arXiv:2603.04667v1 [math.RT] 4 Mar 2026

单纽李代数在无理数层级下的 $\mathcal{W}$-代数的 Kazhdan-Lusztig 范畴

THOMAS CREUTZIG、GURBIR DHILLON 和 SHIGENORI NAKATSUKA

Abstract. 设 $\mathfrak{g}$ 为单的单纽结李代数，且 $f \in \mathfrak{g}$ 为幂零元。与 $(\mathfrak{g}, f)$ 相关联的 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$ 在层 $\kappa \in \mathbb{C}$ 下的 Kazhdan-Lusztig 范畴，可通过与 f 相关的量子哈密顿约化，从仿射顶点代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 的 Kazhdan-Lusztig 范畴得到。我们证明，对任意 f 和任意无理层 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$，这都是一种编织张量等价。

1. Introduction

设 $\mathfrak{g}$ 为单李代数，κ 为复数。由此数据可构造出 $\mathfrak{g}$ 在层 κ 下的仿射顶点代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$。$V^\kappa(\mathfrak{g})$ 的模是 $\mathfrak{g}$ 的仿射李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 在层 κ 下的光滑模。特别地，任何 $\mathfrak{g}$-模都可通过抛物诱导得到一个 $V^\kappa(\mathfrak{g})$-模。层 κ 下的 Kazhdan-Lusztig 范畴 $\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g})$，是由层 κ 下的光滑 $\mathfrak{g}$-模构成的范畴，其简单合成因子是有限维 $\mathfrak{g}$-模的抛物诱导的简单商。Kazhdan-Lusztig 的著名结果指出，对于 $\kappa + h^\vee \notin \mathbb{Q}_{\geq 0}$，该范畴与量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的有限维权模范畴张量等价；这里的量子群是 $\mathfrak{g}$ 在参数 $q = \exp\left(\frac{\pi i}{r^\vee(\kappa+h^\vee)}\right)$[36] 下的量子群。此处，$h^\vee$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对偶 Coxeter 数，而 $r^\vee$ 是其纽结数。

f 是 $\mathfrak{g}$中的一个幂零元。于是通过量子哈密顿约化 H_f，可从 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ [27, 35]得到 $\mathcal{W}$代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$。此外，$V^\kappa(\mathfrak{g})$-模的约化自动成为 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$-模。令 $\mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g})$ 为由 $\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g})$ 在约化下的像生成的全子范畴。我们证明

定理 1.1 (定理5.2)。设 $\mathfrak{g}$ 的类型为 ADE 且 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$。那么，*BRST* 约化 H_f: $\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g})$ 是编织张量范畴之间的等价。

在有限 $\mathcal{W}$-代数 $U(\mathfrak{g}, f)$理论中，该理论以类似于 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$的方式，由 $\mathfrak{g}$的包络代数 $U(\mathfrak{g})$定义。Losev [37] 证明，$U(\mathfrak{g})$与 $U(\mathfrak{g}, f)$上的 Harish-Chandra 双模范畴之间的约化函子 H_f 是一个张量函子。定理 1.1 可视为顶点代数语境中的一种提升，因为 Frenkel-Zhu 函子 $A(-)$将 Kazhdan-Lusztig 范畴 $\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g})$、$\mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g})$映到 Harish-Chandra 双模范畴中；并且得益于 Arakawa [4] 的一项结果，函子 $A(-)$与 H_f可交换。

另一方面，定理 1.1 是关于无理数层级下例外 $\mathcal{W}$-代数在可容许水平下结果的一个类比 [6, 10]。特别地，它表明范畴 $\mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g})$ 不依赖于幂零轨道中代表元的选择，尤其不依赖于良好分次的选择；范畴 $\mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g})$ 与 $U_q(\mathfrak{g})$ 的权模范畴之间存在辫张量等价。

用 q 对量子群进行参数化并无不妥，因为双代数结构仅取决于 q。其有限维权模范畴变为

一个编织张量范畴，其辫结构由 R-矩阵描述。这里需要作出选择，而该选择实际上是一个阶为 N的单位根，其中 N 是权格 P 的层 $\mathfrak{g}$，也就是使格 N成为整数格的最小正整数 NP。因此，将 $\frac{1}{k+h^\vee}$ 平移一个偶整数（对于 $\mathfrak{g}$ 单边情形）不会影响 q-参数，但会影响 R-矩阵，也就是辫结构。这应当相当于通过 $H^3(P/Q,\ \mathbb{C}^\times)$ 中的一个元素进行余循环扭曲。关于这一点的讨论，见 [41] 的引言。我们看到，这可以通过以下意义上的“扭结”范畴 $\mathrm{Vect}^{P/Q}$ 来实现。

推论 1.2 (推论 5.5)。 对于 $\mathfrak{g}$ 类型为 ADE，$\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$，通过以下方式定义 $\kappa_m \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$:

$$\frac{1}{\kappa + h^\vee} = \frac{1}{\kappa_m + h^\vee} + m, \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

于是，存在一个编织张量等价

$$\mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g}) \simeq \left(\mathrm{KL}_{f'}^{\kappa_m}(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^m\right)^{P/Q}$$

对于任意幂零元 f 和 f'。

这里，$\mathrm{Vect}_{P/Q}^m$ 是由 P/Q-分次向量空间构成的范畴，其辫结构由 Killing 形式缩放 m 确定。在 $f = 0$ 且 f' 为主的情形下，此推论由 Aganagic-Frenkel-Okounkov 在 [1, 猜想 64]中提出，但未包含对应于因子 $\mathrm{Vect}_{P/Q}^m$的阿贝尔余循环修正。

迄今为止，只有 Virasoro代数 [15]、$N = 1$ 超 Virasoro 代数 [22] 以及可容许层 [4, 10, 13]上的例外单 $\mathcal{W}$-代数，已知具有编织张量范畴。我们的定理的证明与 [13] 的思路相似。有理层上的普适 $\mathcal{W}$-代数的 Kazhdan-Lusztig 范畴通常不是半单的；特别是，当其层加上对偶 Coxeter 数后为正有理数时，除最近对 $\mathfrak{sl}_2$ [40] 情形的研究外，其阿贝尔结构仍然未知。

证明此类定理首先面临的问题，是编织张量范畴结构是否存在。得益于 Yi-Zhi Huang 最近的一项定理 [30]如今，任意顶点算子代数的 C_1-余有限模范畴都保证具有这种结构。只要相关顶点代数之间存在适当的关系，现在便可以建立顶点代数范畴之间的等价。对我们而言，这些关系来自主的 $\mathcal{W}$-型 ADE [7]代数的 GKO 余集实现。借此，我们可以确定主的 $\mathcal{W}$-代数的模的重要融合规则。这些模 $T_{\lambda,\mu}^\kappa$ 是 Weyl 模 [8] 的扭曲量子哈密顿约化，而我们还关键性地证明了融合规则 $T_{\lambda,\mu}^\kappa \cong T_{\lambda,0}^\kappa \boxtimes T_{0,\mu}^\kappa$，见定理 5.1。这一结果结合 GKO 余集的 Urod 版本 [6]，使我们得以证明主要定理。

我们希望能为其他单李代数得到类似的结果，而 GKO 型余集还有很多（参见 [19] 的引言）。特别是，有三个 GKO 型余集涉及类型为 B，C以及 $\mathfrak{osp}_{1|2n}$ 的仿射顶点代数，还有它们的主 $\mathcal{W}$-(超)代数 [18, 14, 21]。我们目前有两项工作正在进行：一项研究关于 $\mathcal{W}$-超代数的一般结构性结果，另一项研究超群上的手征微分算子代数。这两项工作将为我们提供关于 [18, 14, 21] 正交辛类型的 GKO 余集的更多详细信息，因此我们预计未来能够报告一个适用于类型 B，C 以及 $\mathfrak{osp}_{1|2n}$ 的类似定理。

致谢。 我们非常感谢 Robert McRae 和 Cris Negron 将 Yi-Zhi Huang 关于 C_1-余有限模 [30] 范畴上的顶点张量范畴结构的结果 [39]提升到了其归纳完备化。若没有他们的定理，我们不可能得到我们的结果。

2. Affine vertex algebras and $\mathcal{W}$-algebras

2.1. 仿射顶点代数。 设 $\mathfrak{g}$为有限维单李代数，$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-$ 为标准三角分解。令 Q 表示根格，P（分别为 $\check{}P$）表示（余）权格，$P_+\subset P$（分别为 $\check{}P_+\subset\check{}P$）表示支配整（余）权的集合。

设 $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa=\mathfrak{g}((t))\oplus\mathbb{C}\mathbf{1}$ 为与 $\mathfrak{g}$ 在层 $\kappa(\in\mathbb{C})$ 相关联的仿射Kac-Moody李代数，其换位子定义为

$$[uf(t),vg(t)]=[u,v]f(t)g(t)+\kappa(u,v)\operatorname*{Res}_{t=0}g(t)df(t)\mathbf{1},\quad[\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa,\mathbf{1}]=0$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的正规化不变双线性型。对于一个 $\mathfrak{g}$-模 M，设

$$\mathbb{V}^\kappa(\overline{M})=U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)\underset{U(\mathfrak{g}[\![t]\!]\oplus\mathbb{C}\mathbf{1})}{\otimes}\overline{M}$$

为抛物诱导的 $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-模，其中 M 被视为一个 $(\mathfrak{g}[\![t]\!]\oplus\mathbb{C}\mathbf{1})$-模，其中 $\mathfrak{g}[\![t]\!]$ 通过自然投影 $\mathfrak{g}[\![t]\!]\twoheadrightarrow\mathfrak{g}$ 作用，且 $\mathbf{1}$ 通过恒等映射作用。按定义，带有 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 的 Weyl 模 $\mathbb{V}^\kappa_\lambda$ 是由最高权为 λ 的单的 $\mathfrak{g}$- 模 $L(\lambda)$ 诱导而来的那些模，即 $\mathbb{V}^\kappa_\lambda=\mathbb{V}^\kappa(L(\lambda))$。特别地，$V^\kappa(\mathfrak{g})=\mathbb{V}^\kappa_0$具有顶点代数结构，称为 $\mathfrak{g}$在层 κ 的泛仿射顶点代数。由于 $V^\kappa(\mathfrak{g})$-模等价于光滑的 $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-模，$\mathbb{V}^\kappa(M)$ 自然是 $V^\kappa(\mathfrak{g})$-模。

当层 κ 非临界，即 $\kappa\neq-h^\vee$时，$V^\mathfrak{g}$ 通过Segal-Sugawara构造配备共形向量 $\omega_\mathfrak{g}$。注意，相应场 $L(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}$的傅里叶模 L_n 定义了Virasoro代数在 $V^\kappa(\mathfrak{g})$上的作用，其中 L_0-作用是半单的，而 L_0-特征值称为共形权。

$V^\kappa(\mathfrak{g})$-模的Kazhdan-Lusztig 范畴$\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g})$按定义是由如下模构成的全子范畴：其 $\mathfrak{g}[\![t]\!]$-作用可积分为 $G[\![t]\!]$ 的群作用，且共形权有下界。当层 κ 为无理数，即 $\kappa\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$时，$\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g})$是半单的，简单对象由满足 $\lambda\in P_+$的Weyl 模 $\mathbb{V}^\kappa_\lambda$ 给出。

2.2. $\mathcal{W}$代数。 设 f是 $\mathfrak{g}$中的幂零元，且$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次 Γ: $\mathfrak{g}=\oplus_d\mathfrak{g}_d$是一个良好分次。引入如下李子代数 $\mathfrak{g}_{\geq d}=\oplus_{d'\geq d}\mathfrak{g}_{d'}\supset\mathfrak{g}_{>d}=\oplus_{d'>d}\mathfrak{g}_{d'}$，其中 $d\geqslant0$。于是，可以在诱导表示上构造一个中性费米子顶点代数

$$F_\chi=U(\mathfrak{g}_{>0}((t)))\otimes_{U(\mathfrak{g}_{>0}[\![t]\!]+\mathfrak{g}_{\geqslant1}((t)))}\mathbb{C}_\chi$$

其中 $\mathbb{C}_\chi$是 $\mathfrak{g}_{>0}[\![t]\!]+\mathfrak{g}_{\geqslant1}((t))$ 的一维表示，使得 $\mathfrak{g}_{>0}[\![t]\!]$平凡作用，而 $\mathfrak{g}_{\geqslant1}((t))$ 通过特征标 $\chi(xt^n)=\delta_{n,-1}(f,x)$ 作用。

按定义，$\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},f)$ 是定义在 Feigin 的半无限复形的零阶上同调上的顶点代数

$$C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{g}_{>0}((t));V^\kappa(\mathfrak{g})\otimes F_\chi)\tag{2.1}$$

上，该复形带有对角 $\mathfrak{g}_{>0}((t))$-作用，作用于 $V^\kappa(\mathfrak{g})\otimes F_\chi$。此复形也称为 BRST复形 [27, 35],，记作 $C^\bullet_f(M)$，其中 $M=V^\kappa(\mathfrak{g})$。因此，$\mathcal{W}$-代数定义为

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},f)=H^0(C^\bullet_f(V^\kappa(\mathfrak{g}))).$$

当层 κ 不是临界层时，$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},f)$ 通过使用 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 中的 Segal-Sugawara共形向量 $\omega_\mathfrak{g}$，被赋予一个共形向量 $\omega_{\mathfrak{g},f}$（例如参见 [35, 第 2] 节）。

将 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 替换为其在 M（2.1）中的表示，可得到 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},f)$-模 $H^0_f(M)$，这定义了一个表示范畴函子

$$H^0_f\colon V^\kappa(\mathfrak{g})\text{-mod}\to\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},f)\text{-mod}.\tag{2.2}$$

特别地，让我们引入 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},\ f)$-模

$$\mathbb{V}^\kappa_{\lambda,f} := H^0_f(\mathbb{V}^\kappa_\lambda)$$

对于 $\lambda \in P_+$。在本文中，我们研究范畴 $\mathrm{KL}^\kappa_f(\mathfrak{g})$，其对象是 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$-模的直和 $\mathbb{V}^\kappa_{\lambda,f}$ 其中 $\lambda \in P_+$。我们注意到，对于 $H^{\neq 0}_f(\mathbb{V}^\kappa(M)) = 0$，对 $\mathfrak{g}$-模 M 有 [35]。

2.3. 扭曲约化。 微分分次顶点超代数 $C_f(V^\kappa(\mathfrak{g}))$ 允许嵌入一个与嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 相关的海森堡顶点代数，详见 [6, 第 7] 节。因此，对于由整性条件 $\check{}\mu \in \check{}P$参数化的 $V^\kappa(\mathfrak{g})$-模 M，我们在 $C_f(M)$ 上得到 $C_f(V^\kappa(\mathfrak{g}))$ 的一个扭结作用。这个新作用赋予 $C_f(M)$ 一个新的微分，因而得到一个上同调，我们记为 $H^\bullet_{f,\check{\mu}}(M)$。得益于 $C_f(M)$ 上的扭结 $C_f(V^\kappa(\mathfrak{g}))$-作用，$H^\bullet_{f,\check{\mu}}(M)$ 是 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$ [6, 8] 的一个模。

之后，我们将考虑 f 是主幂零元的情形。在这种情况下，我们将相应的 $\mathcal{W}$-代数记作 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$，并设

$$T^\kappa_{\lambda,\check{\mu}} := H^0_{f,\check{\mu}}(\mathbb{V}^\kappa_\lambda), \quad (\lambda \in P_+,\ \check{\mu} \in \check{P}_+).$$

Feigin-Frenkel 对偶 [27] 断言存在一个顶点代数的同构

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{W}^{\check{\kappa}}(\check{\mathfrak{g}})$$

其中 $\check{}\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的朗兰兹对偶，且层满足关系 $r^\vee(\kappa+h^\vee)(\check{\kappa}+\check{}h^\vee) = 1$，其中 $r^\vee$（分别为 $h^\vee$）是 $\mathfrak{g}$ 的纽结数（分别为对偶 Coxeter 数）。这种对偶性推广到它们的表示 $T^\kappa_{\lambda,\check{\mu}}$ 如下。

定理 2.1 ([8, 定理 2.3])**.** 设 f 为主的，且 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$。对于 $\lambda \in P_+$ 和 $\check{}\mu \in \check{}P_+$，$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$-模 $T^\kappa_{\lambda,\check{\mu}}$ 是单的；此外，存在同构

$$T^\kappa_{\lambda,\check{\mu}} \simeq T^{\check{\kappa}}_{\check{\mu},\lambda}$$

在 *Feigin-Frenkel* 对偶性下。

根据 [8, 定理 4.3], ，单的 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$-模 $T^\kappa_{\lambda,\check{\mu}}$ 是一个最高权表示，其最高权为 $\chi(\lambda - (\kappa + h^\vee)\check{}\mu)$，共形权，即最高权向量的 L_0-特征值，由下式给出

$$h^\kappa_\Lambda = \frac{(\Lambda, \Lambda + 2\rho)}{2(\kappa + h^\vee)} - (\Lambda, \check{\rho}).$$

令 $\Lambda = \lambda - (\kappa + h^\vee)\check{}\mu$，其中 ρ（分别为 $\check{}\rho$）表示 $\mathfrak{g}$的韦伊（余）向量，参见例如 [35, 定理 3.6]。于是可直接推导出下式，后文将用到：

$$h(T^\kappa_{\lambda,\check{\mu}}) - h(T^\kappa_{\lambda,0}) - h(T^\kappa_{0,\check{\mu}}) = -(\lambda, \check{\mu}). \tag{2.3}$$

2.4. 等变 $\mathcal{W}$-代数的无理数层级。 给定一个（单连通、连通的）单代数群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$，我们有一个顶点代数，记作 $\mathcal{D}^{\mathrm{ch},\kappa}_G$，称为层 κ上的手征微分算子代数。它是一个单顶点代数 [9, 第 9] 节，并实现为 G 上顶点代数层的整体截面；其局部截面是定义域上微分算子的顶点代数类比，而层 κ 则参数化粘合条件 [11, 29]。作为整体微分算子代数的类比，后者包含由左不变和右不变向量场实现的 $\mathfrak{g}$ 的包络代数；与之相应，存在一个顶点代数同态

$$V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes V^{\kappa_\circ}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}^{\mathrm{ch},\kappa}_G$$

其中层 κ_o 由以下公式确定

$$(\kappa + h^\vee) + (\kappa_o + h^\vee) = 0. \tag{2.4}$$

当 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 时，它是一个嵌入，从而给出一个分解

$$\mathcal{D}_G^{\mathrm{ch},\kappa} \simeq \bigoplus_{\lambda\in P_+} \mathbb{V}_\lambda^\kappa \otimes \mathbb{V}_\lambda^{\kappa_o}$$

作为 $V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes V^{\kappa_o}(\mathfrak{g})$-模，彼得–外尔定理的一个类似物。等变 $\mathcal{W}$-代数 [5] 按定义是由 $\mathcal{D}^{\mathrm{ch},G}{}^{\kappa}$ 应用 BRST 约化得到的顶点代数：

$$\mathcal{D}_{G,f}^{\mathrm{ch},\kappa} = H_f^0(\mathcal{D}_G^{\mathrm{ch},\kappa}).$$

定理 2.2 ([5, 节 6])**.** 等变 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{D}^{\mathrm{ch},G}{}^{\kappa}{}_{,f}$ 是简单顶点代数。对于 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$，它是 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f) \otimes V^{\kappa_o}(\mathfrak{g})$ 的共形扩张，并分解为

$$\mathcal{D}_{G,f}^{\mathrm{ch},\kappa} \simeq \bigoplus_{\lambda\in P_+} \mathbb{V}_{\lambda,f}^\kappa \otimes \mathbb{V}_\lambda^{\kappa_o}$$

作为 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f) \otimes V^{\kappa_o}(\mathfrak{g})$-模。

2.5. **陪集 `Goddard-Kent-Olive 式。** 根据 Frenkel-Kac 构造，层为一的单仿射顶点代数 $L_1(\mathfrak{g})$ 同构于与根格 Q 相关联的格顶点代数 V_Q 。Goddard、Kent 和 Olive [28]观察到，当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 时，Virasoro 顶点代数，即 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{sl}_2)$，可实现为如下陪集子代数

$$\mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathrm{Com}(V^\kappa(\mathfrak{sl}_2), V^{\kappa-1}(\mathfrak{sl}_2) \otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)),$$

或者等价地，一个共形嵌入

$$V^\kappa(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{sl}_2) \hookrightarrow V^{\kappa-1}(\mathfrak{sl}_2) \otimes L_1(\mathfrak{sl}_2),$$

对于无理数层级 κ，其中另一个层 κ^o 由关系 $\frac{1}{\kappa+2} + \frac{1}{\kappa^o+2} = 1$确定。以下是单纽结李代数的主的 $\mathcal{W}$-代数的一种类似余集实现，可视为上一节中等变 $\mathcal{W}$-代数的平移版本。该结果最初在 [7] 中得到证明，之后又以截然不同的方式重新证明。

定理 2.3 ([7, 24, 20])。 对于类型为 ADE 和 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$的单李代数 $\mathfrak{g}$，令 $\kappa^o \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 由以下关系确定

$$\frac{1}{\kappa + h^\vee} + \frac{1}{\kappa^o + h^\vee} = 1. \tag{2.5}$$

于是，存在一个共形嵌入 $V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow V^{\kappa-1}(\mathfrak{g}) \otimes V_Q$。此外，对于 λ、$\mu \in P_+$，它诱导出分解

$$\mathbb{V}_\lambda^{\kappa-1} \otimes V_{Q+\mu} \simeq \bigoplus_{\substack{\nu\in P_+ \\ \nu\equiv\lambda+\mu}} \mathbb{V}_\nu^\kappa \otimes T_{\nu,\lambda}^{\kappa^o}$$

作为 $V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})$-模，其中 $\nu \equiv \lambda + \mu$ 是模 Q意义下的等式。

通过对 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 处的单仿射顶点代数 $L_n(\mathfrak{g})$ 进行 [6], 张量化，并应用量子哈密顿约化，两者可交换：

$$H_f^\bullet(V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes L_n(\mathfrak{g})) \simeq H_f^\bullet(V^\kappa(\mathfrak{g})) \otimes L_n(\mathfrak{g}).$$

当 $\mathfrak{g}$ 属于类型 ADE 且 $n = 1$时，定理 2.3 推出了如下共形嵌入

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f) \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{W}^{\kappa-1}(\mathfrak{g}, f) \otimes V_Q.$$

该共形嵌入下张量积表示的分支规则描述如下。

推论 2.4 ([6])**.** 设 $\mathfrak{g}$ 为 ADE 型，且 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$，其中 κ^o 如 (2.5)所述。

(1) 对于任意幂零元 f 以及 λ、$\mu \in P_+$

$$\mathbb{V}^{\kappa-1}_{\lambda,f} \otimes V_{Q+\mu} \simeq \bigoplus_{\substack{\mu' \in P_+ \\ \mu' = \lambda+\mu}} \mathbb{V}^{\kappa}_{\mu',f} \otimes T^{\kappa^o}_{\mu',\lambda}$$

作为 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g}, f) \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})$ 上的模。

(2) 对于主幂零元 f 以及 λ、μ、$\nu \in P_+$

$$T^{\kappa-1}_{\lambda,\mu} \otimes V_{Q+\nu} \simeq \bigoplus_{\substack{\mu' \in P_+ \\ \mu' \equiv \lambda+\mu+\nu}} T^{\kappa}_{\mu',\mu} \otimes T^{\kappa^o}_{\mu',\lambda}$$

作为 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})$ 上的模。

3. Braided tensor categories

我们回顾 Huang-Lepowsky-Zhang [32]-[34]构建的简单共形顶点超代数表示范畴上的顶点范畴和编织张量范畴结构 [25, §2。4]。

3.1. 交织算子。 在本节中，(V, ω) 表示一个简单共形顶点代数 (V, ω)，其对应共形向量的场 $L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ 给出共形分次

$$V = \bigoplus_{\Delta \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_\Delta, \quad V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$$

对某个 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$。假设 V-模 M 始终有下界，即它具有广义共形分次

$$M = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{C}} M_\Delta, \quad \dim M_\Delta < \infty$$

它有下界，意即存在某些 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ 满足

$$\{\Delta \in \mathbb{C} \mid M_\Delta \neq 0\} \subset \bigsqcup \{\lambda_i + \frac{1}{r}\mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

给定一个 V-模 M，我们将结构映射记为 $Y(\cdot, z) : V \times M \to M((z))$。$V$-模 M_1 和 M_2 的张量积 $M_1 \boxtimes M_2$ 定义为表示下文所给（对数）交织算子空间的对象。

对于 V-模 M_1、M_2、M_3，类型为 $\binom{M_3}{M_1\ M_2}$ 的（对数）交织算子 是一个双线性映射

$$\mathcal{Y}(\cdot, z) : M_1 \times M_2 \to M_3\{z\}[\log z]$$
$$(u, v) \mapsto \sum_{k=0}^{K} \sum_{n\in\mathbb{C}} u^{\mathcal{Y}}_{n,k} v\ z^{-n-1}(\log z)^k$$

对每个.....满足以下条件

$$a \in V, \quad u \in M_1, \quad v \in M_2, \quad n \in \mathbb{C}, \quad k = 0, \cdots, K.$$

(1) 下截断条件：

$$u^{\mathcal{Y}}_{n+m,k} v = 0 \quad \text{for} \quad m \in \mathbb{N} \text{ sufficiently large.}$$

(2) 雅可比恒等式:

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{x_0}\right)Y(a,z_1)\mathcal{Y}(u,z_2)v - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)\mathcal{Y}(u,z_2)Y(a,z_1)v$$
$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)\mathcal{Y}(Y(a,z_0)u,z_2)v.$$

(3) L_{-1}-导数性质:

$$\mathcal{Y}(L_{-1}u,z) = \frac{d}{dz}\mathcal{Y}(u,z).$$

在上文中, $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$ 表示 δ-函数。交织算子满足以下性质。

命题 *3.1* ([12, 命题 *2.3*]) 。设 M_1、 M_2 分别为 V-模中由 N_1 与 N_2生成的子空间, 且 $\mathcal{Y}(\cdot,z)$为类型$\binom{M_3}{M_1\ M_2}$的交织算子。若 $\mathcal{Y}(N_1,z)N_2 = 0$, 则 $\mathcal{Y}(\cdot,z) = 0$成立。

设$I_V\binom{M_3}{M_1\ M_2}$ 表示类型 $\binom{M_3}{M_1\ M_2}$的所有交织算子构成的空间, 其维数称为 M_1、 M_2 与 M_3的融合规则。 M_1 与 M_2 在 V-模范畴 $\mathcal{C}$中的张量积（或融合积）, 记为 $M_1\boxtimes M_2$, 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象（在同构意义下唯一）, 它表示函子

$$\mathcal{C}\to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}},\quad M_3\mapsto I_V\binom{M_3}{M_1\ M_2}.$$

注意到存在自然同构

$$\Omega_r\colon I_V\binom{M_3}{M_1\ M_2}\xrightarrow{\simeq} I_V\binom{M_3}{M_2\ M_1},\quad (r\in\mathbb{Z}) \tag{3.1}$$

由下式给出

$$\Omega_r(\mathcal{Y})(v,z)u = e^{z'L_{-1}}\mathcal{Y}(u,z')v\Big|_{z'^n=e^{n(2r+1)\pi i}z^n\ (n\in\mathbb{C})}.$$

设 $\mathcal{C}$ 是一个由 V-模构成的范畴, 包含 V, 且在张量积下封闭。那么, 在满足一些关于交织算子可复合性的技术假设（见 [32]-[34] ）时, $\mathcal{C}$ 具有一个由逐点张量积 $M_1\boxtimes_{P(z)}M_2$ 给出的顶点张量范畴结构, 称为 $P(z)$-张量积, 其取决于点 $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 该点用于取值交织算子中出现的变量。值得注意的是, 迭代张量积 $M_1\boxtimes_{P(z_1)}(M_2\boxtimes_{P(z_2)}M_3)$ 时需要使用不同的点。然而, 由函子同构 $M_1\boxtimes_{P(z_1)}M_2\simeq M_1\boxtimes_{P(z_2)}M_2$ 给出的逐点张量积彼此同构, 称为平行输运。然后, 通过特化 $M_1\boxtimes M_2 := M_1\boxtimes_{P(1)}M_2$ 并使用平行输运, 我们在 $\mathcal{C}$ 上得到一个编织张量范畴结构。单位 $\mathbf{1}$ 是 V 本身, 其单位态射为

$$\ell_A\colon \mathbf{1}\boxtimes M\xrightarrow{\simeq} M,\quad r_A\colon M\boxtimes\mathbf{1}\xrightarrow{\simeq} M$$

由结构映射 $Y(\cdot,z)\colon V\times M\to M((z))$ 和 $\Omega_1(Y)(\cdot,z)$ 诱导。结合子同构

$$\mathcal{A}_{M_1,M_2,M_3}\colon M_1\boxtimes(M_2\boxtimes M_3)\xrightarrow{\simeq}(M_1\boxtimes M_2)\boxtimes M_3$$

由 $P(z)$-张量积（或等价地, 交织算子）的结合律诱导。编织同构

$$\mathcal{R}_{M_1,M_2}\colon M_1\boxtimes M_2\xrightarrow{\simeq} M_2\boxtimes M_1$$

由 Ω 得到$_{r=1}$ 见（3.1）。双重辫结构 $\mathcal{M}_{M_1,\ M_2}=\mathcal{R}_{M_2,\ M_1}\circ\mathcal{R}_{M_1,\ M_2}$称为单值同构。下文中, 范畴 $\mathcal{C}$ 上的 V-模的编织张量范畴结构, 均指以此方式得到的结构。

当 V 按 $\mathbb{Z}$分次时， $\mathcal{C}$ 具有一个扭结 $\theta_M = e^{2\pi i L_0}|_M$，其满足平衡同构

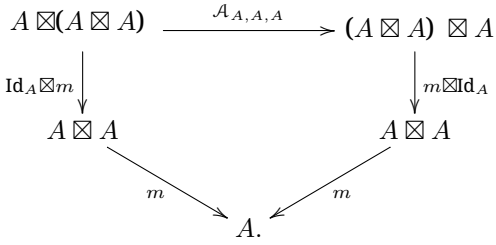
$$\theta_{M\boxtimes N} = \mathcal{M}_{M,N} \circ (\theta_M \boxtimes \theta_N). \tag{3.2}$$

若 M 具有左（因而也具有右）对偶对象，则它由对偶模$M^* = \bigoplus_\Delta \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_\Delta, \mathbb{C})$给出。若每个对象都具有对偶对象，则范畴 $\mathcal{C}$称为刚性范畴，从而当 V 为 $\mathbb{Z}$-分次时，它是辫带范畴。

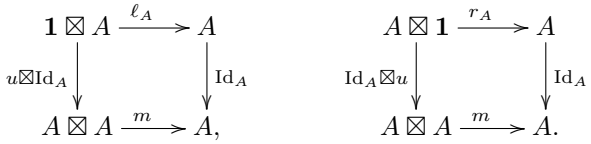
3.2. **交换代数**。 设 $\mathcal{C}$ 是 V-模的顶点（因而辫子）张量范畴。顶点代数扩张（V, ω） $\subset$ （A, ω）于 $\mathcal{C}$ 中保持共形结构，可等价地重新表述为 $\mathcal{C}$[16, 31]中的交换代数。

$\mathcal{C}$ 中的交换代数是一个三元组（A, m, u），由 $\mathcal{C}$中的对象 A 以及态射 m：$A \otimes A \to A$和 u： $\mathbf{1} \to A$ 组成，它们使下列图表交换：

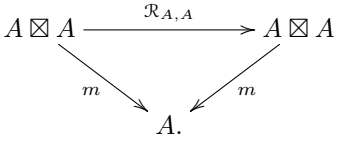
(1) 结合性公理



(2) 单位公理

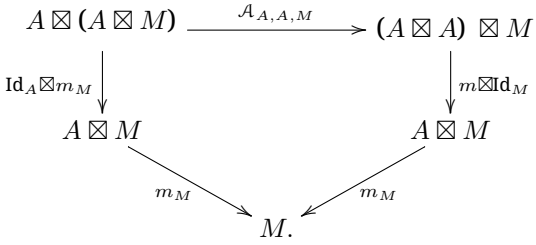


（3）交换性公理



通过限制，作为共形顶点代数的 A 上的模也是 V-模。属于 $\mathcal{C}$ 中 V-模的 A-模，可以改述为 $\mathcal{C}_A$ 中的 局部的A-模。给定 $\mathcal{C}$ 中的交换代数 A， $\mathcal{C}$ 中的 A-模是一个对象 $M \in \mathcal{C}$ 与一个态射 m_M: $A \boxtimes M \to M$ 组成的对（M, m_M），使得下列图表交换：

(1) 结合性公理



(2) 单位公理

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1}\boxtimes M & \xrightarrow{u\boxtimes \mathrm{Id}_M} & A\boxtimes M \\ & {\scriptstyle \ell_M}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle m_M} & \\ & M. & \end{array}$$

如果它还使以下图表交换，则称其为局部的:

$$\begin{array}{ccc} A\boxtimes M & \xrightarrow{\mathcal{M}_{A,M}} & A\boxtimes M \\ & {\scriptstyle m_M}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle m_M} & \\ & M. & \end{array}$$

令 $\mathcal{C}_A$ （分别地， $\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}}$）表示 $\mathcal{C}$ 中的 A-模（分别地，局部的 A-模）范畴，其态射 $f\colon (M,m_M)\to(N,m_N)$ 是那些使以下图表交换的 $f\colon M\to N$ $\mathcal{C}$ 中的态射:

$$\begin{array}{ccc} A\boxtimes M & \xrightarrow{\mathrm{Id}_A\boxtimes f} & A\boxtimes N \\ {\scriptstyle m_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_N} \\ M & \xrightarrow{\quad f\quad} & N. \end{array}$$

注意，遗忘函子

$$\mathcal{G}_A:\mathcal{C}_A\to\mathcal{C},\qquad \begin{array}{ccc}(M,m_M) & \mapsto & M,\\ f & \mapsto & f,\end{array}$$

存在一个左伴随，称为诱导函子，

$$\mathcal{F}_A:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A,\qquad \begin{array}{ccc}M & \mapsto & (A\boxtimes M, m\boxtimes \mathrm{Id}_M),\\ f & \mapsto & \mathrm{Id}_A\boxtimes f.\end{array}$$

自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\mathcal{F}_A(M),N)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\mathcal{G}_A(N)) \tag{3.3}$$

称为弗罗贝尼乌斯互反律。根据右单位约束，该图表

$$\begin{array}{ccc} (A\otimes\mathbf{1})\otimes X & \xrightarrow{r_A\otimes \mathrm{Id}_X} & A\otimes X \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}_A\otimes u\otimes \mathrm{Id}_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_A\otimes \mathrm{Id}_X} \\ (A\otimes A)\otimes X & \xrightarrow{\quad m\quad} & A\otimes X \end{array}$$

是交换的，即， $\mathcal{F}_A(X)$上的乘法限制在 X 上是满射，因此$\mathcal{F}_A(X)$由 X 作为 A-模生成。

定理 3.2 ([16])。 设 A是顶点（编织）张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个交换代数，其中的对象是 V-模。
(1) $\mathcal{C}_A$ 具有张量范畴结构， $\mathcal{C}_A^{loc}$具有编织张量范畴结构，且它是 $\mathcal{C}_A$的张量子范畴。*(2)* $\mathcal{F}_A$ ： $\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是一个张量函子，限制后成为一个编织张量函子$\mathcal{F}_A$: $\mathcal{C}^0\to\mathcal{C}_A^{loc}$，其定义域为全子范畴 $\mathcal{C}^0\subset\mathcal{C}$ ，该子范畴由满足$\mathcal{M}_{A,\ M}=\mathrm{Id}_{A\boxtimes M}$的对象 M 组成。*(3)* 作为顶点代数， $\mathcal{C}$ 中 A 上的模范畴具有编织张量范畴结构，且与局部 $\mathcal{C}$-代数模范畴$\mathcal{C}_A^{loc}$之间存在典范的编织张量等价。

该定理推广到了 $\mathcal{C}$ [23] 的直接极限完备化，以及与顶点超代数扩张 [16]相对应的交换超代数对象。

3.3. **C_1-有限模**。通常，通过考虑 C_1-有限的 V-模，我们得到一个由 V-模构成的编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 。回顾一下，如果一个 V-模 M 满足 $\dim^{M/V^+}{}_{(-1)}M < \infty$，其中 $V^+ = \bigoplus_{\Delta>0} V_\Delta$，则称其为 C_1-有限。我们用 V-mod$_{C_1}$ 表示由 C_1-有限的 V-模构成的范畴。注意， V-mod$_{C_1}$对于取商和扩张是封闭的，但对于取子模则未必封闭，即， V-mod$_{C_1}$ 只是一个可加的范畴。

例 3.3（[36]）。对于层为 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 的仿射顶点代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$，单模 M 是 C_1-余有限的，当且仅当 $M \simeq \mathbb{V}^\kappa_\lambda$ 对某个 $\lambda \in P_+$ 成立。由于在 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 处，$\mu \in P_+$ 上的 λ、 $V^\kappa(\mathfrak{g})$-模范畴 $\mathcal{C}_1$ 是阿贝尔范畴，且与 Kazhdan-Lusztig 范畴 $\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g})$ 一致，因此 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{V}^\kappa_\lambda, \mathbb{V}^\kappa_\mu) = 0$。该范畴是半单且刚性的。 $\mathbb{V}^\kappa_\lambda$ 的对偶是 $\mathbb{V}^\kappa_{\lambda^*}$ ，它由 $L(\lambda)$ 的对偶 $\mathfrak{g}$-模 $L(\lambda^*)$ 诱导。此外，融合规则

$$\mathbb{V}^\kappa_\lambda \boxtimes \mathbb{V}^\kappa_\mu \simeq \bigoplus_{\nu\in P_+} \mathcal{C}^\nu_{\lambda,\mu} \mathbb{V}^\kappa_\nu$$

与 $\mathfrak{g}$-模的张量积分解一致：

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) \simeq \bigoplus_{\nu\in P_+} c^\nu_{\lambda,\mu} L(\nu).$$

定理 3.4 ([30, 定理 1.2。])。 简单共形顶点代数上的 C_1-余有限模的范畴 V-模$_{C_1}$ 满足交织算子结合性。特别地， V-模$_{C_1}$ 具有带扭结的编织幺半范畴结构。

注意，§2.4 中层为 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 的手征微分算子代数 $\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}{}_{,G}{}^{\kappa}$ 是 $V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes V^{\kappa_o}(\mathfrak{g})$ 的共形扩张。然而，它不是 Deligne 张量积 $\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{KL}^{\kappa_o}(\mathfrak{g})$ 中的交换代数对象，而是在正向极限完备化 $\mathrm{Ind}(\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{KL}^{\kappa_o}(\mathfrak{g}))$ 中的交换代数对象。文献 [23]，证明，给定一个 V- 模的顶点（因而也是辫化）张量范畴 $\mathcal{C}$，则在（任意） V- 模范畴中，正向极限完备化 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 自然具有顶点（因而也是辫化）张量范畴的结构。正如定理 3.4 所示， $\mathcal{C}$ 是阿贝尔范畴这一假设并非必要。在此一般性下，记 $\mathrm{Ind}(V\text{-mod}_{C_1})$ 为 V-mod 的子范畴，其对象由 C_1-余有限 V-模的并组成。

定理 3.5 ([39, 定理6。10])。 完备化 $\mathrm{Ind}(V\text{-模}_{C_1})$ 的 C_1-有限余模范畴，其中的模取自简单共形顶点代数 V 是可加的、余完备的，并具有带扭结的编织幺半范畴结构，使得嵌入

$$V\text{-mod}_{C_1} \to \mathrm{Ind}(V\text{-mod}_{C_1})$$

是一个保持扭转的编织幺半函子。

3.4. **镜像等价**。 为了构造 $\mathrm{KL}^k(\mathfrak{g})$ 与 $\mathrm{KL}^k_f(\mathfrak{g})$ 之间的等价，我们将使用由核对象 [17, 38] 得到的镜像等价，它将通过共形顶点代数扩张实现。

设 U 和 V 是单的、自反的共形顶点代数， A 是 $U \otimes V$ 的一个简单共形顶点代数扩张。假设满足条件 (M)：

(M1) U 和 V 在 A 中构成一个对偶对，即，

$$\mathrm{Com}(U, A) = V, \quad \mathrm{Com}(V, A) = U.$$

（M2） A 作为 $U \otimes V$-模是半单的：

$$A \simeq \bigoplus_{i\in I} U_i \otimes V_i,$$

其中， U_i 是一个不同的单的 V-模，并具有有限半单的 V-模V_i。令 $0 \in I$ 和 $U_0 = U$， $V_0 = V$。（M3） U-模 U_i （$i \in I$）属于一个由 V-模构成的编织张量范畴 $\mathcal{C}_U$，该范畴是有限半单且刚性的，并且对对偶模封闭。（M4） V-模 V_i （$i \in I$）属于一个编织张量范畴 $\mathcal{C}_V$，该范畴对对偶模封闭。

我们用 $\mathcal{C}_{U\otimes V}$ 表示由 $M \in \mathcal{C}_U$ 与 $N \in \mathcal{C}_V$ 的 $M \otimes N$ 的有限直和构成的 $U \otimes V$-模范畴。设

$$\mathcal{C}_U(A) \subset \mathcal{C}_U, \quad \mathcal{C}_V(A) \subset \mathcal{C}_V$$

分别由 U_i 与 V_i $(i \in I)$ 的有限直和构成的子范畴。

定理 3.6 ([38]). 设 $U \otimes V \subset A$ 是如上满足条件的简单顶点代数的共形扩张 (M)。如果每个交织算子

$$\mathcal{Y}(\cdot, z)\colon M_1 \times M_2 \to M_3\{z\}[\log z]$$

$U \otimes V$-模 M_1、$M_2 \in \mathcal{C}_{U\otimes V}$ 与 $M_3 \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C}_{U\otimes V})$ 都经由 $\mathcal{C}_{U\otimes V}$ 中的子模 $M_3' \subset M_3$ 分解，则 $\mathcal{C}_U(A)$ 是 $\mathcal{C}_U$ 的编织张量子范畴，且 $\mathcal{C}_V(A)$ 是 $\mathcal{C}_V$ 的半单带状编织张量子范畴，具有互异的简单对象 V_i $(i \in I)$。此外，存在一个辫反转张量等价

$$\tau : \mathcal{C}_U(A) \to \mathcal{C}_V(A), \quad U_i \mapsto V_i^*.$$

4. Principal nilpotent case

4.1. C_1-余有限性。

命题 4.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个单李代数， f 是一个幂零元。对于所有层 $\kappa \in \mathbb{C}$，满足 $\lambda \in P_+$ 的 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$-模 $\mathbb{V}^\kappa_{\lambda,f}$ 都是 C_1-余有限的。

证明。该断言实质上已在 [35, 定理 6.2] 的证明中得到证明。事实上， $\mathbb{V}^\kappa_{\lambda,f}$ 可实现为 BRST复形 $C^\bullet_f(\mathbb{V}^\kappa_\lambda)$（见第 2.2 节）中子复形 $C^-,\lambda^\bullet,f := \mathscr{C}^-,^\bullet \otimes L(\lambda)$ 的微分 d 的核，其中 $P_0 = L(\lambda)$ 见同上文献。复形 $C^-,\lambda^\bullet,f$ 具有双复形结构 $d = d_1^P + d_2^P$，并存在收敛的谱序列，使得 $E^p,_2{}^q = H^p(H^q(C^-,\lambda^\bullet,f, d_1^P)\ d_2^P) \simeq \delta_p,0, \delta_q,0 \mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f) \otimes L(\lambda)$，这由 [35, 定理 4.1] 的证明可得。现在，该断言由 $\mathbb{V}^\kappa_{\lambda,f}/\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)^+(-1)\mathbb{V}^\kappa_{\lambda,f} \simeq L(\lambda)$ 作为向量空间而得。□

注 4.2. 同样的证明也适用于与基本经典李超代数相关的 $\mathcal{W}$-超代数。

命题 4.3. 设 $\mathfrak{g}$是一个单李代数，而 f 是一个幂零元。*BRST* 约化 (2.2) 自然地扩展为交织算子空间之间的函子同态。

$$H^0_f\colon I_{V^\kappa(\mathfrak{g})}\begin{pmatrix} M_3 \\ M_1\ M_2 \end{pmatrix} \to I_{\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},f)}\begin{pmatrix} H^0_f(M_3) \\ H^0_f(M_1)\ H^0_f(M_2) \end{pmatrix},$$

该映射在层 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 上是单射，且作用于 $\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g})$ 。

证明。 设 $\mathcal{Y}(\cdot, z)$: $M_1 \times M_2 \to M_3\{z\}[\log\ z]$ 是一个交织算子。它自然地扩展到 BRST 复形

$$\mathcal{Y}(\cdot, z) \otimes Y(\cdot, z)\colon C^\bullet_f(M_1) \times C^\bullet_f(M_2) \to C^\bullet_f(M_3)\{z\}[\log z]$$

通过与微分分次顶点代数 $C^\bullet_f(V^\kappa(\mathfrak{g}))$ 中出现的顶点（超）代数的结构映射作张量积。根据交织算子的雅可比恒等式， $\mathcal{Y}(\cdot, z) := \mathcal{Y}(\cdot, z) \otimes Y(\cdot, z)$ 满足 $[d, \mathcal{Y}(u, z)\ ] = \mathcal{Y}(du, z)$，其中 $d = Q_{(0)}$ 表示 BRST 复形的微分； [35] 处给出了 Q 的定义。

˜现在，很容易证明 $\mathcal{Y}(\cdot,\ z)$ 在上同调上定义了一个交织算子

$$[\widetilde{\mathcal{Y}}](\cdot,z)\colon H_f^\bullet(M_1)\times H_f^\bullet(M_2)\to H_f^\bullet(M_3)\{z\}[\log z].$$

这就完成了第一个断言。为证明第二个断言，我们可以取$M_1=\mathbb{V}_\lambda^\kappa$、 $M_2=\mathbb{V}_\mu^\kappa$ 和 $M_3=\mathbb{V}_\nu^\kappa$，并考虑一个非零交织算子$\mathcal{Y}_\iota(\cdot,z)\in I_{V^\kappa}(\mathfrak{g})\binom{M_3}{M_1\ M_2}$，它由一个非零同态 $\iota\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(L(\lambda)\otimes_{\sim}L(\mu)\ L(\nu))$ 借助例 3.3 诱导而来。这诱导出一个交织算子 $[\mathcal{Y}_\iota](\cdot,z)\ \in I_{\mathcal{W}^\kappa}(\mathfrak{g},f)\binom{\mathbb{V}_\nu^\kappa}{f}$。如命题 4.1 的证明中所述，对于 $*=\lambda,\mu,\nu$，上同调可实现为子空间 $\ker\ d\subset C^{-,\bullet}_{*,f}$。根据形状 $C^{-,\bullet}_{*,f}=\mathscr{C}^{-,\bullet}\otimes L(*)$，复合

$$C^{-,0}_{\lambda,f}\times C^{-,0}_{\mu,f}\hookrightarrow C^0_f(\mathbb{V}_\lambda^\kappa)\times C^0_f(\mu_\lambda^\kappa)\xrightarrow{\widetilde{\mathcal{Y}}_\iota}C^0_f(\mathbb{V}_\nu^\kappa)\{z\}[\log z]\twoheadrightarrow C^{-,0}_{\nu,f}\{z\}[\log z]$$

显然非零，因为它限制为一个非零同态 $\iota\colon L(\lambda)\times L(\mu)\to L(\nu)$，相差因子 $z^\alpha(\log z)^n$。这进一步在上同调上诱导出一个非零同态，因为 $\mathbb{V}^\kappa_{*,f}/\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},f)^+_{(-1)}\mathbb{V}^\kappa_{*,f}\simeq L(*)$ 对于 $*=\lambda,\mu,\nu$ 是向量空间。证明至此完成。□

ˇ从现在起，设 $\mathfrak{g}$ 为单纽型，即属于 ADE 型。我们将 P 与 P 等同，因此将 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$-模 $T^\kappa_{\lambda,\mu}$ 记作 $\lambda,\mu\in P_+$，而不再记作 $T^\kappa_{\lambda,\check{\mu}}$。

命题 4.4. 设 $\mathfrak{g}$ 属于 ADE 型，且 $\kappa\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$。
(1) $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$-模 $T^\kappa_{\lambda,\mu}(\lambda,\mu\in P_+)$ 是 C_1-余有限的。*(2)* $I_{\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})}\binom{T^\kappa_\lambda\ T^\kappa_\lambda}{,0\ T^\kappa_{0,\mu}}\neq 0$，其中 $\lambda,\mu\in P_+$。

在给出证明之前，令 $\kappa^o\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$ 为由 $\frac{1}{\kappa^o+h^\vee}+\frac{1}{\kappa+h^\vee}=1$ 按照 (2.5) 确定的层，并引入 $V^{\kappa^o-1}(\mathfrak{g})\otimes V_Q$-模

$$M^\kappa_{\lambda,\mu}=\mathbb{V}^{\kappa^o-1}_\lambda\otimes V_{\mu+Q},\quad(\lambda,\mu\in P_+).\tag{4.1}$$

命题 4.4 的证明。由定理 2.3，我们有 $V^{\kappa^o}(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$-子模

$$\mathbb{V}^{\kappa^o}_\lambda\otimes T^\kappa_{\lambda,0}\subset M^\kappa_{0,\lambda},\quad \mathbb{V}^{\kappa^o}_0\otimes T^\kappa_{0,\mu}\subset M^\kappa_{\mu,0}.$$

由于 $M^\kappa_{0,\lambda}\boxtimes M^\kappa_{\mu,0}\simeq M^\kappa_{\mu,\lambda}$作为 $V^{\kappa^o-1}(\mathfrak{g})\otimes V_Q$-模，存在相应的典范交织算子 $\mathcal{Y}(\cdot,z)\colon M^\kappa_{0,\lambda}\otimes M^\kappa_{\mu,0}\to M^\kappa_{\mu,\lambda}\{z\}[\log z]$。由于 $M^\kappa_{0,\lambda}$ 和 $M^\kappa_{\mu,0}$ 是单模，$\mathcal{Y}(\cdot,z)$ 在 $(\mathbb{V}^{\kappa^o}_\lambda\otimes T^\kappa_{\lambda,0})\otimes(\mathbb{V}^{\kappa^o}_0\otimes T^\kappa_{0,\mu})$ 上的限制由命题 3.1 可知非零。由于 $\mathcal{Y}(\cdot,z)$ 是 $V^{\kappa^o-1}(\mathfrak{g})\otimes V_Q$-模的交织算子，该限制可分解为

$$\mathcal{Y}(\cdot,z)\colon(\mathbb{V}^{\kappa^o}_\lambda\otimes T^\kappa_{\lambda,0})\otimes(\mathbb{V}^{\kappa^o}_0\otimes T^\kappa_{0,\mu})\to(\mathbb{V}^{\kappa^o}_\lambda\otimes T^\kappa_{\lambda,\mu})\{z\}[\log z].$$

由于 $(\mathbb{V}^{\kappa^o}_\lambda\otimes T^\kappa_{\lambda,\mu})$ 是单的，$\mathcal{Y}(\cdot,z)$ 是满射，这由定理 3.4 推出 (1)。由于 $I_{V^{\kappa^o}(\mathfrak{g})}\binom{\mathbb{V}^{\kappa^o}_\lambda}{\mathbb{V}^{\kappa^o}_0}\simeq\mathbb{C}$ 由 $\Omega_1(Y)(\cdot,z)$ 张成，$\mathcal{Y}(\cdot,z)=\Omega_1(Y)(\cdot,z)\otimes\mathcal{Y}^{\mathcal{W}}(\cdot,z)$，其中 $\mathcal{Y}^{\mathcal{W}}(\cdot,z)$ 是 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$-模的某个交织算子。由于 $\mathcal{Y}(\cdot,z)\neq 0$，$\mathcal{Y}^{\mathcal{W}}(\cdot,z)$ 也如此，因此得到 (2)。□

现在我们考虑 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$-模$T^\kappa_{\lambda,\ \mu}$ 在编织幺半范畴 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$-模$C_1$中的性质。根据定理 2.3，我们将 $\mathcal{W}^{\kappa-1}(\mathfrak{g})\otimes V_Q$ 视为编织幺半范畴（$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})$)-模$C_1$的完备化中的交换代数对象。

4.2. **中心化性质**。

命题 4.5. 设 $\mathfrak{g}$ 为 ADE 型与 $\kappa \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$型。则$T^{\kappa}_{\lambda,\,0}$与$T^{\kappa}_{0,\,\mu}$对 λ、 $\mu \in P_+$彼此射影中心化。更精确地说，

$$\mathcal{M}_{T^{\kappa}_{\lambda,0},T^{\kappa}_{0,\mu}} = e^{-2\pi i(\lambda,\mu)}\mathrm{Id}_{T^{\kappa}_{\lambda,0}\boxtimes T^{\kappa}_{0,\mu}}. \tag{4.2}$$

证明。 我们考虑 $\kappa' = \kappa - 1$， 而不是 κ。令

$$\mathbb{M}_{\lambda,\mu} = T^{\kappa'}_{\lambda,\mu}\otimes V_{Q+\lambda^*+\mu^*}, \quad \lambda,\mu\in P_+.$$

令 $\mathcal{Y}(\cdot,z)\colon \mathbb{M}_{\lambda,0}\otimes\mathbb{M}_{0,\mu}\to(\mathbb{M}_{\lambda,0}\boxtimes\mathbb{M}_{0,\mu})\{z\}[\log z]$ 为 $\mathcal{W}^{\kappa'}(\mathfrak{g})\otimes V_Q$-模的典范交织算子。注意到 $\mathbb{M}_{\lambda,0}\boxtimes\mathbb{M}_{0,\mu}\simeq(T^{\kappa'}_{\lambda},{}_0\boxtimes T^{\kappa'}_{0},{}_{\mu})\otimes V_{Q+\lambda^*+\mu^*}$。 根据推论 2.4， $\mathcal{Y}(\cdot,z)$ 限制如下：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M}_{\lambda,0}\otimes\mathbb{M}_{0,\mu} & \xrightarrow{\mathcal{Y}(\cdot,z)} & (\mathbb{M}_{\lambda,0}\boxtimes\mathbb{M}_{0,\mu})\{z\}[\log z] \\
\cup & & \cup \\
(T^{\kappa}_{0,0}\otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda})\otimes(T^{\kappa}_{0,\mu}\otimes T^{\kappa^o}_{0,0}) & \longrightarrow & (T^{\kappa}_{0,\mu}\otimes T^{\kappa^o}_{\lambda,0})\{z\}[\log z].
\end{array}$$

由于 $\mathbb{M}_{\lambda,0}$ 和 $\mathbb{M}_{0.\mu}$ 是单的，底行上 $\mathcal{Y}(\cdot,z)$ 的限制由命题 3.1 可知非零，因此是满射，因为根据定理 2.1，$T^{\kappa}_{0,\mu}\otimes T^{\kappa^o}_{\lambda,0}$ 是单的。由于顶行上的 $\mathcal{Y}(\cdot,z)$ 是满射，并且 $\mathbb{M}_{\lambda,0}$ 和 $\mathbb{M}_{0,\mu}$ 由 $T^{\kappa}_{0,0}\otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}$ 生成，而 $T^{\kappa}_{0,\mu}\otimes T^{\kappa^o}_{0,0}$, , $\mathbb{M}_{\lambda,0}\boxtimes\mathbb{M}_{0,\mu}$ 由 $T^{\kappa}_{0,\mu}\otimes T^{\kappa^o}_{\lambda,0}$ 作为 $\mathcal{W}^{\kappa'}(\mathfrak{g})\otimes V_Q$-模生成。由于 L_0 在 $T^{\kappa}_{0,\mu}\otimes T^{\kappa^o}_{\lambda,0}$ 上半单作用，它在 $\mathbb{M}_{\lambda,0}\boxtimes\mathbb{M}_{0,\mu}$ 上也必然如此，因而在 $T^{\kappa}_{\lambda,0}\boxtimes T^{\kappa}_{0,\mu}$ 上亦然。由于 $\mathcal{W}^{\kappa'}(\mathfrak{g})\otimes V_Q$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，可以利用扭结 (3.2) 计算单值：

$$\begin{aligned}
\theta_{\mathbb{M}_{\lambda,0}\boxtimes\mathbb{M}_{0,\mu}} &= \mathcal{M}_{\mathbb{M}_{\lambda,0},\mathbb{M}_{0,\mu}}\circ(\theta_{\mathbb{M}_{\lambda,0}}\boxtimes\theta_{\mathbb{M}_{0,\mu}}),\\
\mathcal{M}_{\mathbb{M}_{\lambda,0},\mathbb{M}_{0,\mu}} &= \mathcal{M}_{T^{\kappa'}_{\lambda,0},T^{\kappa'}_{0,\mu}}\otimes\mathcal{M}_{V_{Q+\lambda^*},V_{Q+\mu^*}}.
\end{aligned}$$

由一般情形下的 $\theta_M = e^{2\pi i L_0}|_M$ 以及（2.3），第一个等式推出 $\mathcal{M}_{\mathbb{M}_{\lambda,\,0},\,\mathbb{M}_{0,\,\mu}}=\mathrm{Id}$。接着，第二个等式中的 $\mathcal{M}_{V_{Q+\lambda^*},\,V_{Q+\mu^*}} = e^{2\pi i(\lambda,\mu)}\mathrm{Id}$ 推出该断言。□

4.3. **主要结果**。 现在，我们可以证明以下关于主的 $\mathcal{W}$-代数的模的融合规则的主要结果。

定理 4.6。 对于类型为 ADE 和 $\kappa\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$ 的 $\mathfrak{g}$，

$$T^{\kappa}_{\lambda,\lambda'}\boxtimes T^{\kappa}_{\mu,\mu'}\simeq\bigoplus_{\nu,\nu'\in P_+} c^{\nu}_{\lambda,\mu}c^{\nu'}_{\lambda',\mu'}T^{\kappa}_{\nu,\nu'}$$

对于 λ、$\lambda'\in P_+$ 和 μ、$\mu'\in P_+$，该等式作为 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g})$-模成立。

这里，$c^{\nu}_{\lambda,\,\mu}$ 是 $\mathfrak{g}$-模的张量积的分支规则，参见例3.3。

令 $\mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})\text{-mod}^0_{C_1}$ 为 $\mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})\text{-mod}_{C_1}$ 的子范畴，它使所有$T^{\kappa^o}_{\lambda\,0}$中心化，其中 $\lambda\in P_+\cap Q$。（另见命题4.5。）证明的关键在于，该扩张的诱导函子

$$V^{\kappa}(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})\subset A := V^{\kappa'}(\mathfrak{g})\otimes V_Q,$$

由[1]给出

$$\begin{array}{rccc}
\mathcal{F}_V\colon & \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})\text{-mod}^0_{C_1} & \to & \mathrm{KL}^{\kappa'}(\mathfrak{g})\boxtimes V_Q\text{-mod}\\
& M & \mapsto & A\boxtimes(V^{\kappa}(\mathfrak{g})\otimes M)
\end{array} \tag{4.3}$$

[1]从现在起，使用诱导函子时，我们省略代数乘法。

其中 $\kappa' = \kappa - 1$ 具有由余集函子给出的左逆：

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Com}_V\colon & \mathrm{KL}^{\kappa'}(\mathfrak{g}) \boxtimes V_Q\text{-mod} & \to & \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})\text{-mod}^0_{C_1} \\ & N & \mapsto & \mathrm{Hom}_{V^\kappa(\mathfrak{g})}(V^\kappa(\mathfrak{g}), N). \end{array}$$

命题 4.7. $\mathrm{Com}_V(\mathcal{F}_V(M)) \simeq M$ 对 M 在 $\mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})$-模$\mathcal{O}^0_{C_1}$成立。

证明。 由定理 2.3，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_V(M) &= (V^{\kappa'}(\mathfrak{g}) \otimes V_Q) \boxtimes (V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes M) \\ &\simeq \bigoplus_{\mu \in P_+ \cap Q} \mathbb{V}^\kappa_\mu \otimes (T^{\kappa^o}_{\mu,0} \boxtimes M). \end{aligned}$$

因此，$\mathrm{Com}_V(\mathcal{F}_V(M)) \simeq T^{\kappa^o}_{0,0} \boxtimes M \simeq M$。 □

为简便起见，记 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g})$ 为 $\mathcal{W}^\kappa$，$V^\kappa(\mathfrak{g})$ 为 V^κ，并将 $V_{Q+\lambda}$ 记为 V_λ。

命题4.8。 对于 $\lambda \in P_+$，存在一个 $V^{\kappa'} \otimes V_Q$-模的同构

$$\mathcal{F}_V(T^{\kappa^o}_{0,\lambda}) \simeq \mathbb{V}^{\kappa'}_\lambda \otimes V_{\lambda^*}.$$

证明。 回忆一下，$\mathrm{KL}^{\kappa'}(\mathfrak{g}) \boxtimes V_Q$-模范畴是半单的，其简单对象为 $\mathbb{V}^{\kappa'}_\mu \otimes V_\nu$。由弗罗贝尼乌斯互反律和推论 2.4 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{V^{\kappa'} \otimes V_Q}(\mathcal{F}_V(T^{\kappa^o}_{0,\lambda}), \mathbb{V}^{\kappa'}_\mu \otimes V_\nu) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^\kappa \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}}(V^\kappa \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}, \mathbb{V}^{\kappa'}_\mu \otimes V_\nu) \\ &\simeq \bigoplus_{\mu' \equiv \mu + \nu} \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^\kappa \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}}(V^\kappa \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}, \mathbb{V}^\kappa_{\mu'} \otimes T^{\kappa^o}_{\mu',\mu}) \\ &\simeq \bigoplus_{\mu' \equiv \mu + \nu} \delta_{0,\mu'} \delta_{\lambda,\mu} \mathrm{Id} \end{aligned}$$

因此，$\mathcal{F}_V(T^{\kappa^o}_{0,\lambda}) \simeq \mathbb{V}^{\kappa'}_\lambda \otimes V_{\lambda^*}$。 □

我们来引入扩张的诱导函子

$$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f) \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g}) \subset A_f := \mathcal{W}^{\kappa'}(\mathfrak{g}, f) \otimes V_Q,$$

定义如下

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_f\colon & (\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f) \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g}))\text{-mod}^0_{C_1} & \to & \mathcal{W}^{\kappa'}(\mathfrak{g}, f)\text{-mod} \boxtimes V_Q\text{-mod} \\ & M & \mapsto & A_f \boxtimes M. \end{array} \tag{4.4}$$

定理 *4.6* 的证明。 根据张量积的结合律以及定理2.1中的对偶性，只需证明

$$T^\kappa_{0,\lambda} \boxtimes T^\kappa_{0,\mu} \simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} c^\nu_{\lambda,\mu} T^\kappa_{0,\nu}, \quad T^\kappa_{\lambda,0} \boxtimes T^\kappa_{0,\mu} \simeq T^\kappa_{\lambda,\mu}. \tag{4.5}$$

由命题 4.7，式 (4.5) 中的第一个同构由下式可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_V(T^{\kappa^o}_{0,\lambda} \boxtimes T^{\kappa^o}_{0,\mu}) &\simeq \mathcal{F}_V(T^{\kappa^o}_{0,\lambda}) \boxtimes \mathcal{F}_V(T^{\kappa^o}_{0,\mu}) \\ &\simeq (\mathbb{V}^{\kappa'}_\lambda \otimes V_{\lambda^*}) \boxtimes (\mathbb{V}^{\kappa'}_\mu \otimes V_{\mu^*}) \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} c^\nu_{\lambda,\mu} \mathcal{F}_V(T^{\kappa^o}_{0,\nu}) \end{aligned}$$

替换 κ^o 为 κ后，由于函子 $\mathcal{F}_V$是幺半的，且 $V^\kappa(\mathfrak{g}) \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda'}$ 其中$\lambda \in P_+$ 是关于 A 的局部模，依据命题4.5。接下来，我们证明第二个

同构。注意，情形 $\lambda \in P_+ \cap Q$ 和 $\mu \in P_+$ 可由命题4.8和定理2.3推出，因为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_V(T^{\kappa^o}_{0,\mu}) &\simeq \bigoplus_{\lambda\in P_+\cap Q} (\mathbb{V}^\kappa_\lambda \otimes T^{\kappa^o}_{\lambda,0}) \boxtimes (V^\kappa \otimes T^{\kappa^o}_{0,\mu}) \\ &\simeq \bigoplus_{\lambda\in P_+\cap Q} \mathbb{V}^\kappa_\lambda \otimes (T^{\kappa^o}_{\lambda,0} \boxtimes T^{\kappa^o}_{0,\mu}).\end{aligned}$$

因此 $T^{\kappa^o}_{\lambda,0} \boxtimes T^{\kappa^o}_{0,\mu} \simeq T^{\kappa^o}_{\lambda,\mu}$，将 κ^o替换为 κ即可。现在，我们有

$$A_f \boxtimes (T^\kappa_{0,\mu} \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}) \simeq T^{\kappa'}_{\lambda,\mu} \otimes V_{\lambda^*+\mu^*} \tag{4.6}$$

对于 λ, $\mu \in P_+$ 当 f 是主的。事实上，推论 2.4 推出

$$\begin{aligned}A_f \boxtimes (T^\kappa_{0,\mu} \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}) &\simeq \bigoplus_{\mu'\in P_+\cap Q} (T^\kappa_{\mu',0} \otimes T^{\kappa^o}_{\mu',0}) \boxtimes (T^\kappa_{0,\mu} \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}) \\ &\simeq \bigoplus_{\mu'\in P_+\cap Q} T^\kappa_{\mu',\mu} \otimes T^{\kappa^o}_{\mu',\lambda} \\ &\simeq T^{\kappa'}_{\lambda,\mu} \otimes V_{\lambda^*+\mu^*}\end{aligned}$$

作为 $\mathcal{W}^{\kappa'} \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}$-模。然后，作为 $\mathcal{W}^{\kappa'} \otimes V_Q$-模的同构 (4.6) 可由 $T^{\kappa'}_{\lambda,\mu} \otimes V_{\lambda^*+\mu^*}$ 的单性以及由弗罗贝尼乌斯互反律得到的非零同态的存在性推出

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^{\kappa'}\otimes V_Q}(A_f \boxtimes (T^\kappa_{0,\mu} \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}), T^{\kappa'}_{\lambda,\mu} \otimes V_{\lambda^*+\mu^*}) \\ &\quad\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^\kappa\otimes\mathcal{W}^{\kappa^o}}(T^\kappa_{0,\mu} \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}, T^{\kappa'}_{\lambda,\mu} \otimes V_{\lambda^*+\mu^*}) \simeq \mathbb{C}\mathrm{Id}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

5. General nilpotent case

5.1. 主要结果。

定理 5.1. 设 $\mathfrak{g}$ 属于类型 ADE 和 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$。
(1) 对于 $\lambda \in P_+$, $\mathbb{V}^\kappa_{\lambda,f}$ 是单的 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$-模。*(2)* 对于 $\lambda, \mu \in P_+$,

$$\mathbb{V}^\kappa_{\lambda,f} \boxtimes \mathbb{V}^\kappa_{\mu,f} \cong \bigoplus_{\nu\in P_+} c^\nu_{\lambda,\mu} \mathbb{V}^\kappa_{\nu,f}.$$

证明。 我们可以证明 $\kappa' = \kappa - 1$ 的断言，而不是 κ .
(1) 记 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$ 为 $\mathcal{W}^\kappa_f$并且，特别地， $\mathcal{W}^\kappa$ 当 f像之前一样是主的时。考虑 $\mathcal{F}_f(\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0\lambda,})$，如§4.3所述。由推论 2.4,

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}) \simeq \bigoplus_{\mu\in P_+\cap Q} \mathbb{V}^\kappa_{f,\lambda} \otimes T^{\kappa^o}_{\mu,\lambda} \tag{5.1}$$

作为 $\mathcal{W}^\kappa_f \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}$-模。首先证明 $\mathcal{F}_f(\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0\lambda,})$ 是一个单的 $\mathcal{W}^{\kappa'}_f \otimes V_Q$-模。否则，$\mathcal{F}_f(\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0\lambda,})$ 存在一个短正合序列

$$0 \to N \to \mathcal{F}_f(\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda}) \to M \to 0$$

对于某个真子模 N。由于 $\mathcal{F}_f(\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0\lambda,})$ 由 $\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0\lambda,}$ 生成，因此可得 $N \cap (\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda^*}) = 0$，从而 $\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda} \subset M$。对该序列进行对偶化后，我们得到

$$0 \to M^* \to \mathcal{F}_f(\mathcal{W}^\kappa_f \otimes T^{\kappa^o}_{0,\lambda^*}) \to N^* \to 0.$$

由将 (5.1) 中的 λ 替换为 λ^* 可得 $\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_0^{\kappa^o}$、$\lambda^* \subset M^*$，从而 $M^* = \mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_0^{\kappa^o}, \lambda^*)$。因此，$M \simeq \mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_0^{\kappa^o}\lambda,)$，矛盾。所以，$\mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_0^{\kappa^o}\lambda,)$ 是一个单的 $\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes V_Q$-模。接下来，我们证明 $\mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_0^{\kappa^o}\lambda,)$ 与 $\mathbb{V}_\lambda^{\kappa'}{}_{,f} \otimes V_{\lambda^*}$ 作为 $\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes V_Q$-模同构。事实上，得益于推论 2.4 和弗罗贝尼乌斯互反律，存在一个非零同态：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes V_Q}(\mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_{0,\lambda}^{\kappa^o}), \mathbb{V}_{\lambda,f}^{\kappa'} \otimes V_{\lambda^*}) \\ &\qquad \simeq \bigoplus_{\mu \in P_+ \cap Q} \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_f^\kappa \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}}(\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_{0,\lambda}^{\kappa^o}, \mathbb{V}_{\mu,f}^\kappa \otimes T_{\mu,\lambda}^{\kappa^o}) \simeq \mathbb{C}\mathrm{Id}.\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_0^{\kappa^o}\lambda,)$ 是一个单的 $\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes V_Q$-模，并且同构于 $\mathbb{V}_\lambda^{\kappa'}{}_{,f} \otimes V_{\lambda^*}$作为 $\mathcal{W}_f^\kappa \otimes \mathcal{W}^{\kappa^o}$-模，故该非零同态是一个同构。因此，$\mathbb{V}_\lambda^{\kappa'}{}_{,f}$ 是一个单的 $\mathcal{W}_f^\kappa$-模，因为 $\mathbb{V}_\lambda^{\kappa'}{}_{,f} \otimes V_{\lambda^*} \simeq \mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes T_0^{\kappa^o}\lambda,)$ 是单的。

(2) 断言由同构 $\mathbb{V}_\lambda^{\kappa'}{}_{,f} \otimes V_{\lambda^*} \simeq \mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^\kappa \otimes T_0^{\kappa^o}\lambda,)$ 以及诱导函子 $\mathcal{F}_f$ 是幺半的这一事实得出：

$$\begin{aligned}(\mathbb{V}_{\lambda,f}^{\kappa'} \otimes V_{\lambda^*}) \boxtimes (\mathbb{V}_{\mu,f}^{\kappa'} \otimes V_{\mu^*}) &\simeq \mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes T_{0,\lambda}^{\kappa^o}) \boxtimes \mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes T_{0,\mu}^{\kappa^o}) \\ &\simeq \mathcal{F}_f\left((\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes T_{0,\lambda}^{\kappa^o}) \boxtimes (\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes T_{0,\mu}^{\kappa^o})\right) \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} c_{\lambda,\mu}^\nu \mathcal{F}_f(\mathcal{W}_f^{\kappa'} \otimes T_{0,\nu}^{\kappa^o}) \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} c_{\lambda,\mu}^\nu \mathbb{V}_{\nu,f}^{\kappa'} \otimes V_{\nu^*}.\end{aligned}$$

在上文中，我们使用了定理4.6。至此证明完成。 □

5.2. **范畴等价**。我们用 $\mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g})$ 表示$\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$-mod$_{\mathcal{C}_1}$中由单的 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g}, f)$-模 $\mathbb{V}_{\lambda,f}^\kappa(\lambda \in P_+)$的直和构成的全子范畴。由定理 5.1，它是一个（半单）刚性编织张量范畴，其张量积的分支规则与 Kazhdan-Lusztig 范畴 $\mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g})$在该对应下相同

$$H_f^0 \colon \mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g}), \quad \mathbb{V}_\lambda^\kappa \mapsto \mathbb{V}_{\lambda,f}^\kappa.$$

定理 5.2. 设 $\mathfrak{g}$ 为 ADE 型且 $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$。则 *BRST* 约化$H_f^0 \colon \mathrm{KL}^\kappa(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g})$ 是编织张量范畴的一个等价。特别地，$\mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g})$ 是刚性的，且 $\mathbb{V}_{\lambda,\ f}^\kappa$ 的对偶为 $\mathbb{V}_{\lambda^*,\ f}^\kappa$。

证明。由命题 4.3 和定理 5.1，我们得到函子同构

$$H_f^0 \colon I_{V^\kappa(\mathfrak{g})}\begin{pmatrix} \mathbb{V}_\nu^\kappa \\ \mathbb{V}_\lambda^\kappa \ \mathbb{V}_\mu^\kappa \end{pmatrix} \xrightarrow{\simeq} I_{\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},f)}\begin{pmatrix} \mathbb{V}_{\nu,f}^\kappa \\ \mathbb{V}_{\lambda,f}^\kappa \ \mathbb{V}_{\mu,f}^\kappa \end{pmatrix},$$

它们给出同构

$$H_f^0(\mathbb{V}_\lambda^\kappa) \boxtimes H_f^0(\mathbb{V}_\mu^\kappa) \xrightarrow{\simeq} H_f^0(\mathbb{V}_\lambda^\kappa \boxtimes \mathbb{V}_\mu^\kappa). \tag{5.2}$$

注意，定义 $\mathcal{W}^\kappa(\mathfrak{g},\ f) = H_f^0(V^\kappa(\mathfrak{g}))$ 给出了单位对象的识别。容易验证，函子同构（5.2）与结合律、左/右单位恒等式以及编织同构相容；这些在交织算子层面完全相同，因此在顶点张量范畴中也相同。因此，H_f^0 是一个编织张量等价。

事实上，为了证明编织张量等价的存在性，我们只需应用定理 3.6 中关于等变 $\mathcal{W}$-代数的镜像等价

$$\mathcal{D}_G^{\mathrm{ch},\kappa}, \qquad \mathcal{D}_{G,f}^{\mathrm{ch},\kappa}$$

作为成对单的顶点代数的张量积的共形扩张

$$(U,V)=(V^{\kappa}(\mathfrak{g}),V^{\kappa_o}(\mathfrak{g})),(\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g},f),V^{\kappa_o}(\mathfrak{g}))$$

其中，层 $\kappa_o\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 由公式（2.4）给出。注意，条件（M1）由定理 2.2 推出，而（M2）–（M4）由例 3.3 和定理5.1 在令 $\mathcal{C}_U=\mathrm{KL}^{\kappa}(\mathfrak{g})$ 、$\mathrm{KL}_f^{\kappa}(\mathfrak{g})$ 以及 $\mathcal{C}_V=\mathrm{KL}^{\kappa_o}(\mathfrak{g})$ 时成立。此外，定理 3.6 关于交织算子的条件也由定理5.1满足。因此，定理 3.6 蕴含存在编织反向张量等价

$$\mathrm{KL}^{\kappa}(\mathfrak{g})\xleftarrow{\simeq}\mathrm{KL}^{\kappa_o}(\mathfrak{g})\xrightarrow{\simeq}\mathrm{KL}_f^{\kappa}(\mathfrak{g}),$$

从而断言编织张量等价的存在性。 □

推论 5.3. 对于 $\mathfrak{g}$ 型为 ADE 且 $\kappa\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 的情形，由 $T^{\kappa}_{\lambda,\mu}$ $(\lambda,\mu\in P_+)$ 的直和构成的 $\mathcal{W}^{\kappa}(\mathfrak{g})$-模编织张量范畴是刚性的，其中 $T^{\kappa}_{\lambda,\mu}$ 的对偶为 $T^{\kappa}_{\lambda^*,\mu^*}$。

证明。根据定理 5.2，$T^{\kappa}_{\lambda,0}$ 是刚性的，且 $T^{\kappa}_{\lambda^*,0}$ 是其对偶；根据定理 2.1，$T^{\kappa}_{0,\mu}$ 也是如此，其中 T^{κ}_{0,μ^*} 是其对偶。于是，由于根据定理 4.6 有 $T^{\kappa}_{\lambda,\mu}\simeq T^{\kappa}_{\lambda,0}\boxtimes T^{\kappa}_{0,\mu}$，它是刚性的，且 $T^{\kappa}_{\lambda^*,\mu^*}$ 是其对偶，参见例如 [26, 第 2 章。10]。□

5.3. **不同层级的比较。** 根据定理 5.2，(4.4) 中的诱导函子 $\mathcal{F}_f$ 可用于显式比较 Kazhdan-Lusztig 范畴 $\mathrm{KL}_f^{\kappa}(\mathfrak{g})$。我们注意到，根据例 3.3 中的编织张量等价 $\mathrm{KL}_f^{\kappa}(\mathfrak{g})\simeq U_q(\mathfrak{g})$- 模，原则上我们可以在范畴层面比较它们。然而，$U_q(\mathfrak{g})$- 模上的编织张量结构存在一个微妙之处，即选择一个用于编织同构 $L_q(\lambda)\otimes L_q(\mu)\simeq L_q(\mu)\otimes L_q(\lambda)$ 的 R-矩阵。这个结构并不由数值 $q=\exp\left(\frac{1}{(\kappa+h^{\vee})}\right)$ 决定，而是由 q 的一个 $|P/Q|$-次根的选择决定。不同选择的影响可重新表述为与函子 $\mathcal{F}_f$ 中出现的范畴 V_Q-模进行耦合。

通过复合定理2.1 中的对偶性与 $\mathcal{F}_f$ 在（4.4）中的函子，我们得到一个编织张量函子

$$\Psi\colon \mathrm{KL}^{\check{\kappa}^o}_{f_{\mathrm{pr}}}(\mathfrak{g})\hookrightarrow\mathcal{W}^{\kappa^o}(\mathfrak{g})\text{-mod}^0_{C_1}\xrightarrow{A_f\boxtimes(\mathcal{W}^{\kappa}_f\otimes-)}\mathrm{KL}_f^{\kappa'}(\mathfrak{g})\boxtimes V_Q\text{-mod}$$

其中，f_{pr} 是一个主幂零元，而 f 是一个一般幂零元。将层 $\check{\kappa}^o$ 和 κ^o 分别改写为 κ 和 κ_1后，后者由如下关系确定：

$$\frac{1}{\kappa+h^{\vee}}=\frac{1}{\kappa_1+h^{\vee}}+1.$$

回忆一下，V_Q-模具有简单对象 V_{λ}，其中 $\lambda\in P/Q$，并且确实与范畴 $\mathrm{Vect}^{P/Q}$（即 P/Q-分次空间的范畴）编织张量等价，其辫结构由二次型 $\mathfrak{q}\colon P/Q\to\mathbb{C}^{\times}$ 确定，使得 $\mathfrak{q}(\lambda)\mapsto e^{2\pi i(\lambda,\lambda)}$。另一方面，$\mathrm{KL}_f^{\kappa'}(\mathfrak{g})\simeq\mathrm{KL}^{\kappa'}(\mathfrak{g})$具有一个典范的 P/Q-分次。由命题4.8 和推论2.4 可知，$\Psi(T^{\kappa}_{0,\lambda})\simeq\mathbb{V}^{\kappa_1}_{\lambda,f}\otimes V_{\lambda^*}$，因此 Ψ 诱导出到平凡 P/Q-分次部分上的一个等价：

命题 5.4。 对于 $\mathfrak{g}$ 型的 ADE 和 $\kappa\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$，$\Psi$ 给出了一个编织张量等价

$$\Psi\colon \mathrm{KL}^{\kappa}_{f_{\mathrm{pr}}}(\mathfrak{g})\xrightarrow{\simeq}\left(\mathrm{KL}^{\kappa_1}_f(\mathfrak{g})\boxtimes\mathrm{Vect}_{P/Q}\right)^{P/Q}.$$

更一般地，令 $\mathrm{Vect}^m_{P/Q}$ 表示 P/Q-分次向量空间的编织张量范畴，其辫结构由二次型 $\mathfrak{q}^m(\lambda)\mapsto e^{2m\pi i(\lambda,\lambda)}$ for $m\in\mathbb{Z}$决定。注意，当 $m>0$时，它可实现为 V_{mQ}-mod 的一个子范畴，由 $V_{m\lambda}$ $(\lambda\in P/Q)$ 构成。于是，我们有如下结论。

推论 5.5. 对于 $\mathfrak{g}$ 型的 ADE, $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$，令 $\kappa_m \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ 为

$$\frac{1}{\kappa + h^\vee} = \frac{1}{\kappa_m + h^\vee} + m, \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

于是，存在一个编织张量等价

$$\mathrm{KL}_f^\kappa(\mathfrak{g}) \simeq \left(\mathrm{KL}_{f'}^{\kappa_m}(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^m\right)^{P/Q}$$

对于任意幂零元 f 和 f'。

我们注意到，$f = f' = 0$ 这一情形本质上已出现在森胁的一项工作中，[41] 其中通过应用镜像等价定理3.6，对手征微分算子进行移位。因此，一般情形也可通过应用定理5.2由此推出。这里我们基于命题5.4给出另一种证明。

证明。根据定理5.2，只需证明 $f = f' = f_{\mathrm{pr}}$的情形。由定理5.4 可得 $m = 1$的断言。注意到存在编织张量等价

$$\mathrm{Vect}_{P/Q}^{m+n} \hookrightarrow (\mathrm{Vect}_{P/Q}^m \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^n), \quad \mathbb{C}_\lambda \mapsto \mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_\lambda \tag{5.3}$$

其中 $\mathbb{C}_\lambda$ 是分次为 $\lambda \in P/Q$的一维向量空间。现在，在等价的右侧反复应用定理5.4 ，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{KL}_{f_{\mathrm{pr}}}^\kappa(\mathfrak{g}) &\simeq \left(\mathrm{KL}_{f_{\mathrm{pr}}}^{\kappa_m}(\mathfrak{g})\mathrm{Vect}_{P/Q}^1) \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^m\right)^{P/Q} \\
&\simeq \left((\mathrm{KL}_{f_{\mathrm{pr}}}^{\kappa_{m+1}}(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^1)^{P/Q} \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^m\right)^{P/Q} \\
&\simeq \left((\mathrm{KL}_{f_{\mathrm{pr}}}^{\kappa_{m+1}}(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^{m+1}\right)^{P/Q},
\end{aligned}$$

这证明了关于 $m > 0$ 的断言。断言 $m = 0$ 显然成立，因为 $\mathrm{Vect}_{P/Q}^0$ 是具有 P/Q 分次的向量空间范畴，并带有平凡编织。情形 $m < 0$ 可由情形 $m > 0$ 以类似方式推出：

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{KL}_{f_{\mathrm{pr}}}^\kappa(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^{-m}\right)^{P/Q} &\simeq \left(\left(\mathrm{KL}_{f_{\mathrm{pr}}}^{\kappa_m}(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^m\right)^{P/Q} \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^{-m}\right)^{P/Q} \\
&\simeq \left(\mathrm{KL}_{f_{\mathrm{pr}}}^{\kappa_m}(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{Vect}_{P/Q}^0\right)^{P/Q} \\
&\simeq \mathrm{KL}_{f_{\mathrm{pr}}}^{\kappa_m}(\mathfrak{g})
\end{aligned}$$

通过使用（5.3）。 □

References

[1] M. Aganagic, E. Frenkel, A. Okounkov, 《量子 q *Trans.*-Langlands *Moscow Math. Soc.* **79** 1 83 2018 对应》，，-（）。[2] T. Arakawa, 《W-代数的表示论》。 *Invent. Math.* **169**, 219–320（2007）。[3] T. Arakawa, 《关于顶点代数上的 C_2 *Math. Z.*-余有限条件 **270** 559 575 2012 的注记》。，–（）。[4] T. Arakawa, 《 W-代数的有理性：主幂零情形》， *Ann. of Math.*(2) **182** 第2期，565–604（2015）。[5] T. Arakawa, 《 $\mathcal{S}$类手征代数与 Moore-Tachikawa 辛簇》。arXiv:1811.01577 [math.RT]。[6] T. Arakawa, T. Creutzig, B. Feigin, 《Urod 代数与 W-代数的平移》， *Forum Math. Sigma* **10**, e33（2022）。[7] T. Arakawa, T. Creutzig, A. R. Linshaw, 《作为余集顶点代数的W-代数》， *Invent. Math.* **218** 145 195 2019 ，-（）。[8] T. Arakawa, E. Frenkel, 《 W-代数表示的量子 Langlands 对偶》， *Compos. Math.* **155**, （12），2235–2262（2019）。[9] T. Arakawa, A. Moreau, 《弧空间与手征亏核》， *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **57** 3 4, 795 829 2021 ，--（）。

[10] T. Arakawa, J. van Ekeren, 《例外

W $J.$ -代数的有

Eur. Math. Soc. (JEMS) **25** 7, 2763 2813 2023
理性与融合规则》，，第–期（）。[11] S. Arkhipov, D. Gaitsgory.《通过手征代数研究圈群上的微分算子》。*Int. Math. Res. Not.* **2002** (4)，165–210（2002）。[12] T. Creutzig, 《可容许层上

$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ *J. Lond.* 的权模张

Math. Soc. (2) **110** 6, 70037, 38 2024
量范畴》，，第期，论文编号e，pp（）。[13] T. Creutzig, 《可容许层上仿射顶点代数的融合范畴》，

Selecta

Math. (N.S.) **25** 2, 27, 21 2019 ，第期，

论文编号，pp（）。[14] T. Creutzig, N. Genra, A. R. Linshaw, 《$\mathfrak{osp}_{1|2n}$的顶点代数的通常模》，

J. Reine Angew. Math. **817** 1 31 2024 ，-（）。
[15] T. Creutzig, C. Jiang, F. Orosz Hunziker, D. Ridout, J. Yang, 《Virasoro 代数产生的张量范畴》，
Adv. Math. **380**，论文编号107601，35页（2021）。[16] T. Creutzig, S. Kanade, R. McRae, 《顶点算子超代数扩张的张量范畴》，Mem. Amer. Math. Soc. 295（2024），第1472期，vi+181 页。
[17] T. Creutzig, S. Kanade, R. McRae, 《粘合顶点代数》， *Adv. Math.* **396**，论文编号108174，
72页（2022）。[18] T. Creutzig, V. Kovalchuk, A. R. Linshaw, 《经典类型 W-代数的构件》。
arXiv:2409.03465 [math.RT]。[19] T. Creutzig, V. Kovalchuk, A. R. Linshaw, 《作为基本顶点代数粘合而成的新泛顶点代数》。arXiv:2512.19508 [math.QA]。[20] T. Creutzig, A. R. Linshaw, 《

W $1,$-代数的三

69 194 2022
元性》， *Cambridge J. Math.* **10**，第-期（）。[21] T. Creutzig, A. R. Linshaw, 《正交辛 W-代数的三元性》， *Adv. Math.* **409** B辑，论文编号108678，79页（2022）。[22] T. Creutzig, R. McRae, F. O. Hunziker, J. Yang, 《 $N = 1$ 超Virasoro张量范畴》，arXiv:2412.18127 [math.QA]。
[23] T. Creutzig, R. McRae, J. Yang, 《顶点张量范畴的直接极限完备化》，
Commun. Contemp. Math. **24**，第02期，2150033（2022）。[24] T. Creutzig, S. Nakatsuka, 《来自等变 W-代数的陪集》， *Represent. Theory* **27**，766 777 2023–（）。[25] T. Creutzig, J. Yang, 《超越可容许层的仿射李代数张量范畴》，*Math. Ann.* **380**，第3-4期，1991-2040，（2021）。[26] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, 《 *Tensor categories*》，数学调查与专著，205，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2015。[27] B. Feigin, E. Frenkel, 《 $\mathcal{W}$-代数中的对偶性》，
Internat. Math. Res. Notices，1991，第6期，75–82（1991）。[28] P. Goddard, A. Kent, D. I. Olive, 《Virasoro代数与陪集空间模型》，

Phys. Lett.， （）-

B **152** 1 2 88 1985
（），-92， （）。[29] V. Gorbounov, F. Malikov, V. Schechtman.《齐性空间上的手征微分算子》。
Int. J. Math. Math. Sci. **26**，第2期，83–106（2001）。[30] Y.-Z. Huang, 《 C_1-余有限性与顶点张量范畴》，arXiv:2509.20737 [math.QA]。[31] Y.-Z. Huang, A. Kirillov, J. Lepowsky, 《编织张量范畴与顶点算子代数的扩张》， *Comm. Math. Phys.* **337**，1143–1159（2015）。[32] Y.-Z. Huang, J, Lepowsky, L. Zhang, 《顶点算子代数模的张量积理论的对数推广》，
Internat. J. Math. **17**，975–1012（2006）。[33] Y.-Z. Huang, J, Lepowsky, L. Zhang, 《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论 I》。 *Conformal Field Theories and TensorCategories*，
Proceedings of a Workshop Held at Beijing International Center for Mathe-matics Research，北京大学数学讲座，第2卷，Springer，纽约，2014，169–248。[34] Y.-Z. Huang, J, Lepowsky, L. Zhang, 《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论 II（arXiv: 1012.4196）、III（arXiv: 1012.4197）、IV（arXiv:1012.4198）、V（arXiv: 1012.4199）、VI（arXiv: 1012.4202）、VII（arXiv: 1110.1929）、VIII（arXiv: 1110.1931）》。[35] V. Kac, M. Wakimoto, 《超共形代数的量子约化与表示论》。 *Adv. Math.* **185**，（2），400–458（2002）。[36] D. Kazhdan, G. Lusztig, 《仿射李代数与量子群，I、II、III、IV》，

Internat.，，–。

Math. Res. Notices **1991** 2 21 29 1991 *J. Amer. Math. Soc.* **6** 4 905 947, 949
（）；，，––1011（1993）； *J. Amer. Math. Soc.* **7**，第2期，335–381（1994）；
J. Amer. Math. Soc. **7** 第2期，383–453（1994）。[37] I. Losev, 《W-代数的有限维表示》，
Duke Math. J. **159** (1) 99-143（2011）。

[38] R. McRae, 《余集顶点算子代数的一个一般镜像等价定理》, *Sci. China Math.* **67**m 第10期, 2237–2282（2024）。[39] R. McRae、C. Negron, 非阿贝尔顶点张量范畴的余完备化。准备中。[40] R. McRae 和 J. Yang, 仿射 sl_2 在可容许层上的非半单 Kazhdan–Lusztig范畴, 《伦敦数学会会刊》 **130** 2025 4, 70043 **( )** 第e 期。Y. Moriwaki, [41] 《WZW模型中的量子坐标环与仿射顶点代数扩张》, *Selecta Math. 28*, 第4期, 68（2022）。

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Email address: thomas.creutzig@fau.de

University of California, Los Angeles
Email address: gsd@math.ucla.edu

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Email address: shigenori.nakatsuka.2022@gmail.com