4 节中，我们证明命题 7 和 8。最后一节将提出一些未解决问题。

## 1.2 预备知识

设 $\mathcal{G}$ 是图 $G$ 的一个凸几何绘图。组合长度，简称长度，是指 $\mathcal{G}$ 中边 $e = uv$ 的两个端点 $u$ 和 $v$ 在顶点 的凸包边界圈上的图距离（该圈的边不一定是绘图中的边）；见图1。假设 $G = Q_d$ 对某个 $d$ 成立。边可能的长度为 1，2，……，$2^{d-1}$。对于顶点 $v \in \mathcal{G}$，我们将其关联到一个元组 $\hat{}v = (\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_d)$，其中 $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ldots\ldots \geq \ell_d$ 是与 $v$ 相邻的边的长度。如果对于图 $u$，$v \in \mathcal{G}$ 中任意两个顶点，均有 $\hat{}v = \hat{}u$，则称 $\mathcal{G}$ 是长度正则 的，并称 $\hat{}v$ 为 长度轮廓 。

对于凸几何绘图$\mathcal{G}$ 以及两个顶点 $v$，$w \in \mathcal{G}$，我们将 $[v, w]$ 记作这样一个顶点集合：从 $v$到 $w$沿着$\mathcal{G}$ 的顶点凸包顺时针遍历时所经过的$\mathcal{G}$ 的顶点；我们称其为一个区间。我们将 $(v, w)$ 记作 $[v, w] \setminus \{v, w\}$。如前所述，$d$-立方体 $Q_d$ 是一个图，其顶点是长度为 $d$的二进制字符串。我们用 $x$表示 $Q_d$ 的顶点，其中 $x$ 是$\{0, 1\}^d$中的一个字符串。全文中，我们会略微滥用记号，将图 $G$ 的顶点与其在 $G$的绘图中的表示视为相同。

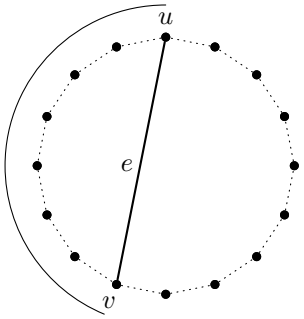


**图1** $e$ 的长度为7：所示弧内凸包边的数量。

## 2 d 维立方体凸几何绘图中的平面子图

我们首先给出任意一个 $d$-立方体的凸几何绘图中所包含的平面路径长度的下界。以下结果是 Perles 提出的一条定理的变体，该定理在 [30, 第 292], 页提及；我们将在附录中证明它。

▶ **引理9** (⋆)。 设 $k \in \mathbb{N}$ 与 $G = (E, V)$ 是一个具有 $|V| = n$ 和 $|E| > kn$的图。则 $G$ 的任意凸几何绘图都包含一条长度至少为 $2k + 1$的平面路径。

▶ **定理 1**。 对于每个 $d \geq 2$， $Q_d$ 的任意凸几何绘图都包含一条平面路径：当 $d$ 为奇数时，其长度至少为 $d$；当 $d$ 为偶数时，其长度至少为 $d - 1$。

**证明**。 $Q_d$ 有 $\frac{d}{2}n$ 条边。若 $d$ 为奇数，令 $k := \frac{d-1}{2}$。存在一条长度至少为 $2\frac{d-1}{2} + 1 = d$ 的平面路径（依据引理9）。若 $d$ 为偶数，令 $k := \frac{d-2}{2}$。存在一条长度为 $2\frac{d-2}{2} + 1 = d - 1$ 的平面路径（依据引理9）。 ◀

现在，我们定义一种特殊的 $Q_d$ 凸几何绘图，并用它来求出 $Q_d$ 凸几何绘图中各种平面子图最大规模的上界。在我们的构造中，将 $Q_d$ 的顶点放置在圆 $C$ 上，该圆由区间 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ 将端点识别后得到。稍微滥用一下记号，我们将 $C$ 上的点与 $[0, 1)$ 上的点视为相同。现在，我们通过将顶点 $00 \to 0$、 $01 \to \frac{1}{4}$、 $11 \to \frac{1}{2}$、 $10 \to \frac{3}{4}$ 映射到相应位置，定义 $Q_2$ 的绘图 $\mathrm{H}_2$。对于 $d \geq 3$，我们通过取 $\mathrm{H}_{d-1}$ 的两个副本 $\mathrm{H}'$、$\mathrm{H}''$ 来构造绘图 $\mathrm{H}_d$，并旋转 $\mathrm{H}''$，使 $\mathrm{H}''$ 中的顶点 $00\ldots0 \in$ 位于点 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^d} \in C$ 上；换言之，我们将该绘图旋转略小于 $180°$。然后，将 $\mathrm{H}'$ 中的每个顶点与其在 $\mathrm{H}''$ 中的副本相连。接着，我们将 $Q_d$ 的顶点映射到 $\mathrm{H}_d$：将顶点 $0x$ 映射到 $\mathrm{H}'$ 中 $x$ 的副本，并将 $1x$ 映射到 $\mathrm{H}''$ 中 $x$ 的副本。$\mathrm{H}_d$ 的构造见图 2。

注意，根据定义，$\mathcal{H}_d$ 是一个长度正则绘图，其长度轮廓为

$$(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d) = (2^{d-1} - 1, 2^{d-1} - 2, 2^{d-2} - 4, \ldots, 2^{d-1} - 2^{d-2}, 2^{d-1} - 2^{d-2}).$$

对于顶点 $v \in \mathcal{H}_d$，令 $e_1^v, e_2^v, \ldots, e_{d-2}^v$ 表示与 $v$ 相邻且长度严格大于 $2^{d-1} - 2^{d-2}$ 的边，并按长度排序（其中 $e_1^v$ 最长）；令 $p_v$ 表示经过 $v$ 和 $C$ 的中心的直线。我们为每条这样的边 $e_i^v$ 关联一个方向 $d(e_i^v) = \pm 1$，其中 $d(e_i^v) = +1(-1)$ 表示从 $v$ 观察时，$e_i^v$ 的另一个端点位于 $p_v$ 的左侧（右侧）。我们称元组 $(d(e_1^v)\ d(e_2^v) \ldots, d(e_{d-2}^v))$ 为 $v$ 的长度旋转。注意，在$\mathcal{H}_d$ 中可能出现 $2^{d-2}$ 个长度旋转；我们首先观察到，它们确实都出现在$\mathcal{H}_d$ 中。

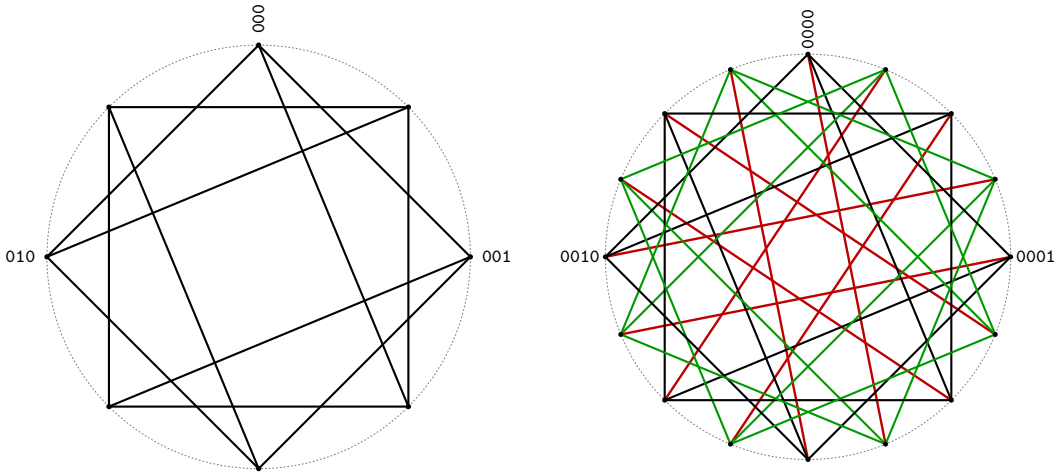


**图 2** 由$\mathcal{H}_3$（左）构造$\mathcal{H}_4$（右）。在右图中，$\mathcal{H}'$ 与$\mathcal{H}''$ 中的边分别以黑色和绿色绘出，红色边则表示这两个$\mathcal{H}_3$副本之间的边。

▶ **引理 10.** 对于 $d \geq 2$ 和 $v \in \{+1,-1\}^{d-2}$，在 $H_d$ 中恰有两对具有长度旋转 $v$ 的对径顶点。因此，每种可能的长度旋转都存在4 次。

证明。我们对 $d$使用归纳法。对于 $d = 2$，该命题显然成立。假设该命题对 $d \geq 2$成立。设 $v \in \{+1,-1\}^{d-2}$。根据归纳假设，$\mathrm{H}_d$ 中有4个长度旋转为 $v$的顶点，将它们记为 $u_1, u_2, u_3, u_4$。回顾一下，$\mathrm{H}_{d+1}$ 由$\mathrm{H}_d$的两个副本H与H′ 构造而成。假设 $u_1, u_2, u_3, u_4 \in$属于H，并令$u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 \in$ 为它们在H′ 中的副本。现在注意到，每个 $u'_i$ 在H′中的长度旋转为 $v$。在$\mathrm{H}_{d+1}$ 中，我们用一条长度为 $2^{d-1}-1$ 的边连接 $u_i$ 与 $u'_i$，该边对 $u_i$ 的长度旋转贡献 $+1$，对 $u'_i$ 的长度旋转贡献 $-1$。这意味着$\mathrm{H}_{d+1}$ 中恰好有四个长度旋转为$(+1, v)$的顶点，以及恰好四个长度旋转为$(-1, v)$的顶点。由于 $v \in \{+1,-1\}^{d-2}$ 是任意的，证明完毕。◀

最后，我们注意到，$\mathcal{H}_d$ 中相邻顶点的长度旋转，除它们之间那条边对应的坐标外，均一致。

▶ **引理 11.** 设 $d \geq 2$，且 $e = uv$ 是 $H$ 中一条长度为 $2^{d-1} - 2^m$ 的边$_d$，其中$m \in \{0, 1, \ldots, d-2\}$。那么，若 $u$ 和 $v$ 分别是 $u$ 和 $v$ 的长度旋转，则对于所有 $i \in \{m+2, m+3, \ldots, d-2\}$，都有 $u_i = v_i$。

**证明。** 考虑构造 $\mathcal{H}_d$ 的过程中加入 $e$ 这一步。此时$u, v$是两个 $\mathcal{H}$,$\mathcal{H}'$ 中同一个顶点的副本，且它们来自 $\mathcal{H}_{m-1}$，因此它们在$\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$中的长度旋转分别相同。 $\mathcal{H}_m$ 中任意边的方向在后续步骤中都不会改变，因此 $u$ 和 $v$ 对应的坐标保持不变。◀

从现在起直到本节结束，我们将介绍关于$\mathcal{H}_d$的若干平面子图结果。我们首先讨论$\mathcal{H}_d$的平面子路径长度。

▶ **命题 12.** 设 $d \geq 4$，则 $H_d$ 包含一条长度为 $2d-3$ 的平面路径。

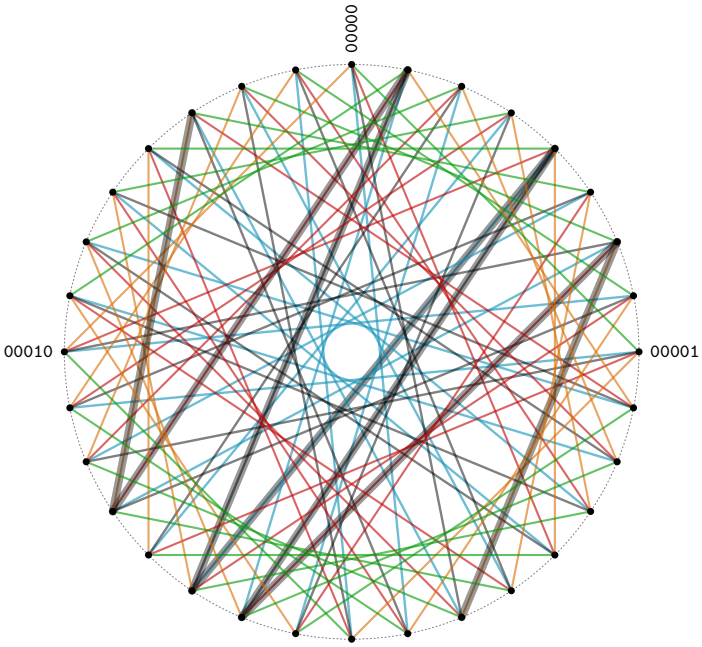


**图3** 在$\mathcal{H}_5$ 中，一条长度为7的平面路径以高亮显示。

证明。为简单起见，假设 $d$ 为奇数（否则论证类似，仅有若干符号变化）。由引理 10，存在一个顶点 $v_0 \in \mathrm{H}_d$，其长度旋转等于 $(+1,-1,+1,-1,\ldots,-1,+1)$。我们从与 $v_0$ 相邻的长度为 $2^{d-1}-1$ 的边 $e = v_0v_1$ 开始构造一条路径。由引理 11，我们知道 $u_0$ 与 $u_1$ 的长度旋转在最后 $d-3$ 个坐标上一致，因此与 $u_0$ 和 $u_1$ 相邻的长度为 $2^{d-1}-2$ 的边分别指向 $u_0$ 和 $u_1$ 的右侧，所以我们可以添加它们并得到一条长度为 3 的平面路径。我们可以将此过程总共迭代 $d-3$ 次，并得到一条长度为 $2d-5$ 的平面路径。设 $s$、$t$ 为该路径的两个端点。回想一下，$s$ 和 $t$ 都有两条长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$ 的边与之相邻，其中一条边的方向为 $+1$，另一条为 $-1$；添加方向为 $-1$ 的边，便得到我们所需的长度为 $2d-3$ 的路径。图3 描绘了 $\mathrm{H}_5$ 中的这条路径。◀

现在我们来考虑 $\mathrm{H}_d$ 的一种替代构造，它将有助于证明下一个结果。设 $\mathrm{H}'_2 = \mathrm{H}_2$。对于 $d \geq 3$，我们按如下方式从 $\mathrm{H}'_{d-1}$ 得到 $\mathrm{H}'_d$。设$v_1, v_2, \ldots, v_{2^{d-1}}$是 $\mathrm{H}'_{d-1}$的顶点，它们按顺时针方向环绕 $C$排列。现在，对每个顶点 $v_i$，在 $v_i$ 和 $v_{i+1}$之间添加另一个顶点 $u_i$。接着，对每个 $i \neq j$，当且仅当边 $v_iv_j$ 在 $\mathrm{H}'_{d-1}$中存在时，添加一条边 $u_iu_j$；注意，若该边存在，则两条边 $u_iu_j$ 和 $v_iv_j$必然相交。最后，对每个 $i$，我们添加两条平行边 $v_iu_{i+2^{d-2}}$ 和 $v_{i+2^{d-2}}u_i$（下标按模 $2^{d-1}$计算，见图4）。我们将构造最后一步中添加的平行边称为平行边对。根据定义显然可知，若边 $e$ 属于某个平行边对，则它是一条长度为 $2^{d-1}-1$ 的边，并且与属于其他平行边对的每条边都相交。可以看出，$\mathrm{H}'_d$ 与 $\mathrm{H}_d$弱同构。

为了证明命题 12 确实是最优的，我们证明以下更一般的结果。

▶ **定理2.** 对于每个 $d \geq 3$，都存在一个 $Q_d$ 的凸几何绘图，其中不包含边数超过 $2d-2$ 的平面子图。

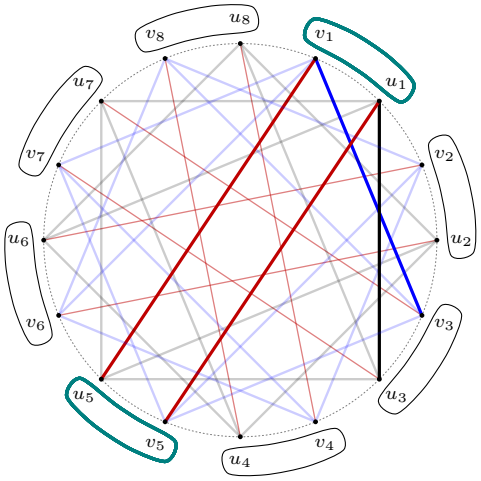


**图4** $\mathcal{H}_d$ 的替代构造。

证明。我们对 $d$使用归纳法。若 $d = 3$，则通过简单的分类讨论即可验证该结论。我们假设 $d \geq 4$，且该结论对 $d-1$成立。现在根据 $G$ 是否包含$\mathrm{H}_d(2^{d-1}-1)$中的某条最大长度边，分两种情况讨论。假设后一种情况成立，并令 $v_1, v_2, \ldots, v_{2^{d-1}}$和 $u_1, u_2, \ldots, u_{2^{d-1}}$如 $H_d$ 的第二种定义所述。回想一下，对于任意 $i \neq j$，在$(u_i, v_i)$与$(u_j, v_j)$之间，长度小于 $2^{d-1}-1$ 的边要么有零条，要么恰好有两条；若存在这两条边，它们必然相交。因此，对于每个 $i \neq j$，$G$ 至多包含一条连接$(u_i, v_i)$中的顶点与$(u_j, v_j)$中的顶点的边。最后请注意，若将每对$(u_i, v_i)$替换为单个顶点 $w_i$，并且当且仅当$(u_i, v_i)$与$(u_j, v_j)$之间存在一条长度小于 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^d}$的边时，将 $w_i$ 与 $w_j$ 相连，我们就得到 $Q_{d-1}$的一个绘图，它与$\mathrm{H}_{d-1}$ 相同（仅相差平面的某种旋转）。因此，$G$ 的子图现在是$\mathrm{H}_{d-1}$ 的一个平面子图，根据归纳假设，其边数至多为$2(d-1) - 2 = 2d-4$。否则，请注意，由于每条长度为 $2^{d-1}-1$的边都属于一个平行对，且除另一条同长度的边外，它会与所有其他同长度的边相交，因此 $G$ 至多包含2条这样的边。移除这些边后，我们便回到第一种情况，因此 $G$ 至多有$2(d-1) - 2 + 2 = 2d-2$ 条边。证明完毕。◀

由定理2可得定理3。

▶ **定理3**。对于每个 $d \geq 4$，都存在一个 $Q_d$ 的凸几何绘图，其中不含长度大于 $2d-3$ 的平面路径。

**证明**。在 $\mathcal{H}_d$ 中，平面路径至多包含一条长度为 $2^{d-1}-1$ 的边。因此，按照定理2中的相同论证即可得到结论。◀

现在证明定理 4。

▶ **定理 4**。对于每个 $d \geq 4$，都存在一种 $Q_d$ 的凸几何绘图，其中不包含超过 $2d-4$ 条边的平面匹配。

证明。对于一个有 $n$ 个顶点的图的任意凸画法，长度为 $\ell$ 的边 $e$ 所在的匹配中，长度为 $l$ 的边不可能超过 $\lfloor \frac{n}{l+1} \rfloor$ 条。令 $M$ 为 $\mathrm{H}_d$ 中的一个平面匹配。$\mathrm{H}_d$ 中的长度轮廓为 $\{2^{d-1}-1, 2^{d-1}-2, 2^{d-1}-4, \cdots \; 2^{d-1}-2^{d-3}, 2^{d-1}-2^{d-2}, 2^{d-1}-2^{d-2}\}$。因此，$M$ 中长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$ 的边至多有 3 条，其他任意长度的边至多有 2 条。

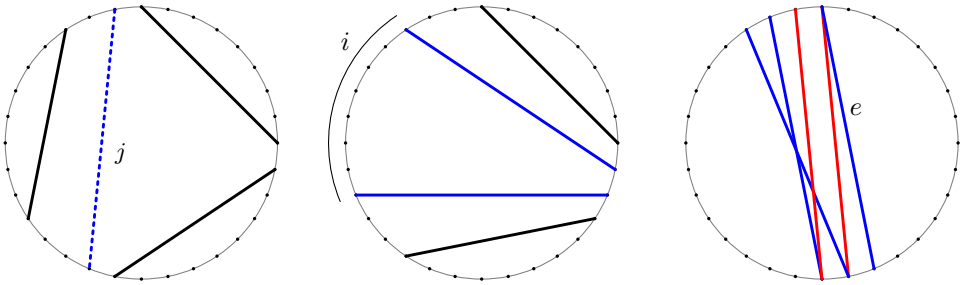


**图 5** 定理 4 证明中的各种情形。黑边的长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$。左：说明在情形 1 中，平面匹配中的一条边 $j$ 的长度必须小于 $2^{d-1}-2$。中：说明在情形 1 中，平面匹配中其他任何边长都不能出现多于一次。两条蓝色直线的长度至少为 $2^{d-1}-2^{d-3}$，因此弧 $i$ 的长度小于$2^d-(2(2^{d-1}-2^{d-3})+1)$ $=2^{d-2}-1$。右：情形 2 的证明，说明在所示的直线中（两种最长长度各有两条），只有两条能属于该匹配。

情形 1： $M$ 中有 3 条长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$ 的边。我们可以证明，在这种情况下$|E(M)|\le d-1$。首先，我们证明，存在 3 条长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$ 的边时，匹配中不能有长度为 $2^{d-1}-1$ 和 $2^{d-1}-2$ 的边。绘图中的任意一条边 $j=vw$，其一侧有两条长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$ 的边，另一侧有一条长度为 $j$ 的边。于是，$[v,w]$ 或 $[w,v]$ 中必有一个包含三条长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$ 的边中的两条，因此至少包含 $\mathrm{H}_d$ 的 $2(2^{d-1}-2^{d-2})$ 个顶点。这意味着 $j$ 的长度至多为 $2^{d-1}-3$，从而证明了该断言；见图 5 左图。接下来，我们证明，在这种情况下，对于 $l\in\{2^{d-1}-4,2^{d-1}-8,\ldots,2^{d-1}-2^{d-3}\}$，长度为 $l$ 的边不会出现超过一次。长度轮廓中下一个大于 $2^{d-1}-2^{d-2}$ 的长度是$2^{d-1}-2^{d-3}$。通过类似于上述的论证可知，平面匹配中不能同时有两条长度至少为 $2^{d-1}-2^{d-3}$ 的边和三条 $2^{d-1}-2^{d-2}$，见图 5 中图。这证明了情形 1 中的断言：平面匹配的大小不可能超过 $d-1$（三条最短长度的边，加上 $\{2^{d-1}-2^{d-3},\cdots\ 2^{d-1}-2^2\}$ 中每种长度各一条）。

**情形 2： $M$ 至多包含 2 条长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$的边。** 我们断言，$M$至多包含两条长度至少为 $2^{d-1}-2$的边。假设存在一条长度为 $2^{d-1}-2$ 的边$e=vw$，且在 $M$ 中，$[v,w]$ 包含 $2^{d-1}-1$ 个顶点。注意，$M$ 不可能包含三条长度为 $2^{d-1}-1$的边，因此，如果 $M$ 不包含长度为 $2^{d-1}-2$的边，我们便得证。若 $M$中还有其他长度为 $2^{d-1}-2$ 或更长的边，则这些边的两个端点都必须位于 $[w,v]$中。现在，有两条长度为 $2^{d-1}-1$的边和两条长度为 $2^{d-1}-2$ 的边，它们的两个端点都在 $[w,v]$中。然而，较长的边中有一条以 $w$ 或 $v$ 为端点，因此不能属于 $M$。另一条长度为$2^{d-1}-1$ 的边要么与两条较短的边共用一个端点，要么与它们相交，因此如果它属于 $M$，较短的边就都不能属于该匹配。最后，两条短边相交，因此它们中至多一条能属于 $M$。图 5 右图给出了示意。这就完成了情形 2 中该断言的证明。

根据情况 1 和情况 2，我们得出最大平面匹配的大小至多为$2d-4$。现在，我们证明在$\mathcal{H}_d$中总是存在一个大小为此值的匹配。◀

我们现在证明，定理 4 的上界可由$\mathcal{H}_d$达到。因此，若要改进这个上界，就需要采用不同的构造。为证明这一点，我们需要以下断言，它本质上只是引理 10 的一个更强版本。由于证明相当繁琐且技术性较强，我们将省略。

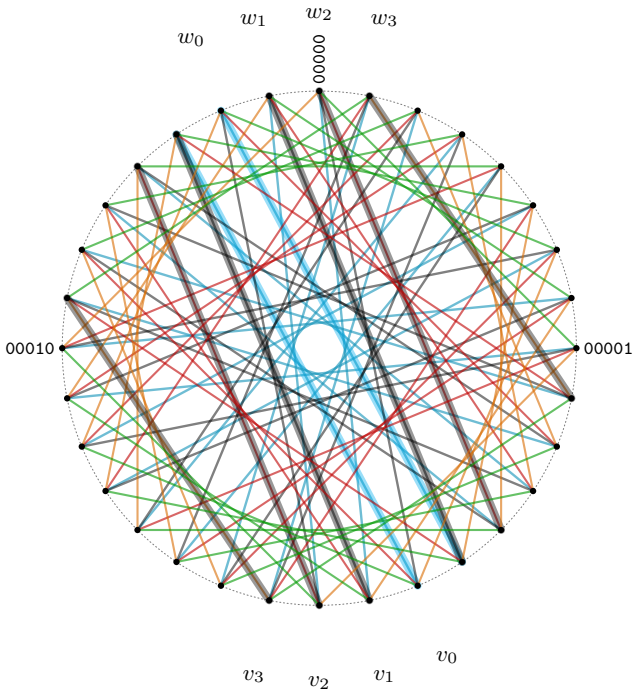


**图6** 命题14的证明中，$\mathcal{H}_5$ 内一个长度为6的平面匹配以灰色标出，顶点 $v_0,\ldots,v_3$ 和 $w_0,\ldots,w_3$ 也做了标记。青色标出的两条边构成一个平行对，它们不会与该匹配相交，因此可以将其加入以构成一个更大的平面子图。

▶ 注13. 对于每个顶点 $x \in V(Q_d)$，其在$\mathcal{H}_d$ 中的长度旋转由 $x \in\{-1,+1\}^{d-2}$给出，其中 $x_i = \begin{cases} +1, & \text{若 } x_i = 0, \\ -1 & \text{若 } x_i = 1 \end{cases}$，对于每个 $i \in \{1,\ldots,d-2\}$。因此，长度旋转为 $(+1,+1,\ldots,+1)$ 的顶点恰好是满足 $x \in V(Q_2)$ 的顶点 $\overline{0\ldots0x}$，它们是 $2^{d-2}$ 倍来自$\mathcal{H}_2$ 的顶点的未旋转副本，因而在圆周上等距分布（间距为$2^{d-2}$）。

从这四个顶点之一出发，沿圆周逆时针方向前进（例如，从位置0处的顶点前进到位置 $1-\frac{1}{2^d}$ 等），可以看到，顶点的前$d-2$ 个坐标依次是从 $[0,2^{d-2}]$ 开始递增的整数的二进制编码。具体来说，如果从起始顶点 $\underbrace{0\ldots0}_{d-2}x$ 逆时针前进 $0 \le m \le 2^{d-2}-1$ 步，我们得到一个具有$m=\sum_{i=1}^{d-2} y_i 2^{i-1}$的顶点 $y_m$。

▶ **命题14**。 对每个 $d \ge 3$，$H_d$ 包含一个有 $2d-4$ 条边的平面匹配和一个有 $2d-2$ 条边的平面子图。

**证明**。 我们的构造基于一个关于非负整数的断言。

▷ 断言15。对每个 $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$，存在一个元素 $x_k \in \{0,\ldots,2^k-1\}$，使得对每个$i \in \{0,\ldots,k-1\}$：$x_k - i \in \{0,1,\ldots,2^i-1\} + 2^{i+1}\mathbb{N}_0$，即 $x_k - i$ 的二进制表示中 $2^i$ 的系数为0。

证明。 对于 $k=1$，因此 $i=0$，我们有 $x_1 = 0 \in \{0\} + 2\mathbb{N}_0$。现在，假设该断言对某个 $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ 成立，并令 $x_k$ 为这样的一个元素。由于 $x_k \in \{0,\ldots\ldots,2^k-1\}$ 且

$x_k-(k-1) \in \{0,1,\ldots,2^{k-1}-1\}+2^k\mathbb{N}_0$，我们有 $x_k-k \in \{-1,0,1,\ldots,2^{k-1}-2\}$。如果 $x_k-k \in \{0,1,\ldots,2^{k-1}-2\} \subseteq \{0,1,\ldots,2^k-1\}+2^{k+1}\mathbb{N}_0$，我们看到 $x_{k+1}:=x_k$满足该断言（需要检查缺失的 $i=k$）。否则，我们有 $x_k=k-1$，并令 $x_{k+1}:=k-1+2^k$。对于 $i \in \{0,\ldots,k-1\}$，我们有 $x_{k+1}-i=x_k-i+2^k \in \{0,1,\ldots,2^i-1\}+2^{i+1}\mathbb{N}_0$，而对于$i=k$，我们有 $x_{k+1}-i=2^k-1 \in \{0,1,\ldots,2^k-1\}+2^{k+1}\mathbb{N}_0$. 因此，我们通过归纳证明了该断言。◁

现在我们构造匹配。根据断言15中的 $x_{d-2}$，下文将用二进制表示来表示自然数。令 $v_0$ 为超立方体$\mathbf{H}_d$中对应于 $x_{d-2}00$ 的顶点，令 $w_0$ 为超立方体$\mathbf{H}_d$ 中对应于 $x_{d-2}11$的顶点；根据注13，这两个顶点互为对径。注意，与 $v_0$ 相邻的两条长度为 $2^{d-1}-1$ 的边构成一个平行对。现在，令 $v_1$、$v_2$、.....、$v_{d-2}$为超立方体$\mathbf{H}_d$的顶点：沿圆 $C$从 $v_0$开始顺时针遍历时，这些顶点依次相邻；并以类似方式定义 $w_1$、$w_2$、$\ldots w_{d-2}$。现在令 $M_v$为由以下边组成的集合：与 $v_1$相邻的第二长边（即长度为 $2^{d-1}-2$的边）、与 $v_2$ 相邻的第三长边（即长度为 $2^{d-1}-2^2$的边），依此类推。也就是说，对于顶点 $v_i$，我们将与 $v_i$ 相接、长度为 $2^{d-1}-2^i$ 的边纳入 $M_v$。构造 $M_v$见图6。根据注13和断言15，我们知道，$M_v$ 中的每条边都会对与其相邻的顶点 $v_i$ 的长度旋转贡献+1 [1]。我们证明 $M_v$ 是由 $d-2$ 条边组成的平面匹配。假设 $M_v$ 中有两条边 $v_iv_i'$ 和 $v_jv_j'$，其中$1 \le i < j \le d-2$，且它们不互不相交（即它们相交或共用一个顶点）。若这两条边不互不相交，则意味着 $v_i'$ 位于区间（$v_j$，$v_j'$]）内。注意，该区间包含超立方体$\mathbf{H}_d$的 $2^{d-1}-2^j$ 个顶点。此外，（$v_i$，$v_j$]）最多包含超立方体$\mathbf{H}_d$的 $j-i$ 个顶点。因此，区间（$v_i$，$v_j'$]）最多包含 $2^{d-1}-2^j+j-i$ 个顶点。另一方面，根据 $M_v$ 的定义，边 $v_iv_i'$ 的长度为 $2^{d-1}-2^i$，且区间（$v_i$，$v_i'$]）恰好包含超立方体$\mathbf{H}_d$的 $2^{d-1}-2^i$ 个顶点。因此，只有当$2^{d-1}-2^j+j-i \ge 2^{d-1}-2^i$. 时，$v_i'$才能位于区间（$v_j$，$v_j'$]）内。这成立当且仅当 $2^j-2^i \le j-i$；若 $i$和$j$均为正数，则这是不可能的。因此，$M_v$是由 $d-2$ 条边组成的平面匹配。

与 $M_v$类似，我们利用顶点 $w_1,w_2,\ldots w_{d-2}$定义 $M_w$。根据与之前相同的论证，它同样是一个包含 $d-2$ 条边的平面匹配。此外，根据$M_v$ 和 $M_w$的定义，这些边中没有任何一条与由长度为 $2^{d-1}-1$、邻接于 $v_0$ 和 $w_0$的边所诱导的平行对相交，因此不交并 $M_v \cup M_w$ 是一个包含$2d-4$ 条边的平面匹配，正如我们所期望的。另外，$M_v \cup M_w \cup \{v_0v_0', w_0w_0'\}$诱导出一个包含 $2d-2$ 条边的平面子图。◀

最后，我们给出一个抽象图可嵌入 $d$-立方体的每一个直线绘图（当 $d$ 充分大时）的必要条件。

▶ **定理 5.** 如果存在一个 $d \ge 2$，使得 $Q_d$ 的每一个直线绘图都包含一个固定图 $G$ 作为平面子图，那么 $G$ 是一个毛毛虫森林。

证明。我们首先证明 $G$ 必须是无环的。由于 $Q_d$ 是二部图，考虑它的一个二部划分，并令 $A_d$和 $B_d$ 为两个部分。现在，考虑 $Q_d$ 的一个绘图 $\mathsf{G}$，其中$A_d$ 和 $B_d$ 的顶点都放置在一个圆上，且满足存在一条直线 $\ell$，使得$A_d$ 的所有顶点都位于 $\ell$ 的一侧，而 $B_d$ 的所有顶点都位于另一侧。现在，若 $\mathsf{G}$ 中存在长度为 $k \ge 4$的平面圈 $\mathsf{C}$，我们可以将其顶点标记为 $a_1$、$b_1$、$a_2$、$b_2$、.....、$a_k$、$b_k$，使得对于每个 $i$，$a_ib_i$和 $b_ia_{i+1}$ 都是 $\mathsf{C}$ 的边。考虑边 $a_1b_1$、$b_1a_2$和 $b_ka_1$。

[1] 严格来说，这对 $v_{d-2}$ 并不成立，因为它与一条长度为 $2^{d-1}-2^{d-2}$ 的边相邻，而这条边未计入长度旋转中。不过，由于这样的边有两条，我们可以假设使用的是会贡献 $+1$ 的那一条（即位于 $v_{d-2}$ 左侧的那一条）

由于 C 是平面圈，顶点 $b_2$、$b_3$、……、$b_k$ 都必须位于由经过 $a_2$ 和 $b_1$的直线所确定的同一半平面内。然而，$a_1$ 必须位于这条直线所确定的另一个半平面内；否则，边 $a_1b_1$ 和 $a_2b_2$ 就会相交。但这意味着边 $b_ka_1$必定与边 $b_1a_2$相交。因此，G 不含任何平面圈。现在，为了证明 $G$ 必须是毛毛虫森林，只需证明对于所有 $d \geq 2$，$\mathrm{H}_d$ 都不含有一个平面子图 $G_0$；该图是将$K_1$的每条边各细分一次后得到的。反设存在某个 $d$，使得 $\mathrm{H}_d$ 包含 $G_0$的一个平面副本。令$v$ 为 $G_0$中唯一的三度顶点，并令 $e_1 = vw_1$、$e_2 = vw_2$、$e_3 = vw_3$ 为 $G_0$ 中与 $v$ 相邻的三条边；再令 $w_1'$、$w_2'$和 $w_3'$ 分别为 $G_0$ 中与 $w_1$、$w_2$ 和$w_3$相邻的叶节点。不失一般性，假设在 $\mathrm{H}_d$中，$G_0$ 以如下方式嵌入：绕着 $v$顺时针看去，$e_1$、$e_2$、$e_3$ 依次出现。除对称情况外，$G_0$ 的其余边可按图 7 所示的三种方式之一嵌入。在证明余下部分中，若顶点 $w_i'$ 位于区间（$w_i$，$v$）内，我们就称其位于 $w_i$ 的左侧；若它位于区间（$v$，$w_i$）内，则称其位于 $w_i$ 的右侧。

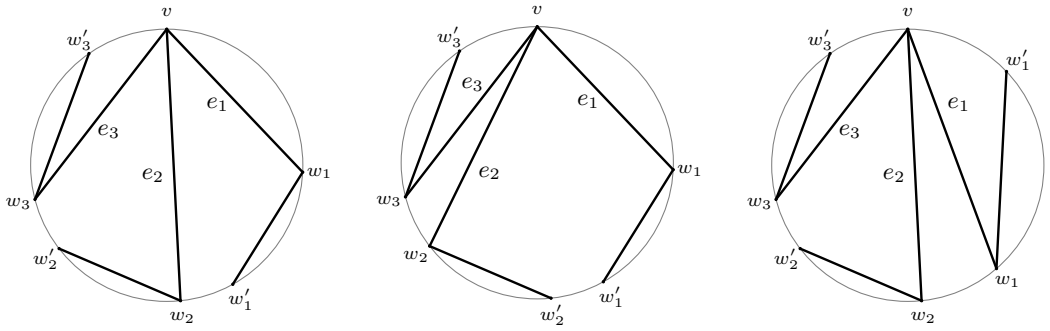


**图 7** 定理 5 证明中 $G_0$ 的三种可能情况

**情况 1：** $w_i'$ **位于** $w_i$ **的左侧，对每个** $i \in \{1,2,3\}$**均如此，如图 7 左侧所示。** 在这种情况下，边 $e_1$ 和 $e_3$ 的长度至少为 $2^{d-1} - 2^{d-2}$，因此顶点 $w_1, w_1', w_2, w_2', w_3$ 都包含在区间 $[w_1, w_3]$ 中，而该区间至多包含

$$2^d - (2^{d-1} - 2^{d-2}) - (2^{d-1} - 2^{d-2}) + 1 = 2^{d-1} + 1$$

$\mathcal{H}_d$ 的顶点。然而，边 $w_1w_1'$ 和 $w_2w_2'$ 的长度都至少为 $2^{d-1} - 2^{d-2}$，因此区间 $[w_1, w_2']$ 必须包含至少

$$2(2^{d-1} - 2^{d-2}) + 1 = 2^{d-1} + 1$$

$\mathcal{H}_d$ 的顶点；由于 $[w_1, w_2']$ 真包含于区间 $[w_1, w_3]$ 中，这是不可能的。

**情形 2：叶节点** $w_1'$、$w_3'$ **位于** $w_1$ **和** $w_3$**的左侧，而** $w_2'$ **位于** $w_2$**的右侧，如图 7 中间部分所示。**那么，顶点 $w_1$、$w_1'$、$w_2'$、$w_2$都包含在区间 $[w_1, w_2]$ 内。和之前一样，边 $e_1$ 的长度至少为$2^{d-1} - 2^{d-2}$，而 $e_2$的长度至少为 $2^{d-1} - 2^{d-3}$，因此区间 $[w_1, w_2]$ 至多包含 $\mathcal{H}2^{d-2} + 2^{d-3} + 1$ 个顶点。另一方面，边 $w_1w_1'$ 和 $w_2w_2'$ 的长度都至少为 $2^{d-1} - 2^{d-2}$ 和 $w_1' \neq w_2'$，因此，若要使边 $w_1w_1'$ 和 $w_2w_2'$ 嵌入时不相交，区间 $[w_1, w_2]$ 就必须至少包含 $\mathcal{H}2^{d-1} + 1$ 个顶点，这与我们之前的计算相矛盾。

**情形 3：** $w_2'$，$w_3'$ **位于** $w_2$ **和** $w_3$**的左侧，而** $w_1'$ **位于** $w_1$**的右侧，如图 7 右侧所示。**边 $w_1w_1'$ 和 $w_3w_3'$ 的长度均至少为 $2^{d-1} - 2^{d-2}$，因此，边 $e_1$ 和 $e_3$ 的长度均至少为 $2^{d-1} - 2^{d-3}$。

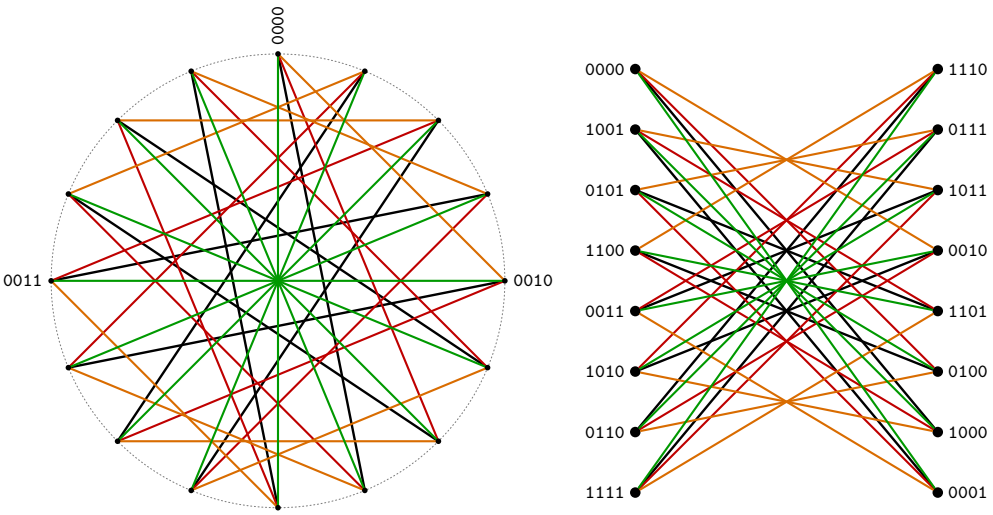


**图 8** 左：$\mathcal{R}_4$；右：Alpert 等人针对 $Q_4$的构造所得到的绘图。

顶点 $w_1$，$w_2$，$w_2'$，$w_3$ 都位于区间 $[w_1, w_3]$内，该区间至多包含 $2^{d-2}+1$个 $\mathcal{H}_d$的顶点。由于边 $w_2w_2'$ 的长度至少为 $2^{d-1}-2^{d-2}=2^{d-2}$，且顶点$w_2$，$w_2'$ 位于区间（$w_1$，$w_3$）内，因此该区间必须也包含至少$2^{d-2}+1$ 个 $\mathcal{H}_d$的顶点；但这是不可能的，因为（$w_1$，$w_3$）$\subsetneq [w_1, w_3]$。

根据前面的讨论，如果 $G$ 是一个对于足够大的 $d$而言可以嵌入 $Q_d$ 的每个绘图中的图，那么 $G$ 必须是无环的，且不能包含 $G_0$ 作为子图；因此，$G$必须是毛毛虫森林。◀

## 3 d 维立方体的最大直线交叉数

现在，我们以与定义$\mathcal{H}_d$类似的方式，定义 $Q_d$的另一种绘图。令 $C$ 如前所述，并令$\mathcal{R}_2$ 为 $Q_2$ 的一个绘图，其定义方式是将 $Q_2$ 的顶点映射如下：$00 \to 0$、$01 \to \frac{1}{2}$、$11 \to \frac{1}{4}$、$10 \to \frac{3}{4}$。对于 $d \geq 3$，我们以从$\mathcal{H}_{d-1}$得到$\mathcal{H}_d$ 的相同方式，从$\mathcal{R}_{d-1}$ 得到$\mathcal{R}_d$；见图 8。如前所述，Alpert 等人 [4] 构造了一个与$\mathcal{R}_d$ 弱同构的绘图，并猜想该绘图实现了 $CR_{\max}$（$Q_d$）。我们证明下面这个更一般的结果。

▶ **定理 6**。设 $d \geq 2$，且 $G$ 是一个 $d$-正则图。那么，$G$ 的每个长度轮廓为 $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d)$ 的长度正则绘图都恰有 $\binom{|V(G)|}{2} - \sum_{i=1}^{d}(\ell_i - 1)\left(i - \frac{1}{2}\right)$个交叉。

证明。设 $d \geq 2$，并令 D 为 $G$的长度正则绘图，其长度轮廓为（$\ell_1$，$\ell_2$，...，$\ell_d$）。注意，如果对于某个 $i$ 有 $\ell_i = \ell_{i+1}$（即绘图包含所有可能的这种长度的边），我们将这种长度的边一分为二，一半视为长度为 $\ell_i$ 的边，另一半视为长度为 $\ell_{i+1}$ 的边，使每个顶点都与两种边各有一条相 incident。长度为 $\ell_i$ 的边 $e = vw$ 与长度为 $\geq \ell_i$的边 $f = xy$ 恰好在以下情形下相交：$x$、$y$中一个落在区间（$v$，$w$）内，另一个落在区间（$w$，$v$）内。由于该绘图是长度正则的，对于 $v$ 与 $w$ 之间的每个 $\ell_i - 1$ 顶点，每种长度都有一条边，特别是对于满足 $j < i$的每个 $\ell_j$ 也是如此。因此，我们总共数得（$\ell_i - 1$）（$i - 1$）次交叉，即 $e$ 与长度为 $\ell_1$、...、$\ell_{i-1}$的边之间的交叉，以及（$\ell_i - 1$）次交叉，即 $e$与长度为 $\ell_i$的边之间的交叉。将所有 $\binom{|V(G)|}{2}$条长度为 $\ell_i$ 的边与长度为 $\geq \ell_i$的边之间的交叉相加，得到

$\binom{|V(G)|}{2}(\ell_i - 1)(i - \frac{1}{2})$ 次交叉，其中 $i - \frac{1}{2}$ 会出现，是因为两条长度为 $\ell_i$ 的边之间的交叉被计算了两次。对所有长度求和可知，$\mathcal{D}$ 中的交叉总数为 $\binom{|V(G)|}{2}\sum_{i=1}^{d}(\ell_i - 1)(i - \frac{1}{2})$。◀

▶**推论 16.** 由于绘图 $R_d$ 是长度正则的，其长度为 $\ell_1 = 2^{d-1}$ 和 $\ell_i = 2^{d-1} - 2^{i-2}$，其中 $2 \leq i \leq d$，因此最大直线交叉数 $CR_{\max}(Q_d)$ 至少为 $2^{d-2}(2^{d-1}(d^2 - 2d + 3) - d^2 - 1)$。

我们注意到，定理 6 使我们能够更简单地证明有关最大直线交叉数的其他结果。例如，[3] 中给出的 $d$-正则图的星形 绘图也是长度正则的。已知这些绘图在所有具有给定顶点数的 $d$-正则图中，使最大直线交叉数达到最大。

## 4 $d$-立方体的直线绘图和简单绘图中的平面路径

▶ **命题 7. </style}对于，的任一直线绘图都包含一条长度至少为 4 的平面路径。**

证明。考虑任意一个直线绘图$\mathcal{D}$，它对应于 $Q_3$。我们分两种情况讨论。
**情况 1：$\mathcal{D}$ 包含一个平面4-环。**设该平面 4-环的顶点为 $a$、$b$、$c$、$d$，我们需要根据 $a$、$b$、$c$、$d$ 构成的是凸四边形还是非凸四边形，讨论两个子情况。

子情形 1.1： $a, b, c, d$ 构成一个凸四边形。令 $a', b', c', d'$ 为 $Q_3$ 的其余顶点，使得对每个 $x \in \{a, b, c, d\}$，$xx'$ 都是一条边。对于四边形 $\{a, b, c, d\}$中的每个顶点 $x \in \{a, b, c, d\}$，恰有两条以 $x$ 为端点的平面路径 $p_x, q_x$。例如，$p_a = d, c, b, a$ 和 $q_a = b, c, d, a$。现在考虑路径 $p'_a = d, c, b, a, a'$ 和 $q'_a = b, c, d, a, a'$。如果其中任一条是平面路径，结论便得证，因此我们可以假设边 $aa'$ 与边 $bc$ 或 $cd$相交。因此， $a'$ 必须位于由角$\angle dab$ 所界定的平面区域内，且在 $\{a, b, c, d\}$的凸包之外，见图 9；我们称其为 $a'$的可能区域。类似地，我们可以确定 $b'$，$c', d'$的可能区域。现在，如果边 $a'b'$不与边 $cb$相交，那么 $b', a', a, b, c$构成一条长度为 4 的平面路径。否则，若 $b'a'$ 与 $bc$相交，注意到 $a'd'$ 不可能与 $dc$ 相交，因此 $d', a', a, d, c$ 是 D 中一条长度为 4 的平面路径。

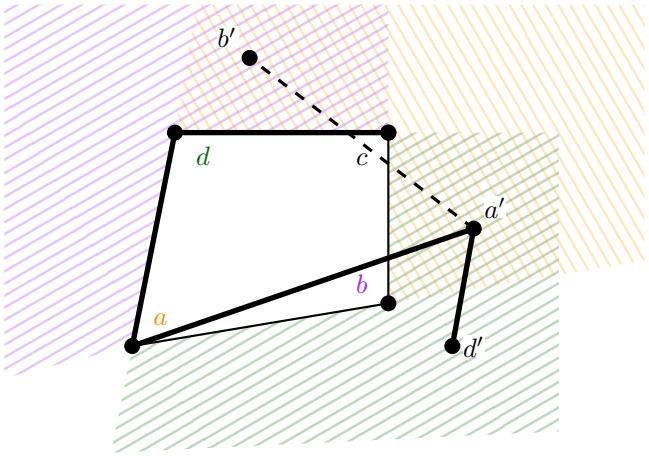


**图 9** 命题 7 证明中的子情况 1.1。顶点 $a'$、$c'$、$d'$ 可放置的区域以阴影标出，平面路径 $d'$、$a'$、$a$、$d$、$c$ 以粗线绘出。

## 14 没有长平面路径的超立方体绘图

子情形 1.2： $a, b, c, d$ 构成一个非凸四边形。假设 $a, b, c, d$ 如图 10 所示放置，即 $c$ 位于三角形 $\triangle abd$内部。令 $a', b', c', d'$ 和 $p_x, q_x$ 按前一子情形中的定义取值。根据前述相同的论证，我们可以找到 $a', b', d'$ 可能所在的区域，如图 10 所示。同样，如果边 $b'a'$ 不与边 $bc$相交，那么路径 $b', a', a, b, c$ 是平面路径，结论便得证。否则，$a'b'$ 不可能与 $bc$ 相交，且 $a'd'$ 不可能与 $dc$ 相交，因此路径 $d', a', a, d, c$ 是 D 中一条长度为 4 的平面路径。

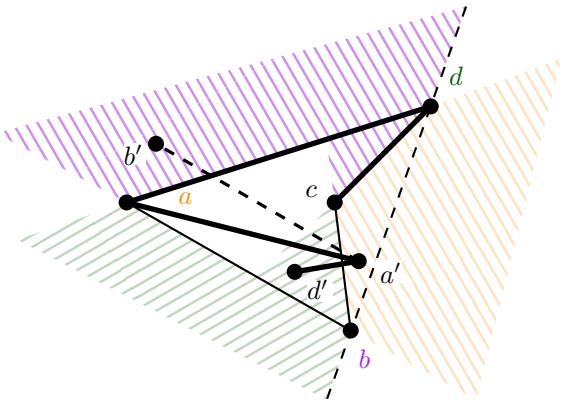


**图 10** 命题 7 证明中的子情形 1.2。

情形 2： $D$ 中不存在平面 4-圈。令 $a$、$b$、$c$、$d$ 为 $D$ 中任意一个 4-环，并假设边 $ab$ 与 $cd$ 相交。按照前述情形定义 $a'$、$b'$、$c'$、$d'$ 。此外，由于 $a$、$b$、$c$、$d$ 不是平面的，对于每个 $x \in \{a$、$b$、$c$、$d\}$，在 4-环 $a$、$b$、$c$、$d$ 中存在一条以 $x$ 为端点的长度为 3 的唯一平面路径，将该路径记为 $p_x$。利用与前述情形类似的论证，我们可以确定 $a'$、$b'$、$c'$、$d'$ 的可能区域，如图 11 所示。此外，如果边 $c'd'$ 不与边 $ad$、$bc$ 中的两条都相交，那么 $a$、$d$、$d'$、$c'$、$c$ 或 $d$、$d'$、$c'$、$c$、$b$ 将是一条长度为 4 的平面路径，因此我们假设 $c'd'$ 与这两条边都相交；类似地，我们假设 $a'b'$ 也与这两条边都相交。考虑 4-环 $c'$、$d'$、$d$、$c$。我们知道该 4-环不是平面的，因此 $c'd'$ 与 $cd$ 相交，或 $c'c$ 与 $d'd$ 相交。

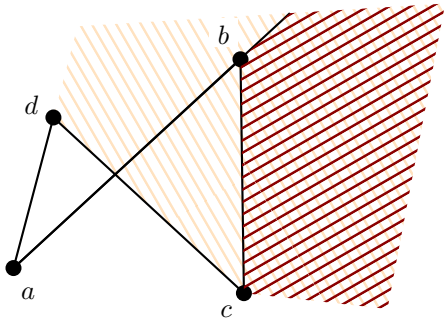


**图 11** 命题 7 证明中情形 2 的设置。在考虑 $a'b'$ 必须与边 $ad$ 和 $bc$ 相交这一事实之前，我们可以得出结论： $a'$ 可以放置在橙色区域内。根据更多信息， $a'$ 只能放置在深红色阴影区域内。

子情形 *2.1*： $c'c$ 与 $d'd$相交。在这种情况下， $c'd'$ 既不与 $ad$ 相交，也不与 $bc$相交，这与我们的假设矛盾。子情形 *2.2*： $c'd'$ 与 $cd$相交。现在， $a$ 和 $b$ 位于由直线 $\ell$确定的不同半平面内

经过 $c'$，$d'$。如果 $a'$ 和 $b'$ 都位于由 $\ell$确定的同一半平面内，那么 4-环$a'$，$b'$，$c'$，$d'$ 是平面的，这与本情形的假设矛盾。因此，我们可以假设 $a'$ 与 $b$ 位于由 $\ell$ 确定的同一半平面内，而 $b'$ 与 $a$位于由$\ell$ 确定的同一半平面内。回想一下，我们假设 $a'b'$ 与 $ad$ 和 $bc$都相交。因此，我们处于图12所示的情形，所以路径 $c'$，$b'$，$b$，$a$，$a'$是一条长度为 4 的平面路径。◀

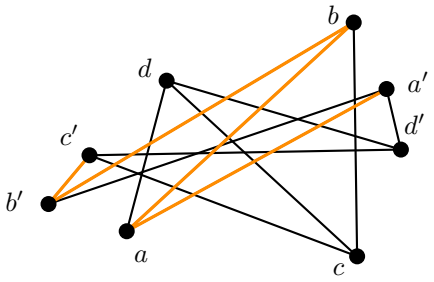


**图12** 命题 7 证明中的子情形 2.2，长度为 4 $c'$、$b'$、$b$、$a$、$a'$ 的平面路径以橙色绘制。

最后，我们构造了一个没有长度为 4 的平面路径的 $Q_3$ 简单绘图。我们的构造如下面的图13所示。

▶**命题 8.** 存在一个没有长度为4的平面路径的 $Q_3$ 绘图。

证明。设 D 为图13中的绘图，我们用颜色（红色/蓝色/黑色）指称边，并用图中标记指称顶点。我们将证明 D 不含长度为 4 的平面路径。反设 D 中存在一条长度为 4 的平面路径 $p$。注意，D 中每条红色边都与其他每条红色边相交，因此 $p$ 只能包含一条红色边。我们现在根据 $p$中边的顺序区分 4 种情形。情形 1： $p$ 由三条连续的蓝色边和一条红色边组成。注意，每条红色边都至少与蓝色圈相交一次。例如，边 $bb'$ 与边$a'd'$相交。现在，如果 $p$ 包含边 $bb'$，根据当前情形的假设，我们可以看出 $p = a$、$d'$、$c'$、$b'$、$b$，因此它不是平面路径。对其他三条红色边也可进行类似分析。

**情形 2：** $p$ **由两条连续的蓝色边、一条红色边和一条黑色边组成。** 假设 $aa'$ 是 $p$中的唯一一条红色边。由于它前面有两条蓝色边，我们知道 $p = c'$，$d'$，$a'$，$a$，$x$ 其中 $x \in \{b, d\}$。然而，边 $ab$和 $ad$都与边 $c'd'$ 或 $d'a'$之一相交，因此 $p$ 不是平面路径。对其他红色边也可进行类似分析。**情形 3：** $p$ **由一条蓝色边、一条红色边和两条连续的黑色边组成。** 注意，每条红色边恰好与两条黑色边相交，因此，未与红色边相交的黑边都与它共享一个顶点。因此，在任何平面路径中，红色边前面都不可能有多于一条黑色边。

**情形 4：** $p$ **由一条红色边和三条连续的黑色边组成。** 与情形 3 相同。◀

## 5 讨论与未解决问题

据我们所知，我们是首批研究 $Q_d$ 绘图中是否存在平面子结构的人。我们虽然部分或完整地回答了一些问题，但仍有许多问题悬而未决。这里我们重点介绍其中我们认为最有趣的问题。

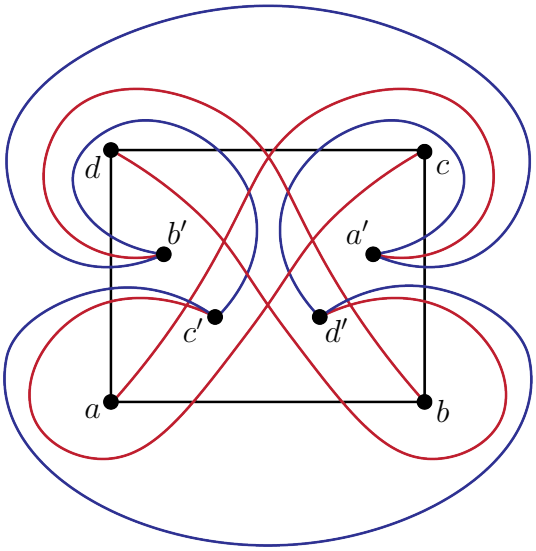


**图13** 没有长度为4的平面路径的 $Q_3$ 简单绘图。

首先，我们的研究主要关注 $Q_d$ 的凸几何绘图，并未详细研究 $Q_d$ 的一般直线绘图或简单绘图。在这些情形下研究相关问题，可能会带来一些有趣的挑战。我们尝试为一般直线绘图寻找一个与定理 1 相对应的结果。然而，我们在命题 7 中得到的界远不如定理 1 对凸几何绘图给出的界。值得注意的是，定理3 中关于最长平面路径长度的上界对一般直线绘图仍然成立，因此下界与上界之间的差距非常大。若能改进其中任何一个界，都会很有意义。

对于简单绘图，我们所知甚少。我们构造了一个 $Q_3$ 的绘图，其中不包含长度大于3的平面路径。注意，在 $Q_2$中总能找到一条长度为3的路径。我们的构造有可能（不过令人意外）推广到更高维的情形。鉴于Keszegh等人近期研究了简单绘图在不包含给定长度的平面路径时所能具有的最大边数，这一点尤其值得关注。 [25],因此，从这一角度看，这类构造也很有意义。

另一个引人关注的问题是缩小定理1和定理2给出的界之间的差距。目前我们知道，每个 $Q_d$ 的凸几何绘图都包含一条长度至少为 $d-1$ 的平面路径，而有些绘图（$\mathcal{H}_d$）不包含长度大于 $2d-3$的平面路径。我们不确定这些界中哪一个（如果有的话）是紧的。

最后，我们提及 Alpert 等人的猜想 [4], ： 该猜想认为， $Q_d$ 的最大交叉数 $\mathrm{CR}_{\max}$ $Q_d$ 由绘图$\mathcal{R}_d$取得。由于这个猜想似乎很难解决，我们认为，先在更受限的类别中验证它，或许更可行，例如 $Q_d$ 的凸几何绘图，甚至长度正则凸几何绘图。一个更具雄心的方向是，考虑一般简单绘图中 $Q_d$ 的最大交叉数。

## 参考文献

1 Oswin Aichholzer、Man-Kwun Chiu、Hung P. Hoang、Michael Hoffmann、Jan Kynčl、Yannic Maus、Birgit Vogtenhuber 和 Alexandra Weinberger。完全多部

图的三角形翻转。第258卷，第6:1–6:16页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2023年。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.SoCG.2023.6，doi:10.4230/LIPICS.SOCG.2023.6。2 Oswin Aichholzer、Alfredo García、Javier Tejel、Birgit Vogtenhuber 和 Alexandra Weinberger。在完全图的简单绘图中寻找平面结构的扭曲方法。《离散与计算几何》，71(1)：40–66，2024年1月。doi:10.1007/s00454-023-00610-0。3 Matthew Alpert、Elie Feder 和 Heiko Harborth。 $d$阶图的最大直线交叉数的最大值，阶为 $n$。《电子组合学杂志》，16，2008年。网址：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:9548696。4 Matthew Alpert、Elie Feder、Heiko Harborth 和 Sheldon Klein。 $n$ 维立方体图的最大直线交叉数。载于《第四十届东南国际组合学、图论与计算会议论文集》，第195卷，第147–158页，2009年。5 Todor Antić、Aleksa Džuklevski、Jiří Fiala、Jan Kratochvíl、Giuseppe Liotta、Morteza Saghafian、Maria Saumell 和 Johannes Zink。点集上的边约束哈密顿路径，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2511.22526，doi:10.48550/ARXIV.2511.22526。6 Alan Arroyo、Dan McQuillan、R. Bruce Richter、Gelasio Salazar 和 Matthew Sullivan。射影平面中的完全图绘图。《图论杂志》，97(3)：426–440，2021年3月。网址：http://dx.doi.org/10.1002/jgt.22665，doi:10.1002/jgt.22665。7 Alan Arroyo、R. Bruce Richter 和 Matthew Sunohara。将完全图的绘图扩展为伪圆排列。SIAM离散数学杂志，35(2)：1050–1076，2021年1月。网址：http://dx.doi.org/10.1137/20M1313234，doi:10.1137/20m1313234。8 Martin Balko、Anna Brötzner、Fabian Klute 和 Josef Tkadlec。完全图直线绘图中的面。《欧洲组合学杂志》，130：104217，2025年12月。网址：http://dx.doi.org/10.1016/j.ejc.2025.104217，doi:10.1016/j.ejc.2025.104217。9 Helena Bergold、Stefan Felsner、Meghana M. Reddy、Joachim Orthaber 和 Manfred Scheucher。凸绘图中的平面哈密顿回路。《离散与计算几何》，2025年7月。网址：http://dx.doi.org/10.1007/s00454-025-00752-3，doi:10.1007/s00454-025-00752-3。10 Jens-P. Bode、Elie Feder、Heiko Harborth、David Horowitz 和 Tamar Lichter。带对角线的回路的最大直线交叉数的极值。《数值组合学》，220：33–48，2014年。11 Jean Cardinal 和 Stefan Felsner。完全二部图的拓扑绘图。《计算几何杂志》，第9卷第1期，2018年，2018年。网址：https://jocg.org/index.php/jocg/article/view/3053，doi:10.20382/JOCG.V9I1A7。12 Josef Cibulka、Jan Kynčl、Viola Mészáros、Rudolf Stolař 和 Pavel Valtr。双色双链上的哈密顿交替路径，第181–192页。施普林格柏林海德堡，2009年。网址：http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-00219-9_18，doi:10.1007/978-3-642-00219-9_18。13 Endre Csóka、Zoltán L. Blázsik、Zoltán Király 和 Dániel Lenger。项链折叠问题的上界。《组合理论杂志》B辑，157：123–143，2022年11月。网址：http://dx.doi.org/10.1016/j.jctb.2022.05.012，doi:10.1016/j.jctb.2022.05.012。14 Etienne de Klerk、Dmitrii V. Pasechnik 和 Gelasio Salazar。完全二部图的书本绘图。《离散应用数学》，167：80–93，2014年4月。网址：http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2013.11.001，doi:10.1016/j.dam.2013.11.001。15 Luerbio Faria 和 Celina Miraglia Herrera de Figueiredo。关于 $n$立方体交叉数的Eggleton和Guy猜想的上界。《斯洛伐克数学杂志》，50(3)：271–287，2000年。16 Luerbio Faria、Celina Miraglia Herrera de Figueiredo、Ondrej Sýkora 和 Imrich Vrt'o。超立方体交叉数的改进上界。《图论杂志》，59(2)：145–161，2008年6月。网址：http://dx.doi.org/10.1002/jgt.20330，doi:10.1002/jgt.20330。

## 18 个没有长平面路径的超立方体绘图

17 Radoslav Fulek。通过圆柱绘图估算简单拓扑图中不相交边的数量。《SIAM离散数学杂志》，28(1):116–121，2014年1月。URL：http://dx.doi.org/10.1137/130925554, doi:10.1137/130925554。18 Alfredo García、Javier Tejel、Birgit Vogtenhuber 和 Alexandra Weinberger。《广义扭曲绘图中的空三角形》，第40–48页。Springer International Publishing，2023年。URL：http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-22203-0_4, doi:10.1007/978-3-031-22203-0_4。《_19 Alfredo García Olaverri、Javier Tejel Altarriba 和 Alexander Pilz。关于完全拓扑绘图的平面子图。《当代数学艺术》，20(1):69–87，2021 年 8 月。URL：http://dx.doi.org/10.26493/1855-3974.2226.e93, doi:10.26493/1855-3974.2226.e93。20 Emeric Gioan。三角形变异下的完全图绘图。《离散与计算几何》，67(4):985–1022，2022年3月。URL：http://dx.doi.org/10.1007/s00454-021-00339-8, doi:10.1007/s00454-021-00339-8。21 Richard H. Hammack 和 Paul C. Kainen。超立方体亏格的新视角。《美国数学月刊》，128(4):第352–359页，2021年。URL：https://www.jstor.org/stable/48662634。22 Heiko Harborth 和 Christian Thürmann。给定凸包的完全图绘图中的最大直线交叉数。《数值组合学》，221:121–127，2014年。23 Paul C Kainen。图交叉数的一个下界及其在 $K_n$、$K_{p,q}$和 $Q(d)$ 中的应用。《组合理论杂志》B辑，12(3):287–298，1972年6月。URL：http://dx.doi.org/10.1016/0095-8956(72)90042-1, doi:10.1016/0095-8956(72)90042-1。24 Paul C. Kainen。曲面上图的偏斜度、交叉数和欧拉界，2025年。URL：https://arxiv.org/abs/2501.02400, doi:10.48550/ARXIV.2501.02400。25 Balázs Keszegh、Andrew Suk、Gábor Tardos 和 Ji Zeng。稠密拓扑图中的不可避免模式和平面路径，2025年。URL：https://arxiv.org/abs/2512.04795, doi:10.48550/ARXIV.2512.04795。26 P. Kindermann、J. Kratochvíl、G. Liotta 和 P. Valtr。点集中的三条边不相交的平面生成路径，第323–338页。施普林格自然瑞士，2023年。URL：http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-49272-3_22, doi:10.1007/978-3-031-49272-3_22。27 Jan Kynčl。简单完全拓扑图的枚举。《欧洲组合学杂志》，30(7):1676–1685，2009年10月。URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.ejc.2009.03.005, doi:10.1016/j.ejc.2009.03.005。28 Jan Kynčl、János Pach 和 Géza Tóth。双色点集中的长交替路径。《离散数学》，308(19):4315–4321，2008年10月。URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2007.08.013, doi:10.1016/j.disc.2007.08.013。29 William J. Lenhart 和 Giuseppe Liotta。完全二部图的互见证加布里埃尔绘图，第25–39页。Springer International Publishing，2023年。URL：http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-22203-0_3, doi:10.1007/978-3-031-22203-0_3。30 W. Moser 和 J. Pach。几何图。载于《离散与计算几何新趋势》（J. Pach 编）。施普林格，纽约，1993年。31 Wolfgang Mulzer 和 Pavel Valtr。长交替路径存在。第164卷，第57:1–57:16页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2020年。URL：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.SoCG.2020.57, doi:10.4230/LIPICS.SOCG.2020.57。32 János Pach、Jozsef Sólymosi 和 Géza Tóth。完全拓扑图中的不可避免构形。《离散与计算几何》，30(2):311–320，2003年8月。URL：http://dx.doi.org/10.1007/s00454-003-0012-9, doi:10.1007/s00454-003-0012-9。33 János Pach 和 Géza Tóth。《拓扑图中的不相交边》，第133–140页。Springer Berlin Heidelberg，2005年。URL：http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-30540-8_15, doi:10.1007/978-3-540-30540-8_15。34 Nabil H. Rafla。完全图 $K_n$的优良绘图 $D_n$。博士论文，麦吉尔大学，1988年。

35 Marco Ricci、Jonathan Rollin、André Schulz 和 Alexandra Weinberger。几何多部图中的平面圈，2025年。URL： https://arxiv.org/abs/2506.20421, doi:10.48550/ARXIV.2506.20421。36 Farhad Shahrokhi、Ondrej Sykora、László A. Székely 和 Imrich Vrt'o。网格和超立方体的二部图交叉数，第37–46页。Springer Berlin Heidelberg，1997年。URL: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-63938-1_48, doi:10.1007/3-540-63938-1_48。37 Jan Soukup。允许无交叉交替汉密尔顿路径的双色点集，2024年。URL: https://arxiv.org/abs/2404.06105, doi:10.48550/ARXIV.2404.06105。38 Andrew Suk 和 Ji Zeng。《完全简单拓扑图中的不可避免模式》，第3–15页。Springer International Publishing，2023年。URL： http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-22203-0_1, doi:10.1007/978-3-031-22203-0_1。39 Ondrej Sýkora 和 Imrich Vrťo。关于超立方体和立方体连接圈的交叉数，第214–218页。Springer Berlin Heidelberg，1992年。URL: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-55121-2_21, doi:10.1007/3-540-55121-2_21。40 Bernardo M. Ábrego、Oswin Aichholzer、Silvia Fernández-Merchant、Pedro Ramos 和 Gelasio Salazar。 $K_n$的双页交叉数。《离散与计算几何》，49(4):747–777，2013年6月。URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00454-013-9514-0, doi:10.1007/s00454-013-9514-0。

## 引理9的证明

▶ **引理9** ($\star$)。 设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $G = (E, V)$ 是一个具有 $|V| = n$ 和 $|E| > kn$的图。那么， $G$ 的任何凸几何绘图都包含一条长度至少为 $2k + 1$的平面路径。

证明。设 $\Gamma$ 是 $G$的一个凸几何绘图。我们按以下方式构造一系列凸几何绘图 $\Gamma_0$、 $\Gamma_1$、 $\Gamma_2$、……、 $\Gamma_k$，它们是 $G$ 的子图的绘图。我们从$\Gamma_0 = \Gamma$开始。然后，从 $\Gamma_0$ 中移除与每个顶点相邻的最左边的边，得到 $\Gamma_1$ 。接着，对于 $i \in \{2, \ldots, k\}$，我们通过在每个顶点处交替移除最右边和最左边的边，从 $\Gamma_{i-1}$ 得到 $\Gamma_i$。由于每一步至多删除 $n$ 条边，根据我们的假设，显然 $\Gamma_k$ 至少包含一条边 $e = uv$。下面假设 $k$ 是奇数，因此 $\Gamma_k$ 是通过在每个顶点处移除最左边的边，从 $\Gamma_{k-1}$ 得到的。但由于 $e$ 没有从 $\Gamma_{k-1}$中移除，它就不是其任一端点处最左边的边。设 $l_u = uu'$ 和 $l_v = vv'$ 分别是 $\Gamma_{k-1}$中 $u$ 和 $v$ 处最左边的边。那么， $l_u$、 $e$和 $l_v$ 共同构成一条有三条边的平面路径。现在，由于从 $\Gamma_{k-2}$ 到 $\Gamma_{k-1}$这一步中没有移除 $l_u$ 和 $l_v$ ，这意味着 $l_u$ 和 $l_v$ 不是 $u'$和 $v'$ 处最右边的边，因此我们又可以在 $\Gamma_{k-2}$ 中找到两条边来延长这条路径。由于我们可以重复此论证 $k$ 次，最终得到一条由 $2k + 1$ 条边构成的路径。◀