arXiv:2603.04671v1 [math.PR] 4 Mar 2026

从总体观测估计图动态 S

Peter Braunsteins、Michel Mandjes 和 Florian Montalescot

摘要。在本文中，我们研究在动态随机图上演化的总体过程。该动态随机图是一个 Erd˝os–R´enyi 图，每个时间单位重新采样一次，且与之前的图相互独立，其“边存在概率”为 p。总体过程由居住在动态图各顶点上的 M个体组成。在每个时间点，任何一个M 个体若居住在具有 k 个邻居的顶点上，则以 $k/(k+1)$ 的概率跳转到相邻顶点（其中相邻顶点均匀随机选取），并以 $1/(k+1)$ 的概率停留在原地。我们假设观测到每个顶点上的个体数量，但无法观测演化中的随机图本身。我们针对 p 提出了两个估计量，并证明了它们的一致性和渐近正态性。

关键词：动态随机图 。 部分信息 。 逆问题 。 最大似然

所属机构：PB 任职于新南威尔士大学数学与统计学院 Anita B. Lawrence 中心，澳大利亚新南威尔士州悉尼市 2052。

MM 任职于莱顿大学数学研究所，地址：P.O. Box 9512, 2300 RA Leiden, The Netherlands。他同时兼任以下机构：阿姆斯特丹大学 Korteweg-de Vries 数学研究所（荷兰阿姆斯特丹）；埃因霍温理工大学 Eurandom（荷兰埃因霍温）；阿姆斯特丹大学阿姆斯特丹商学院经济与商学院（荷兰阿姆斯特丹）。

´FM 任职于巴黎综合理工学院，地址：法国帕莱索 Avenue Ren´e Descartes，邮编 91120。

致谢。日期：*2026*年*3*月*6*日。

电子邮箱：p.braunsteins@unsw.edu.au, m.r.h.mandjes@math.leidenuniv.nl, florian.montalescot@ polytechnique.edu

1. 引言

随机图文献的主体聚焦于静态模型。也就是说，重点在于分析随机图在某一固定时间点的结构性质。一个核心例子是 Erd˝os–R´enyi 随机图 [18], ，其中每一对节点之间的每条潜在边都以概率 $p \in (0,1)$ 独立地被纳入。该模型为理解随机图中的相变与连通性现象提供了基础框架。典型问题包括巨型连通分量的存在性与规模、度的分布，或连通分量的数量。关于现代论述，请读者参阅 [22, 23] 。

考虑随机图随机演化具有强烈的现实动机，以捕捉现实世界网络结构的变化和动态特性。这些模型称为时序随机图 [24], ，并带来了新的数学挑战和见解；例如参见 [2, 14]。事实上，静态情境中的许多经典结果都可以在动态情境下重新表述。例如， [8]中的样本路径大偏差原理以 [13]中给出的静态 Erd˝os–R´ényi 图的基础性结果为基础，并对其进行了拓展。同样，[21] 中关于最大特征值演化的研究拓展了 [17] 中关于静态图的发现。

下一个自然的拓展是在动态随机图上定义随机过程。事实上，几乎在任何应用领域，假设底层网络固定都是不切实际的。例如，在流行病学中，个体会因应疫情暴发而改变行为，接触网络也随之演化。此外，研究表明，考虑网络动态特性的流行病模型会呈现新的行为 [4, 5, 6]。在社交网络中，用户之间的连接会随时间出现或消失，并受到外部事件或平台内部动态的影响。同样，研究表明，考虑社会联系动态特性的投票模型具有独特性质 [3, 7, 16]。其他例子包括银行间风险敞口随时间变化的金融网络，以及设备连接或断开时拓扑可能发生变化的通信网络。这些例子凸显了对模型的需求：既要纳入网络演化，也要纳入定义在网络上的过程，从而更准确地评估系统行为。

要对上述类型的双重随机网络进行定量评估，一个核心挑战是估计模型参数。尽管关于静态 [12] 网络和动态 [25] 网络的统计估计已有大量研究，但针对双重随机网络的研究却少得多。当网络本身以及个体在网络中移动的轨迹都能被连续观测时，我们通常可以采用似然估计等标准统计方法（例如参见 [10, 第 3 节。2]）。然而，在实践中，我们通常只能观测网络上演化的过程，而无法观测动态网络本身。例如，在疫情期间，我们可能会观测到感染总人数的时间序列，却无法观测疾病传播所依托的社会接触网络如何演变。同样，虽然人们经常会接受调查，表达自己对某个议题的看法，但塑造这些看法的社会关系如何演变，却鲜少有人观测。据作者所知，现有文献尚未尝试仅根据在动态网络上演化的随机过程的观测值，来估计该网络的参数。

本文提出一个简单的双重随机模型，并重点研究如何仅根据穿行于演化随机图中的个体的观测值来估计其参数，也就是说，不直接观测网络本身。我们有意尽可能简化模型，以凸显即使在非常基础的设定下，也会出现各种微妙效应。最值得注意的是，尽管个体之间并不直接相互作用，但它们在共享的演化网络上的移动会在彼此之间形成非平凡的相依结构。更具体地说，该网络是一个 Erd˝os–R´enyi 随机图，其边概率为 p，并且每个离散时间点 $t = 1$、.....、T都会独立重新抽样；图上的过程由随机游走者构成，它们根据当前图结构选择停留在当前节点或移动到相邻节点。我们假设在每个时间点都能观测到各顶点上的行走者总数。基于这些信息，我们构造了两个关于 p as $T \to \infty$ 的一致且渐近正态估计量。

为将本文的贡献置于更广阔的背景下，我们将本研究与逆问题相关文献联系起来。所谓逆问题，是指从有限或间接数据中推断潜在模型参数的问题。一个经典例子是根据总人口规模计数估计 Galton–Watson分枝过程的后代分布。事实上，在这种情况下，研究已表明，只有 后代分布的前两个矩才能得到相合估计量 [19, 26], ，这凸显了其中可能出现的数学微妙之处。金融 [1, 15], 、流行病 [11], 和排队论 [20, 29]中也存在相关的逆问题。与本文关系更为密切的是 [10], ，其中通过对网络和网络上的

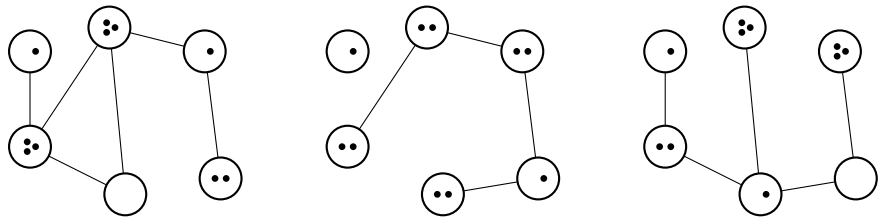


图1. 我们的动态网络及在其上移动的个体，展示了三个连续的时间点（$n = 6, M = 10$）。

过程进行部分观测，来估计双重随机网络的参数；以及 [9,第 6 节。3]（及其中的参考文献），其中利用流行病模型中的传播树，估计未观测到的社会关系静态网络的参数。这些论文并未试图确立其估计量的一致性等渐近性质。在 [27], 中，研究者利用观测到的子图计数，估计动态 Erd˝os–R´enyi 图中边的开启和关闭速率，并建立了相合估计量。

本文结构如下。第 2 节介绍模型并阐述本文的主要目标。在第 3 节中，我们采用矩估计法构造估计量 $\widehat{p_T}$，该估计量通过将与个体位置相关的时间协方差与其经验对应量进行匹配而得到。第 4 节证明了该估计量的渐近正态性。在第 5 节中，我们提出一个记为 $\bar{p}_T$ 的最小二乘估计量，并证明它同样具有渐近正态性。最后，第 6 节给出数值实验，包括比较这两个估计量的性能。

2. 模型与目标

我们的模型由一个动态随机图以及在该动态图上移动的随机游走者组成。其特征如下离散时间动力学:

◦ 图的动力学: 在每个时间单位，每次 $t = 1, \ldots, n$，独立于其他所有因素（包括前一个随机图），抽样得到一个边概率为 p 的 Erd˝os–R´enyi 随机图。这意味着，在任一时刻，顶点对 (i, j) 之间存在一条边的概率为 p，且该事件独立于所有其他边；此处 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$，其中$i < j$，且 $n \in \{2,3, \ldots\}$。

◦ 行走者动力学: 图中共有 $M \in \mathbb{N}$ 个行走者在移动。假设在时间 t，一个个体位于顶点 $i \in \{1, \ldots, n\}$，且该顶点有 $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ 个邻居。那么，该个体以 $k/(k+1)$ 的概率移动到其中一个邻居（随机均匀选取），并以 $1/(k+1)$ 的概率留在当前顶点。位于顶点 i 的每个个体都按照此规则独立行动。下文中，随机变量 $M_{i,t}$ 表示时间 $t \in \mathbb{N}$位于顶点 $i \in 1, \ldots, n$的个体数量。我们使用简洁记法 $\boldsymbol{M}_t \equiv (M_{1,t}, \ldots, M_{n,t})$。

图1展示了该过程在连续三个时间单位中的可视化表示。

我们的目标是仅使用 $\boldsymbol{M}_t$ 来估计 $t = 1$、……、T 的“边存在概率” p，即每个时间点各顶点上的行走者数量。重要的是，我们掌握的信息非常有限：既没有观测到演化随机图本身，也没有观测到个体的移动情况。全文假设我们在平稳状态下观测该系统。

备注1。 在随机图文献中，通常研究顶点数量 n 趋于无穷大的渐近情形，且往往满足 $p \equiv p_n = \alpha/n$ ，其中 $\alpha > 0$。与此不同，我们的分析固定 n ，并考察观测值数量 T 增大时估计量的渐近性能。不过，在备注3中，我们会简要评论（经典的）设定，即对于某个 $\alpha > 0$ 和 $n \to \infty$， $p \equiv p_n = \alpha/n$ 。◇

3. 基于矩估计法的估计量

本节定义一个基于矩估计法的 p 估计量。在第一个小节中，我们推导若干辅助结果；在第二个小节中，我们计算与总体向量 $\boldsymbol{M}_t$ 相关的二阶矩；在第三个小节中，我们定义估计量。

3.1. 辅助结果。

一个有用的第一步是对个体计数 $\boldsymbol{M}_t$ 进行条件化，然后计算条件均值 $\mathbb{E}\left[M_{i,t+1} \mid \boldsymbol{M}_t\right]$。 设 Y_{ij} 表示在时隙 $t+1$ 中从顶点 i 跳转到顶点 j 的个体数量，则

$$M_{i,t+1} = M_{i,t} - \sum_{j \neq i} Y_{ij} + \sum_{j \neq i} Y_{ji}.$$

定义

$$F_n(p) := \frac{1-(1-p)^n}{np}, \quad G_n(p) := \frac{1-F_n(p)}{n-1}. \tag{1}$$

由于索引 n 在整个过程中保持固定，为方便起见，我们通常在记号中省略它，并在下文中简写为 $F(p)$ 和 $G(p)$。注意， $F(p)$ 可以解释为个体停留在同一顶点的概率，而 $G(p)$ 可以解释为个体移动到不同于其当前顶点 i 的特定顶点 j 的概率。

引理1。对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 以及 $t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[M_{i,t+1} \mid \boldsymbol{M}_t\right] = (F(p) - G(p))\, M_{i,t} + G(p)\, M.$$

证明。注意到，回想一下，顶点i的邻居数量服从参数为 $n-1$ 和 p的二项分布，用显而易见的记号表示（且中间表达式中的两个二项随机量相互独立），

$$\mathbb{E}\left[M_{i,t} - \sum_{j \neq i} Y_{ij} \,\middle|\, \boldsymbol{M}_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{Bin}\left(M_{i,t}, \frac{1}{\mathrm{Bin}(n-1,p)+1}\right)\right] = M_{i,t}\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{\mathrm{Bin}(n-1,p)+1}\right].$$

然后，借助涉及牛顿二项式的标准计算,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mathrm{Bin}(n-1,p)+1}\right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} p^k (1-p)^{n-1-k} = \frac{1}{np} \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} \\
&= \frac{1-(1-p)^n}{np} = F(p),
\end{aligned}$$

其中 $F(p)$ 在式 (1) 中定义。此外，对于 $i \neq j$,

$$\mathbb{E}\left[Y_{ji} \,\middle|\, \boldsymbol{M}_t\right] = M_{j,t}\, \frac{1-F(p)}{n-1};$$

事实上， $1 - F(p)$ 是个体从顶点 j跳到另一个顶点的概率，然后它以 $1/(n-1)$ 的概率跳到顶点 i。

结合上述计算，我们由此得出

$$\mathbb{E}\big[M_{i,t+1} \mid \boldsymbol{M}_t\big] = F(p)\, M_{i,t} + \frac{1 - F_n(p)}{n-1} \sum_{j \neq i} M_{j,t}.$$

现在利用 $\sum_{j \neq i} M_{j,t} = M - M_{i,t}$，并回忆式 (1) 中给出的 $G(p)$ 的定义，从而得到所述结论。

□

注记 2. 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big[M_{i,t+1} \mid \boldsymbol{M}_t\big] &= (F(p) - G(p)) \sum_{i=1}^{n} M_{i,t} + n\, G(p)\, M \\ &= M\big(F(p) + (n-1)G(p)\big) = M,\end{aligned}$$

正如所需。 ◇

备注3. 如前所述， $F(p)$ 表示在一个时间步内，个体停留在同一顶点的概率。可以看出，$F(\cdot)$ 是递减的，其中 $F(0) = 1$ （个体以极高的概率不会跳转），而 $F(1) = 1/n$ （个体跳转到一个均匀随机选取的顶点）。

现在我们考察顶点数量 n 的影响。注意，当 $n \to \infty$ 时，

$$nF_n(p) = \mathbb{E}\left[\frac{n}{\mathrm{Bin}(n-1, p) + 1}\right] \to \frac{1}{p},$$

正如预期。有趣的是，当考虑参数化 $p = \alpha/n$ 并取 $n \to \infty$时，我们有

$$\lim_{n \to \infty} F_n(\alpha/n) = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

这是一个“慢移动模型”，其中个体在 $n \to \infty$时具有渐近为正的概率停留在其当前节点。

◇

我们方法背后的主要思想是，可以通过利用 $\boldsymbol{M}_t$ 向量的时间相关性来获知 p 的值。因此，迈向矩估计量的下一步是根据未知参数 p计算$M_{i,t}$ 与$M_{i,t+1}$ 之间的协方差。我们回顾一下，假设系统处于平稳性。结合引理1应用塔式性质，并且 $F(p)$和 $G(p)$如(1)中所给出，

$$\begin{aligned}c(p) := \mathbb{C}\mathrm{ov}(M_{i,t}, M_{i,t+1}) &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[M_{i,t+1} \mid M_{i,t}\big]\, M_{i,t}\Big] - \mathbb{E}\big[M_{i,t}\big]\mathbb{E}\big[M_{i,t+1}\big] \\ &= (F(p) - G(p))\, \mathbb{E}\big[M_{i,t}^2\big] + G(p)\, M\, \mathbb{E}\big[M_{i,t}\big] - \mathbb{E}\big[M_{i,t}\big]\mathbb{E}\big[M_{i,t+1}\big] \\ &= (F(p) - G(p))\, \mathbb{E}\big[M_{i,t}^2\big] + G(p)\, \frac{M^2}{n} - \frac{M^2}{n^2}; \end{aligned} \tag{2}$$

在最后一个等式中，已使用了对任意 t有 $\mathbb{E}\big[M_{i,t}\big] = M/n$。

注 4. 显然，$M_{i,\,t}$ 可以表示为 M 个伯努利随机变量之和，每个变量的成功概率为 $1/n$ （回想一下，我们是在平稳状态下观察该系统）。然而，重要的是，$M_{i,\,t}$ 并不 服从二项分布，因为 M 个体的试验并非相互独立。如果在某个时间点，顶点 i 对其中一个个体而言是一个「有吸引力的」（即相对更有可能被选中的）位置，那么对其他 $M-1$ 个体而言，它也同样有吸引力，因为所有个体都

面临着动态随机图的相同演化。因此，对于任意 t，我们确实有 $\mathbb{E}\big[M_{i,t}\big] = M/n$，但并不成立的是 $\mathbb{E}\big[M_{i,t}^2\big] = (M/n)(1 - 1/n)$。◇

3.2. 二阶矩。 接下来，为了推导 $c(p)$ 的表达式，我们的目标是用 p 表示二阶矩 $\mathbb{E}\big[M_{i,t}^2\big]$；参见公式 (2)。该公式将在本小节末尾的命题 1 中给出，并依赖于下方展示公式中引入的记号。

令 $X_{m,t} \in \{1, \dots, n\}$ 表示对于 $t \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \{1, \dots, M\}$，第 m 个个体的位置，因此

$$M_{i,t} = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{1}\{X_{m,t} = i\}, \tag{3}$$

对于 $i \in \{1, \dots, n\}$。为此，我们首先确定在给定位置 $i, j \in \{1, \dots, n\}$ 且满足 $i \neq j$ 时的概率，

$$\Pi_{=}(p \mid i) := \mathbb{P}(X_{1,t} = X_{2,t} = i), \quad \Pi_{\neq}(p \mid i, j) := \mathbb{P}(X_{1,t} = i, X_{2,t} = j).$$

注意，这些概率不依赖于 t（这是由于平稳性假设）。此外，它们也不依赖于 i, j（这是由于模型中的对称性），因此在位置无关紧要时，下面有时会简单地写作 $\Pi_{=}(p)$ 和 $\Pi_{\neq}(p)$。另外，在定义 $\Pi_{=}(p)$ 和 $\Pi_{\neq}(p)$ 时，我们关注的是个体 1 和 2 的位置，但显然，对于任意满足 $m \neq m'$ 的 m, m'，这些量都等于个体 m 和 m' 对应的量。

显然，

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_{1,t} = i, X_{2,t} = j) = n\,\Pi_{=}(p) + n(n-1)\,\Pi_{\neq}(p),$$

这意味着

$$\Pi_{\neq}(p) = \frac{1 - n\Pi_{=}(p)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{\Pi_{=}(p)}{n}. \tag{4}$$

因此，为了确定 $\Pi_{=}(p)$ 和 $\Pi_{\neq}(p)$，我们还需要一个关于它们的关系。我们通过进行一步论证来得到这个额外关系。为此，我们首先计算四个概率。定义

$$b_n(k, p) := \mathbb{P}(\mathrm{Bin}(n, p) = k).$$

◦ 情形*1*。将 $\pi_1(p)$ 定义为：给定个体 1 和 2 在时间 t 已经位于顶点 i，它们在时间 $t+1$位于顶点 i 的概率。如果 i 在时间 $t+1$ 有 k 个邻居，该概率为 $(k+1)^{-2}$。因此我们得到

$$\pi_1(p) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1}(k, p) \left(\frac{1}{k+1}\right)^2.$$

◦ 情形*2*。定义 $\pi_2(p)$ 为在个体1已于时间 t 位于顶点 i、而个体2位于顶点j的条件下，个体1和2在时间$t+1$位于顶点 i的概率。这要求 i 和 j 之间的边在时间 $t+1$存在，其概率为 p。如果顶点 i 在时间 $t+1$还有 k 个额外的邻居，则个体1留在该处的概率为 $(k+2)^{-1}$。如果顶点 j在时间 $t+1$还有 k 个额外的邻居，则个体2跳至顶点i 的概率为 $(k+2)^{-1}$。由此可得

$$\pi_2(p) = p \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2}(k, p) \frac{1}{k+2}\right)^2.$$

◦ 情景3。定义 $\pi_3(p)$ 为在两个个体均于时间 t 位于顶点 j 的条件下，个体1和2在时间 $t+1$位于顶点 i的概率。这要求i和 j之间的边在时间 $t+1$存在，其概率为 p。如果顶点 j在时间 $t+1$还有 k 个额外的邻居，则两个个体跳至顶点 i的概率为 $(k+2)^{-2}$。因此，

$$\pi_3(p) = p \cdot \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2}(k,p) \left(\frac{1}{k+2}\right)^2.$$

◦ 情景4。最后，定义 $\pi_4(p)$ 为如下概率：已知个体1在时间 t 位于顶点 j，个体2位于顶点 $j' \notin \{i, j\}$，个体1和个体2在时间 $t+1$ 位于顶点 i 的概率。这要求连接 i 和 j 的边以及连接 i 和 j'的边在时间 $t+1$ 存在，其发生概率为 p^2。如果顶点 j 在时间 $t+1$ 有 k 个额外邻居，个体1以概率 $(k+2)^{-1}$ 跳到顶点 i。如果顶点 j' 在时间 $t+1$ 有 k 个额外邻居，个体2以概率 $(k+2)^{-1}$ 跳到顶点 i。我们得到

$$\pi_4(p) = p^2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2}(k,p) \frac{1}{k+2}\right)^2.$$

于是，一步论证得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{1,t+1} = X_{2,t+1} = i) = {} & \mathbb{P}(X_{1,t} = X_{2,t} = i)\,\pi_1(p) + \\ & 2(n-1)\,\mathbb{P}(X_{1,t} = i, X_{2,t} = j)\,\pi_2(p) + \\ & (n-1)\,\mathbb{P}(X_{1,t} = j, X_{2,t} = j)\,\pi_3(p) + \\ & (n-1)(n-2)\,\mathbb{P}(X_{1,t} = j, X_{2,t} = k)\,\pi_4(p).\end{aligned}$$

分别对应情景2、3和4的因子 $2(n-1)$、 $n-1$ 和 $(n-1)(n-2)$，可以解释如下。

◦ 我们根据如下事件定义了 $\pi_2(p)$：个体 2 从某个顶点 $j \neq i$跳到顶点 i，由此得到因子 $n-1$。注意，还有一个与之对应的事件，即个体 1 从某个顶点 $j \neq i$ 跳到顶点 i。因此，我们得到 $2(n-1)$。

◦ 我们根据如下事件定义了 $\pi_3(p)$：个体 1 和个体 2 都从某个顶点 $j \neq i$ 跳到顶点 i，由此得到因子 $n-1$。

◦ 我们根据如下事件定义了 $\pi_3(p)$：个体 1 和个体 2 分别从不同的顶点 $j, j' \neq i$跳到顶点 i。由此得到因子 $(n-1)\,(n-2)$。

再次利用系统处于平稳状态这一点，我们得到以下恒等式：为简便起见，将 $\Pi_= \equiv \Pi_=(p)$ 和 $\Pi_\neq \equiv \Pi_\neq(p)$ 分别记为，

$$\Pi_= = \Pi_= \pi_1(p) + 2(n-1)\,\Pi_\neq \pi_2(p) + (n-1)\,\Pi_= \pi_3(p) + (n-1)(n-2)\Pi_\neq \pi_4(p).$$

这意味着 $\Pi_=(p) = \kappa(p)\,\Pi_\neq(p)$，其中

$$\kappa(p) := \frac{2(n-1)\,\pi_2(p) + (n-1)(n-2)\,\pi_4(p)}{1 - \pi_1(p) - (n-1)\,\pi_3(p)}. \tag{5}$$

将其与 (4) 结合，可得

$$\Pi_\neq(p) = \frac{1 - n\,\kappa(p)\,\Pi_\neq(p)}{n(n-1)}.$$

经过基本计算，可得到两个个体位于同一指定顶点的平稳概率，以及两个个体位于两个不同

指定顶点的平稳概率:

$$\Pi_{=}(p) = \frac{\kappa(p)}{n(n-1+\kappa(p))}, \quad \Pi_{\neq}(p) = \frac{1}{n(n-1+\kappa(p))}.$$

最后一步是利用 (3) 来计算 $\mathbb{E}\left[M_{i,t}^2\right]$。显然，再次借助该模型固有的对称性，我们得到

$$\mathbb{E}\left[M_{i,t}^2\right] = M\,\mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{X_{1,t} = i\}\right] + M(M-1)\,\mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{X_{1,t} = X_{2,t} = i\}\right] = \frac{M}{n} + M(M-1)\,\Pi_{=}(p).$$

我们已证明如下结果。

命题 1. 对于 $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$ 以及 $t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[M_{i,t}^2\right] = \frac{M}{n} + \frac{M(M-1)\,\kappa(p)}{n(n-1+\kappa(p))}.$$

3.3. 估计量。 将命题 1 与式 (2) 相结合，我们得到了 $c(p) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(M_{i,t}, M_{i,t+1})$ 关于未知“边存在概率” p 的闭式表达式。

定理 1. 对于 $n \in \{2, 3, \ldots\ldots\}$,

$$c(p) = (F(p) - G(p))\left(\frac{M}{n} + \frac{M(M-1)\,\kappa(p)}{n(n-1+\kappa(p))}\right) + G(p)\frac{M^2}{n} - \frac{M^2}{n^2}.$$

既然我们已经用 p 表示了 $c(p)$，就可以定义一个估计量，以利用过程 $(\boldsymbol{M}_t)_t$ 中存在的时间相关结构。在获得 T 观测值 $\boldsymbol{M}_1, \ldots\ldots, \boldsymbol{M}_T$ 之后，我们可用经验协方差来估计 $c_n(p)$

$$\widehat{c}_T := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} N_{i,t} - \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} M_{i,t}\right)^2\right),$$

其中 $N_{i,t} := M_{i,t}\,M_{i,t+1}$。这表明，我们可以通过 $\widehat{p}_T$ 来估计 p，其中 $\widehat{p}_T$ 定义为方程 $\widehat{c}_T = c(p)$ 的解，即

$$\widehat{p}_T := c^{-1}(\widehat{c}_T).$$

逆函数 $c^{-1}(\cdot)$ 定义良好，因为 $c(p)$ 是关于 p 的减函数。直观地说，p 越高，邻居数量越多，个体流动性越高，$M_{i,t}$ 与 $M_{i,t+1}$ 之间的相关性越低。$c(p)$ 的单调性有助于通过高效的二分搜索对 $\widehat{p}_T$ 进行数值计算。

4. 渐近正态性

本节的主要目标是说明估计量 $\widehat{p}_T$ 渐近正态。为此，我们首先证明 $2n$ 维的“样本均值向量”

$$(\widehat{\boldsymbol{M}}_T, \widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1}) \equiv \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} M_{1,t}, \ldots, \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} M_{n,t}, \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} N_{1,t}, \ldots, \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} N_{n,t}\right)$$

是渐近正态的，我们对此的定义是

$$\sqrt{T}\left((\widehat{\boldsymbol{M}}_T, \widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1}) - \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{N}_0)\right]\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \boldsymbol{G} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{G}$ 是一个 $2n$维零均值正态分布随机向量。然后我们论证，协方差估计量 $\widehat{c}_T$ 是渐近最优的。我们通过证明这也蕴含 $\widehat{p}_T$的渐近正态性来完成论证。

4.1. **样本均值向量的渐近正态性**。根据Cramér–Wold技巧，论断(6)只要我们证明如下事实便成立：对任意向量 $\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$，

$$\sqrt{T}\left(\boldsymbol{\xi}^\top \widehat{\boldsymbol{M}}_T + \boldsymbol{\zeta}^\top \widehat{\boldsymbol{N}}_T - \boldsymbol{\xi}^\top \mathbb{E}\big[\boldsymbol{M}_0\big] - \boldsymbol{\zeta}^\top \mathbb{E}\big[\boldsymbol{N}_0\big]\right) \tag{7}$$

收敛于一个（单变量）零均值正态分布随机变量。注意到这个$2n$维过程

$$(\boldsymbol{V}_t)_{t\in\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_t \\ \boldsymbol{N}_t \end{pmatrix}_{t\in\mathbb{Z}}$$

是一个有限状态、不可约的平稳马尔可夫链，因此我们可以应用 [28,定理 17.0.1] 的中心极限定理，得到式 (7) 对每个 $\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ 都具有渐近正态性。

由此我们证明了 (6)。下文中，我们用 S 表示与 $2n$维零均值正态分布随机向量 $\boldsymbol{G}$ 相对应的 $(2n\times 2n)$ 维协方差矩阵，即

$$S := \sum_{t=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}\mathrm{ov}(\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{V}_t) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{V}_0) + \sum_{t=1}^{\infty}\Big[\mathbb{C}\mathrm{ov}(\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{V}_t) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(\boldsymbol{V}_t, \boldsymbol{V}_0)\Big],$$

这里使用了标准记号 $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X}) := \mathbb{E}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top] - \mathbb{E}[\boldsymbol{X}]\mathbb{E}[\boldsymbol{X}]^\top$ 和 $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) := \mathbb{E}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^\top] - \mathbb{E}[\boldsymbol{X}]\mathbb{E}[\boldsymbol{Y}]^\top$，其中 $\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{2n}$。

4.2. **协方差估计量的渐近正态性**。 我们定义函数 $\psi:\ \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$对于 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$，

$$\psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(v_i - u_i^2\right).$$

注意到

$$\widehat{c}_T = \psi\big(\widehat{\boldsymbol{M}}_T, \widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1}\big).$$

粗略地说，Delta方法可以说明光滑函数（其输入为渐近正态随机变量，但这些变量不一定相互独立）渐近正态。事实上，在 T 变大的情况下，忽略 $o(T^{-1/2})$阶的贡献，

$$\widehat{c}_T \overset{\mathrm{d}}{=} c(p) + \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{n} G_i \left.\frac{\partial\psi}{\partial u_i}\right|_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}} + \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{n} G_{n+i} \left.\frac{\partial\psi}{\partial v_i}\right|_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}},$$

为简洁起见，记作 $\boldsymbol{e}$:=$(\mathbb{E}[\boldsymbol{M}_0],\ \mathbb{E}[\boldsymbol{N}_0])$。形式上，我们得出

$$\sqrt{T}\big(\widehat{c}_T - c(p)\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} G_c,$$

其中 G_c 是一个均值为零、方差为

$$\sigma_c^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{i=1}^{n} G_i \left.\frac{\partial\psi}{\partial u_i}\right|_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}} + \sum_{i=1}^{n} G_{n+i} \left.\frac{\partial\psi}{\partial v_i}\right|_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}}\right).$$

注意到

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_i} = -\frac{2u_i}{n}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v_i} = \frac{1}{n},$$

我们得到如下结果，其中遵循空和定义为零的惯例，并回忆起 S 是对应于 $\boldsymbol{G}$ 的协方差矩阵，

$$\sigma_c^2 = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} S_{ii}\left(\mathbb{E}[M_{0,i}]\right)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} S_{n+i,n+i} + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} S_{ij}\,\mathbb{E}[M_{0,i}]\,\mathbb{E}[M_{0,j}] +$$

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} S_{i+n,j+n} - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} S_{i,j+n}\,\mathbb{E}[M_{0,i}],$$

其中 $\mathbb{E}[M_{0,i}] = M/n$。

4.3. 参数估计量的渐近正态性。 我们再次应用 Delta方法来证明估计量 $\widehat{p}_T$ 的渐近正态性。直观地说，回想一下 $\widehat{p}_T = c^{-1}(\widehat{c}_T)$，当 $T \to \infty$ 时（同样忽略 $o(T^{-1/2})$ 项），我们有，

$$\widehat{p}_T \overset{\mathrm{d}}{=} c^{-1}\left(c(p) + \frac{1}{\sqrt{T}}G_c\right) \overset{\mathrm{d}}{=} p + \frac{1}{c'(p)}\frac{1}{\sqrt{T}}G_c.$$

正式地，我们由此得到了以下结果。

定理 2. 当 $T \to \infty$,

$$\sqrt{T}\left(\widehat{p}_T - p\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} G_p,$$

其中 G_p 是一个均值为零、方差为 $(c'(p))^{-2}\,\sigma_c^2$ 的随机变量。

注5。 利用已知 $\mathbb{E}[M_{i,t}] = M/n$ 这一信息，可以略微改善估计量的方差性能。具体而言，可以将 $\widehat{c}_T$ 替换为 $\widehat{c}_T'$，其定义如下：

$$\widehat{c}_T' := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} N_{i,t} - \left(\frac{M}{n}\right)^2\right).$$

使用与上文相同的推理，可以说明所得的 p 估计量渐近正态。◇

5. 基于最小二乘的估计量

本节将讨论一种替代前几节中基于矩估计法的估计量的方法。其核心思想是最小化以下平方和：

$$\bar{p}_T := \operatorname*{arg\,min}_{p\in[0,1]} \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T-1}\left(M_{i,t+1} - \mathbb{E}\left[M_{i,t+1} \mid \boldsymbol{M}_t\right]\right)^2.$$

该估计量的一个优点是，无需假设过程处于平稳状态（这与基于矩估计法的估计量 $\widehat{p}_T$ 不同）。记

$$H(p, M_{i,t}) := \mathbb{E}\left[M_{i,t+1} \mid \boldsymbol{M}_t\right] = \left(\frac{nF(p)-1}{n-1}\right)M_{i,t} + \left(\frac{1-F(p)}{n-1}\right)M,$$

由引理1给出（回顾一下，$\mathbb{E}[M_{i,t+1} \mid \boldsymbol{M}_t]$不依赖于$M_{j,\,t}$对 $j \neq i$而言）。考虑一阶条件，估计量 $\bar{p}_T$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T-1}\left(M_{i,t+1} - H(p, M_{i,t})\right)H'(p, M_{i,t}) = 0,$$

其中，$H'(p, M_{i,t})$ 是 $H(p, M_{i,t})$ 对 p 的导数。事实证明，将该方程改写为稍有不同的形式会更便于处理，如下所示：

$$H(p, M_{i,t}) = I(p)\,M_{i,t} + J(p)\,M, \quad I(p) := \frac{nF(p)-1}{n-1}, \quad J(p) := \frac{1-I(p)}{n}.$$

回顾一下，我们定义了 $N_{i,t} = M_{i,t}\, M_{i,t+1}$；此外，令 $N^{\circ}_{i,t} = M^2_{i,t}$。通过一些常规的微积分运算，可以验证上述方程可改写为（反复利用 $\sum_{i=1}^{n} M_{i,t} = M$ 对任意 t 均成立这一事实）

$$\frac{1}{T-1}\left(\alpha(p)\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T-1} N_{i,t} + \beta(p)\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T-1} N^{\circ}_{i,t}\right) = \gamma(p),$$

其中

$$\alpha(p) := I'(p), \qquad \beta(p) := -I(p)\, I'(p),$$

$$\gamma(p) := M^2\big(J'(p) - I(p)J'(p) - I'(p)J(p) - nJ(p)J'(p)\big) = \frac{M^2}{n} I'(p)(1 - I(p)).$$

将整个方程除以 $I'(p)$ 并重新整理各项后，我们得到方程

$$\left(\mathbf{1}^{\top}\widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1} - \frac{M^2}{n}\right) = I(p)\left(\mathbf{1}^{\top}\widehat{\boldsymbol{N}}^{\circ}_{T-1} - \frac{M^2}{n}\right),$$

其中向量 $\widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{N}}^{\circ}_{T-1}$ 具有自然的含义。注意，该方程仅涉及基本量 $I(p)$，而不依赖于计算 $\widehat{p}_T$ 所需的较复杂对象 $\kappa(p)$。进一步化简可得

$$I(p) = \frac{n\,\mathbf{1}^{\top}\widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1} - M^2}{n\,\mathbf{1}^{\top}\widehat{\boldsymbol{N}}^{\circ}_{T-1} - M^2}. \tag{8}$$

这里注意到，(8) 有唯一解，因为 $I(p)$ 继承了 $F(p)$ 的单调性；回想一下，根据备注3，我们知道 $F(p)$ 随 p 递减。此外，$I(0) = 1$ 且 $I(1) = 0$。因此我们可以写成

$$\bar{p}_T = I^{-1}\left(\frac{n\,\mathbf{1}^{\top}\widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1} - M^2}{n\,\mathbf{1}^{\top}\widehat{\boldsymbol{N}}^{\circ}_{T-1} - M^2}\right).$$

类似于我们证明 $\widehat{p}_T$ 的渐近正态性的过程，现在我们也可以证明 $\bar{p}_T$ 具有这一性质。首先，我们验证对于任意 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$，

$$\sqrt{T}\left(\boldsymbol{\xi}^{\top}\widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1} + \boldsymbol{\eta}^{\top}\widehat{\boldsymbol{N}}^{\circ}_{T-1} - \boldsymbol{\xi}^{\top}\mathbb{E}\big[\boldsymbol{N}_0\big] + \boldsymbol{\eta}^{\top}\mathbb{E}\big[\boldsymbol{N}^{\circ}_0\big]\right)$$

收敛到一个（单变量）正态分布随机变量；其中，$\mathbb{E}[\boldsymbol{N}_0]$ 和 $\mathbb{E}[\boldsymbol{N}^{\circ}_0]$ 分别表示 $\boldsymbol{N}_0$ 和 $\boldsymbol{N}^{\circ}_0$ 的稳态期望。由 Cramér-Wold 方法可知，这意味着

$$\sqrt{T}\left((\widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1}, \widehat{\boldsymbol{N}}^{\circ}_{T-1}) - \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{N}^{\circ}_0)\big]\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \boldsymbol{G}^{\circ} \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{G}^{\circ}$ 是一个 $2n$ 维的零均值正态分布随机向量，其协方差矩阵为 S°。与前面一样，通过应用 Delta 方法，可得估计量 $\bar{p}_T$ 的渐近正态性。为此，定义

$$\psi^{\circ}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \left(n\sum_{i=1}^{n} u_i - M^2\right) \Big/ \left(n\sum_{i=1}^{n} v_i - M^2\right)$$

因此，我们得到精度至 $o(1/\sqrt{T})$ 阶项的结果，其中 $\boldsymbol{e}^{\circ} := (\mathbb{E}[\boldsymbol{N}_0],\ \mathbb{E}[\boldsymbol{N}^{\circ}_0])$，

$$\widehat{I}_T \overset{\mathrm{d}}{=} I(p) + \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{n} G^{\circ}_i \left.\frac{\partial \psi^{\circ}}{\partial u_i}\right|_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}^{\circ}} + \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{n} G^{\circ}_{n+i} \left.\frac{\partial \psi^{\circ}}{\partial v_i}\right|_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}^{\circ}}.$$

因此，我们有

$$\sqrt{T}\big(\widehat{I}_T - I(p)\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} G_I,$$

其中， G_I 是一个均值为零、方差为的高斯随机变量

$$\sigma_I^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{i=1}^{n} G_i^\circ \left.\frac{\partial \psi^\circ}{\partial u_i}\right|_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}^\circ} + \sum_{i=1}^{n} G_{n+i}^\circ \left.\frac{\partial \psi^\circ}{\partial v_i}\right|_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}^\circ}\right);$$

按照同样的方式，我们可以根据 S° 的各个元素进一步计算该方差，就像我们在小节 4.2 中计算 σ_p^2 一样。沿用定理 2 证明中的论证，我们得到以下结果。

定理 3. 当 $T \to \infty$时，

$$\sqrt{T}\left(\bar{p}_T - p\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} G_p^\circ,$$

其中， G_p° 是均值为零、方差为 $(I'(p))^{-2}\,\sigma_I^2$ 的随机变量。

注 6. 当 $p \downarrow 0$ 时，在极限情况下，所有个体都趋于停留在当前顶点，因此 $\widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1}^\circ$ 实际上重合。这意味着 $\bar{p}_T = I^{-1}(1)$ 等于 0，正如预期的那样。同样，当 $p \uparrow 1$ 时，在极限情况下，随机变量 $M_{i,\,t}$ 和 $M_{i,\,t+1}$ 相互独立，且各自的期望为 M/n （参见注 4），因此根据大数定律的一个标准版本

$$\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} N_{i,t} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} M_{i,t}\,M_{i,t+1} \to \frac{M^2}{n^2}$$

当 $T \to \infty$ 时，因此 $n\,\mathbf{1}^\top \widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1} \to M^2$。我们得出结论，在此情形下 $\bar{p}_T = I^{-1}(0)$ 等于 1，这正如预期的那样。◇

注 7. 人们或许会想知道求解式 (8) 的最小二乘估计量 $\bar{p}_T$ 与第 3 节讨论的矩估计法之间有何关系。正如引理1所述，对于 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 和 $t \in \mathbb{N}$，我们有，

$$\mathbb{E}\left[M_{i,t+1} \mid \boldsymbol{M}_t\right] = (F(p) - G(p))\,M_{i,t} + G(p)\,M,$$

因此

$$\mathbb{E}\left[M_{i,t+1}M_{i,t}\right] = (F(p) - G(p))\,\mathbb{E}\left[M_{i,t}^2\right] + G(p)\,M\,\mathbb{E}\left[M_{i,t}\right]. \tag{10}$$

在第 3 节中，我们通过求得 $\mathbb{E}[M_{i,t}^2]$ 关于 p 的表达式（见命题 1），从而可以在估计出 $M_{i,t}$ 与 $M_{i,t+1}$ 之间的协方差后，估计 p。

然而，另一种方法是直接根据式 (10) 估计 p。实际上，对 $i \in \{1,\ldots,n\}$、$t \in \{1,\ldots,T-1\}$ 求和并除以 $T-1$，可得估计方程

$$\mathbf{1}^\top \widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1} = (F(p) - G(p))\,\mathbf{1}^\top \widehat{\boldsymbol{N}}_{T-1}^\circ + G(p)\,M^2.$$

Using that $G(p) = (1 - F(p))/(n-1)$，直接整理该方程即可得到 (8)。 ◇

6. 数值实验

在前几节中，我们介绍了估计量 $\widehat{p}_T$ 和 $\bar{p}_T$。本节的主要目标是在一系列设置下对它们的性能进行实证评估。由于目前尚不清楚这两种估计量中哪一种表现更好，我们系统地考察了一系列情景。在每种情景中，我们为参数 p、n 和 M选取特定值。

根据定理 2 和定理 3，估计量 $\widehat{p}_T$ 和 $\bar{p}_T$ 的标准差分别为 $(c'(p))^{-1}\sigma_c$和 $(I'(p))^{-1}\sigma_I$。这些公式凸显了决定估计量性能的两个关键因素。首先，理论矩随待估参数变化的陡峭程度（即 p）起着至关重要的作用：曲线越陡，矩对参数变化越敏感，估计也就越精确。

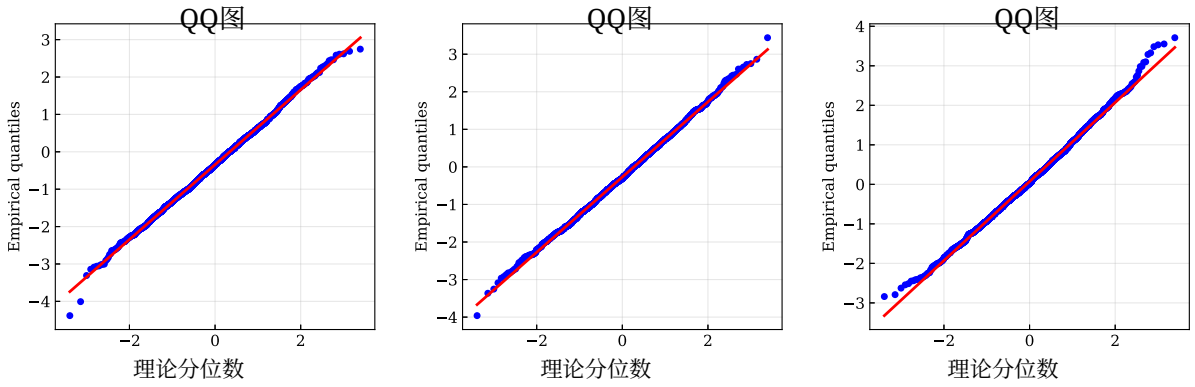


图2. $\widehat{p}_T$ 的经验分布（纵轴；“经验分位数”）相对于正态分布（横轴；“理论分位数”）的 QQ图，基于 $R = 2000$ 次重复试验，其中 $n = 7$、$M = 14$ 和 $T = 4000$。左图：$p = 0.25$；中图：$p = 0.50$；右图：$p = 0.75$。

其次，估计量本身的变异性会直接影响性能：标准差越小，估计量就越可靠。综合来看，这两个因素为理解和比较 $\widehat{p}_T$ 和 $\bar{p}_T$的效率提供了清晰的框架。

我们首先介绍一项实验，其中参数 M 和 n 保持固定，同时系统地改变 p。鉴于 σ_I 和 σ_c 均取决于 p，我们引入以下量，以便比较这两个估计量：

$$\lambda(p) := \frac{c'(p)}{I'(p)}, \quad \mu(p) := \frac{\sigma_I(p)}{\sigma_c(p)}. \quad \nu(p) := \lambda(p)\,\mu(p).$$

这里，$\lambda(p)$ 量化理论矩相对于 p 变化的相对敏感性，而 $\mu(p)$ 则反映这两个估计量的相对变异性。二者共同构成了一个清晰的框架，用于分析估计量的性能如何随 p 变化。请注意，对于 $c'(p)$ 和 $I'(p)$，我们有显式表达式；而 $\sigma_I(p)$ 和 $\sigma_c(p)$ 则没有闭式表达式。因此，我们通过大量模拟实验，对后两者进行经验估计。

在比较这两个估计量之前，我们首先给出QQ图，以经验方式评估它们的渐近正态性。图2–3表明，$\widehat{p}_T$ 和 $\bar{p}_T$ 都能被正态分布很好地近似，这与我们的渐近结果一致，如定理2–3所述。

我们通过比较这两个估计量的方差来结束实证分析。图4将量 $\lambda(p)$和 $\mu(p)$显示为 p的函数。左图表明，在所考虑的设定下，$\lambda(p) > 1$，而右图表明 $\mu(p) < 1$。我们在多种替代参数配置下进行了额外实验，并一致观察到相同的定性模式。因此我们得出结论：就进入$\nu(p)$的其中一个因子而言，估计量 $\widehat{p}_T$表现更好，而就另一个因子而言，$\bar{p}_T$具有优势。因此，总体比较取决于它们的联合效应，我们将在下文中加以研究。

考虑 $\lambda(p)$ 与 $\mu(p)$ 的乘积 $\nu(p)$，如图5右侧面板所示，我们观察到，当 p 的值较小时，估计量 $\bar{p}_T$ 的方差低于 $\widehat{p}_T$；而当 p 的值较大时，$\widehat{p}_T$ 的表现略好一些，不过两种估计量总体上仍不相上下。

我们还针对 n 和 M 的其他取值进行了额外实验，所有结果均证实了关于 $\widehat{p}_T$ 和 $\bar{p}_T$ 相对精度的整体规律。特别是，当 n

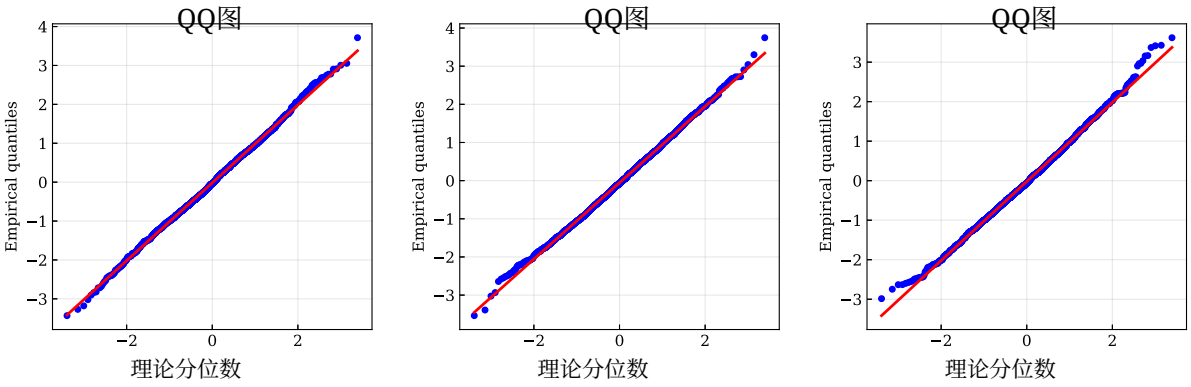


图3。基于 $R = 2000$ 次重复试验，将 $\bar{p}_T$ 的经验分布（纵轴；“经验分位数”）与正态分布（横轴；“理论分位数”）进行比较的QQ图，其中 $n = 7$、 $M = 14$和 $T = 4000$。左图： $p = 0。25$；中图： $p = 0。50$；右图： $p = 0。75$。

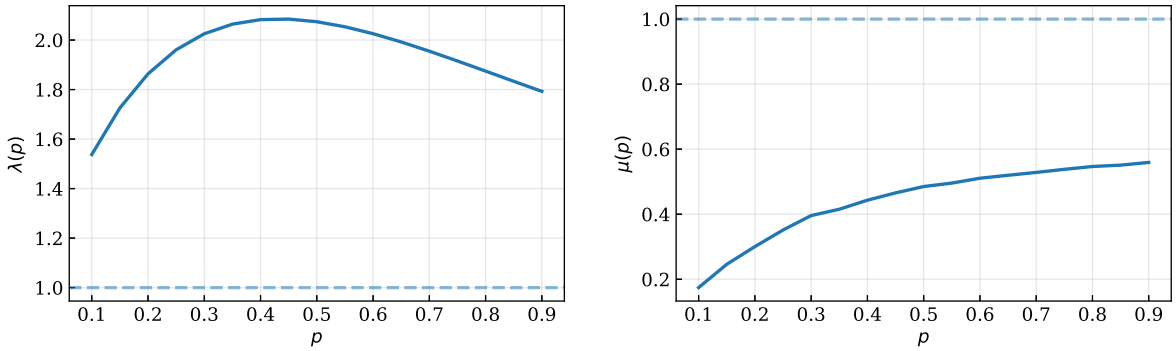


图4。左图： $\lambda(p)$作为 p的函数。右图： μ（p）作为p的函数。在所考虑的设置下， $n = 7$和 $M = 14$。右图中的估计基于长度为 $T = 4000$ 、包含 $R = 2000$ 次重复试验的运行结果。

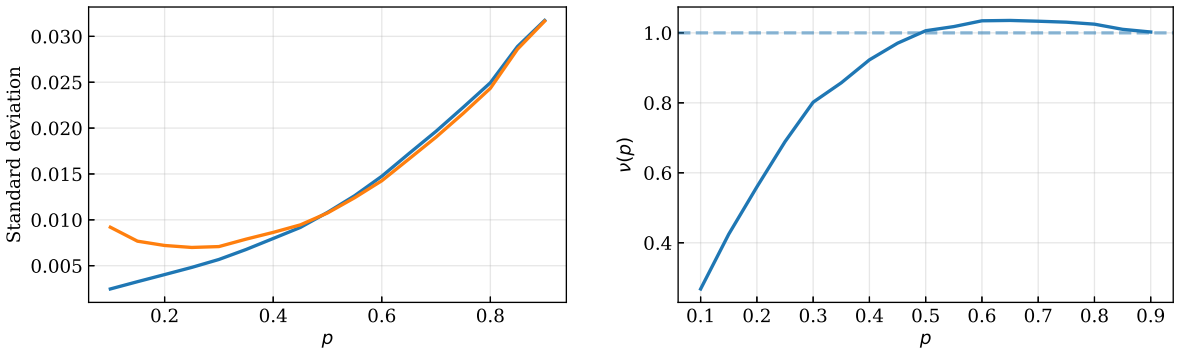


图5。左图：估计量 $\hat{p}_T$ 和 $\bar{p}_T$的标准差；橙色曲线对应$\sqrt{\hat{p}_T}$， 蓝色曲线对应 $\sqrt{\bar{p}_T}$。在所考虑的设置下， $n = 7$和 $M = 14$。右图： ν（p）作为 p的函数。估计基于长度为 $T = 4000$ 、包含 $R = 2000$ 次重复试验的运行结果。

和 M 同时增大时（例如 $n = 15$ 和 $M = 30$），这两种估计量的性能基本相当。

参考文献

[1] Y. A¨ıt-Sahalia、J. A. Cacho-Diaz 和 R. Laeven（2015）。使用互激跳跃过程对金融传染进行建模。《金融经济学杂志》，117，第585–606页。[2] S. Athreya、F. den Hollander 和 A. R¨ollin（2020）。群体遗传学中的图子赋值随机过程。《应用概率年刊》，31，第1724–1745页。[3] S. Baldassarri、P. Braunsteins、F. den Hollander 和 M. Mandjes（2024）。稠密动态随机图上的意见动力学。arXiv 预印本 arXiv:2410.14618。[4] S. Baldassarri、P. Braunsteins、F. den Hollander 和 M. Mandjes（2026）。稠密动态随机图上的感染模型。arXiv 预印本 arXiv:2602.14562。[5] F. Ball、T. Britton、K. Y. Leung 和 D. Sirl（2019）。一种带有预防性删边的随机 SIR 网络流行病模型。《数学生物学杂志》，78，第1875–1951页。[6] F. Ball 和 T. Britton（2022）。带有预防性重连的网络流行病。《随机结构与算法》，61，第250–297页。[7] R. Basu 和 A. Sly（2017）。稠密随机图上的演化投票者模型。《应用概率年刊》27，第1235–1288页。[8] P. Braunsteins、F. den Hollander 和 M. Mandjes（2023）。动态 Erd˝os–R´enyi 随机图的样本路径大偏差原理。《应用概率年刊》，33，第3278–3320页。[9] T. Britton（2020）。社交网络上的流行病模型——及其推断。《荷兰统计学》，74，第222–241页。[10] F. Bu、A. Aiello、J. Xu 和 A. Volfovsky（2022）。动态网络上部分观测流行病的基于似然的推断。《美国统计学会杂志》，117，第510–526页。[11] S. Cauchemez 和 N. Ferguson（2008）。根据时间序列数据估计连续时间流行病模型：在伦敦麻疹传播中的应用。《英国皇家学会界面杂志》，5，第885–897页。[12] S. Chatterjee 和 P. Diaconis（2013）。指数随机图模型的估计与理解。《统计年刊》，41，第2428–2461页。[13] S. Chatterjee 和 S. R. S. Varadhan（2011）。Erd˝os–R´enyi 随机图的大偏差原理。《欧洲组合学杂志》，32，第1000–1017页。[14] H. Crane（2016）。动态随机网络及其图极限。《应用概率年刊》，26，第691–721页。[15] D. Duffie 和 P. Glynn（2004）。对在随机时间间隔采样的连续时间马尔可夫过程进行估计。《计量经济学》，72，第1773–1808页。[16] R. Durrett、J. Gleeson、A. Lloyd、P. Mucha、F. Shi、D. Sivakoff、J. Socolar 和 C. Varghese（2012）。演化投票者模型中的图分裂。《美国国家科学院院刊》，109，第3682–3687页。[17] L. Erd˝os、A. Knowles、H.-T. Yau 和 J. Yin（2013）。Erd˝os–R´enyi 图的谱统计 I：局部半圆律。《概率年刊》，41，第2279–2375页。[18] P. Erd˝os 和 A. R´enyi（1960）。论随机图的演化。《匈牙利科学院数学研究所刊物》，5，第17–61页。[19] P. Guttorp（1991）。《分枝过程的统计推断》。Wiley，奇切斯特，英国。[20] M. Hansen 和 S. Pitts（2006）。从 M/G/1 工作负荷进行非参数推断。《伯努利》，12，第737–759页。[21] R. S. Hazra、N. Kriukov 和 M. Mandjes（2026）。动态 Erd˝os–R´enyi 随机图主特征值的函数中心极限定理。《应用概率年刊》，即将发表。arXiv 预印本 arXiv:2407.02686。[22] R. van der Hofstad（2016）。《随机图与复杂网络》，第1卷。剑桥大学出版社，剑桥，英国。[23] R. van der Hofstad（2023）。《随机图与复杂网络》，第2卷。剑桥大学出版社，剑桥，英国。[24] P. Holme 和 J. Saram¨aki（2012）。时序网络。《物理学报告》，519，第97–125页。[25] P. Krivitsky 和 M. Handcock（2014）。动态网络的可分模型。《英国皇家统计学会杂志B辑：统计方法学》，76，第29–46页。[26] R. Lockhart（1982）。Galton–Watson 过程中相合估计的不存在性。《应用概率杂志》，19，第842–846页。

[27] M. Mandjes 和 J. Wang（2026）。动态 Erd˝os–R´enyi 随机图中开启和关闭时间分布的估计。《应用概率进展》，即将发表。*arXiv* 预印本 *arXiv:2401.14531*。[28] S. Meyn 和 S. Tweedie（2012）。《马尔可夫链与随机稳定性》。 施普林格，纽约，美国。[29] L. Ravner、O. Boxma 和 M. Mandjes（2019）。通过对工作负载过程进行泊松抽样，估计 Lévy 驱动队列的输入。《伯努利》，**25**，第3734–3769页。