arXiv:2603.04666v1 [math.NT] 4 Mar 2026

p进拆分：五重积的乘积

TAYLOR DANIELS、TIMOTHY HUBER、JAMES MCLAUGHLIN 和 DONGXI YE

摘要。设 $p \equiv 1$(模 4) 为素数，设 m 和 n 为满足 $p = m^2 + n^2$的整数，并设 b为正整数。令 $Q(z,q) = (z, q/z, q; q)_\infty (qz^2, q/z^2; q^2)_\infty$表示五重积恒等式中出现的乘积。我们推导出 $Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p)$的 p进拆分的显式公式，并确定相关商 $Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p)/(q^p; q^p)_\infty^2$的泰勒级数系数在长度为 p的等差数列中的符号模式。我们还给出了 p进拆分公式的一些组合应用。

1 引言

使用标准的 q-Pochhammer 符号 $(a_1, \ldots, a_j; q)_\infty = (a_1; q)_\infty \cdots (a_j; q)_\infty$，令

$$Q(z,q) := (z, q/z, q; q)_\infty (qz^2, q/z^2; q^2)_\infty \tag{1.1}$$

表示五重乘积。在最近的一篇论文中，[10], 本文的两位作者证明了以下结果：若通过以下方式定义量 b_t：

$$B(q) := Q(q^2, q^{13})Q(q^5, q^{13})Q(q^6, q^{13}) =: \sum_{t=0}^{\infty} b_t q^t,$$

则 $b_{13t+3} = b_{13t+9} = b_{13t+11} = 0$对所有 $t \geq 0$均成立。这一结果连同数值实验，自然引出了关于一般含五重乘积 $Q(q^{bn}, q^p)$ 的表达式中消失系数的问题，尤其是当 p 为素数且 $p \equiv 1$ （模 4）时。此外，确定此类表达式的泰勒级数系数可能呈现的符号模式也具有普遍意义。

本文主要考虑以下方式产生的系数：固定一个素数 $p \equiv 1 \pmod 4$，令 m 和 n 为满足 $p = m^2 + n^2$的整数，并令 $b > 0$ 为某个整数。对于这样的 b、 m、 n和 p，我们通过级数展开定义数列 $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t q^t. \tag{1.2}$$

2000 数学主题分类。主要分类：11B65。次要分类：05A19。关键词和短语。五重乘积；符号变化；消失；Winquist 恒等式。Dongxi Ye 获得了广东省基础与应用基础研究基金的支持（项目编号：2024A1515030222）。

我们尤其关注 a_t 在“模 p的算术级数”中的消失模式，即形如 $(a_{pt+r})_{t\in\mathbb{Z}}$的数列，其中 $0 \le r < p$。关于这些消失现象的主要结果如下定理所示。

定理 1. 设素数 $p \equiv 1 \pmod 4$，记 $p = m^2 + n^2$，令 $b > 0$，并定义 $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$如 (1.2)中所示。此外，设 w 满足

$$w \equiv \bar{2}(m+n) \pmod p.$$

若 $p \equiv 1 \pmod{12}$，则

$$a_{pt+bw} = a_{pt+b(w-3b)} = 0 \qquad (t \in \mathbb{Z}),$$

且若 $p \equiv 5 \pmod{12}$，则

$$a_{pt+bw(1-3b\bar{m})} = a_{pt+bw(1-3b\bar{n})} = 0 \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$

尽管可以通过构造级数 1 2）1.2的变号 involutions（依赖于剩余类 p 模 12）直接证明定理1 ，但我们将定理 p拆分 1 作为该级数的一些一般p拆分公式的推论 $A(q) = \sum_t a_t q^t$ 。我们提醒读者，级数

$$A(q) = A_0(q^p) + qA_1(q^p) + \cdots + q^{p-1}A_{p-1}(q^p),$$

其中每个 $A_i(q)$ 都是某个级数 $\sum_t a_t^{(i)} q^t$。我们对（1.2）的拆分建立在 Liu 和 Yang 的一个一般结果之上 [15, 定理 2] ，该结果涉及乘积

$$\langle z_1; q\rangle_\infty \langle z_2; q\rangle_\infty, \qquad \text{where} \qquad \langle z; q\rangle_\infty := (z, q/z, q; q)_\infty.$$

正如情形 $p \equiv 1$（mod 12）与 $p \equiv 5$（mod 12）在定理 1 中被区分一样，我们的 p-拆分（1.2）也分别处理这些情形。作为示例，情形 $p \equiv 1$ （mod 12）的一个拆分公式在下述定理中给出；完整结果作为定理4 在第 3 节中陈述并证明。

定理 2. 设 $p \equiv 1$ （mod 12），其中 $p = m^2 + n^2$ 且 $3 \mid n$，并设 b 为正整数。若 $m \equiv 1$ （mod 3），则

$$Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p) = \sum_{k=0}^{p-1} q^{3bkm+\frac{k(3k-1)p}{2}} Q\big(q^{bp+kmp+\frac{(p-m-n)p}{6}}, q^{p^2}\big) Q\big(q^{-knp+\frac{(p-m+n)p}{6}}, q^{p^2}\big).$$

当 $p \equiv 5$ （mod 12）时，我们的拆分涉及出现在 Winquist 恒等式中的一个乘积。下面陈述这样一个公式，完整结果在定理 5 中给出。

定理 3. 设 $p \equiv 5$ （mod 12），其中 $p = m^2 + n^2$，设 b 为正整数，并设

$$W(a, b, q) = \langle a, b, ab, \tfrac{a}{b}; q\rangle_\infty (q; q)_\infty^{-2}.$$

通过关系 $3m\mu \equiv 1$ （模 p）定义 μ，令

$$s := (3m\mu - 1)/p.$$

若 $m \equiv -n$ （模 3），并令

$$\alpha_k := 3kmp + 3bp - \frac{(m+n)p}{2} + \frac{3p^2}{2}, \qquad \beta_k := 3knp + \frac{(m-n)p}{2} + \frac{3p^2}{2},$$

$$\chi_k := 3bkm + p\left[\tfrac{k(3k-1)}{2} + (1-ns)(kn + \tfrac{(p+m-n(1+ps))}{6})\right], \tag{1.3}$$

则有

$$Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p) = \sum_{k=0}^{p-1} q^{\chi_k} W(-q^{\alpha_k/3}, -q^{(\beta_k - nsp^2)/3}, q^{p^2}). \tag{1.4}$$

定理2 与3 （以及更一般地，定理4 与5）的 p-拆分使我们能够推导出这些商的级数系数的显式符号模式

$$\frac{Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p)}{(q^p; q^p)_\infty^2}. \tag{1.5}$$

具体而言，推论5 与8 表明，在有限多个初始零项之后，（1.5）的级数系数的符号遵循显式且可预测的模式；我们在上述推论之后给出若干例子。最后，分割分量的形式使我们能够证明某些级数系数模2为零。

为说明我们结果的若干应用，这里举几个例子。例1 表明，对于经由 $Q(q^{10}, q^{13})Q(q^{15}, q^{13}) = \sum_t a_t q^t$定义的 $p = 13$ 与 a_t，对所有 t都有 $a_{13t+6} = a_{13t+9} = 0$。例 2 表明（除若干初始零系数外），对于

$$\frac{Q(q^{10}, q^{13})Q(q^{15}, q^{13})}{(q^{13}; q^{13})_\infty^2} = \sum_{t=0}^{\infty} b_t q^t,$$

系数序列 b_t 的符号模 13 呈周期性，并明确给出了这一符号模式。例 3 和例 5 分别展示了乘积 $Q(q^2, q^{17})Q(q^8, q^{17})$ 和 $Q(q^2, q^{17})Q(q^8, q^{17})/(q^{17}; q^{17})_\infty^2$的级数系数的类似结果。例4表明，对于 $Q(q^2, q^{17})Q(q^8, q^{17})$，有 $a_{17t+5} \equiv a_{17t+10} \equiv 0 \pmod 2$。例 6 明确计算了 $Q(q^2, q^{13})Q(q^3, q^{13})$ 的 13 拆分，并由此从 $Q(q^2, q^{13})Q(q^3, q^{13})/(q^{13}; q^{13})_\infty^2$ 的 13 拆分推导出若干分拆论结果。例7同样展示了 $Q(q^2, q^{17})Q(q^8, q^{17})$ 的 17 拆分，并由此推导出一些分拆论推论。

本文的结构。首先，第 2节介绍记号和预备引理，包括三重积的分割恒等式。第 3 节证明了 p-拆分公式，其中 $p \equiv 1$ （模 12），并推导出消失性和符号方面的推论。第 4 节通过 Winquist 恒等式处理 $p \equiv 5$ （模 12）的情形。第 5节给出一些情形的组合解释，第 6 节给出总结性评论和若干开放问题。

计算辅助工具。我们的许多推导都涉及繁琐、冗长的符号运算。为了避免这些繁琐的公式出现“笔误”，也为了方便感兴趣的读者查阅，我们在第一作者的网站[1], 上免费公开提供了一个 Mathematica 笔记本，其中进一步详述并实现了我们的计算。[1], 不过，我们要指出，本文结果的任何部分都不需要使用 Mathematica，也不要求熟练掌握 Mathematica。

[1]math.purdue.edu/~daniel84/

2 预备知识

在本文中，除非另有说明， p 表示满足 $p \equiv 1 \pmod 4$的素数， m 和 n 表示满足 $p = m^2 + n^2$的整数。带上划线的量（如$\bar{m}$）表示模 p的乘法逆元；表达式 $\frac{a}{b} \pmod p$（其中$(b,\ p) = 1$）均理解为 $ab \pmod p$。除复量 q 和 z外，小写拉丁字母（如 a、 k、t等）始终表示整数。“对所有 $t > t_0$都成立”（或类似表述）应理解为“存在某个常数 t_0 ，使得当 $t > t_0$时， [该陈述]成立”。

表达式 $\langle z; q\rangle_\infty$ 表示三重积

$$\langle z; q\rangle_\infty = (z, q/z, q; q)_\infty, \quad \text{and we let} \quad \langle z_1, \dots, z_k; q\rangle_\infty := \langle z_1; q\rangle_\infty \cdots \langle z_k; q\rangle_\infty.$$

我们回顾 Jacobi 三重积恒等式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-z)^k q^{k(k-1)/2} = \langle z; q\rangle_\infty = (z, q/z, q; q)_\infty \qquad \text{for } |q| < 1 \text{ and } z \neq 0, \tag{2.1}$$

并回顾五重积恒等式的几个等价形式，即

$$\begin{aligned} Q(z,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k(3k-1)/2} z^{3k}(1 - zq^k) &= \langle z; q\rangle_\infty (qz^2, q/z^2; q^2)_\infty \\ &= \langle -qz^3; q^3\rangle_\infty - z\langle -q^2z^3; q^3\rangle_\infty, \end{aligned} \tag{2.2}$$

同样适用于 $|q| < 1$ 和 $z \neq 0$。对于任意 q-级数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k q^k$，该级数的 r (模 p) 分量（或“r-分量”，如果 p 已知）为 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{kp+r} q^{kp+r}$。

F或对于整数 t、 x 和 y，在 $y > 0$ 下，容易验证这些等式

$$(\pm q^{x+ty}, \pm q^{y-x-ty}; q^y)_\infty = (\mp 1)^t q^{-tx-\frac{t(t-1)y}{2}} (\pm q^x, \pm q^{y-x}; q^y)_\infty.$$

据此并结合公式 $\langle z;\ q\rangle_\infty = (z, q/z, q;\ q)_\infty$ 以及

$$Q(z,q) = (z, q/z, q; q)_\infty (z^2 q, q/z^2; q^2)_\infty,$$

我们容易推出下列有用的关系式，为强调起见，将其记入一条引理。

引理 1. 对于整数 t、 x 和 y ，在 $y > 0$ 下，有

$$\langle \pm q^{x+ty}; q^y\rangle_\infty = (\mp 1)^t q^{-tx-\frac{t(t-1)y}{2}} \langle \pm q^x; q^y\rangle_\infty, \tag{2.3a}$$

$$Q(q^{x+ty}, q^y) = q^{-3tx-\frac{t(3t-1)y}{2}} Q(q^x, q^y). \tag{2.3b}$$

推论1. 若 $y > 0$ 与 $x \equiv 0 \pmod y$，则 $\langle q^x; q^y\rangle_\infty = Q(q^x, q^y) = 0$。

证明. 记 $x = ty$，并应用引理 1 以及如下事实：$(1; q^y)_\infty = 0$。 □

以下是 Liu 和 Yang 的一个结果的特例。

引理 2 ([15，定理 2])。设 $p = m^2 + n^2$ 满足 m 且 n 互素。对于 $|q| < 1$，有 s

$$\langle -uq; q^2\rangle_\infty \langle -vq; q^2\rangle_\infty = \sum_{k=0}^{p-1} q^{k^2} u^k \langle -u^m v^n q^{2km+p}; q^{2p}\rangle_\infty \langle -u^n v^{-m} q^{2kn+p}; q^{2p}\rangle_\infty. \tag{2.4}$$

我们旨在利用引理 2将以下形式的乘积改写为

$$\langle -q^{p\pm 3bm};q^{3p}\rangle_\infty \langle -q^{p\pm 3bn};q^{3p}\rangle_\infty$$

出现在.....的展开式中

(2.5)

$$\begin{aligned} &Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p)\\ &\quad=\Big[\langle -q^{p+3bm};q^{3p}\rangle_\infty - q^{bm}\langle -q^{p-3bm};q^{3p}\rangle_\infty\Big]\Big[\langle -q^{p+3bn};q^{3p}\rangle_\infty - q^{bn}\langle -q^{p-3bn};q^{3p}\rangle_\infty\Big]. \end{aligned}$$

特别地，若 $p=m^2+n^2$，则替换

$$q\to q^{\frac{3p}{2}},\quad u\to q^s,\quad \text{and}\quad v\to q^t,$$

方程（2.4）表明

(2.6)

$$\begin{aligned} &\langle -q^{s+\frac{3p}{2}};q^{3p}\rangle_\infty \langle -q^{t+\frac{3p}{2}};q^{3p}\rangle_\infty\\ &\quad=\sum_{k=0}^{p-1} q^{sk+\frac{3k^2p}{2}}\langle -q^{3kmp+(ms+nt)+\frac{3p^2}{2}};q^{3p^2}\rangle_\infty \langle -q^{3knp+(ns-mt)+\frac{3p^2}{2}};q^{3p^2}\rangle_\infty. \end{aligned}$$

使用数对

$$(s_0,t_0)=\left(3bm-\frac{p}{2},3bn-\frac{p}{2}\right)$$

对于 $(s,\ t)$ 在（2.6）中，显然会得到 $\langle -q^{p+3bm};\ q^{3p}\rangle_\infty\langle -q^{p+3bn};\ q^{3p}\rangle_\infty$，即该处左边的项。对于乘积 $\langle -q^{p+3bm};\ q^{3p}\rangle_\infty\langle -q^{p-3bn};\ q^{3p}\rangle_\infty$，我们使用数对 $(s_0,\ t_0+p)$；事实上，在这种情况下有

$$\langle -q^{p-3bn};q^{3p}\rangle_\infty=\langle -q^{3bn+2p};q^{3p}\rangle_\infty=\langle -q^{t_0+p+\frac{3p}{2}};q^{3p}\rangle_\infty.$$

沿着这条思路继续，我们总共发现这些数对

$$(s_0,t_0),\quad (s_0+p,t_0),\quad (s_0,t_0+p),\quad \text{and}\quad (s_0+p,t_0+p)$$

分别产生这些乘积

$$\begin{aligned} &\langle -q^{3bm+p},-q^{3bn+p};q^{3p}\rangle_\infty, && \langle -q^{3bm+2p},-q^{3bn+p};q^{3p}\rangle_\infty,\\ &\langle -q^{3bm+p},-q^{3bn+2p};q^{3p}\rangle_\infty, \quad \text{and} && \langle -q^{3bm+2p},-q^{3bn+2p};q^{3p}\rangle_\infty, \end{aligned}$$

。在本文余下部分，我们经常使用以下定义。

定义 1. 对于固定的 $p\equiv 1$（模 4）且满足 $p=m^2+n^2$，令

$$y:=3p^2,$$

令 μ 为下述方程的一个固定解

$$3m\mu\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p),$$

并令

$$s:=(3m\mu-1)/p.$$

定义 2. 对于固定的 $p \equiv 1$（模 4），其中 $p = m^2 + n^2$ 且 $b > 0$，令

$$\alpha_k := 3bp + 3kmp - \tfrac{(m+n)p}{2} + \tfrac{3p^2}{2}, \tag{2.8a}$$

$$\beta_k := 3knp + \tfrac{(m-n)p}{2} + \tfrac{3p^2}{2}, \tag{2.8b}$$

$$\gamma_k := 3bkm + \tfrac{k(3k-1)p}{2}. \tag{2.8c}$$

以下结论可由引理 2 立即推出。

推论 2. 以下展开式成立：

$$\langle -q^{3bm+p}, -q^{3bn+p}; q^{3p}\rangle_\infty = \sum_{k=0}^{p-1} q^{\gamma_k} \langle -q^{\alpha_k}, -q^{\beta_k}; q^y\rangle_\infty, \tag{2.9a}$$

$$\langle -q^{3bm+p}, -q^{3bn+2p}; q^{3p}\rangle_\infty = \sum_{k=0}^{p-1} q^{\gamma_k} \langle -q^{\alpha_k+np}, -q^{\beta_k-mp}; q^y\rangle_\infty, \tag{2.9b}$$

$$\langle -q^{3bm+2p}, -q^{3bn+p}; q^{3p}\rangle_\infty = \sum_{k=0}^{p-1} q^{\gamma_k+pk} \langle -q^{\alpha_k+mp}, -q^{\beta_k+np}; q^y\rangle_\infty \tag{2.9c}$$

$$\langle -q^{3bm+2p}, -q^{3bn+2p}; q^{3p}\rangle_\infty = \sum_{k=0}^{p-1} q^{\gamma_k+pk} \langle -q^{\alpha_k+(m+n)p}, -q^{\beta_k-(m-n)p}; q^y\rangle_\infty. \tag{2.9d}$$

定义 3. 对于所有整数 t，令

$$\sigma_t = \frac{t(t-1)y}{2} \qquad (y = 3p^2).$$

根据上述定义，等式（2.3a）表明

$$\langle \pm q^{x+ty}; q^y\rangle_\infty = (\mp 1)^t q^{-tx-\sigma_t} \langle \pm q^x; q^y\rangle_\infty.$$

此外，值得注意的是 $\sigma_{-t} = ty + \sigma_t$，因此

$$\langle \pm q^{x-ty}; q^y\rangle_\infty = (\mp 1)^t q^{t(x-y)-\sigma_t} \langle \pm q^x; q^y\rangle_\infty.$$

推论 3. 方程右端的各项 (2.9a)–(2.9d)在变换 $k \to k \pm p$. 下均保持不变

证明。 我们证明 (2.9a) 在平移 $k \to k + p$. 下的不变性。将 k 替换为$k + p$，直接得到

$$\alpha_{k+p} = \alpha_k + 3mp^2 = \alpha_k + my,$$
$$\beta_{k+p} = \beta_k + 3np^2 = \beta_k + ny,$$

因此

$$\langle -q^{\alpha_{k+p}}, -q^{\beta_{k+p}}; q^y\rangle_\infty = \langle -q^{\alpha_k+my}, -q^{\beta_k+ny}; q^y\rangle_\infty = q^{-m\alpha_k-\sigma_m-n\beta_k-\sigma_n} \langle -q^{\alpha_k}, -q^{\beta_k}; q^y\rangle_\infty.$$

现在注意到

$$\gamma_{k+p} = \gamma_k + \gamma_p + 3kp^2,$$

我们只需计算得出

$$\gamma_{k+p} - m\alpha_k - \sigma_m - n\beta_k - \sigma_n = \gamma_k + \tfrac{1}{2}p(3p + 6k - 1)(p - m^2 - n^2) = \gamma_k, \tag{2.10}$$

并推得

$$q^{\gamma_{k+p}}\langle -q^{\alpha_{k+p}}, -q^{\beta_{k+p}}; q^y\rangle_\infty = q^{\gamma_k}\langle -q^{\alpha_k}, -q^{\beta_k}; q^y\rangle_\infty.$$

(2.9a) 在 $k \to k-p$ 下的不变性，以及 (2.9b)–(2.9d) 的类似结果，证明方法相同。□

2.1 一个关键 **拆分引理**。由 (2.5) 及 $(a_t)_t$ 的定义，显然可知 at

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t q^t = \langle -q^{3bm+p}, -q^{3bn+p}; q^{3p}\rangle_\infty - q^{bn}\langle -q^{3bm+p}, -q^{3bn+2p}; q^{3p}\rangle_\infty \tag{2.11}$$
$$- q^{bm}\langle -q^{3bm+2p}, -q^{3bn+p}; q^{3p}\rangle_\infty + q^{bm+bn}\langle -q^{3bm+2p}, -q^{3bn+2p}; q^{3p}\rangle_\infty.$$

引理 3。设定 r，满足 $0 \le r \le p-1$，令 κ 满足

$$3b\kappa m \equiv r \pmod p, \qquad 0 \le \kappa \le p-1,$$

对于这个固定的 κ，令

$$\alpha = \alpha_\kappa, \quad \beta = \beta_\kappa \quad \text{and} \quad \gamma = \gamma_\kappa.$$

那么，$Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p)$ 的 r 分量，即 $\sum_{t\in\mathbb{Z}} a_{pt+r}q^{pt+r}$，等于(2.12)

$$q^\gamma\langle -q^\alpha, -q^\beta; q^y\rangle_\infty - q^{\gamma+\delta}\langle -q^{\alpha-nsp^2}, -q^{\beta+msp^2}; q^y\rangle_\infty$$
$$- q^{\gamma+\xi}\langle -q^{\alpha-msp^2}, -q^{\beta-nsp^2}; q^y\rangle_\infty + q^{\gamma+\delta+\xi}\langle -q^{\alpha-msp^2-nsp^2}, -q^{\beta+msp^2-nsp^2}; q^y\rangle_\infty,$$

其中

$$\delta = -bnps + \tfrac{1}{6}(1+ps)p^2s,$$
$$\xi = -bmps - \kappa p^2 s + \tfrac{1}{6}(1+ps)p^2 s.$$

证明。推论 2 中的方程可得

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t q^t = \sum_k q^{\gamma_k}\langle -q^{\alpha_k}, -q^{\beta_k}; q^y\rangle_\infty - \sum_k q^{\gamma_k+bn}\langle -q^{\alpha_k+np}, -q^{\beta_k-mp}; q^y\rangle_\infty$$
$$- \sum_k q^{\gamma_k+bm+pk}\langle -q^{\alpha_k+mp}, -q^{\beta_k+np}; q^y\rangle_\infty$$
$$+ \sum_k q^{\gamma_k+b(m+n)+pk}\langle -q^{\alpha_k+(m+n)p}, -q^{\beta_k+(m-n)p}; q^y\rangle_\infty$$
$$=: \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3 + \Sigma_4,$$

并且在每个 Σ_i 中，r 分量由某个 $0 \le k_i \le p-1$ 确定，使得“外部 q 指数”模 p 同余于 r[2]。具体来说，由于 $\gamma_k \equiv 3bkm$（模 p），对于 $1 \le i \le 4$，Σ_i 的 r 分量对应于满足以下条件的 $0 \le k_i \le p-1$

$$3bk_1 m \equiv r \pmod p, \tag{2.13a}$$
$$bm + 3bk_2 m \equiv r \pmod p, \tag{2.13b}$$
$$bn + 3bk_3 m \equiv r \pmod p, \tag{2.13c}$$
$$b(m+n) + 3bk_4 m \equiv r \pmod p, \tag{2.13d}$$

[2]由（2.8a）和（2.8b）可知 $p|\alpha_k$ 以及 $p|\beta_k$，分别成立。

分别成立。取 κ 使得

$$3b\kappa m \equiv r \pmod{p}$$

那么，这些量

$$k_1 = \kappa, \quad k_2 = \kappa - n\mu, \quad k_3 = \kappa - m\mu, \quad \text{and} \quad k_4 = \kappa - m\mu - n\mu \tag{2.14}$$

分别满足（2.13a）–（2.13d），并固定此 κ后，我们令

$$\alpha = \alpha_\kappa, \quad \beta = \beta_\kappa, \quad \text{and} \quad \gamma = \gamma_\kappa.$$

现在只需展开每个 k中的第 Σ_i 项，使用（2.14）中的相应 k_i 。当 $k = k_1 = \kappa$时无需处理，因此令 $k = k_2 = \kappa - n\mu$ 并考虑k的第 Σ_2项。我们得到

$$\begin{aligned}
\alpha_{\kappa-n\mu} + np &= \alpha - nsp^2, \\
\beta_{\kappa-n\mu} - mp &= \beta + msp^2 - \mu y, \\
bn + \gamma_{\kappa-n\mu} &= \gamma + \delta_0,
\end{aligned}$$

其中

$$\delta_0 := -bnps + (1 - 3\kappa)\mu n + \tfrac{1}{2}\mu n(3\mu n - 1)p.$$

因此， Σ_2 的 r分量为

$$q^{\gamma+\delta_0}\langle -q^{\alpha-nsp^2}, -q^{\beta+msp^2-\mu y}; q^y\rangle_\infty,$$

并且我们应用（2.3a）来将其简化为

$$q^{\gamma+\delta}\langle -q^{\alpha-nsp^2}, -q^{\beta+msp^2}; q^y\rangle_\infty, \qquad \text{with} \qquad \delta = -bnps + \frac{(1+ps)p^2s}{6}. \tag{2.15}$$

该 a nalogous 公式对于 Σ_3 和 Σ_4 可由类似的直接计算得出。 □

3 $p \equiv 1$ （模 12）的情形

假设 $p \equiv 1$ （模 12），特别是假设 $p \equiv 1$ （模 3），意味着 m 或 n 必有一个为 0 （模 3）。由于我们的论证（前文与后文）关于 m 和 n是对称的，假设 $n \equiv 0$ （模 3）并不失一般性。在此假设下，本节中我们令

$$N := \frac{ns}{3},$$

并且我们回顾 $3m\mu = 1+ps$。本节的目标是证明如下定理。

T定理 4。 设 $p \equiv 1$ <*style id='4*>（模 *12*）且 $p = m^2 + n^2$，其中 $3|n$，并设 $b >$ 0.

(1) 如果 $m \equiv 1$ （模 3），那么

$$Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p) = \sum_{k=0}^{p-1} q^{\gamma_k} Q\big(q^{(\alpha_k - p^2)/3}, q^{p^2}\big) Q\big(q^{(2p^2-\beta_k)/3}, q^{p^2}\big). \tag{3.1}$$

(2) 如果 $m \equiv 2$ （模 3），那么

$$Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p)=\sum_{k=0}^{p-1} q^{\gamma_k}Q\big(q^{(2p^2-\alpha_k)/3},q^{p^2}\big)Q\big(q^{(\beta_k-p^2)/3},q^{p^2}\big). \tag{3.2}$$

证明。简言之，我们的目标是证明，r-分量（对于 $0\le r\le p-1$）在（3.1）和（3.2）两边都相等。因此，固定 r 满足 $0\le r\le p-1$，令 κ 满足

$$3b\kappa m\equiv r \pmod p, \qquad 0\le \kappa\le p-1,$$

并对这个 κ 令

$$\alpha=\alpha_\kappa, \quad \beta=\beta_\kappa, \quad \text{and} \quad \gamma=\gamma_\kappa.$$

由引理 3，r-分量 $Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p)$ 为

$$\begin{aligned} &q^{\gamma}\langle -q^{\alpha},-q^{\beta};q^y\rangle_\infty - q^{\gamma+\delta}\langle -q^{\alpha-nsp^2},-q^{\beta+msp^2};q^y\rangle_\infty\\ &\quad - q^{\gamma+\xi}\langle -q^{\alpha-msp^2},-q^{\beta-nsp^2};q^y\rangle_\infty\\ &\quad + q^{\gamma+\delta+\xi}\langle -q^{\alpha-msp^2-nsp^2},-q^{\beta+msp^2-nsp^2};q^y\rangle_\infty, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$\delta=-bnsp+\tfrac16(1+ps)p^2s \qquad \text{and} \qquad \xi=-bmps-\kappa p^2s+\tfrac16(1+ps)p^2s.$$

在假设 $3|n$ 和 $N=\frac{ns}{3}$ 成立的条件下，我们可以进一步化简（3.3）。特别地，由于 $nsp^2=Ny$和 $\sigma_{-N}=Ny+\sigma_N$，我们利用（2.3a）将（3.3）变换为

$$\begin{aligned} &q^{\gamma}\langle -q^{\alpha},-q^{\beta};q^y\rangle_\infty - q^{\gamma+\delta+[N(\alpha-y)-\sigma_N]}\langle -q^{\alpha},-q^{\beta+msp^2};q^y\rangle_\infty\\ &\quad - q^{\gamma+\xi+[N(\beta-y)-\sigma_N]}\langle -q^{\alpha-msp^2},-q^{\beta};q^y\rangle_\infty\\ &\quad + q^{\gamma+\delta+\xi+\left[N(\alpha-msp^2-y)-\sigma_N\right]+\left[N(\beta+msp^2-y)-\sigma_N\right]}\langle -q^{\alpha-msp^2},-q^{\beta+msp^2};q^y\rangle_\infty, \end{aligned}$$

我们可以看到，它可以分解为

$$\begin{aligned} &q^{\gamma}\left(\langle -q^{\alpha};q^y\rangle_\infty - q^{\xi+[N(\beta-y)-\sigma_N]}\langle -q^{\alpha-msp^2};q^y\rangle_\infty\right)\\ &\quad\times\left(\langle -q^{\beta};q^y\rangle_\infty - q^{\delta+[N(\alpha-y)-\sigma_N]}\langle -q^{\beta+msp^2};q^y\rangle_\infty\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

停下来考察（3.1）和（3.2）的右侧，我们回想起 t

$$Q(z,q)=\langle -z^3q;q^3\rangle_\infty - z\langle -z^3q^2;q^3\rangle_\infty,$$

因此，对于一般的整数 A 和 B，有

$$\begin{aligned} Q(q^{\frac{A}{3}},q^{p^2})Q(q^{\frac{B}{3}},q^{p^2}) &= \left(\langle -q^{A+p^2};q^y\rangle_\infty - q^{\frac{A}{3}}\langle -q^{A+2p^2};q^y\rangle_\infty\right)\\ &\quad\times\left(\langle -q^{B+p^2};q^y\rangle_\infty - q^{\frac{B}{3}}\langle -q^{B+2p^2};q^y\rangle_\infty\right) \end{aligned} \qquad (y=3p^2). \tag{3.5}$$

比较（3.4）和（3.5）（忽略前者中多出的 q^γ），我们希望选择 A 和B，使两个表达式相等，并且使 $A/3$ 和 $B/3$ 为整数。因此，要使（3.4）和（3.5）相等，显然我们希望

$$A+p^2=\alpha \qquad \text{or} \qquad A+p^2=3p^2-\alpha,$$

and

$$B+p^2=\beta \qquad \text{or} \qquad B+p^2=3p^2-\beta.$$

对于整性条件，将这些可能的 A 和 B 除以 3，我们看到

$$\frac{\alpha-p^2}{3}=bp+\kappa mp+\frac{(p-m-n)p}{6}\qquad\text{and}\qquad\frac{2p^2-\alpha}{3}=-bp-\kappa mp+\frac{(p+m+n)p}{6},$$

and

$$\frac{\beta-p^2}{3}=\kappa np+\frac{(p+m-n)p}{6}\qquad\text{and}\qquad\frac{2p^2-\beta}{3}=-\kappa np+\frac{(p-m+n)p}{6}.$$

因此，我们对 A 和 B 的选择必须确保每一数对中至少有一个分子模 6 同余于 0。我们已经知道 $p\pm m\pm n\equiv 0$ 模 2，因此只需考虑 $p\pm m\pm n$ 模 3。我们假设 $p\equiv 1$ 模 3 且 $n\equiv 0$ 模 3，因此对 A 和 B 的选择只取决于 m 模 3。

聚焦于 $m\equiv 1$ 模 3 的情形，我们立即看出

$$\frac{\alpha-p^2}{3}=bp+\kappa mp+\frac{(p-m-n)p}{6}\qquad\text{and}\qquad\frac{2p^2-\beta}{3}=-\kappa n+\frac{(p-m+n)p}{6}$$

是整数。因此，在这种情形下，我们令

$$A=\alpha-p^2\qquad\text{and}\qquad B=2p^2-\beta,$$

并且由于 $s\equiv 2$ 模 3，令

$$ms=2+3M\qquad(\text{cf. } ns=3N),$$

并直接验证 (3.4) 与 (3.5) 相等。计算过程冗长而繁琐：举例来说，我们注意到

$$\langle -q^{\alpha-msp^2};q^y\rangle_\infty=\langle -q^{(\alpha+p^2)-(M+1)y};q^y\rangle_\infty=q^{\left[(M+1)(\alpha+p^2-y)-\sigma_{M+1}\right]}\langle -q^{\alpha+p^2};q^y\rangle_\infty,$$

因此在（3.4）中，我们有

$$q^{\xi+[N(\beta-y)-\sigma_N]}\langle -q^{\alpha-msp^2};q^y\rangle_\infty=q^{\xi+[N(\beta-y)-\sigma_N]+\left[(M+1)(\alpha+p^2-y)-\sigma_{M+1}\right]}\langle -q^{A+2p^2};q^y\rangle_\infty.$$

O如果需要，可以使用符号计算器验证，确实有

$$\frac{A}{3}=\xi+[N(\beta-y)-\sigma_N]+\left[(M+1)(\alpha+p^2-y)-\sigma_{M+1}\right],\tag{3.6}$$

如所需，然后对 $B/3$ 作类似验证。由（3.4）和（3.5）中的等式，我们可推得

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty}a_{pt+r}q^{pt+r}=q^\gamma Q\big(q^{(\alpha-p^2)/3},q^{p^2}\big)Q\big(q^{(2p^2-\beta)/3},q^{p^2}\big),$$

a并对 $0\le r\le p-1$ 重复此过程，即可证明定理的第 (1) 部分。

对于 $m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ 的情形，我们得到

$$\frac{2p^2-\alpha}{3}=-bp-kmp+\frac{(p+m+n)p}{6}\qquad\text{and}\qquad\frac{\beta-p^2}{3}=knp+\frac{(p+m-n)p}{6}$$

均为整数，因此令

$$A=2p^2-\alpha\qquad\text{and}\qquad B=\beta-p^2,$$

类似地，可以直接验证（3.4）与（3.5）相等，从而证明该定理的第(2)部分。□

推论 4。设 $p \equiv 1 \pmod{12}$，设 m，n，以及 b 如定理4中所述，设

$$w \equiv \bar{2}(m+n) \pmod{p},$$

并令$(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ 按 (2.11) 中的定义给出。于是有

$$a_{pt+bw} = a_{pt+b(w-3b)} = 0 \qquad for\ all\ t.$$

证明。首先，假设 $m \equiv 1$ (模 3)。根据推论1，回忆可知，当 $x \equiv 0$ (模 y) 时，$Q(q^x, q^y) = 0$，其中此处的 $y > 0$ 可以是一般整数；我们旨在将该推论应用于 (3.1)。由 (3.1) 以及 α_κ、β_κ 和 γ_κ 的定义，对于任意 $0 \le r \le p-1$，$Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p)$ 的 r 分量为

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} a_{pt+r}q^{pt+r} = q^{3b\kappa m + \frac{\kappa(3\kappa-1)p}{2}} Q\big(q^{bp+\kappa mp+\frac{(p-m-n)p}{6}}, q^{p^2}\big) Q\big(q^{-\kappa np+\frac{(p-m+n)p}{6}}, q^{p^2}\big), \tag{3.7}$$

其中 $3b\kappa m \equiv r$ (模 p) 且 $0 \le \kappa \le p-1$。

我们先证明 $a_{pt+bw} = 0$ 对所有 t成立，因此取 $r \equiv bw$ (模 p)，见 (3.7)。由关系$3b\kappa m \equiv bw$ (模 p) 以及等式 $p = m^2 + n^2$，容易验证

$$6\kappa n \equiv \bar{m}n(m+n) \equiv \bar{m}(mn - m^2) \equiv n - m \pmod{p},$$

因此，设

$$6\kappa n = n - m + pK. \tag{3.8}$$

Then

$$Q\big(q^{-\kappa np+\frac{(p-m+n)p}{6}}, q^{p^2}\big) = Q\big(q^{\frac{(1-K)p^2}{6}}, q^{p^2}\big), \tag{3.9}$$

因此，要应用推论 1，只需证明 $K \equiv 1 \pmod 6$。由（3.8）及我们对 p 的假设，显然有 $K \equiv m - n \pmod 6$；又因为 $m - n \equiv 1 \pmod 2$（显然成立），且 $m - n \equiv m \equiv 1 \pmod 3$，立刻可得 $K \equiv 1 \pmod 6$；因此（3.9）和（3.7）恒等于 0，所有 a_{pt+bw} 也如此。

现在固定 $r \equiv b(w-3b)$（模 p）于（3.7）中，可得 $6\kappa m \equiv -6b + m + n$ (模 p)，并记作

$$6\kappa m = -6b + m + n + pK. \tag{3.10}$$

Then

$$Q\big(q^{bp+\kappa mp+\frac{(p-m-n)p}{6}}, q^{p^2}\big) = Q\big(q^{\frac{(1+K)p^2}{6}}, q^{p^2}\big), \tag{3.11}$$

因此在此情形下，只需有 $K \equiv -1 \pmod 6$。由（3.10）及我们对 m和 n的假设，容易验证该同余式，由此（3.11）以及（3.7）均等于 0，所有 $a_{pt+b(w-3b)}$ 也如此。

最后，当 $m \equiv 2$（模 3）时，用 (3.2) 代替 (3.1)，通过完全平行的论证即可得到结果。□

例 1. 设 $p = 13 = 2^2 + 3^3$ 和 $b = 5$ 为推论 4中的对象，并通过以下方式定义 $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$：

$$Q(q^{10}, q^{13})Q(q^{15}, q^{13}) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t q^t.$$

Then $w \equiv 9$（模 13）、$bw \equiv 6$（模 13）以及 $b(w-3b) \equiv 9$（模 13），其中b y

$$a_{13t+6} = a_{13t+9} = 0 \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$

3.1 $p \equiv 1$ （模 12）**时的符号模式**。我们回顾一下

$$Q(q^\ell, q^p) = (q^\ell, q^{p-\ell}, q^p; q^p)_\infty (q^{p+2\ell}, q^{p-2\ell}; q^{2p})_\infty. \tag{3.12}$$

引理 4. 若 $p > 10$ 和 $0 < \ell < \frac{p}{2}$，并通过以下方式定义 $(c_t)_{t\geq 0}$：

$$\frac{Q(q^h, q^p)}{(q;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} c_t q^t, \tag{3.13}$$

则对于所有 $t > t_0(\ell)$，都有 $c_t > 0$。

证明。将 $(q;\, q)_\infty = (q, q^2, \ldots, q^p;\, q^p)_\infty$ 写成这种形式，并利用定义

$$Q(q^\ell, q^p) = (q^\ell, q^{p-\ell}, q^p; q^p)_\infty (q^{p+2\ell}, q^{p-2\ell}; q^{2p})_\infty,$$

我们可知

$$\frac{Q(q^h, q^p)}{(q;q)_\infty} = (q^{2\ell}, q^{2p-2\ell}; q^{2p})_\infty^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \not\equiv \pm r, \pm 2r \ (p)}}^{p-1} (q^k; q^p)_\infty^{-1}. \tag{3.14}$$

现在，由于 $p \geq 11$，范围 $\{1, \ldots, p-1\} \setminus \{\ell, 2\ell, p-\ell, p-2\ell\}$ 必须包含至少一对连续整数：若不存在这样的数对，则必有 $p \leq 10$。令 $(x, y) := (x, x+1)$ 为这样一对，则 (3.14) 右侧含有因子 $(q^x, q^y; q^p)_\infty^{-1}$，而其本身又含有因子

$$(1-q^x)^{-1}(1-q^y)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{x,y}(k) q^k,$$

其中 $\rho_{x,\,y}(k)$ 计算将 $k = ax + by$ 写成满足 a、$b \geq 0$ 的方式数。由于 $(x,\ y) = 1$ 必然成立，众所周知 $\rho_{x,\,y}(k) > 0$ 对所有 $k > xy - x - y$。由此以及（由（3.14））可知 c_t 在（3.13）中至少是非负的这一事实，结论随之成立。□

为了将引理 4 应用于一般量 $Q(q^h,\ q^p)$，我们首先将它们与形如 $Q(q^\ell,\ q^p)$ 且满足 $0 \leq \ell \leq \frac{p}{2}$ 的量联系起来。固定 $p > 1$，并令 h 为任意整数，记

$$h = kp + \ell \qquad \text{with} \qquad 0 \leq \ell < p,$$

并且，由“平移关系”（2.3b），我们有

$$Q(q^h, q^p) = q^H Q(q^\ell, q^p) \qquad (H = -3k\ell - \tfrac{k(3k-1)p}{2}).$$

若 $0 \leq \ell \leq \frac{p}{2}$ 已经如此，则无需再作更改；若 $\ell > \frac{p}{2}$，则我们记

$$Q(q^h, q^p) = q^H Q(q^\ell, q^p) = (-1) q^{H+p-2\ell} Q(q^{p-\ell}, q^p) \qquad (H = -3k\ell - \tfrac{k(3k-1)p}{2}),$$

以及 $0 < p - \ell < \frac{p}{2}$。由于 $\ell + (p - 2\ell) = p - \ell$ 且 $(-1)^{p-2\ell} = -1$，我们可以将这些情形合并为如下公式。

引理 5. 设 h 与 p 为整数且满足 $p > 1$，记

$$h = kp + \ell \qquad with \qquad 0 \leq \ell < p,$$

并定义

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & 0 \leq \ell \leq \frac{p}{2}, \\ p - 2\ell, & \frac{p}{2} < \ell < p. \end{cases}$$

Then

$$Q(q^h, q^p) = (-1)^{\varepsilon} q^{H+\varepsilon} Q(q^{\ell+\varepsilon}, q^p),$$

其中 $H = -3k\ell - \frac{k(3k-1)p}{2}$。

推论 5。令 $p \equiv 1$（模 12）且 $p = m^2 + n^2$，其中 $3 \mid n$。令 $b > 0$，其中 $(b, p) = 1$，并将数列 $(b_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ 定义为

$$\frac{Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bn}, q^p)}{(q^p; q^p)_\infty^2} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} b_t q^t. \tag{3.15}$$

固定满足下式的 $0 \le r \le p-1$ 和 κ

$$3b\kappa m \equiv r \pmod p, \qquad 0 \le \kappa \le p-1.$$

若 $m \equiv 1$（模 3），令

$$h := \frac{\alpha_\kappa - p^2}{3p} = b + \kappa m + \tfrac{1}{6}(p - m - n),$$

$$h' := \frac{2p^2 - \beta_\kappa}{3p} = -\kappa n + \tfrac{1}{6}(p - m + n),$$

若 $m \equiv 2$（模 3），则令

$$h := \frac{2p^2 - \alpha_\kappa}{3p} = -b - \kappa m + \tfrac{1}{6}(p + m + n),$$

$$h' := \frac{\beta_\kappa - p^2}{3p} = \kappa n + \tfrac{1}{6}(p + m - n).$$

此外，定义 k 和 ℓ 使得

$$h = kp + \ell \qquad \textit{with } 0 \le \ell < p,$$

let

$$\varepsilon := \begin{cases} 0 & 0 \le \ell < \frac{p}{2}, \\ p - 2\ell & \frac{p}{2} < \ell < p, \end{cases}$$

并类似地定义 k'、ℓ' 和 ε'。那么，对于所有 t，要么 $b_{pt+r} = 0$，要么有

$$\operatorname{sgn} b_{pt+r} = (-1)^{\varepsilon+\varepsilon'} \qquad \textit{for } t > t_0(r).$$

证明。固定满足 $3b\kappa m \equiv r$（模 p）的 $0 \le r < p$ 和 κ，假设 $m \equiv 1$（模 3），并按上文所述定义 h、h'、k、k' 等。根据推论 4，我们进一步假设 r 不与 bw 或 $b(w-3b)$ 模 p 同余，其中 $w \equiv \bar{2}(m+n)$（模 p），从而 $(b_{pt+r})_t$ 不恒等于零。

根据定理 4，r-分量（3.15）为

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} b_{pt+r} q^{pt+r} = q^{\gamma_\kappa} \frac{Q(q^{(\alpha_\kappa - p^2)/3}, q^{p^2})}{(q^p; q^p)_\infty} \times \frac{Q(q^{(2p^2-\beta_\kappa)/3}, q^{p^2})}{(q^p; q^p)_\infty}$$

$$= q^{\gamma_\kappa} \frac{Q(q^{ph}, q^{p^2})}{(q^p; q^p)_\infty} \times \frac{Q(q^{ph'}, q^{p^2})}{(q^p; q^p)_\infty},$$

并且，根据引理 5，有

$$\frac{Q(q^h,q^p)}{(q;q)_\infty}=(-1)^\varepsilon q^{H+\varepsilon}\frac{Q(q^{\ell+\varepsilon},q^p)}{(q;q)_\infty}\qquad \Big(H=-3k\ell-\tfrac{k(3k-1)p}{2}\Big). \tag{3.16}$$

然后，由于 $0<\ell+\varepsilon<\frac{p}{2}$是按设计如此的，引理 4 表明，$Q(q^{\ell+\varepsilon},q^p)/(q;q)_\infty$的级数系数（记作 $(c_t)_{t\ge0}$）对于 $t\ge t_0$均为正。将 (3.16) 中的 q替换为 q^p，并对 $Q(q^{h'},q^p)/(q;q)_\infty$作类似论证，可得

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty}b_{pt+r}q^{pt+r}=(-1)^{\varepsilon+\varepsilon'}q^{\gamma_\kappa+p(H+H'+\varepsilon+\varepsilon')}\frac{Q\big(q^{p(\ell+\varepsilon)},q^{p^2}\big)Q\big(q^{p(\ell'+\varepsilon')},q^{p^2}\big)}{(q^p;q^p)_\infty^2},$$

结论随即得出。 □

例 2. 对于 $p=13=2^2+3^2$ 和 $b=5$，$0\le r<13$ 和$t>t_0(r)$对应的 b_{13t+r} 的符号如下表所示。

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\operatorname{sgn} b_{13t+r}$	−	+	+	+	−	−	0	+	+	0	+	+	−

注意　其中“0”的各项对于 $r=6$ 和 $r=9$ 均与例 1一致 .

4 当 $p\equiv5$（模 12）

我们首先回顾，对于复数 a、b和 q，其中 a，$b\neq0$ 和 $|q|<1$，令

$$W(a,b;q):=\langle a,b,ab,\tfrac{a}{b};q\rangle_\infty(q;q)_\infty^{-2}.$$

本节的目标是证明以下分割结果。

定理 5. 设 $p\equiv5$（模 12），其中 $p=m^2+n^2$，并设 $b>0$。

(1) 若 $m\equiv-n$（模 3），则定义

$$\chi_k:=\gamma_k+p(1-ns)\big(kn+\tfrac{p+m-n(1+ps)}{6}\big),$$

则有

$$Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p)=\sum_{k=0}^{p-1}q^{\chi_k}W(-q^{\alpha_k/3},-q^{(\beta_k-nsp^2)/3};q^{p^2}). \tag{4.1}$$

(2) 若 $m\equiv n$ (模 3)，则定义

$$\chi_k^*:=\gamma_k+p(1-ms)\big(b+km+\tfrac{p-m(1+ps)-n}{6}\big),$$

可得

$$Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p)=\sum_{k=0}^{p-1}q^{\chi_k^*}W(-q^{\beta_k/3},-q^{(\alpha_k-msp^2)/3};q^{p^2}). \tag{4.2}$$

定理 5的证明中一个关键要素是 *Winquist* 恒等式，下面的引理回顾了这一恒等式。

引理 6 (Winquist [28])。对于复数 a, b, 以及 q, 满足 a, $b \neq 0$ 且 $|q|<1$, 有

$$W(a,b;q) = \langle a^3, b^3q; q^3\rangle_\infty - b\langle a^3, b^3q^2; q^3\rangle_\infty - \frac{a}{b}\langle a^3q, b^3; q^3\rangle_\infty + \frac{a^2}{b}\langle a^3q^2, b^3; q^3\rangle_\infty. \tag{4.3}$$

令 $0 \le r \le p-1$和 $3b\kappa m \equiv r$(模 p), 并令 $\alpha = \alpha_\kappa$, $\beta = \beta_\kappa$ 等, 回顾引理 3 可知, r-分量 $Q(q^{bm}, q^p)Q(q^{bm}, q^p)$ 为

$$\begin{aligned}\sum_{t=-\infty}^{\infty} a_{pt+r}q^{pt+r} &= q^\gamma\langle -q^\alpha, -q^\beta; q^y\rangle_\infty - q^{\gamma+\delta}\langle -q^{\alpha-nsp^2}, -q^{\beta+msp^2}; q^y\rangle_\infty \\ &\quad - q^{\gamma+\xi}\langle -q^{\alpha-msp^2}, -q^{\beta-nsp^2}; q^y\rangle_\infty + q^{\gamma+\delta+\xi}\langle -q^{\alpha-(m+n)sp^2}, -q^{\beta+msp^2-nsp^2}; q^y\rangle_\infty.\end{aligned} \tag{4.4}$$

接下来, 对于一般的 A和 B Winquist 恒等式（4.3）给出

$$\begin{aligned}W(-q^{\frac{A}{3}}, -q^{\frac{B}{3}}; q^{p^2}) &= \langle -q^A, -q^{B+p^2}; q^y\rangle_\infty + q^{\frac{B}{3}}\langle -q^A, -q^{B+2p^2}; q^y\rangle_\infty \\ &\quad - q^{\frac{A-B}{3}}\langle -q^{A+p^2}, -q^B; q^y\rangle_\infty - q^{\frac{2A-B}{3}}\langle -q^{A+2p^2}, -q^B; q^y\rangle_\infty.\end{aligned} \tag{4.5}$$

仿照定理 4的证明, 我们的目标是确定 A 和 B, 使其与（4.4）和（4.5）相匹配, 并使 $A/3$ 和 $B/3$ 为整数。

定理 5(1) 的证明。设 $m \equiv -n$(模 3)。回顾 $3m\mu = 1+ps$, 由于$p \equiv 2$(模 3), 可得 $s \equiv 1$(模 3)。接着, 进一步假设[3] 满足

$$m \equiv 2 \pmod 3 \qquad \text{and} \qquad ms = 2+3M, \tag{4.6a}$$

$$n \equiv 1 \pmod 3 \qquad \text{and} \qquad ns = 1+3N, \tag{4.6b}$$

并令

$$(m+n)s = 3K, \tag{4.6c}$$

其中 M、 N 和 $K = M+N+1$ 均为整数。

在这些假设以及关系式（2.3a）下, （4.4）的最后一项为

$$\langle -q^{\alpha-Ky}, -q^{\beta-nsp^2+msp^2}; q^y\rangle_\infty = q^{K(\alpha-y)-\sigma_K}\langle -q^\alpha, -q^{\beta-nsp^2+msp^2}; q^y\rangle_\infty,$$

于是我们可以将（4.4）的右端改写为

$$\begin{aligned}&q^\gamma\langle -q^\alpha, -q^\beta; q^y\rangle_\infty + q^{\gamma+\delta+\xi+[K(\alpha-y)-\sigma_K]}\langle -q^\alpha, -q^{\beta-nsp^2+msp^2}; q^y\rangle_\infty \\ &\quad - q^{\gamma+\delta}\langle -q^{\alpha-nsp^2}, -q^{\beta+msp^2}; q^y\rangle_\infty - q^{\gamma+\xi}\langle -q^{\alpha-msp^2}, -q^{\beta-nsp^2}; q^y\rangle_\infty.\end{aligned} \tag{4.7}$$

后一表达式（在某种程度上）让人联想到（4.5）的右端: 特别是, 我们因此想到令

$$A := \alpha \qquad \text{and} \qquad B := \beta - nsp^2$$

在（4.7）中, 这将该表达式变为

$$\begin{aligned}&q^\gamma\langle -q^A, -q^{B+nsp^2}; q^y\rangle_\infty + q^{\gamma+\delta+\xi+[K(\alpha-y)-\sigma_K]}\langle -q^A, -q^{B+msp^2}; q^y\rangle_\infty \\ &\quad - q^{\gamma+\delta}\langle -q^{A-nsp^2}, -q^{B+Ky}; q^y\rangle_\infty - q^{\gamma+\xi}\langle -q^{A-msp^2}, -q^B; q^y\rangle_\infty.\end{aligned} \tag{4.8}$$

现在利用（4.6a）和（4.6b）, 可得

$$q^\gamma\langle -q^A, -q^{B+nsp^2}; q^y\rangle_\infty = q^{\gamma+\left[-N(B+p^2)-\sigma_N\right]}\langle -q^A, -q^{B+p^2}; q^y\rangle_\infty$$

[3]与第 $ms = 2+3M$ 节中的 $ns = 3N$ 关系式3进行比较。

and

$$q^{\gamma+\delta+\xi+\left[K(\alpha-y)-\sigma_K\right]}\langle -q^A,-q^{B+msp^2};q^y\rangle_\infty \\ = q^{\gamma+\delta+\xi+\left[K(\alpha-y)-\sigma_K\right]+\left[-M(B+2p^2)-\sigma_M\right]}\langle -q^A,-q^{B+2p^2};q^y\rangle_\infty.$$

比较　将这些式子与（4.5）进行比较，并考虑到 q^χ （4.1）中的关系，我们首先“定义”

$$\chi=\chi_\kappa=\gamma_\kappa-N(B+p^2)-\sigma_N,$$

并且能够将其化简为定义

$$\chi_\kappa=\gamma_k+p(1-ns)\big(kn+\tfrac{p+m-n(1+ps)}{6}\big). \tag{4.9}$$

注意，公式（4.9）很容易看出 $\chi_\kappa\equiv\gamma_\kappa\equiv 3b\kappa m\equiv r$ （模 p）。

继续使用（4.6a）、（4.6b）和（4.9），经过一些符号运算后，我们发现该 r-分量（4.8）确实是

$$\begin{aligned}&=q^\chi\langle -q^A,-q^{B+p^2};q^y\rangle_\infty+q^{\chi+\frac{B}{3}}\langle -q^A,-q^{B+2p^2};q^y\rangle_\infty\\ &\quad-q^{\chi+\frac{A-B}{3}}\langle -q^{A+p^2},-q^B;q^y\rangle_\infty-q^{\chi+\frac{2A-B}{3}}\langle -q^{A+2p^2},-q^B;q^y\rangle_\infty,\\ &=q^\chi W(-q^{A/3},-q^{B/3},q^{p^2}),\end{aligned} \tag{4.10}$$

正如所期望的。

如果我们不采用（4.6a）和（4.6b），而是假设 $m\equiv 1$ (mod 3) 且 $n\equiv 2$ (mod 3)，推导过程几乎完全相同。事实上，尽管我们对 χ_k 的初始“定义”有所不同，经过一些化简后，我们仍可得到（4.9），并且仍发现（4.8）和（4.10）相等，从而完成定理第（1）部分的证明。□

定理 5（2）的证明。现在假设 $m\equiv n$ (mod 3)，令

$$m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)\qquad\text{and}\qquad ms=1+3M, \tag{4.11a}$$

$$n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)\qquad\text{and}\qquad ns=1+3N, \tag{4.11b}$$

并令

$$(m-n)s=3K,$$

同样地，令整数 M、N 和 $K=M-N$。令

$$A:=\alpha_k-msp^2\qquad\text{and}\qquad B:=\beta_k,$$

从而（4.4）变为

$$\begin{aligned}&q^\gamma\langle -q^{A+msp^2},-q^B;q^y\rangle_\infty+q^{\gamma+\delta+\xi}\langle -q^{A-nsp^2},-q^{B+Ky};q^y\rangle_\infty\\ &\quad-q^{\gamma+\delta}\langle -q^{A+Ky},-q^{B+msp^2};q^y\rangle_\infty-q^{\gamma+\xi}\langle -q^A,-q^{B-nsp^2};q^y\rangle_\infty.\end{aligned} \tag{4.12}$$

这一次，我们发现

$$q^\gamma\langle -q^{A+msp^2},-q^B;q^y\rangle_\infty=q^{\gamma+\left[-M(A+p^2)-\sigma_M\right]}\langle -q^{A+p^2},-q^B;q^y\rangle_\infty$$

and

$$q^{\gamma+\delta+\xi}\langle -q^{A-nsp^2},-q^{B+Ky};q^y\rangle_\infty \\ =q^{\gamma+\delta+\xi+\left[(N+1)(A+2p^2-y)-\sigma_{N+1}\right]+\left[-KB-\sigma_K\right]}\langle -q^{A+2p^2},-q^B;q^y\rangle_\infty,$$

因此，我们受到启发，定义

$$\chi_\kappa^* = \gamma_\kappa - M(A+p^2) - \sigma_M.$$

展开并化简后，我们发现（参见（4.9））：

$$\chi_\kappa^* = \gamma_\kappa + p(1-ms)\big(b+\kappa m + \tfrac{p-m(1+ps)-n}{6}\big), \tag{4.13}$$

最终得到（4.12）为

$$\begin{aligned}
&= q^{\chi_\kappa^*}\langle -q^{A+p^2}, -q^B; q^y\rangle_\infty + q^{\chi_\kappa^*+\frac{A}{3}}\langle -q^{A+2p^2}, -q^B; q^y\rangle_\infty \\
&\quad - q^{\chi_\kappa^*+\frac{B-A}{3}}\langle -q^A, -q^{B+p^2}; q^y\rangle_\infty - q^{\chi_\kappa^*+\frac{2B-A}{3}}\langle -q^A, -q^{B+2p^2}; q^y\rangle_\infty \\
&= q^{\chi_\kappa^*} W(-q^{B/3}, -q^{A/3}; q^{p^2}),
\end{aligned}$$

其中 $A=\alpha_\kappa - msp^2$ 和 $B=\beta_\kappa$，注意这里 A 和 B 的顺序。

与 $m\equiv -n$ （模 3） 的情形相同，假设以 $m\equiv n\equiv 2$ （模 3） 替代（4.6a）和（4.6b），最终可得（4.12）等于 $q^{\chi_\kappa^*}W(-q^{B/3},\ -q^{A/3},\ q^{p^2})$，定理 5 的证明至此完成。□

推论 6。设 p，m，n 和 b 如定理 5中所述，并定义 $(a_t)_t$ vi a

$$Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t q^t, \tag{4.14}$$

其中 $a_t := 0$，对于 $t<0$。此外，令 $m\bar{m}\equiv n\bar{n}\equiv 1 \pmod p$，并令

$$w \equiv \bar{2}(m+n) \pmod p.$$

则有

$$a_{pt+bw(1-3b\bar{m})} = a_{pt+bw(1-3b\bar{n})} = 0 \qquad (t\in\mathbb{Z}).$$

证明。首先令 $m\equiv -n \pmod 3$，且 $0\le r<p$。$Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p)$ 的 r-分量为

$$\begin{aligned}
&q^{\chi_\kappa} W\big(-q^{\alpha_\kappa/3}, -q^{(\beta_\kappa - nsp^2)/3}; q^{p^2}\big) \\
&= \frac{q^{\chi_\kappa}\langle -q^{\alpha_\kappa/3}, -q^{(\beta_\kappa-nsp^2)/3}; q^{p^2}\rangle_\infty}{(q^{p^2};q^{p^2})_\infty^2} \times \big\langle q^{(\alpha_\kappa+\beta_\kappa-nsp^2)/3}, q^{(\alpha_\kappa-\beta_\kappa+nsp^2)/3}; q^{p^2}\big\rangle_\infty,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 $3b\kappa m \equiv r \pmod p$。根据引理 1，当且仅当 eithe 时，该分量恒为零 r

$$\alpha_\kappa + \beta_\kappa \equiv 0 \pmod{p^2} \qquad \text{or} \qquad \alpha_\kappa - \beta_\kappa \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

利用 α_κ 和 β_κ 的定义展开这些同余式后，很快可得这些同余式等价于

$$3b-n+3\kappa(m+n)\equiv 0 \pmod p \qquad \text{and} \qquad 3b-m+3\kappa(m-n)\equiv 0 \pmod p, \tag{4.16}$$

分别。由于 $p=m^2+n^2$，不可能有 $m\pm n\equiv 0 \pmod p$，因此我们可以求解这些同余式，得到 $\kappa \pmod p$。特别是，利用以下关系式

$m\bar{n}\equiv -\bar{m}n$ （模 p）$\overline{\quad}$ $m+n\equiv \bar{2}$（$\bar{m}+\bar{n}$）（模 p），以及 $m-n\equiv \bar{2}$（$\bar{m}-\bar{n}$）（模 p），我们重新整理（4.16）后得到

$$3\kappa \equiv \bar{2}n(\bar{m}+\bar{n})(1-3b\bar{n}) \pmod p \qquad \text{and} \qquad 3\kappa \equiv \bar{2}m(\bar{m}-\bar{n})(1-3b\bar{m}) \pmod p,$$

分别为，它们等价于

$$3b\kappa m \equiv \bar{2}b(m+n)(1-3b\bar{n}) \pmod{p} \quad \text{and} \quad 3b\kappa m \equiv \bar{2}b(m+n)(1-3b\bar{m}) \pmod{p},$$

分别。因此，当 t 时，对所有 $a_{pt+r}=0$ 都有

$$r \equiv bw(1-3b\bar{n}) \pmod{p} \qquad \text{or} \qquad r \equiv bw(1-3b\bar{m}) \pmod{p},$$

如所述。当 $m \equiv n \pmod 3$ 时，证明几乎完全相同。 □

例 3. 设 $p=17=4^2+1^2$ 和 $b=2$ 属于推论 6。则

$w \equiv 11 \pmod{17}$ $bw(1-3b\bar{m}) \equiv 6 \pmod{17}$，且 $bw(1-3b\bar{n}) \equiv 9 \pmod{17}$，因此

$$a_{17t+6} = a_{17t+9} = 0 \qquad \text{for all } t.$$

推论 7. 沿用推论 6的假设，再令

$$w \equiv \bar{2}(m+n) \pmod{p}.$$

那么对于所有整数 t，量 a_{pt+bw} 和 $a_{pt+b(w-3b)}$ 均为偶数；即有

$$a_{pt+bw} \equiv a_{pt+b(w-3b)} \equiv 0 \pmod{2} \qquad (t \in \mathbb{Z}). \tag{4.17}$$

证明。 证明与前一个推论的证明类似。令 $m \equiv -n \pmod 3$ 并固定 $0 \le r \le p-1$，则 r-分量（4.1）含有因子

$$\langle -q^{\alpha_\kappa/3}; q^{p^2} \rangle_\infty \quad \text{and} \quad \langle -q^{(\beta_\kappa - nsp^2)/3}; q^{p^2} \rangle_\infty \tag{4.18}$$

来自 $W(-q^{\alpha_\kappa/3}, -q^{(\beta_\kappa-nsp^2)/3}, q^{p^2})$，其中同样有 $3b\kappa m \equiv r \pmod{p}$。

若 $\alpha_\kappa \equiv 0 \pmod{p^2}$ 或 $\beta_\kappa - nsp^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$，则（4.18）中的相应三重积含有因子 $1-(-q^0)=2$。容易看出，这些条件等价于

$$6b + 6\kappa m - (m+n) \equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{and} \qquad 6\kappa n + m - n \equiv 0 \pmod{p},$$

分别成立，当

$$3b\kappa m \equiv b(w-3b) \pmod{p} \qquad \text{and} \qquad 3b\kappa m \equiv w \pmod{p},$$

分别成立。因此，（4.17）在以下条件下成立： $m \equiv -n \pmod 3$；当 $m \equiv n \pmod 3$时的证明几乎完全相同。 □

例4. 设 $p=17=4^2+1^2$ 和 $b=2$ 在推论 7。则

$$w \equiv 11 \pmod{17}, \quad bw \equiv 5 \pmod{17}, \quad \text{and} \quad b(w-3b) \equiv 10 \pmod{17},$$

由此

$$a_{17t+5} \equiv a_{17t+10} \equiv 0 \pmod{2} \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$

事实上，这一点也反映在计算中

$$(a_{17t+5})_{t\ge 0} = (0,\, 0,\, 0,\, 0,\, -2,\, -4,\, -8,\, -16,\, -28,\, -48,\, -82, \ldots),$$
$$(a_{17t+10})_{t\ge 0} = (2,\, 4,\, 10,\, 20,\, 40,\, 72,\, 130,\, 220,\, 368,\, 594,\, 948, \ldots).$$

4.1 $p \equiv 5$ **符号模式**（模 12）。

推论 8。令 p、m、n、b 和 s 如定理 5中所述，并通过以下方式定义 $(b_t)_t$：

$$\frac{Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p)}{(q^p;q^p)_\infty^2}=\sum_{t=-\infty}^{\infty}b_tq^t. \tag{4.19}$$

取定 $0\le r\le p-1$，并令 $0\le\kappa\le p-1$ 满足 $3b\kappa m\equiv r$（模 p）。若 $m\equiv -n$（模 3），则令

$$h=\frac{\alpha_\kappa+\beta_\kappa-nsp^2}{3p}=b+\kappa(m+n)+p-\tfrac{1}{3}n(1+ps),$$
$$h'=\frac{\alpha_\kappa-\beta_\kappa+nsp^2}{3p}=b+\kappa(m-n)-\tfrac{1}{3}(m+n)+\tfrac{1}{3}n(1+ps),$$

若 $m\equiv n$（模 3），则令

$$h=\frac{\beta_\kappa+\alpha_\kappa-msp^2}{3p}=b+\kappa(m+n)+p+\tfrac{1}{3}(m-n)-\tfrac{1}{3}m(1+ps),$$
$$h'=\frac{\beta_\kappa-\alpha_\kappa+msp^2}{3p}=-b-\kappa(m-n)+\tfrac{1}{3}m(1+ps).$$

此外，定义 k 和 ℓ，使得

$$h=kp+\ell\qquad with\ 0\le\ell<p,$$

类似地定义 k' 和 ℓ'。那么，要么对所有 t 都有 $b_{pt+r}=0$，要么某个 s

$$\operatorname{sgn}b_{pt+r}=(-1)^{k+k'}\qquad for\ all\ t>t_0(r).$$

证明。假设 $m\equiv -n\,(\mathrm{mod}\ 3)$。则 $Q(q^{bm},q^p)Q(q^{bn},q^p)$ 的 r-分量为

$$\begin{aligned}&q^{\chi_\kappa}W(-q^{\alpha_\kappa/3},-q^{(\beta_\kappa-nsp^2)/3},q^{p^2})\\&=\frac{q^{\chi_\kappa}\langle -q^{\alpha_\kappa/3},-q^{(\beta_\kappa-nsp^2)/3};q^{p^2}\rangle_\infty}{(q^{p^2};q^{p^2})_\infty^2}\times\left\langle q^{(\alpha_\kappa+\beta_\kappa-nsp^2)/3},q^{(\alpha_\kappa-\beta_\kappa+nsp^2)/3};q^{p^2}\right\rangle_\infty,\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 $3b\kappa m\equiv r\,(\mathrm{mod}\,p)$。令

$$h=\frac{\alpha_\kappa+\beta_\kappa-nsp^2}{3p}=b+\kappa(m+n)+p-\frac{n(1+ps)}{3},$$
$$h'=\frac{\alpha_\kappa-\beta_\kappa+nsp^2}{3p}=b+\kappa(m-n)-\frac{m+n}{3}+\frac{n(1+ps)}{3},$$

我们有

$$\left\langle q^{(\alpha_\kappa+\beta_\kappa-nsp^2)/3},q^{(\alpha_\kappa-\beta_\kappa+nsp^2)/3};q^{p^2}\right\rangle_\infty=\langle q^{ph},q^{ph'};q^{p^2}\rangle_\infty. \tag{4.21}$$

定义 k 和 ℓ 如上所述，由（2.3a）可得

$$\langle q^h;q^p\rangle_\infty=(-1)^kq^{-k\ell-\frac{k(k-1)p}{2}}\langle q^\ell;q^p\rangle_\infty.$$

若 $\ell = 0$ 则（4.21）（因此（4.20））为零，所有 b_{pt+r}也都为零；若 $\ell \neq 0$ 则

$$\langle q^{\ell}; q^{p}\rangle_{\infty}(q;q)_{\infty}^{-1} = \prod_{\substack{a=1 \\ a\not\equiv \pm\ell \pmod p}}^{p-1} (q^{a}; q^{p})_{\infty}^{-1}.$$

对 $\langle q^{\ell'}; q^{p}\rangle_{\infty}$，从此处开始，结果可由类似于引理 4 和推论 5中的论证推出；当 $m \equiv n \pmod 3$ 时的证明类似。□

例 5. 对于 $p = 17 = 4^2 + 1^2$ 和 $b = 2$，当 $0 \leq r < 17$ 和$t > t_0(r)$时，b_{17t+r} 的符号如下表所示。

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\operatorname{sgn} b_{17t+r}$	+	−	−	+	+	−	0	−	−	0	+	+	−	−	+	−	+

我们注意到，对于 0，$r = 6$ 和 $r = 9$ 中的各项与例 3相符。

5 组合解释

下面我们给出两个例子，说明如何从组合角度解释我们的拆分结果。对任意 $S \subset \mathbb{N}$ 和任意 $n > 0$，令 $D_S(n)$ 表示仅使用来自 S 的部件进行的偶长度不等部分划分的数量，减去使用来自 S 的部件进行的奇长度不等部分划分的数量；此外，令 $D_S(0) = 1$。

例 6. 若令 $p = 13 = 2^2 + 3^2$ 和 $b = 1$ 取自定理 4，则去掉所有负指数后得到

$$\begin{aligned} Q(q^2,q^{13})Q(q^3,q^{13}) &= Q(q^{26},q^{169})^2 - q^{27}Q(q^{52},q^{169})Q(q^{78},q^{169}) - q^2Q(q^{39},q^{169})^2 \\ &\quad - q^3Q(q^{13},q^{169})Q(q^{39},q^{169}) + q^{17}Q(q^{52},q^{169})Q(q^{65},q^{169}) \\ &\quad + q^5Q(q^{26},q^{169})Q(q^{52},q^{169}) + q^{19}Q(1,q^{169})Q(q^{65},q^{169}) \\ &\quad - q^7Q(q^{13},q^{169})Q(q^{52},q^{169}) - q^{34}Q(q^{65},q^{169})Q(q^{78},q^{169}) \\ &\quad + q^9Q(1,q^{169})Q(q^{13},q^{169}) - q^{23}Q(q^{39},q^{169})Q(q^{78},q^{169}) \\ &\quad - q^{24}Q(q^{13},q^{169})Q(q^{78},q^{169}) + q^{12}Q(q^{26},q^{169})Q(q^{65},q^{169}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

如前所示，上述式子的 $r = 6$ 和 $r = 9$ 部分均为零，两者都是由于含有因子 $Q(1, q^{169})$ 所致。这里我们给出这些恒为零部分的组合解释，并以组合方式将拆分中的非零部分与等式左侧级数（5.1）中的相应部分联系起来。

若将（5.1）两边都除以 $(q^{13};q^{13})_{\infty}^2$，则左边变为

$$\frac{Q(q^2,q^{13})Q(q^3,q^{13})}{(q^{13};q^{13})_{\infty}^2} = (q^2,q^3,q^{10},q^{11};q^{13})_{\infty}(q^7,q^9,q^{17},q^{19};q^{26})_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} D_A(k)q^k, \tag{5.2}$$

其中

$$A = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv \pm 2, \pm 3, \pm 7, \pm 9, \pm 10, \pm 11 \pmod{26}\}.$$

因此，对于所有 $t \geq 0$，我们有 $D_A(13k+6) = D_A(13k+9) = 0$。例如，对于$k = 74 = 9 + 5(13)$，使用来自 A 的部分对 74 进行分拆，共有 158 个偶长度的不等部分划分；使用来自 A 的部分对 74 进行分拆，也有 158 个奇长度的不等部分划分。

另一方面，如果我们考虑拆分中含有指数模13同余于5的 q 的幂的那一部分，则

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_A(13k+5)q^{13k+5} = \frac{q^5 Q(q^{26}, q^{169})Q(q^{52}, q^{169})}{(q^{13}; q^{13})_\infty^2},$$

由此

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} D_A(13k+5)q^k \\
&\quad = \frac{(q^2, q^{11}, q^{13}; q^{13})_\infty (q^9, q^{17}; q^{26})_\infty}{(q;q)_\infty} \times \frac{(q^4, q^9, q^{13}; q^{13})_\infty (q^5, q^{21}; q^{26})_\infty}{(q;q)_\infty} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} p_{13,5}(k);
\end{aligned}$$

here

$$p_{13,5}(k) := \#\{(\pi_1, \pi_2) : \pi_1 \in \mathcal{B}, \pi_2 \in \mathcal{C}, |\pi_1| + |\pi_2| = k\},$$

whe其中 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别是部件取自 B 和 C的分拆集合，

$$\begin{aligned}
B &= \{m \in \mathbb{N} : m \not\equiv 0, \pm 2, \pm 9, \pm 11, 13 \pmod{26}, \\
C &= \{m \in \mathbb{N} : m \not\equiv 0, \pm 4, \pm 5, \pm 9, 13 \pmod{26}\},
\end{aligned}$$

并且 $|\pi_i|$ 表示分拆 π_i中各部件之和。注意允许 $\pi = \{\}$，此时 $|\pi| = 0$。

例如，考虑 $k = 96 = 13(7) + 5$。将96分拆为来自 A的偶数个互异部件的分拆有609个，将来自 A的奇数个互异部件的96的分拆有547个，因此 $D_A(96) = 609 - 547 = 62$，并且还有62个双分拆/分拆对（π_1, π_2），其中 $\pi_2 \in \mathcal{B}$、 $\pi_2 \in \mathcal{C}$和 $|\pi_1| + |\pi_2| = 7$。

例7. 令 $p = 17 = 4^2 + 1^1$ 和 $b = 2$ 在定理 5中取值，然后去掉所有负指数后得到

$$\begin{aligned}
(5.3)\quad Q(q^2, q^{17})Q(q^8, q^{17}) &= W(-q^{136}, -q^{68}, q^{289}) - qW(-q^{119}, -q^{51}, q^{289}) \\
&\quad - q^2 W(-q^{119}, -q^{34}, q^{289}) + q^3 W(-q^{119}, -q^{68}, q^{289}) + q^{21} W(-q^{85}, -q^{17}, q^{289}) \\
&\quad - q^{73} W(-q^{34}, -1, q^{289}) + q^{23} W(-q^{85}, -q^{85}, q^{289}) - q^{24} W(-q^{136}, -q^{119}, q^{289}) \\
&\quad - q^8 W(-q^{102}, -q^{34}, q^{289}) - q^{43} W(-q^{51}, -q^{51}, q^{289}) + q^{10} W(-q^{136}, -1, q^{289}) \\
&\quad + q^{28} W(-q^{68}, -q^{51}, q^{289}) - q^{12} W(-q^{102}, -q^{17}, q^{289}) - q^{13} W(-q^{136}, -q^{102}, q^{289}) \\
&\quad + q^{14} W(-q^{102}, -q^{85}, q^{289}) - q^{66} W(-q^{34}, -q^{17}, q^{289}) + q^{33} W(-q^{68}, -q^{17}, q^{289}).
\end{aligned}$$

推论 3 中已证明，指标为 6 和 9 且模 17 的系数为零，这也可以从（5.3）看出，因为 $W(x, x, q^k) = 0$ 对任意 x 和任意 $k > 0$均成立。消失系数的组合解释与所给出的类似

例 6，但将拆分中的非零部分与（5.3）左侧级数中的对应部分相等所得到的解释则有所不同。

如果将（5.3）两边都除以 $(q^{17};q^{17})_\infty^2$，那么左边就变成

$$\frac{Q(q^2,q^{17})Q(q^8,q^{17})}{(q^{17};q^{17})_\infty^2}=(q^2,q^8,q^9,q^{15};q^{17})_\infty(q,q^{13},q^{21},q^{33};q^{34})_\infty=\sum_{k=0}^{\infty}D_A(k)q^k, \tag{5.4}$$

其中

$$A=\{m\in\mathbb{N}:\ m\equiv\pm1,\pm2,\pm8,\pm9,\pm13,\pm15\ (\mathrm{mod}\ 34)\}.$$

因此，对于所有 $k\geq 0$，我们有 $D_A(17k+6)=D_A(17k+9)=0$。例如，对于$k=77=17(4)+9$，77 可以拆分为来自 A 的互异部件，且部件数为偶数的分拆有 56 种；77 可以拆分为来自 A 的互异部件，且部件数为奇数的分拆也有 56 种。

另一方面，如果我们考虑拆分中包含指数模 17 同余于 2 的 q 的幂的那一部分，那么

$$\sum_{k=0}^{\infty}D_A(17k+2)q^{17k+2}=\frac{-q^2W(-q^{119},-q^{34},q^{289})}{(q^{17};q^{17})_\infty^2},$$

由此

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}D_A(17k+2)q^k\\&\quad=-(-q^2,-q^7,-q^{10},-q^{15};q^{17})_\infty\frac{(q^5,q^{12},q^{17};q^{17})_\infty}{(q;q)_\infty}\times\frac{(q^8,q^9,q^{17};q^{17})_\infty}{(q;q)_\infty}\\&\quad=-\sum_{k=0}^{\infty}p_{17,2}(k);\end{aligned}$$

here

$$p_{17,2}(k):=\#\{(\pi_1,\pi_2,\pi_3):\ \pi_2\in\mathcal{B},\pi_2\in\mathcal{C},\pi_3\in\mathcal{D},|\pi_1|+|\pi_2|+|\pi_3|=k\},$$

其中 $\mathcal{B}$ 是各部分互异且属于 B的分拆的集合， $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 分别是各部分属于 C 和 D的分拆的集合，并且

$$\begin{aligned}B&=\{m\in\mathbb{N}:\ m\equiv\pm2,\pm7\ (\mathrm{mod}\ 17)\},\\C&=\{m\in\mathbb{N}:\ m\not\equiv 0,\pm5\ (\mathrm{mod}\ 17)\},\\D&=\{m\in\mathbb{N}:\ m\not\equiv 0,\pm8\ (\mathrm{mod}\ 17)\}.\end{aligned}$$

同样，我们再次允许 $\pi=\{\}$ 与 $|\{\}|=0$。

例如，考虑 $k=189=17(11)+2$。将 189 分拆为来自 A 的偶数个互异部件，有 5013 种分拆；将 189 分拆为来自 A 的奇数个互异部件，有 5989 种分拆，因此 $D_A(189)=5013-5989=-976$；此外还有 976 个分拆三元组（π_1，π_2，π_3），其中 $\pi_1\in\mathcal{B}$、$\pi_2\in\mathcal{C}$、$\pi_3\in\mathcal{D}$ 和 $|\pi_1|+|\pi_2|+|\pi_3|=11$。

6 总结

本文的研究动机源于实验发现：乘积 $Q(q^r,\ q^p)Q(q^s,\ Q^p)$ 中存在消失系数，其中 $r,\ s>0$ 和 p 是一个模 4 同余于 1 的素数。进一步的实验表明，一些乘积 $Q(q^r,\ q^p)Q(q^s,\ Q^p)Q(q^t,\ q^p)$ 在模 p 的等差数列中也呈现消失系数；与引言中的例子类似，对于通过以下方式定义的数列 $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$

$$Q(q,q^{13})Q(q^3,q^{13})Q(q^4,q^{13})=\sum_{k=0}^{\infty}a_kq^k,$$

有

$$a_{13k+2}=a_{13k+4}=a_{13k+10}=0\qquad\text{for all } k.$$

此外，看来对于乘积 $Q(q^i,q^p)Q(q^j,q^p)Q(q^k,q^p)$，消失系数这一现象并不只限于那些 $p\equiv 1\pmod 4$；事实上，实验还表明，如果

$$Q(q^2,q^{19})Q(q^3,q^{19})Q(q^5,q^{19})=\sum_{k=0}^{\infty}b_kq^k,$$

then

$$b_{19k+4}=b_{19k+5}=b_{19k+16}=0\qquad\text{for all } k.$$

我们把由这两个例子所暗示的、关于 $Q(q^i,q^p)Q(q^j,q^p)Q(q^k,q^p)$ 中 i、j 和 k 的可能必要条件留给读者去发现，以使消失现象发生。

参考文献

[1] Alladi, K.; Gordon B.*Rogers-Ramanujan*型乘积展开中的消失系数。Rademacher百年纪念会议论文集（G. E. Andrews与D. Bressoud编），当代数学**166**（1994），129–139。[2] Andrews, G. E.; Bressoud, D. M. 无穷乘积展开中的消失系数。澳大利亚数学会杂志A辑**27** （1979），第2期，199–202。[3] Baruah, N. D.; Kaur, M.关于无穷乘积展开中消失系数的若干结果。Ramanujan期刊**53** （2020），第3期，551–568。[4] Bringmann, K.; Han, G.; Heim, B.; Kane, B.全纯 η-商的傅里叶系数的消失性质，算术学报，待发表。[5] Channabasavayya; Dasappa, R.关于两个*q*级数展开中消失系数的一个推广。Ramanujan数学会杂志**39** （2024），第2期，187–192。[6] Chern, S.; Tang, D.模五*theta*函数之商中的消失系数。澳大利亚数学会通报**102** （2020），第3期，387–398。[7] Chern, S.; Tang, D.与*theta*级数相关的一般系数消失结果。应用数学进展*159* （2024），论文号102742，66页。[8] Cooper, S. 五重积恒等式。《国际数论杂志》**2** （2006），第1期，115–161。[9] Daniels, T.与*Legendre*带号分拆相关的两个*q*-级数中的消失系数。数论研究**10** （2024），第4期，论文号81，12页。[10] Daniels, T.; McLaughlin, J.涉及*Legendre*符号的若干无穷乘积之级数展开中的消失系数。——准备中。[11] Hirschhorn, M. D.《 q的力量：一段个人旅程》，Springer，2017。

[12] Huber, T.; McLaughlin, J.; Ye, D. 五重乘积的拆分及其应用，《组合理论杂志》A辑，219（2026），第106122号。[13] Kaur, M.; Vanda. 关于模7的某些等差数列之无限q级数展开中消失系数的结果。Ramanujan期刊58（2022），第1期，269–289。[14] Liu, J.-C. 关于拉马努金theta函数奇次幂的消失系数。Ramanujan期刊65（2024），第1期，45–2。[15] Liu, Z.-G.; Yang, X.-M. 关于theta函数的Schröter公式。《国际数论杂志》5（2009），第8期，1477–1488。[16] McLaughlin, J. 关于无穷乘积展开中消失系数的进一步结果，《澳大利亚数学会杂志》98（2015），第1期，69–77。[17] McLaughlin, J. 具有消失系数的新无限q乘积展开，Ramanujan期刊，55（2021），733–760。[18] McLaughlin, J.与Zimmer, P. 关于形如$(q^b,q^{p-b};q^p)_\infty^3(q^{jb},q^{2p-jb};q^{2p})_\infty$的无穷乘积中消失系数的进一步结果，《国际数论杂志》18（2022），第8期，1863–1885。[19] Ono, K.; Robins, S. 超稀疏尖点形式。《美国数学会会刊》123（1995），第4期，1021–1029。[20] Richmond, B.; Szekeres, G. 某些无穷乘积的泰勒系数。《塞格德数学学报》40（1978），第3–4期，347—369。[21] Somashekara, D. D.; Thulasi, M. B. 关于某些无限q级数展开中消失系数的结果。Ramanujan期刊60（2023），第2期，355–369。[22] Tang, D. 某些q级数展开中的消失系数。《国际数论杂志》15（2019），第4期，763–773。[23] Tang, D. 无穷乘积展开的四个商上的消失系数。澳大利亚数学会通报100（2019），第2期，216–224。[24] Tang, D. 三族theta函数乘积中的消失系数。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学会杂志 A辑：数学》117（2023），第1期，论文号36，11页。[25] Tang, D. 三族theta函数乘积中的消失系数。II。《数学成果》78（2023），第4期，论文号124，28页。[26] Tang, D. 具有奇模数的theta函数幂中的消失系数。《落基山数学杂志》54（2024），第1期，261–267。[27] Vanda; Kaur, M. 某些无限q乘积展开中 q^{5n+r} 与 q^{11n+r} 的消失系数。《组合年刊》26（2022），第3期，533–557。[28] Winquist, L. $p(11n+6)\equiv 0$（模11）的一个初等证明，《组合理论杂志》6（1969），56–59。[29] Xia, E. X. W.; Zhao, A. X. H. 关于两个显著的 q-级数展开之Hirschhorn的结果的推广，《实验数学》31（2022），第3期，878–882。数学系，普渡大学，西拉斐特，IN 47907 电子邮箱：daniel84@purdue.edu 数学与统计科学学院，德克萨斯大学里奥格兰德河谷分校，爱丁堡，TX 78539 电子邮箱：timothy.huber@utrgv.edu 数学系，西切斯特大学，西切斯特，PA 19383 电子邮箱：jmclaughlin2@wcupa.edu 人工智能与通识教育学院，北京师范大学—香港浸会大学联合国际学院，珠海519082，广东，中华人民共和国 电子邮箱：dongxiye@bnbu.edu.cn