arXiv:2603.04675v1 [math.DG] 4 Mar 2026

纤维丛的椭圆属与 $SL(2,\ Z)$ 模形式

YONG WANG

Abstract. 借助族指标理论，我们将一些著名的 $SL(2,\ Z)$ 模形式推广到族情形，并得到了关于行列式线丛和指标丛结的一些新的反常抵消公式，以及关于 eta 不变量的若干结果。此外，对于高次数情形，我们给出了一些关于 residueChern 形式的反常抵消公式。

1. Introduction

在 [1], Alvarez-Gaum´e 和 Witten 发现了一个公式，揭示了 12 维光滑黎曼流形的 Hirzebruch L-形式与 A-形式的最高次分量之间优美的关系。这个公式被称为引力反常的“奇迹般抵消”公式。在 [16], Liu 通过研究特征形式的模不变性，建立了适用于 $(8k+4)$ 维黎曼流形的高维“奇迹般抵消”公式。这些公式可用于推导一些整除性结果。在 [11], Han、Liu 和 Zhang 证明，规范群 $E_8 \times E_8$ 的 Green-Schwarz 反常分解公式和规范群 E_8 的 Horava-Witten 反常分解公式，均可通过权为 14 的模形式推导得出。这回答了 J. H. Schwarz 提出的问题。他们还推广了这些分解公式，并在 12 维流形上得到了一个新的 Horava-Witten 型分解公式。在 [12], Han、Huang、Liu 和 Zhang 引入了一个定义在 $SL(2,\ \mathbf{Z})$ 上的权为 14 的模形式，以及一个定义在 $SL(2,\ \mathbf{Z})$ 上的权为 10 的模形式，并据此得到了 12 维流形上的一些有趣的反常抵消公式。在 [17], ，他们引入了一个适用于 $4k$ 维自旋流形的权为 $2k$ 的模形式。在 [6], Chen、Han 和 Zhang 定义了一个适用于 $4k$ 维 $spin^c$ 流形的权为 $2k$ 的积分模形式，以及一个适用于 $4k+2$ 维 $spin^c$ 流形的权为 $2k$ 的积分模形式。在 [21] 和 [22], ，我们通过研究上述 $SL(2,\ \mathbf{Z})$ 模形式，为自旋流形、自旋复流形和复流形得到了若干新的反常抵消公式。我们还得到了扭曲Dirac算子和自旋复Dirac算子的指标的一些整除性结果。

另一方面，反常衡量了行列式线丛的非平凡性

2010 Mathematics Subject Classification: 58C20；57R20；53C80。*Key words and phrases:*$SL(2,\ Z)$ 模形式；行列式线丛；指标丛；eta不变量；剩余陈形式；反常抵消公式。

狄拉克算子族的行列式线丛。微扰反常检测行列式线丛的实第一陈类，而整体反常则检测超出实信息的整数第一陈类。对于偶维闭流形上的狄拉克算子族，参数空间上的行列式线丛带有 Quillen 度量，以及与该度量相容的 Bismut-Freed 联络；该联络的曲率是 Atiyah-Singer 族指标定理中沿纤维积分的垂直切丛 $\hat{A}$-形式的二形式分量 [3, 4]。在 [18], 中，对于奇维流形上的狄拉克算子族，Lott 构造了一个带联络的阿贝尔丛胚，其曲率是 Atiyah-Singer 族指标定理的三形式分量。这个丛胚称为指标丛结，是行列式线丛的高阶类似物。在 [10], 中，Han 和 Liu 将模形式与特征形式结合起来，得到了行列式线丛的反常抵消公式，并推导出指标丛的反常抵消公式，还获得了关于 eta 不变量的一些结果。在[19], 中，Mickelsson 和 Paycha 为由超联络构造的 Chern-Weil 形式给出了局部表达式，这些超联络与 Paycha 和 Scott 先前研究的狄拉克算子族相关。他们将由超联络构造的偶数阶和奇数阶高阶 Chern-Weil 型形式解释为 Wodzicki留数。本文旨在将一些著名的 $SL(2,\ Z)$ 模形式推广到族情形，并为行列式线丛和指标丛结推导出一些新的反常抵消公式，以及如 [10] 中关于 eta 不变量的一些结果。此外，对于高次数情形，我们将给出一些留数陈形式的反常抵消公式。

本文结构简述如下：第2节中，我们将 [22] 中的结果推广到族情形，并得到行列式线丛和指标丛结的一些新的反常抵消公式，以及关于eta不变量的一些结果。第3节中，我们将 [21] 中的结果推广到族情形，定义族二变量椭圆亏格，并得到行列式线丛和指标丛结的一些公式，以及关于eta不变量的一些结果。第4节中，对于高次数情形，我们将通过Mickelsson和Paycha定理给出一些关于剩余陈形式的反常抵消公式。

2. Anomaly cancellation formulas and $SL(2, Z)$ modular forms for fibrebundles

设 M 为闭流形， $M \to B$ 为纤维丛，其纤维 Z 是闭自旋流形。设 TZ 为垂直丛，$\triangle(TZ)$ 为垂直旋量丛。令

$$\Theta_1(T_CZ) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(\widetilde{T_CZ}) \otimes \bigotimes_{m=1}^{\infty} \wedge_{q^m}(\widetilde{T_CZ}), \tag{2.1}$$

$$\Theta_2(T_CZ) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(\widetilde{T_CZ}) \otimes \bigotimes_{m=1}^{\infty} \wedge_{-q^{m-\frac{1}{2}}}(\widetilde{T_CZ}), \tag{2.2}$$

$$\Theta_3(T_CZ) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(\widetilde{T_CZ}) \otimes \bigotimes_{m=1}^{\infty} \wedge_{q^{m-\frac{1}{2}}}(\widetilde{T_CZ}). \tag{2.3}$$

设 $\dim TZ = 4k-2$ 且

$$Q(TZ,\tau) = [\widehat{A}(TZ)[\mathrm{ch}(\triangle(TZ)\otimes\Theta_1(T_CZ)) + 2^{2k-1}\Theta_2(T_CZ) + 2^{2k-1}\Theta_3(T_CZ)]^{(4k)}. \tag{2.4}$$

我们知道，[22] 中的系数 2^{2k-1} 与系数 2^{2k} 不同，因此我们的消去公式中的系数与 [22] 中的公式不同。我们首先回顾四个雅可比 theta 函数的定义如下（参见 [5]）：

$$\theta(v,\tau) = 2q^{\frac{1}{8}}\sin(\pi v)\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1-e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^j)(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^j)], \tag{2.5}$$

$$\theta_1(v,\tau) = 2q^{\frac{1}{8}}\cos(\pi v)\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1+e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^j)(1+e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^j)], \tag{2.6}$$

$$\theta_2(v,\tau) = \prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1-e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})], \tag{2.7}$$

$$\theta_3(v,\tau) = \prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1+e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})(1+e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})], \tag{2.8}$$

其中 $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ with $\tau \in \mathbf{H}$，即上半复平面。theta 函数在 S 和 T 的作用下满足以下变换律（参见 [5]）：

$$\theta(v,\tau+1) = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta(v,\tau),\ \theta(v,-\frac{1}{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta(\tau v,\tau); \tag{2.9}$$

$$\theta_1(v,\tau+1) = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta_1(v,\tau),\ \theta_1(v,-\frac{1}{\tau}) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_2(\tau v,\tau); \tag{2.10}$$

$$\theta_2(v,\tau+1) = \theta_3(v,\tau),\ \theta_2(v,-\frac{1}{\tau}) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_1(\tau v,\tau); \tag{2.11}$$

$$\theta_3(v,\tau+1) = \theta_2(v,\tau),\ \theta_3(v,-\frac{1}{\tau}) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_3(\tau v,\tau), \tag{2.12}$$

$$\theta'(v,\tau+1) = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta'(v,\tau),\ \theta'(0,-\frac{1}{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\tau\theta'(0,\tau). \tag{2.13}$$

定义 2.1. $SL(2,Z)$上的模形式是指在$\boldsymbol{H}$上的全纯函数 $f(\tau)$，满足

$$f(g\tau) := f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^l f(\tau),\ \forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,Z), \tag{2.14}$$

l 称为 f 的权。

定理 2.2. $Q(TZ,\tau)$是定义在 $SL_2(\mathbf{Z})$上的模形式，其权为 $2k$。

证明。 设 $\{\pm 2\pi\sqrt{-1}x_j\}$ $(1 \leq j \leq 2k-1)$ 是 $T_C Z$ 的形式陈根，则有

$$Q(TZ,\tau) = \prod_{j=1}^{2k-1}\left(\frac{2x_j\theta'(0,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}\left(\prod_{j=1}^{2k-1}\frac{\theta_1(x_j,\tau)}{\theta_1(0,\tau)} + \prod_{j=1}^{2k-1}\frac{\theta_2(x_j,\tau)}{\theta_2(0,\tau)} + \prod_{j=1}^{2k-1}\frac{\theta_3(x_j,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}\right)\right). \tag{2.15}$$

由 (2.9)-(2.13)，我们有 $Q(TZ,\tau+1) = Q(TZ,\tau)$ 以及 $Q(TZ,-\frac{1}{\tau}) = \tau^{2k}Q(TZ,\tau)$，因此 $Q(TZ,\tau)$ 是定义在 $SL_2(\mathbf{Z})$ 上的模形式，其权为 $2k$。 □

我们将 $Q(TZ,\tau)$ 展开如下:

$$\begin{aligned} Q(TZ,\tau) = &\left[\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ)) + 2^{2k}\widehat{A}(TZ)\right]^{(4k)} \\ &+ \left[2\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ))\mathrm{ch}(\widetilde{T_CZ}) + 2^{2k}\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CZ} + \wedge^2\widetilde{T_CZ})\right]^{(4k)} q \\ &+ \left[\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ))\mathrm{ch}(A_0) + 2^{2k}\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_1)\right]^{(4k)} q^2 + \cdots, \end{aligned} \tag{2.16}$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\widetilde{T_CZ} + \wedge^2\widetilde{T_CZ} + \widetilde{T_CZ}\otimes\widetilde{T_CZ} + S^2\widetilde{T_CZ}, \\ A_1 &= \wedge^4\widetilde{T_CZ} + \wedge^2\widetilde{T_CZ}\otimes\widetilde{T_CZ} + \widetilde{T_CZ}\otimes\widetilde{T_CZ} + S^2\widetilde{T_CZ} + \widetilde{T_CZ}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

设 $\mathcal{L}_{D^Z\otimes V} = \det(\mathrm{Ker}(D^Z\otimes V)_+)^*\otimes\det(\mathrm{Ker}(D^Z\otimes V)_-)$ 为族算子 $D^Z\otimes V$在 Z 上的行列式线丛（相关定义见 [3],[4]）。该行列式线丛带有 Quillen 度量 $g^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes V}}$ 以及与 $g^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes V}}$ 相容的 Bismut-Freed 联络$\nabla^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes V}}$，其曲率 $R^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes V}}$ 等于在 Atiyah-Singer 族指标定理 [3, 4]中将 $\widehat{A}(TZ,\nabla^{TZ})\mathrm{ch}(V,\nabla^V)$ 沿纤维积分所得的二形式分量。 $\sqrt{-1}/(2\pi)$ $R^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes V}}$ 是局部反常的一个代表。

定理 2.3. （Bismut 和 Freed [4]）

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes V}} = 2\pi\sqrt{-1}\left\{\int_Z \widehat{A}(TZ,\nabla^Z)\mathrm{ch}(V,\nabla^V)\right\}^{(2)}. \tag{2.18}$$

Bismut-Freed 定理对于 spinc 情形是正确的。

定理 2.4。 当 维数$TZ = 6$ 时，我们有

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}}} + 8\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes(\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ})}} = 120(\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}} + 16\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}}), \tag{2.19}$$

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)\otimes A_0}+16\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes A_1}=2160(\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)}+16\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}}). \tag{2.20}$$

定理 2.4 的证明： 众所周知， SL_2**(Z)** 上的模形式可以表示为 Einsentein 级数 $E_4(\tau)$ 和 $E_6(\tau)$ 的多项式，其中

$$E_4(\tau)=1+240q+2160q^2+6720q^3+\cdots, \tag{2.21}$$

$$E_6(\tau)=1-504q-16632q^2-122976q^3+\cdots. \tag{2.22}$$

它们的权分别为 4 和 6。当 $k=2$ 时， $Q(TZ,\tau)$ 是定义在 SL_2**(Z)** 上的权为 4 的模形式。 $Q(TZ,\tau)$ 必须是

$$Q(TZ,\tau)=\lambda E_4(\tau). \tag{2.23}$$

由定理 2.2、2.3 以及（2.16-2.17），我们得到定理 2.4。类似于定理 2.4，利用 [22], 中的方法，我们有

定理 2.5。当 维数$TZ=10$ 时，我们有

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}}+32\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes(\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ})}=-252(\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)}+64\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}}), \tag{2.24}$$

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)\otimes A_0}+64\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes A_1}=-16632(\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)}+64\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}}). \tag{2.25}$$

定理 2.6。当 维数$TZ=14$ 时，我们有

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}}+128\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes(\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ})}=240(\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)}+256\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}}), \tag{2.26}$$

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)\otimes A_0}+256\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes A_1}=61920(\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)}+256\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}}). \tag{2.27}$$

定理 2.7。当 维数$TZ=18$ 时，我们有

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}}+512\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes(\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ})}=-132(\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)}+1024\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}}), \tag{2.28}$$

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)\otimes A_0}+1024\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes A_1}=-117288(\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\triangle(TZ)}+1024\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}}). \tag{2.29}$$

设 $\dim TZ=4k-3$ 与

$$\widetilde{Q}(TZ,\tau)=[\widehat{A}(TZ)[\mathrm{ch}(\triangle(TZ)\otimes\Theta_1(T_CZ))+2^{2k-2}\Theta_2(T_CZ)+2^{2k-2}\Theta_3(T_CZ)]^{(4k)}. \tag{2.30}$$

定理 2.8. $Q(TZ,\tau)$ 是 $SL_2(\mathbf{Z})$ 上权为 $2k$ 的模形式。

我们将 $Q(TZ,\tau)$ 展开如下:

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}(TZ,\tau)=&\left[\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ))+2^{2k-1}\widehat{A}(TZ)\right]^{(4k)}\\&+\left[2\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ))\mathrm{ch}(\widetilde{T_CZ})+2^{2k-1}\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ})\right]^{(4k)}q\\&+\left[\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ))\mathrm{ch}(A_0)+2^{2k-1}\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_1)\right]^{(4k)}q^2+\cdots.\end{aligned} \tag{2.31}$$

下面我们考虑指标丛的反常抵消公式。

现在我们仍假设 TZ是定向的，但纤维维数为 $4k-3$，即我们考虑奇维纤维。设 TZ 是自旋的。人们仍可定义Dirac算子族 $D^Z\otimes V$，类似于偶维纤维的情形。唯一的区别是，现在与 TZ相伴的旋量丛 $\triangle(TZ)$不是 $\mathbb{Z}_2$分次的。设 H^∞为 $\triangle(TZ)\otimes V$在 M上的C^∞截面的集合。 H^∞被视为无穷维丛（仍记为 H^∞）在 B上的 C^∞截面的集合。对 $b\in B$， H_b^∞是 $\triangle(TZ)\otimes V$在 Z_b上的C^∞截面的集合。对每个 $b\in B$,

$$(D^Z\otimes V)_b\in \mathrm{End}(H_b^\infty)$$

是纤维 Z_b上的扭曲Dirac算子。

作为行列式线丛的高阶类似，Lott [18]为族扭曲奇Dirac算子 $D^Z\otimes V$在 B上构造了带联络的指标丛结 $\mathcal{G}_{D^Z\otimes V}$，其曲率 $R^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes V}}$（ B上的闭三形式）等于Atiyah-Singer族指标定理中沿纤维对 $\widehat{A}(TZ,\nabla^Z)\mathrm{ch}(V,\nabla^V)$积分所得的三形式分量。

定理 2.9. （Lott [18]）

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes V}}=\left\{\int_Z\widehat{A}(TZ,\nabla^Z)\mathrm{ch}(V,\nabla^V)\right\}^{(3)}. \tag{2.32}$$

与定理 2.4-2.7类似，我们有如下关于指标丛的反常抵消公式。

定理 2.10. 当$\dim TZ=5$时，我们有

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_C^*Z}}}+4\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes(\widetilde{T_C^*Z}+\wedge^2\widetilde{T_C^*Z})}}=120(\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}}+8\mathbf{G}^{\mathcal{L}_{D^Z}}), \tag{2.33}$$

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes A_0}}+8\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes A_1}}=2160(\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}}+8\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}}). \tag{2.34}$$

定理 2.11。当 维数$TZ=9$时，我们有

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_C^*Z}}}+16\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes(\widetilde{T_C^*Z}+\wedge^2\widetilde{T_C^*Z})}}=-252(\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}}+32\mathbf{G}^{\mathcal{L}_{D^Z}}), \tag{2.35}$$

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes A_0}}+32\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes A_1}}=-16632(\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}}+32\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}}). \tag{2.36}$$

定理 2.12。当 维数$TZ=13$时，我们有

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_C^*Z}}}+64\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes(\widetilde{T_C^*Z}+\wedge^2\widetilde{T_C^*Z})}}=240(\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}}+128\mathbf{G}^{\mathcal{L}_{D^Z}}), \tag{2.37}$$

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes A_0}}+128\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes A_1}}=61920(\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}}+128\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}}). \tag{2.38}$$

定理 2.13. 当 $\dim TZ=17$时，我们有

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_C^*Z}}}+256\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes(\widetilde{T_C^*Z}+\wedge^2\widetilde{T_C^*Z})}}=-132(\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}}+512\mathbf{G}^{\mathcal{L}_{D^Z}}), \tag{2.39}$$

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)\otimes A_0}}+512\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z\otimes A_1}}=-117288(\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z\otimes\triangle(TZ)}}+512\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}}). \tag{2.40}$$

设 $\dim TZ = 4k-1$ 并定义 $Q(TZ,\ \tau)$，其表达式和展开与 $Q(TZ,\ \tau)$ 相同。$Q(TZ,\ \tau)$ 是 $SL_2(\mathbf{Z})$ 上权为 $2k$ 的模形式。下面我们考虑 η-不变量。

对于 $b \in B$，令 $\eta_b(D^Z \otimes V)(s)$ 为与 $(D^Z \otimes V)_b$ 相关联的 η 函数。按照 Atiyah、Patodi 和 Singer 在 [2]中的定义

$$\bar{\eta}_b(D^Z \otimes V)(s) = \frac{\eta_b(D^Z \otimes V)(s) + \ker(D^Z \otimes V)_b}{2}.$$

将 $\bar{\eta}_b(D^Z \otimes V)(0)$（ B 上的一个函数）记为 $\bar{\eta}(D^Z \otimes V)$。

我们仍采用指标丛结中奇维流形族上的族扭曲狄拉克算子的设定。对于奇维纤维，约化 η 不变量满足以下 Bismut-Freed 定理。

定理 2.14。 (Bismut 和 Freed [4])

$$d\{\bar{\eta}(D^Z \otimes V)\} = \left\{\int_Z \widehat{A}(TZ, \nabla^Z)\mathrm{ch}(V, \nabla^V)\right\}^{(1)}. \tag{2.41}$$

约化 η 不变量满足以下定理。

定理 2.15。当 维数$TZ = 7$时，我们有

$$\begin{aligned}&\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ) \otimes \widetilde{T_C Z}) + 8\bar{\eta}(D^Z \otimes (\widetilde{T_C Z} + \wedge^2 \widetilde{T_C Z}))\\ &= 120(\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ)) + 16\bar{\eta}(D^Z)) + c_1,\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ) \otimes A_0) + 16\bar{\eta}(D^Z \otimes A_1) = 2160(\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ)) + 16\bar{\eta}(D^Z)) + c_2. \tag{2.43}$$

定理 2.16。当 维数$TZ = 11$时，我们有

$$\begin{aligned}&\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ) \otimes \widetilde{T_C Z}) + 32\bar{\eta}(D^Z \otimes (\widetilde{T_C Z} + \wedge^2 \widetilde{T_C Z}))\\ &= -252(\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ)) + 64\bar{\eta}(D^Z)) + c_3,\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ) \otimes A_0) + 64\bar{\eta}(D^Z \otimes A_1) = -16632(\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ)) + 64\bar{\eta}(D^Z)) + c_4. \tag{2.45}$$

定理 2.17。当维数$TZ = 15$时，我们有

$$\begin{aligned}&\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ) \otimes \widetilde{T_C Z}) + 128\bar{\eta}(D^Z \otimes (\widetilde{T_C Z} + \wedge^2 \widetilde{T_C Z}))\\ &= 240(\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ)) + 256\bar{\eta}(D^Z)) + c_5,\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ) \otimes A_0) + 256\bar{\eta}(D^Z \otimes A_1) = 61920(\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ)) + 256\bar{\eta}(D^Z)) + c_6. \tag{2.47}$$

定理 2.18。当维数$TZ = 19$时，我们有

$$\begin{aligned}(2.48)\qquad &\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ) \otimes \widetilde{T_C Z}) + 512\bar{\eta}(D^Z \otimes (\widetilde{T_C Z} + \wedge^2 \widetilde{T_C Z})) \\ &= -132(\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ)) + 1024\bar{\eta}(D^Z)) + c_7,\end{aligned}$$

$$(2.49)\quad \bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ) \otimes A_0) + 1024\bar{\eta}(D^Z \otimes A_1) = -117288(\bar{\eta}(D^Z \otimes \triangle(TZ)) + 1024\bar{\eta}(D^Z)) + c_8,$$ 其中 c_j、 $1 \leq j \leq 8$ 是常数。

设 TZ 为自旋^c， L 为给定的自旋^c 结构在 TZ上关联的复直线丛。记 $c = c_1(L)$ 为 $L.$ 的第一陈类。另当 $L,$ 被视为定向实平面丛时，我们用 $L_{\mathbf{R}}$ 表示它。令 $\Theta(T_{\mathbf{C}}Z,$ $L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C})$ 为定义在 M 上的虚复向量丛，其定义如下

$$\begin{aligned}\Theta(T_{\mathbf{C}}M, L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}) =& \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(\widetilde{T_{\mathbf{C}}M}) \otimes \bigotimes_{m=1}^{\infty} \wedge_{q^m}(\widetilde{L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}}) \\ & \otimes \bigotimes_{r=1}^{\infty} \wedge_{-q^{r-\frac{1}{2}}}(\widetilde{L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}}) \otimes \bigotimes_{s=1}^{\infty} \wedge_{q^{s-\frac{1}{2}}}(\widetilde{L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}}),\end{aligned}$$

$$\Theta^*(T_{\mathbf{C}}M, L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(\widetilde{T_{\mathbf{C}}M}) \otimes \bigotimes_{m=1}^{\infty} \wedge_{-q^m}(\widetilde{L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}}).$$

对于 $\dim TZ = 4k-3,\ 4k-2,\ 4k-1$ 这三种情形，我们总是令

$$(2.50)\qquad Q(TZ, L, \tau) = \{\widehat{A}(TZ, \nabla^{TZ})\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\Theta(T_{\mathbf{C}}Z, L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}))\}^{(4k)},$$

$$(2.51)\qquad Q^*(TZ, L, \tau) = \{\widehat{A}(TZ, \nabla^{TZ})\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\Theta^*(T_{\mathbf{C}}Z, L_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}))\}^{(4k+2)}.$$

命题 2.19. 当 $p_1(TZ) = 3p_1(L_R)$ 时， $Q(TZ, L, \tau)$ 是关于 $SL_2(\mathbf{Z})$ 的模形式，权为 $2k$。当 $p_1(TZ) = p_1(L_R)$ 时， $Q^*(TZ, L, \tau)$ 是关于 $SL_2(\mathbf{Z})$的模形式，权为 $2k$。

我们有

$$\begin{aligned}(2.52)\qquad Q(TZ, L, \tau) =& \left\{\widehat{A}(TZ)\exp(\frac{c}{2}))\right\}^{(4k)} + q\left\{\widehat{A}(TZ)\exp(\frac{c}{2}))\mathrm{ch}(B_1)\right\}^{(4k)} \\ &+ q^2\left\{\widehat{A}(TZ)\exp(\frac{c}{2}))\mathrm{ch}(B_2)\right\}^{(4k)} + O(q^3),\end{aligned}$$

其中

(2.53)

$$B_1 = \widetilde{T_C Z} + 2\wedge^2 \widetilde{L_{R,C}} - \widetilde{L_{R,C}} \otimes \widetilde{L_{R,C}} + \widetilde{L_{R,C}},$$

$$\begin{aligned}B_2 =& S^2\widetilde{T_C Z} + \widetilde{T_C Z} + (2\wedge^2 \widetilde{L_{R,C}} - \widetilde{L_{R,C}} \otimes \widetilde{L_{R,C}} + \widetilde{L_{R,C}}) \otimes \widetilde{T_C Z} + \wedge^2\widetilde{L_{R,C}} \otimes \wedge^2\widetilde{L_{R,C}} \\ &+ 2\wedge^4 \widetilde{L_{R,C}} - 2\widetilde{L_{R,C}} \otimes \wedge^3\widetilde{L_{R,C}} + 2\widetilde{L_{R,C}} \otimes \wedge^2\widetilde{L_{R,C}} - \widetilde{L_{R,C}} \otimes \widetilde{L_{R,C}} \otimes \widetilde{L_{R,C}} + \widetilde{L_{R,C}} + \wedge^2\widetilde{L_{R,C}}.\end{aligned}$$

$$Q^*(TZ,L,\tau)=\left\{\widehat{A}(TZ)\exp(\frac{c}{2}))\right\}^{(4k+2)}+q\left\{\widehat{A}(TZ)\exp(\frac{c}{2}))\mathrm{ch}(B_3)\right\}^{(4k+2)}+q^2\left\{\widehat{A}(TZ)\exp(\frac{c}{2}))\mathrm{ch}(B_4)\right\}^{(4k+2)}+O(q^3), \tag{2.54}$$

其中

$$\begin{aligned}B_3&=\widetilde{T_CZ}-\widetilde{L_{R,C}},\\ B_4&=\wedge^2\widetilde{L_{R,C}}-\widetilde{L_{R,C}}-\widetilde{L_{R,C}}\otimes\widetilde{T_CZ}+S^2\widetilde{T_CZ}+\widetilde{T_CZ}.\end{aligned} \tag{2.55}$$

将自旋复狄拉克算子记为 D_c。与前面的定理类似，我们有

定理 2.20。 当 维数$TZ=6$且 $p_1（TZ）=3p_1（L_R）$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_1}}&=240\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_2}}&=2160\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

当 维数$TZ=6$且 $p_1（TZ）=p_1（L_R）$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_3}}&=240\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_4}}&=2160\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}.\end{aligned} \tag{2.57}$$

定理 2.21。 当 维数$TZ=5$且 $p_1（TZ）=3p_1（L_R）$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_1}}&=240\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_2}}&=2160\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}.\end{aligned} \tag{2.58}$$

当 维数$TZ=5$且 $p_1（TZ）=p_1（L_R）$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_3}}&=240\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_4}}&=2160\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}.\end{aligned} \tag{2.59}$$

定理 2.22。 当 维数$TZ=7$且 $p_1(TZ)=3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\eta}(D_c^Z\otimes B_1)&=240\overline{\eta}(D_c^Z)+c_1,\\ \overline{\eta}(D_c^Z\otimes B_2)&=2160\overline{\eta}(D_c^Z)+c_2.\end{aligned} \tag{2.60}$$

当 维数$TZ=7$且 $p_1(TZ)=p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\eta}(D_c^Z\otimes B_3)&=240\overline{\eta}(D_c^Z)+c_3,\\ \overline{\eta}(D_c^Z\otimes B_4)&=2160\overline{\eta}(D_c^Z)+c_4.\end{aligned} \tag{2.61}$$

定理 2.23. 当 $\dim TZ=10$ 且 $p_1(TZ)=3p_1(L_R)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_1}}&=-504\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_2}}&=-16632\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}.\end{aligned} \tag{2.62}$$

当 $\dim TZ=10$ 且 $p_1(TZ)=p_1(L_R)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_3}}&=-504\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_4}}&=-16632\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}.\end{aligned}\tag{2.63}$$

定理 2.24. 当 维数$TZ=9$且 $p_1(TZ)=3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_1}}&=-504\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_2}}&=-16632\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}.\end{aligned}\tag{2.64}$$

当 维数$TZ=9$ 且 $p_1(TZ)=p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_3}}&=-504\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_4}}&=-16632\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}.\end{aligned}\tag{2.65}$$

定理 2.25. 当 维数$TZ=11$且 $p_1(TZ)=3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\eta}(D_c^Z\otimes B_1)&=-504\overline{\eta}(D_c^Z)+c_5,\\ \overline{\eta}(D_c^Z\otimes B_2)&=-16632\overline{\eta}(D_c^Z)+c_6.\end{aligned}\tag{2.66}$$

当 维数$TZ=11$ 且 $p_1(TZ)=p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\eta}(D_c^Z\otimes B_3)&=-504\overline{\eta}(D_c^Z)+c_7,\\ \overline{\eta}(D_c^Z\otimes B_4)&=-16632\overline{\eta}(D_c^Z)+c_8.\end{aligned}\tag{2.67}$$

定理 2.26. 当 维数$TZ=14$且 $p_1(TZ)=3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_1}}&=480\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_2}}&=61920\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}.\end{aligned}\tag{2.68}$$

当维数$TZ=14$ 且 $p_1(TZ)=p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_3}}&=480\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z\otimes B_4}}&=61920\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}.\end{aligned}\tag{2.69}$$

定理 2.27。 当维数$TZ=13$且 $p_1(TZ)=3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_1}}&=480\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_2}}&=61920\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}.\end{aligned}\tag{2.70}$$

当维数$TZ=13$ 且 $p_1\left(TZ\right)=p_1\left(L_R\right)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_3}}&=480\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z\otimes B_4}}&=61920\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}.\end{aligned}\tag{2.71}$$

定理 2.28。 当维数$TZ = 15$且 $p_1(TZ) = 3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned} \overline{\eta}(D_c^Z \otimes B_1) &= 480\overline{\eta}(D_c^Z) + c_9, \\ \overline{\eta}(D_c^Z \otimes B_2) &= 61920\overline{\eta}(D_c^Z) + c_{10}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

当维数$TZ = 15$ 且 $p_1(TZ) = p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned} \overline{\eta}(D_c^Z \otimes B_3) &= 480\overline{\eta}(D_c^Z) + c_{11}, \\ \overline{\eta}(D_c^Z \otimes B_4) &= 61920\overline{\eta}(D_c^Z) + c_{12}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

定理 2.29. 当维数$TZ = 18$且 $p_1(TZ) = 3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z \otimes B_1}} &= -264\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}, \\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z \otimes B_2}} &= -117288\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

当维数$TZ = 18$ 且 $p_1(TZ) = p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z \otimes B_3}} &= -264\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}, \\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z \otimes B_4}} &= -117288\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D_c^Z}}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

定理 2.30. 当维数$TZ = 17$且 $p_1(TZ) = 3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z \otimes B_1}} &= -264\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}, \\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z \otimes B_2}} &= -117288\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

当维数$TZ = 17$ 且 $p_1(TZ) = p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z \otimes B_3}} &= -264\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}, \\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z \otimes B_4}} &= -117288\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D_c^Z}}. \end{aligned} \tag{2.77}$$

定理 2.31。 当 维数$TZ = 19$且 $p_1(TZ) = 3p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned} \overline{\eta}(D_c^Z \otimes B_1) &= -264\overline{\eta}(D_c^Z) + c_{13}, \\ \overline{\eta}(D_c^Z \otimes B_2) &= -117288\overline{\eta}(D_c^Z) + c_{14}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

当 维数$TZ = 19$ 且 $p_1(TZ) = p_1(L_R)$时，我们有

$$\begin{aligned} \overline{\eta}(D_c^Z \otimes B_3) &= -264\overline{\eta}(D_c^Z) + c_{15}, \\ \overline{\eta}(D_c^Z \otimes B_4) &= -117288\overline{\eta}(D_c^Z) + c_{16}, \end{aligned} \tag{2.79}$$

其中 c_j, $1 \leq j \leq 16$ 是一个常数。

3. The two-variable elliptic genus for fibre bundles

设 $(TZ,\ J)$ 是一个具有近复结构 J 的 $2d-2$ 维向量丛，$T^{1,\ 0}Z$ 是按 J 和 $T^{1,\ 0*}Z$ 的意义定义的全纯切丛，而 ${}^0Z$ 是 $T^{1,\ 0}Z$ 的对偶丛。令 W 表示 M 上的一个复 l 维向量丛。将 $T^{1,\ 0}Z$ 和 W 的第一陈类分别记为 $c_1(TZ)$ 和 $c_1(W)$。我们分别用 $2\pi\sqrt{-1}x_i(1\leq i\leq d-1)$ 和 $2\pi\sqrt{-1}w_j(1\leq j\leq l)$ 表示 $T^{1,\ 0}Z$ 和 W 的形式陈根。那么，TZ 的 Todd形式定义为

$$\mathrm{Td}(TZ):=\prod_{i=1}^{d-1}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{1-e^{-2\pi\sqrt{-1}x_i}}. \tag{3.1}$$

设 $(\tau,z)\in\mathcal{H}\times\mathcal{C}$ 其中 $\mathcal{H}$ 是上半平面，$\mathcal{C}$ 是复平面。设$y=e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ 与 $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ 以及 $c:=\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)$。

Let

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(TZ,W,\tau,z):=&c^{2(d-1-l)}y^{-\frac{l}{2}}\bigotimes_{n=1}^{\infty}(\wedge_{-yq^{n-1}}(W^*)\otimes\wedge_{-y^{-1}q^n}(W))\\&\bigotimes\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^{1,0*}Z)\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^{1,0}Z)\right),\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中系数 $c^{2(d-1-l)}$ 不同于 [15中的系数 $c^{2(d-l)}$]

定义3.1. $M\to B$ 关于 W的双变量椭圆亏格，记为$\mathrm{Ell}(TZ,W,\tau,z)$，定义为

$$\mathrm{Ell}(TZ,W,\tau,z):=\left\{exp(\frac{c_1(W)-c_1(T^{1,0}Z)}{2})Td(TZ)\mathrm{ch}(E(TM,W,\tau,z))\right\}^{(2d)}, \tag{3.3}$$

采用与 [15]中引理 3.4相同的计算，我们有

引理3.2。

$$\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z)=\left(\eta(\tau)^{3(d-1-l)}\prod_{i=1}^{d-1}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau,x_i)}\prod_{j=1}^{l}\theta(\tau,w_j-z)\right)^{(2d)}, \tag{3.4}$$

其中

$$\eta(\tau):=q^{\frac{1}{24}}\cdot c=q^{\frac{1}{24}}\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j). \tag{3.5}$$

与 [15], 中的定理 3.2 类似，我们有

定理3.3. 若 $c_1(W)=c_1(T^{1,0}Z)=0$ 且第一庞特里亚金类 $p_1(TZ)=p_1(W)$，则椭圆属 $\mathrm{Ell}(TZ,W,\tau,z)$ 是权为 $d-l$、指标为$\frac{l}{2}$ 的弱雅可比形式。

类似于 [15] 中的命题 3.6（我们对 a_n 的系数不同于 [15]中的系数），我们有

命题 3.4. 令 $c_1(W) = c_1(T^{1,\ 0}Z) = 0$ 及第一庞特里亚金类 $p_1(M) = p_1(W)$，则由下式确定的级数 $a_n(TZ, W, \tau)$

$$\exp(-4\pi^2 l E_2(\tau) z^2)\mathrm{Ell}(TZ, W, \tau, z) = \sum_{n\geq 0} a_n(TZ, W, \tau)\cdot z^n, \tag{3.6}$$

是权为 $d-l+n$、定义在 $SL(2, Z)$ 上的模形式。此外，$a_n(TZ, W, \tau)$ 的前五个级数具有以下形式:

$$\begin{aligned} a_0(TZ, W, \tau) &= \{Td(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\}^{(2d)} + q\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\mathrm{ch}(A_2)\}^{(2d)} \\ &+ q^2\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\mathrm{ch}(A_3)\}^{(2d)} + O(q^3), \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中

$$A_2 = T^{1,0} + T^{1,0*} - 2(d-1-l) - W - W^*, \tag{3.8}$$

and

$$\begin{aligned} A_3 &= S^2T^{1,0} + T^{1,0*}\otimes T^{1,0} + S^2T^{1,0*} + \wedge^2 W^* + \wedge^2 W + W^*\otimes W_0 \\ &+ [2(d-1-l)-1](W + W^* - T^{1,0} - T^{1,0*}) - (W+W^*)\otimes(T^{1,0}+T^{1,0*}) \\ &+ (d-1-l)(2d-2l-5), \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} a_1(TZ, W, \tau) &= \left\{2\pi\sqrt{-1}Td(TZ)\mathrm{ch}(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^p W^*)\right\}^{(2d)} \\ &+ q\{Td(M)\mathrm{ch}(A_4)\}^{(2d)} + O(q^2), \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中

$$\begin{aligned} A_4 &= -2\pi\sqrt{-1}\wedge_{-1} W^*\otimes(W+W^*) \\ &+ \pi\sqrt{-1}[2\sum_{j=1}^{l}(-1)^j\wedge^j W^* - l\wedge_{-1} W^*]\otimes[-2(d-1-l) - (W+W^*) + T^{1,0}Z + T^{1,0*}Z], \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$a_2(TZ, W, \tau) = \{Td(TZ)\mathrm{ch}(A_5)\}^{(2d)} + O(q), \tag{3.12}$$

其中 $A_5 = -2\pi^2\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})^2\wedge^p W^* + \frac{l}{6}\pi^2(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\wedge^p W^*)$。

$$a_3(TZ, W, \tau) = \{Td(TZ)\mathrm{ch}(A_6)\}^{(2d)} + O(q), \tag{3.13}$$

where $A_6 = \frac{4}{3}\pi^3(\sqrt{-1})^3\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})^3\wedge^p W^* + \frac{\sqrt{-1}l}{3}\pi^3\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^p W^*$.

$$a_4(M, W, \tau) = \{Td(TZ)\mathrm{ch}(A_7)\}^{(2d)} + O(q), \tag{3.14}$$

其中

$$A_7 = \frac{2}{3}\pi^4 \sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})^4 \wedge^p W^* - \frac{l^2}{3}\pi^4(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})^2 \wedge^p W^*) + \frac{l^2}{72}\pi^4(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \wedge^p W^*). \tag{3.15}$$

由于不存在奇权或非零权的 $SL(2,Z)$ 模形式，我们有

命题 3.5。 设维数$TZ = 2d-2$, $c_1(W) = c_1(T^{1,0}Z) = 0$，且第一庞特里亚金类为 $p_1(TZ) = p_1(W)$，则

*1)*若 $d-l$ 为奇数或 $d-l \leq 2$ 但 $d-l \neq 0$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*} = \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_2} = 0, \quad \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_3} = 0, \tag{3.16}$$

*2)*若 $d-l$ 为偶数或 $d-l \leq 1$ 但 $d-l \neq -1$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^p W^*)} = 0, \quad \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes A_4} = 0, \tag{3.17}$$

*3)*若 $d-l$ 为奇数或 $d-l \leq 0$ 但 $d-l \neq -2$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes A_5} = 0, \tag{3.18}$$

4）如果 $d-l$ 是偶数，或者 $d-l \leq -1$，但 $d-l \neq -3$，那么

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes A_6} = 0, \tag{3.19}$$

5）如果 $d-l$ 是奇数，或者 $d-l \leq -2$，但 $d-l \neq -4$，那么

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes A_7} = 0, \tag{3.20}$$

定理 3.6。 设 维数$TZ = 2d-2$, $c_1(W) = c_1(T^{1,0}Z) = 0$，且第一庞特里亚金类为 $p_1(TZ) = p_1(W)$，那么

1）如果 $d-l = 4$，那么

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_2} = 240\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}, \quad \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_3} = 2160\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}. \tag{3.21}$$

*2)*如果 $d-l = 6$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_2} = -504\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}, \quad \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_3} = -16632\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}. \tag{3.22}$$

*3)*如果 $d-l=8$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_2}&=480\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_3}&=61920\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

*4)*若 $d-l=10$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_2}&=-264\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_3}&=-135432\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

类似地，由 $a_1(TZ,\ W,\ \tau)$，可得

定理 3.7。设维数$TZ=2d-2$, $c_1(W)=c_1(T^{1,\ 0}Z)=0$，且第一庞特里亚金类为 $p_1(TZ)=p_1(W)$，则

*1)*若 $d-l=3$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_4}=240\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)},\tag{3.25}$$

*2)*若 $d-l=5$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_4}=-504\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)},\tag{3.26}$$

*3)*若 $d-l=7$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_4}=480\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)},\tag{3.27}$$

*4)*若 $d-l=9$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_4}=-264\mathbf{R}^{\mathcal{L}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)},\tag{3.28}$$

设 TZ 是一个 $2d-3$ 维自旋向量丛。设 $\pm2\pi\sqrt{-1}x_i(1\leq i\leq\overline{d-2})$，0，且 $2\pi\sqrt{-1}w_j(1\leq j\leq\overline{l})$分别是 T_CZ 和 W 的形式陈根。则设

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{E}}(TZ,W,\tau,z):=&c^{2(d-l)-3}y^{-\frac{l}{2}}\bigotimes_{n=1}^{\infty}(\wedge_{-yq^{n-1}}(W^*)\otimes\wedge_{-y^{-1}q^n}(W))\\ &\bigotimes\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T_CZ)\right),\end{aligned}\tag{3.29}$$

其中系数 $c^{2(d-1)-3}$与 $\dim TZ=2d-2$.中的系数 $c^{2(d-l)-2}$不同

定义 3.8. $M \to B$ 关于 W的双变量椭圆亏格，我们$\widetilde{\ }$将其记为$\mathrm{Ell}(TZ, W, \tau, z)$，定义为

$$\widetilde{\mathrm{Ell}}(TZ, W, \tau, z) := \left\{ exp(\frac{c_1(W)}{2})\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\widetilde{E}(TZ, W, \tau, z)) \right\}^{(2d)}, \tag{3.30}$$

采用与 [15] 中引理 3.4 相同的计算，我们得到

引理 3.9。

$$\widetilde{\mathrm{Ell}}(TZ, W, \tau, z) = \left(\eta(\tau)^{3(d-l-2)} \prod_{i=1}^{d-2} \frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau, x_i)} \prod_{j=1}^{l} \theta(\tau, w_j - z) \right)^{(2d)}, \tag{3.31}$$

类似于 [15], 中的定理 3.2，我们得到

引理 3.10。若 $c_1(W) = 0$ 且第一庞特里亚金类为 $p_1(TZ) = p_1(W)$，则$\widetilde{\ }$椭圆属 $\mathrm{Ell}(TZ, W, \tau, z)$ 是权为 $d - l$、指标为 $\frac{l}{2}$ 的弱雅可比形式。

类似于 [15] 中的命题 3.6（我们的 $\widetilde{a_n}$ 系数与 a_n中的系数不同），我们得到

命题 3.11. 若 $c_1(W) = 0$ 且第一庞特里亚金类 $p_1(TZ) = p_1(W)$，则由下式确定的级数 $\widetilde{a_n}(TZ, W, \tau)$

$$\exp(-4\pi^2 l E_2(\tau) z^2)\widetilde{\mathrm{Ell}}(TZ, W, \tau, z) = \sum_{n \geq 0} \widetilde{a_n}(TZ, W, \tau) \cdot z^n, \tag{3.32}$$

是权为 $d - l + n$、定义在 $SL(2, Z)$ 上的模形式。此外，$\widetilde{a_n}(M, W, g, \tau)$ 的前五个级数具有如下形式:

$$\begin{aligned} \widetilde{a_0}(TZ, W, \tau) &= \left\{ \widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)) \right\}^{(2d)} + q \left\{ \widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\mathrm{ch}(A_8) \right\}^{(2d)} \\ &+ q^2 \left\{ \widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\mathrm{ch}(A_9) \right\}^{(2d)} + O(q^3), \end{aligned} \tag{3.33}$$

其中

$$A_8 = T_C Z - 2(d-1) + 3 - W - W^*, \tag{3.34}$$

and

$$\begin{aligned} A_9 &= S^2 T_C Z + \wedge^2 W^* + \wedge^2 W + W^* \otimes W \\ &+ [2(d-1) - 4](W + W^* - T_C Z) - (W + W^*) \otimes T_C Z \\ &+ (d - l - 3)(2d - 2l - 3), \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{a_1}(TZ, W, \tau) &= \left\{ 2\pi\sqrt{-1}\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p - \frac{l}{2}) \wedge^p W^*) \right\}^{(2d)} \\ &+ q \left\{ \widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_{10}) \right\}^{(2d)} + O(q^2), \end{aligned} \tag{3.36}$$

其中

$$A_{10} = -2\pi\sqrt{-1}\wedge_{-1} W^*\otimes(W+W^*) + \pi\sqrt{-1}[2\sum_{j=1}^{l}(-1)^j\wedge^j W^* - l\wedge_{-1} W^*]\otimes[-2(d-1)+3-(W+W^*)+T_CZ], \tag{3.37}$$

$$\widetilde{a_2}(TZ,W,\tau) = \left\{\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_5)\right\}^{(2d)} + O(q), \tag{3.38}$$

$$\widetilde{a_3}(TZ,W,\tau) = \left\{\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_6)\right\}^{(2d)} + O(q), \tag{3.39}$$

$$\widetilde{a_4}(M,W,\tau) = \left\{\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_7)\right\}^{(2d)} + O(q). \tag{3.40}$$

由于不存在具有奇权或非零权≤ 2的 $SL(2,Z)$模形式，我们有

命题 3.12. 设$\dim TZ = 2d-3$, $c_1(W) = 0$且第一庞特里亚金类$p_1(TZ) = p_1(W)$，则

1）若 $d-l$ 为奇数，或者 $d-l\leq 2$ 但 $d-l\neq 0$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*} = \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_8} = 0, \quad \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_9} = 0, \tag{3.41}$$

2）若 $d-l$ 为偶数，或者 $d-l\leq 1$ 但 $d-l\neq -1$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)} = 0, \quad \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes A_{10}} = 0, \tag{3.42}$$

3）若 $d-l$ 为奇数，或者 $d-l\leq 0$ 但 $d-l\neq -2$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes A_5} = 0, \tag{3.43}$$

*4)*若 $d-l$ 为偶数，或 $d-l\leq -1$ 但 $d-l\neq -3$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes A_6} = 0, \tag{3.44}$$

*5)*若 $d-l$ 为奇数，或 $d-l\leq -2$ 但 $d-l\neq -4$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes A_7} = 0, \tag{3.45}$$

定理 3.13. 设 维数$TZ = 2d-3$, $c_1(W) = 0$且第一庞特里亚金类$p_1(TZ) = p_1(W)$，则

*1)*若 $d-l=4$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_8} = 240\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}, \quad \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_9} = 2160\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}. \tag{3.46}$$

*2)*若 $d-l=6$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_8}&=-504\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_9}&=-16632\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}.\end{aligned}\tag{3.47}$$

3）若 $d-l=8$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_8}&=480\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_9}&=61920\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}.\end{aligned}\tag{3.48}$$

4）若 $d-l=10$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_8}&=-264\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*},\\ \mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_9}&=-135432\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*}.\end{aligned}\tag{3.49}$$

同样，由 $\widetilde{a_1}(TZ,\ W,\ \tau)$，我们有

定理 3.14。设维数$TZ\ =\ 2d-3$，$c_1\left(W\right)\ =\ 0$且第一庞特里亚金类$p_1\left(TZ\right)\ =p_1\left(W\right)$，则 *1*）若 $d-l=3$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{10}}=240\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)},\tag{3.50}$$

2）若 $d-l=5$，则

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{10}}=-504\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)},\tag{3.51}$$

3）如果 $d-l=7$，那么

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{10}}=480\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)},\tag{3.52}$$

4）如果 $d-l=9$，那么

$$\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{10}}=-264\mathbf{R}^{\mathcal{G}_{D^Z}\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^pW^*)},\tag{3.53}$$

设 TZ 是一个 $2d-1$ 维自旋向量丛。那么令

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{E}}(TZ,W,\tau,z):=&c^{2(d-l)-1}y^{-\frac{l}{2}}\bigotimes_{n=1}^{\infty}(\wedge_{-yq^{n-1}}(W^*)\otimes\wedge_{-y^{-1}q^n}(W))\\ &\bigotimes\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T_CZ)\right),\end{aligned}\tag{3.54}$$

$\widetilde{\ }$与定义 Ell(TZ, W, τ, z) 类似，我们可以定义双变量椭圆亏格 Ell(TZ, W, τ, z)。利用 $\overline{\text{引}}$理 3.4 中相同的计算，在 [15] 中我们有

引理 3.15。

$$\overline{\text{Ell}}(TZ, W, \tau, z) = \left(\eta(\tau)^{3(d-l-1)} \prod_{i=1}^{d-1} \frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau, x_i)} \prod_{j=1}^{l} \theta(\tau, w_j - z)\right)^{(2d)}, \tag{3.55}$$

与定理 3.2 类似， [15], 我们有

引理 3.16。 若 $c_1(W) = 0$ 且第一庞特里亚金类 $p_1(TZ) = p_1(W)$，则椭圆属 Ell(TZ, W, τ, z) 是权为 $d - l$、指标为 $\frac{l}{2}$ 的弱雅可比形式。

命题 3.17。 若 维数$TZ = 2d - 1$, $c_1(W) = 0$ 且第一庞特里亚金类$p_1(TZ) = p_1(W)$，则由下式确定的级数 $a_n(TZ, W, \tau)$

$$\exp(-4\pi^2 l E_2(\tau) z^2)\overline{\text{Ell}}(TZ, W, \tau, z) = \sum_{n\geq 0} \overline{a_n}(TZ, W, \tau) \cdot z^n, \tag{3.56}$$

是 $SL(2, Z)$ 上权为 $d - l + n$ 的模形式。此外，$a_n(M, W, g, \tau)$ 的前五个级数具有以下形式:

$$\begin{aligned}\overline{a_0}(TZ, W, \tau) &= \left\{\widehat{A}(TZ)\text{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\right\}^{(2d)} + q\left\{\widehat{A}(TZ)\text{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\text{ch}(A_{11})\right\}^{(2d)} \\ &+ q^2\left\{\widehat{A}(TZ)\text{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\text{ch}(A_{12})\right\}^{(2d)} + O(q^3),\end{aligned} \tag{3.57}$$

其中

$$A_{11} = T_C Z - 2(d-1) + 1 - W - W^*, \tag{3.58}$$

and

$$\begin{aligned}A_{12} &= S^2 T_C Z + \wedge^2 W^* + \wedge^2 W + W^* \otimes W \\ &+ [2(d-1) - 2](W + W^* - T_C Z) - (W + W^*) \otimes T_C Z \\ &+ (d - l - 2)(2d - 2l - 1),\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}\overline{a_1}(TZ, W, \tau) &= \left\{2\pi\sqrt{-1}\widehat{A}(TZ)\text{ch}(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p - \frac{l}{2}) \wedge^p W^*)\right\}^{(2d)} \\ &+ q\left\{\widehat{A}(TZ)\text{ch}(A_{13})\right\}^{(2d)} + O(q^2),\end{aligned} \tag{3.60}$$

其中

$$\begin{aligned}A_{13} &= -2\pi\sqrt{-1} \wedge_{-1} W^* \otimes (W + W^*) \\ &+ \pi\sqrt{-1}[2\sum_{j=1}^{l}(-1)^j \wedge^j W^* - l \wedge_{-1} W^*] \otimes [-2(d-1) + 1 - (W + W^*) + T_C Z],\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\overline{a_2}(TZ,W,\tau)=\left\{\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_5)\right\}^{(2d)}+O(q), \tag{3.62}$$

$$\overline{a_3}(TZ,W,\tau)=\left\{\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_6)\right\}^{(2d)}+O(q), \tag{3.63}$$

$$\overline{a_4}(M,W,\tau)=\left\{\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_7)\right\}^{(2d)}+O(q). \tag{3.64}$$

由于不存在具有奇权或非零权≤ 2的 $SL(2,Z)$模形式，我们有

命题 3.18. 设维数$TZ=2d-1$, $c_1(W)=0$ 且第一庞特里亚金类$p_1(TZ)=p_1(W)$，则

*1)*如果 $d-l$ 是奇数，或 $d-l\leq 2$ 但 $d-l\neq 0$，则

$$\begin{aligned}&\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*)=c_1,\ \overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{11})=c_2,\\&\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{12})=c_3,\end{aligned} \tag{3.65}$$

*2)*如果 $d-l$ 是偶数，或 $d-l\leq 1$ 但 $d-l\neq -1$，则

$$\begin{aligned}&\overline{\eta}(D^Z\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^p W^*))=c_4,\\&\overline{\eta}(D^Z\otimes A_{13})=c_5,\end{aligned} \tag{3.66}$$

*3)*如果 $d-l$ 是奇数，或 $d-l\leq 0$ 但 $d-l\neq -2$，则

$$\overline{\eta}(D^Z\otimes A_5)=c_6, \tag{3.67}$$

*4)*如果 $d-l$ 是偶数，或 $d-l\leq -1$ 但 $d-l\neq -3$，则

$$\overline{\eta}(D^Z\otimes A_6)=c_7, \tag{3.68}$$

5）如果 $d-l$ 为奇数，或者 $d-l\leq -2$ 但 $d-l\neq -4$，那么

$$\overline{\eta}(D^Z\otimes A_7)=c_8, \tag{3.69}$$

其中 c_j, $1\leq j\leq 8$ 为常数。

定理 3.19。 设维数$TZ=2d-1$, $c_1(W)=0$，且第一庞特里亚金类$p_1(TZ)=p_1(W)$，那么

1）如果 $d-l=4$，那么

$$\begin{aligned}&\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{11})=240\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*),\\&\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{12})=2160\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*).\end{aligned} \tag{3.70}$$

*2)*如果 $d-l=6$，则

$$\begin{aligned}&\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{11})=-504\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*),\\&\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{12})=-16632\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*).\end{aligned} \tag{3.71}$$

*3)*如果 $d-l=8$，则

$$\begin{aligned}(3.72)\qquad &\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{11})=480\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*),\\ &\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{12})=61920\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*).\end{aligned}$$

*4)*若 $d-l=10$，则

$$\begin{aligned}(3.73)\qquad &\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{11})=-264\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*),\\ &\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{12})=-135432\overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*).\end{aligned}$$

类似地，由 $a_1(TZ,\ W,\ \tau)$，可得

定理 3.20. 设 维数$TZ\ =\ 2d\ -\ 1$，$c_1(W)\ =\ 0$且第一庞特里亚金类$p_1(TZ)\ =p_1(W)$，则 *1)*若 $d-l=3$，则

$$(3.74)\qquad \overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{13})=240\overline{\eta}(D^Z\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^p W^*)),$$

*2)*若 $d-l=5$，则

$$(3.75)\qquad \overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{13})=-504\overline{\eta}(D^Z\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^p W^*)),$$

*3)*若 $d-l=7$，则

$$(3.76)\qquad \overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{13})=480\overline{\eta}(D^Z\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^p W^*)),$$

*4)*若 $d-l=9$，则

$$(3.77)\qquad \overline{\eta}(D^Z\otimes\wedge_{-1}W^*\otimes A_{13})=-264\overline{\eta}(D^Z\otimes(\sum_{p=0}^{l}(-1)^p(p-\frac{l}{2})\wedge^p W^*)).$$

4. The higher degree case

首先，我们回顾一下 [19]中的主要定理。

定理4.1. *(*[19]*)* 设 $M\to B$ 是一个闭纤维丛，其自旋闭纤维为 Z，且 A_V 是由向量丛 V 扭曲的 *Bismut* 超联络。当 维数$Z=2r$ 时，

对于第 j 个陈形式 $\mathrm{str}(A_V^{2j})_{[2j]}$，有

$$\overline{\mathrm{str}}(A_V^{2j})_{[2j]} = \frac{(-1)^j j!}{(2\pi\sqrt{-1})^{\frac{n}{2}}}(\int_Z \widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(V))_{[2j]}. \tag{4.1}$$

当维数$Z = 2r+1$时，对于第 j 个留数陈形式$\mathrm{sres}(|A|_V^{2j-1})_{[2j-1]}$，我们有

$$\mathrm{sres}(|A|_V^{2j-1})_{[2j-1]} = \frac{(-1)^j(2j-1)!!}{(2\pi\sqrt{-1})^{\frac{n+1}{2}}2^{j-1}}(\int_Z \widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(V))_{[2j-1]}. \tag{4.2}$$

其中，第 j 个陈形式$\mathrm{str}(A_V^{2j})_{[2j]}$ 和第 j 个留数陈形式$\mathrm{sres}(|A|_V^{2j-1})_{[2j-1]}$ 的定义可见于 [19]，而 [20] 和 n 分别为纤维维数。

设 $\dim Z = 2r$ 和 $r+j$ 均为偶数，且

$$Q_1(TZ,\tau) = [\widehat{A}(TZ)[\mathrm{ch}(\triangle(TZ)\otimes\Theta_1(T_CZ)) + 2^r\Theta_2(T_CZ) + 2^r\Theta_3(T_CZ)]^{(2(r+j))}. \tag{4.3}$$

$Q_1(TZ,\tau)$ 是一个定义在 $SL_2(\mathbf{Z})$ 上的模形式，其权为 $(r+j)$。我们将 $Q_1(TZ,\tau)$ 展开如下：

$$\begin{aligned} Q_1(TZ,\tau) = &\left[\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ)) + 2^{r+1}\widehat{A}(TZ)\right]^{(2(r+j))} \\ &+ \left[2\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ))\mathrm{ch}(\widetilde{T_CZ}) + 2^{r+1}\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CZ} + \wedge^2\widetilde{T_CZ})\right]^{(2(r+j))} q \\ &+ \left[\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(\triangle(TZ))\mathrm{ch}(A_0) + 2^{r+1}\widehat{A}(TZ)\mathrm{ch}(A_1)\right]^{(2(r+j))} q^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{4.4}$$

定理 4.2. 当 $r+j=4$ 时，我们有

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}})_{[2j]} + 2^r\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ}})_{[2j]} = 120(\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j})_{[2j]}), \\ &\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)\otimes A_0})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{A_1})_{[2j]} = 2160(\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j})_{[2j]}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

当 $r+j=6$ 时，我们有

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}})_{[2j]} + 2^r\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ}})_{[2j]} = -252(\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j})_{[2j]}), \\ &\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)\otimes A_0})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{A_1})_{[2j]} = -16632(\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j})_{[2j]}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

当 $r+j=8$ 时，我们有

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}})_{[2j]} + 2^r\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ}})_{[2j]} = 480(\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j})_{[2j]}), \\ &\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)\otimes A_0})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{A_1})_{[2j]} = 61920(\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)})_{[2j]} + 2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j})_{[2j]}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

当 $r+j=10$ 时，我们有

(4.8)

$$\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}})_{[2j]}+2^r\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ}})_{[2j]}=-132(\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)})_{[2j]}+2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j})_{[2j]}),$$

$$\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)\otimes A_0})_{[2j]}+2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{A_1})_{[2j]}=-117288(\overline{\mathrm{str}}(A^{2j}_{\triangle(TZ)})_{[2j]}+2^{r+1}\overline{\mathrm{str}}(A^{2j})_{[2j]}).$$

设 $\dim Z=2r+1$ 和 $r+j$ 为偶数，并用与 $Q_1(TZ,\ \tau)$ 相同的表达式定义 $Q_2(TZ,\ \tau)$。$Q_2(TZ,\ \tau)$ 是 $SL_2(\mathbf{Z})$ 上权为 $(r+j)$ 的模形式，而 $Q_1(TZ,\ \tau)$ 与 $Q_1(TZ,\ \tau)$ 有相同的展开式。

定理4.3。 当 $r+j=4$ 时，我们有

(4.9)

$$\begin{aligned}&\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}})_{[2j-1]}+2^r\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ}})_{[2j-1]}\\&=120(\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(A^{2j-1})_{[2j-1]}),\\&\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)\otimes A_0})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{A_1})_{[2j-1]}\\&=2160(\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(|A|^{2j-1})_{[2j-1]}.\end{aligned}$$

当 $r+j=6$ 时，我们有

(4.10)

$$\begin{aligned}&\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}})_{[2j-1]}+2^r\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ}})_{[2j-1]}\\&=-252(\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(A^{2j-1})_{[2j-1]}),\\&\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)\otimes A_0})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{A_1})_{[2j-1]}\\&=-16632(\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(|A|^{2j-1})_{[2j-1]}.\end{aligned}$$

当 $r+j=8$ 时，我们有

(4.11)

$$\begin{aligned}&\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}})_{[2j-1]}+2^r\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ}})_{[2j-1]}\\&=480(\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(A^{2j-1})_{[2j-1]}),\\&\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)\otimes A_0})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{A_1})_{[2j-1]}\\&=61920(\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(|A|^{2j-1})_{[2j-1]}.\end{aligned}$$

当 $r+j=10$ 时，我们有

(4.12)

$$\begin{aligned}&\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)\otimes\widetilde{T_CZ}})_{[2j-1]}+2^r\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\widetilde{T_CZ}+\wedge^2\widetilde{T_CZ}})_{[2j-1]}\\&=-132(\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(A^{2j-1})_{[2j-1]}),\\&\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)\otimes A_0})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{A_1})_{[2j-1]}\\&=-117288(\mathrm{sres}(|A|^{2j-1}_{\triangle(TZ)})_{[2j-1]}+2^{r+1}\mathrm{sres}(|A|^{2j-1})_{[2j-1]}.\end{aligned}$$

注 1. 我们可以利用定理4.1给出前几节中定理的高次情形。我们也可以运用本文中的技巧，将 [9] 中的结果推广到族情形。但我们不知道，对于 Dai-Zhang Toeplitz族指标定理（），是否存在类似的由

Bismut-Freed 和 Lott 得出的定理。我们还可以给出 [10]和 [8]的高次情形。因此，根据 Lott关于 [18], 中 Deligne上同调类曲率的定理，我们或许可以给出另一种高次解释。

注2. 受定理4.1的启发，将非交换几何（[13], [14]）中著名的Kaster-Kalau-Walze定理推广到族情形是很有意义的。也就是说，计算 $|A|^{-n+2}$ 在纤维化 M 上的族Wodzicki留数，其中 n维纤维为 Z。

5. Acknowledgements

作者获得了中国吉林省科技发展计划项目资助：No.20260102245JC。

6. Data availability

本文未收集任何数据。

7. Conflict of interest

T作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

References

[1] L. Alvarez-Gaum´e, E. Witten, 引力反常, Nucl. Phys. B234 (1983), 269-330.[2] M. F. Atiyah, V. K.Patodi, I. M. Singer, 谱不对称性与黎曼几何 I. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, 77 (1975), no. 1, 43-69.[3] J-M. Bismut, D. S. Freed, 椭圆族的分析，I：行列式丛上的度量与联络, Comm. Math. Phys, 106 (1986), 159-176.[4] J-M. Bismut, D. S. Freed, 椭圆族的分析，II：Dirac算子、eta不变量与整体性定理, Comm. Math. Phys, 107 (1986), 103-163.[5] K. Chandrasekharan,椭圆函数, Spinger-Verlag, 1985.[6] Q. Chen, F. Han, W. Zhang, 广义Witten属与消失定理. J. Differential Geom. 88 (2011), no. 1, 1-40.[7] X. Dai, W. Zhang, 高阶谱流, J. Funct. Anal. 157 (1998), no. 2, 432-469.[8] J. Guan, H. Liu, 纤维丛的模不变性与反常抵消公式, Axioms, 14 (2025),740.[9] J. Guan, Y. Wang, H. Liu, $SL(2,\mathbf{Z})$ 奇数维中的模形式与Witten属, J. Non- commut. Geom., 20 (2026), no.1, 269-323.[10] F. Han, K. Liu, 引力反常消去与模不变性. Algebraic Geom. Topol, 14 (2014), 91-113.[11] F. Han, K. Liu and W. Zhang, 反常抵消与模性，II： $E_8 \times E_8$ 情形. Sci. China Math. 60 (2017), no. 6, 985-994.[12] F. Han, R. Huang, K. Liu and W. Zhang, 三次型、反常抵消与模性. Adv. Math. 394 (2022), Paper No. 108023,46pp.[13] D. Kastler.: Dirac算子与引力, Comm. Math. Phys. 166 (1995), 633-643, (1995).

[14] W. Kalau and M. Walze.: 引力、非交换几何与Wodzicki留数, J. Geom. Physics. 16 (1995), 327-344.[15] P. Li, -1-多元 χ_y-属与椭圆属的现象, Pacific J. Math. 273 (2015) 331-351.[16] K. Liu, 模不变性与示性数, 《数学物理通讯》. 174 (1995), 29-42.[17] K. Liu, 关于椭圆属与θ函数, 《Topology》 35 (1996), no. 3, 617–640.[18] J. Lott, 行列式线丛的高次类比, Comm. Math. Phys, 230 (2002), 41-69. [19] J. Mickelsson, S. Paycha, 与狄拉克算子族相关的重整化Chern-Weil形式, J. Geom. Phys. 57 (2007), no. 9, 1789-1814.[20] S. Paycha, S. Scott, 与超联络相关的Chern-Weil形式, 世界科技出版公司, Hackensack, 新泽西州, 2006, 79-104.[21] Y. Wang, $SL(2,\mathbf{Z})$ 殆复流形的模形式与反常抵消公式. Pacific J. Math. 333(2024), no. 1, 181–196.[22] Y. Wang, $SL(2,\mathbf{Z})$ 模形式与反常抵消公式, arXiv:2304.01458, 2023, 即将在《高校应用数学学报（B辑）》发表.[23] W. Zhang, *Chern-Weil*理论与威滕形变讲义。南开数学丛书第4卷, 世界科技出版公司, 新加坡, 2001.

Y. Wang 数学与统计学院，东北师范大学，中国吉林长春，130024 电子邮箱：*wangy581@nenu.edu.cn*