# 异质相关数据固定设计下核平均的一致收敛。

**Danilo H. Matsuoka**[a,*], **Hudson da Silva Torrent**[b]

arXiv:2603.04681v1 [math.ST] 4 Mar 2026

**摘要**

我们给出了在 $[0,1]$ 等间距固定设计点$x_{t,\ T} = t/T, \quad t \in \{1,\ldots,T\}, \quad T \in \mathbb{N}$下核平均的一致收敛速率。我们在强混合和矩条件下推导了弱一致相合性与强一致收敛的速率，且无需假设平稳性。该分析利用了网格结构，因此补充了现有的随机设计结果，例如 Hansen (2008) 和 Kristensen (2009) 的结果；这些结果依赖基于密度的条件化论证。该框架适用于相关三角阵列，尤其适用于应用于确定性网格上观测到的时间序列的非参数方法。作为应用，我们推导了具有时变自回归误差的非参数回归模型中局部线性估计量的一致收敛速率。我们通过蒙特卡洛实验和一项实证应用展示了理论结果。

**关键词：**非参数回归；渐近理论；时变参数；局部线性平滑；强混合。**JEL 分类：**C14，C22。**MSC2020：**62G05，62G20。

## 1 引言

基于核的估计量的一致相合性是含相依数据的非参数时间序列模型进行推断的基础，并已在各种混合条件下得到广泛研究（Bierens，1983；Peligrad，1992；Andrews，1995；Masry，1996；Nze and Doukhan，2004；Fan and Yao，2003；Hansen，2008；Kristensen，2009；Bosq，2012；Kong et al.，2010；Li et al.，2016；Hirukawa et al.，2022）。特别是，Hansen（2008）针对平稳且强混合的数据，在扩展区间上建立了一致收敛速率，从而适用于具有有界或无界支撑的核函数。Kristensen（2009）将这些结果推广到数据可能具有异质性且依赖于参数的情形。后一推广对于非参数成分依赖于未知参数的半参数模型尤为重要，例如部分线性模型和单指标模型（见 Li and Wooldridge，2002；Xia and H¨ardle，2006），以及基于模拟的估计方法（见 Creel and Kristensen，2012；Kristensen and Shin，2012）。前一结果则适用于数据可能非平稳但仍为强混合的情形，例如尚未初始化于其平稳分布的马尔可夫链（Yu，1993；Kim and Lee，2005）。Kristensen（2009）一个尤为直接且常见的应用，是误差项强混合且非平稳时的局部多项式回归（见 Wand and Jones，1994）。

Kristensen (2009) 和 Hansen (2008) 所采用的分析工具是在随机设计框架下建立的。在该框架中，期望通过对设计变量进行条件化来表示$X_{i,\ T}$ 并针对其勒贝格密度进行积分$f_{i,\ T}$。而在我们的

*通讯作者。当前版本：2026年3月6日[a]应用微观经济学研究组 - 经济学系，南里奥格兰德联邦大学。[b]数学与统计研究所 - 南里奥格兰德联邦大学。电子邮箱：danilomatsuoka@gmail.com（Matsuoka）；hudsontorrent@gmail.com（Torrent）

设定中，设计点$x_{i,\ T} = i/T,\quad i \in 1$、.....、$T,\quad T \in \mathbb{N}$是确定性的。因此，以密度为基础的积分表示和这些既有研究中使用的条件期望论证，在这种确定性设定下无法直接应用。相反，我们的证明通过确定性的一致逼近，用有限和逼近积分。这类等间距固定设计在时间序列分析中十分常见，因为观测值通常是在确定性网格上记录的。它们自然地出现在非参数时间序列回归中（Robinson, 1989年；Hall 和 Hart, 1990年；El Machkouri, 2007年；Vogt 和 Linton, 2014年等）、时变模型中（Dahlhaus 等，1999年；Cai, 2007年），以及对连续时间过程进行离散时点采样时（Bandi 和 Phillips, 2003年；Kristensen, 2010年）。

尽管在诸如$x_{i,\ T} = i/T$这样的固定设计中，预期的一致收敛速率应处于相近的阶，但这一设定不属于 Kristensen (2009年) 和 Hansen (2008年) 的研究范围；他们的定理是在随机设计假设下推导的，其中设计变量具有相对于勒贝格测度绝对连续的密度。因此，他们的结果无法直接推广到本文所考虑的确定性固定设计情形，还需要进一步论证。

本文建立了固定设计下核平均的弱一致收敛速率和强一致收敛速率，并直接基于网格结构展开分析。允许数据具有强混合性、非平稳性，并依赖于取值于参数空间 $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$中的参数 $\gamma$ 。假设核函数具有紧支撑且满足利普希茨条件。随后，将理论结果应用于带有时变自回归误差的局部线性回归模型。

本文的组织结构如下。第2节给出主要理论结果。第3节在带有时变自回归误差的非参数回归背景下说明这些结果的适用性，并进一步包括一项蒙特卡洛研究和一个使用黑海平均海平面异常数据的真实数据示例。

## 2 核平均的一般结果

本节将推导如下形式的核平均的一致界

$$\hat{\Psi}(x,\gamma) = T^{-1}\sum_{i=1}^{T} \epsilon_{i,T}(\gamma) K_h(i/T - x)\left(\frac{i/T - x}{h}\right)^j, \quad x \in [0,1],\ \gamma \in \Theta, \tag{1}$$

其中 $j \in \mathbb{N}$为固定值，$\{\epsilon_{t,T}(\gamma) :\ 1 \le t \le T, T > 1\}$表示定义在 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 上、依赖于参数 $\gamma \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ 的随机变量三角阵。对于核函数$K :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，记 $K_h(u) := K(u/h)/h$ 其中 $h := h_T$ 是满足$h \to 0$ 且当 $T \to \infty$时有 $Th \to \infty$ 的正序列。形式为 (1) 的量是时间序列核回归的基础，因为它们自然出现在定义核估计量的表达式中（见 Wand 和 Jones (1994)；Tsybakov (2008)）。当 $j = 0$ 时，我们便得到 Hansen (2008) 和 Kristensen (2009) 所研究的标准核平均。纳入因子 $((i/T - x)/h)^j$是一种便捷的推广，因为 (1) 恰好就是局部多项式估计量中出现的量，因此可直接应用于这类情形。

对于每个 $T \ge 1$和 $\gamma \in \Theta$，$\alpha$-混合系数 的$\epsilon_{1,\ T}(\gamma) \ldots,\ \epsilon_{T,\ T}(\gamma)$ 定义为

$$\alpha_{\gamma,T}(j) = \sup_{1 \le k \le T-j} \sup\{|P(A \cap B) - P(A)P(B)| : B \in \mathcal{F}_{T,1}^{k}(\gamma), A \in \mathcal{F}_{T,k+j}^{T}(\gamma)\},$$

对于任意 $0 \le j < T$，其中 $\mathcal{F}_{T,\ i}^{k}(\gamma) = \sigma(\epsilon_{l,\ T}(\gamma) :\ i \le l \le k)$。按照惯例，我们令 $\alpha_{\gamma,\ T}(j) = 1/4$ 当 $j \le 0$时，且 $\alpha_{\gamma,\ T}(j) = 0$当 $j \ge T$时。该定义遵循 Francq 和 Zako¨ıan（2005）以及

Withers（1981年）。若 $\{\epsilon_{i,T}(\gamma)\colon\ 1 \le i \le T,\ T \ge 1\}$ 是 $\alpha$-混合 （或强混合），则称其为.....，其中序列

$$\alpha_\gamma(j) = \sup_{T>j} \alpha_{\gamma,T}(j), \quad 0 \le j < \infty,$$

满足 $\alpha_\gamma(j) \to 0$ 当 $j \to \infty$。

本研究始终采用以下假设:

A.1 [强混合] 三角阵 $\{\epsilon_{i,T}(\gamma)\colon\ 1 \le i \le T, T \ge 1\}$ 是强混合的，其混合系数满足

$$\alpha_{\gamma,T}(i) \le Ai^{-\beta}, \tag{2}$$

对于某些有限常数 $A > 0$ 和 $\beta > 2$，它们不依赖于 $i, \gamma, T$。

A.2 [核函数] 函数 $K\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $|K(u)| \le \bar{K} < \infty$和 $\int_{\mathbb{R}} |K(u)|^s du \le \bar{\mu} < \infty$，其中某个 $s > 2$。存在常数 $1 \le \Lambda_1, L_1 < \infty$，使得 $K(u) = 0$ 对于$|u| > L_1$成立，并且对所有 $u$, $u' \in \mathbb{R}$, $|K(u) - K(u')| \le \Lambda_1 |u - u'|$。

A.3 [参数依赖] 对每个 $T \ge 1$ 和 $1 \le i \le T$，存在一个非负随机函数$\xi_{i,T}(\gamma)$，使得几乎必然

$$|\epsilon_{i,T}(\gamma') - \epsilon_{i,T}(\gamma)| \le \xi_{i,T}(\gamma)\|\gamma' - \gamma\|, \qquad \gamma', \gamma \in \Theta : \|\gamma' - \gamma\| \le h. \tag{3}$$

此外，存在有限常数 $s > 2$, $\lambda \ge 0$和 $C_1$, $C_2 > 0$，使得

$$\sup_{T\ge 1} \sup_{1\le i\le T} \mathrm{E}(|\epsilon_{i,T}(\gamma)|^s) \le \bar{C}_1(1 + \|\gamma\|^\lambda), \tag{4}$$

$$\sup_{T\ge 1} \sup_{1\le i\le T} \mathrm{E}(|\xi_{i,T}(\gamma)|^s) \le \bar{C}_2(1 + \|\gamma\|^\lambda). \tag{5}$$

遵循Kristensen (2009)和Hansen (2008)，假设 A.1要求三角阵是算术 $\alpha$-混合的（参见Ferraty和Vieu，2006年的定义10.2）。指数 $\beta$ 量化混合系数衰减的速率，较小的值对应于更强的相依性。

假设 A.2对核函数设定了标准正则性条件，包括 $K$的有界性和可积性。A.2涵盖紧支撑利普希茨核这一类。这包括Epanechnikov核、Biweight核、Triweight核和三角核等常用选择（参见Wand和Jones，1994年的第2.7节）。注意，在A.2下，两类积分都是有界的: 对 $k \in \{0, \ldots, s\}$有 $\int_{\mathbb{R}} |K(u)|^k du$，且对 $k \in \{0, \ldots, j\}$有 $\int_{\mathbb{R}} |u|^k |K(u)| du$。

假设 A.3 中的条件 (3) 要求每个映射 $\gamma \mapsto \epsilon_{i,T}(\gamma)$ 几乎必然局部利普希茨连续，其随机利普希茨系数为 $\xi_{i,T}(\gamma)$。这一假设弱于 Kristensen (2009) 中的假设 A.2；后者要求几乎必然可微，因此蕴含在 $\Theta$ 上几乎必然局部利普希茨连续。参数空间 $\Theta$ 允许无界，而 (4)-(5) 中的界保证最高至$s$ 阶的矩仍然有限，且随 $\|\gamma\|$ 增长的速度至多为多项式级。此表述与 Kristensen (2009) 的假设 A.3-A.5 中施加的增长条件一致。如果 $\Theta$ 是紧致的，那么对于所有 $\lambda \ge 0$，(4)-(5) 中的项 $1 + \|\gamma\|^\lambda$ 都一致有界。因此，不失一般性，我们可以令$\lambda = 0$。若数据与参数无关，则参数空间取为一个平凡的单点集，这意味着 $m = 0$, $\epsilon_{i,T}(\gamma)$ 关于 $\gamma$ 为常数，因此$\xi_{i,T}(\gamma) = 0$，且 (4)-(5) 中的矩界同样退化为 $\lambda = 0$ 的情形。因此，A.3简化为标准要求：$\mathrm{E}(|\epsilon_{i,T}|^s) \le C_1$，且关于 $i$和 $T$一致成立。

从现在起，我们用 $C>0$ 表示一个一般常数，它在不同出现位置可以取不同的值，且与 $T, x$ 及 $\gamma$ 无关。记号“$\overset{a}{\approx}$”表示渐近等价。

## 2.1 依概率一致收敛

现在，我们将核平均（1）的结果推广至固定设计三角阵情形，并借鉴 Hansen (2008) 中的定理 2 和 Kristensen (2009) 中的定理1，推导其依概率一致收敛速率。

**定理1.** 假设 *A.1–A.3* 成立。固定 $c>0$，并假设 $s>2$。定义

$$\theta=\frac{\beta(s-2)-m(s-1)(1+2c)-2s+1}{\beta s+m(s-1)+1}. \tag{6}$$

令 $\Theta_T=\{\gamma\in\mathbb{R}^m:\ \|\gamma\|\le d_T\}$，其中 $d_T=T^r$ 且 $r=\min\{c,(1-\theta)/(2\lambda)\}$。假设

$$\beta>\frac{m(s-1)(1+2c)+2s-1}{s-2}, \tag{7}$$

并且带宽满足

$$\frac{\ln T}{T^\theta h}=o(1). \tag{8}$$

此外，若以下界成立

$$\sup_{T\ge1}\sup_{1\le i\le T}\mathrm{E}(\sup_{\gamma\in\Theta_T}|\epsilon_{i,T}(\gamma)|^s)\le C(1+d_T^\lambda), \tag{9}$$

$$\sup_{T\ge1}\sup_{1\le i\le T}\mathrm{E}(\sup_{\gamma\in\Theta_T}|\xi_{i,T}(\gamma)|^s)\le C(1+d_T^\lambda), \tag{10}$$

*then*

$$\sup_{\gamma\in\Theta_T}\sup_{x\in[0,1]}|\hat\Psi(x,\gamma)-E\hat\Psi(x,\gamma)|=O_p\left(d_T^\lambda\sqrt{\frac{\ln T}{Th}}\right).$$

定理1给出了关于 $x\in[0,1]$ 和$\gamma\in\Theta_T$的一致依概率收敛速率。由于参数空间 $\Theta$ 可能无界，一致性必须限制在不断扩大的子集 $\Theta_T$上，其增长速率由 $d_T$决定。特别地，若 $\Theta$ 是紧致的，则对所有充分大的 $T$，$\Theta\subseteq\Theta_T$ 成立，因此一致性适用于整个参数空间$\Theta$。此外，若 $\Theta$ 是紧致的，或数据与参数无关，则假设 A.3允许任意 $\lambda\ge0$。此时，最优选择为 $\lambda=0$，由此得到 Hansen (2008)所获的速率$\sqrt{\ln T/(Th)}$。当 $r=$为$\{c,(1-\theta)/(2\lambda)\}$时，速率 $d_T=T^r$保证$d_T^\lambda\sqrt{\ln T/(Th)}=o(1)$；而 $c>0$在 $\lambda=0$时发挥作用。事实上，$c>0$可避免 $d_T$以及式（6）—（7）中的表达式变得无定义。为说明这一点，注意对于 $r=(1-\theta)/(2\lambda)$，条件（6）和（7）可写为

$$\theta=\frac{\beta(s-2)-m(s-1)(1+1/\lambda)-2s+1}{\beta s+m(s-1)(1-1/\lambda)+1}, \tag{11}$$

and

$$\beta>\frac{m(s-1)(1+1/\lambda)+2s-1}{s-2}, \tag{12}$$

分别。这些表达式当且仅当 $\lambda>0$ 时才是良定义的。

(7) 中的下界将依赖强度与参数空间的维度 $m$、控制 $d_T$ 扩张速度的常数 $c$ 以及矩阶

$s$ （见假设 A.3）联系起来。由于该下界随 $m$ 和 $c$ 增大而增大，随 $s$ 增大而减小，因此，维度更高的参数空间、 $\Theta_T$ 扩张更快，或矩条件更弱（ $s$ 更小），都会对 $\beta$ 施加更强的限制，要求混合系数以更快的速度衰减（等价地，依赖性更弱），如 (2) 中所述。当假设 A.3 对所有 $s > 0$ 均成立，且令 $s \to \infty$ 时，(7) 中的下界单调递减至 $2 + m$（$1 + 2c$）。由于 $m \geq 0$ 且 $c > 0$，极限下界大于 2，因此条件 $\beta > 2$ 是必要的。

根据条件 (6)–(7)， $\theta \in$ (0,1)。特别地，令 $\beta \to \infty$ （例如，在几何$\alpha$混合依赖下）并令 $m = 0$，参数 $\theta$ 单调递增至 $1-2/s$；对于所有 $s > 2$，该值都严格小于 1。反过来，条件 (8) 要求带宽 $h$ 满足$T^\theta h/\ln T \to \infty$，因此 $\theta$的值越小，对 $h$的条件就越严格。由于 $\theta \in (0, 1)$，条件 (8) 强化了传统假设，即 $h = o(1)$ 且 $Th \to \infty$。

尽管常数 $c > 0$可以任意选取，但当 $\lambda > 0$时，选择 $c >$(1 − $\theta$)/(2$\lambda$)并无意义，因为这只会收紧 (7)–(8) 中的限制，却不会扩大 $\Theta_T$。因此，当 $\lambda > 0$时，可以假设 $c \leq ($ $1 - \theta)/(2\lambda)$。特别地，对于选择 $c = (1 - \theta)/(2\lambda)$，条件 (6) 和 (7) 分别化为 (11) 和 (12)。

对核平均的控制基于截断分解。这由恒等式 $\epsilon_{i,\ T} = \epsilon_{i,\ T} I(|\epsilon_{i,\ T}| > \tau_T) + \epsilon_{i,\ T} I(|\epsilon_{i,\ T}| \leq \tau_T)$ 得出，其中 $\tau_T$表示截断水平。适当选择 $\tau_T$，并结合一致矩条件 (9)-(10)，可通过马尔可夫不等式一致控制非截断分量，而截断分量则通过引理 8 中的指数不等式加以控制。对于确定性网格 $x_{i,\ T} = i/T$，在当前框架中，进入该不等式的方差项与随机设计情形下的渐近阶不同。因此，对核权重非零的指标数量进行一致界定至关重要，这也使核具有紧支撑尤其方便。

## 2.2 几乎处处一致收敛

定理1的几乎必然对应结论需要应用博雷尔-坎泰利引理，因此要求更强的矩界以及更快衰减的 $\alpha$-混合系数（即对 $s$和 $\beta$施加更强的条件）。与 Hansen (2008) 的定理 3 不同，这里不假设严格平稳性。

**定理 2**。 假设 *A.1-A.3* 成立。固定 $c > 0$，并假设 $s > 4$。定义

$$\theta = \frac{(\beta + 1)(s - 4) - (s - 1)(5 + m(1 + 2c))}{(\beta + 1) + (m + 1)(s - 1)}. \tag{13}$$

令 $\Theta_T = \{\gamma \in \mathbb{R}^m : \ \|\gamma\| \leq d_T\}$，其中 $d_T = T^r$且 $r =$最小值{$c$, （1 − $\theta$） / （2$\lambda$）}。假设

$$\beta > \frac{(s - 1)(5 + m(1 + 2c)) - (s - 4)}{s - 4} \tag{14}$$

且带宽满足

$$\frac{\phi_T}{T^\theta h} = O(1), \tag{15}$$

其中 $\phi_T = \ln T(\ln \ln T)^4$。此外，如果以下界成立

$$\sup_{T \geq 1} \sup_{1 \leq i \leq T} \mathrm{E}\left( \sup_{\gamma \in \Theta_T} |\epsilon_{i,T}(\gamma)|^s \right) \leq C(1 + d_T^\lambda), \tag{16}$$

$$\sup_{T \geq 1} \sup_{1 \leq i \leq T} \mathrm{E}\left( \sup_{\gamma \in \Theta_T} |\xi_{i,T}(\gamma)|^s \right) \leq C(1 + d_T^\lambda), \tag{17}$$

那么，

$$\sup_{\gamma\in\Theta_T}\sup_{x\in[0,1]}|\hat{\Psi}(x,\gamma)-E\hat{\Psi}(x,\gamma)|=o_{a.s.}\left(d_T^{\lambda}\sqrt{\frac{\ln T}{Th}}\right).$$

首先请注意，与定理1中使用的较宽松条件 $s>2$ 相比，定理 2 是在更严格的要求 $s>4$ 下建立的。此外，对于 $s>4$，定理 2 中施加的约束 (13)-(15) 严格强于定理 1 中出现的约束 (6)-(8)。其根本原因在于，需要更大的截断水平 $\tau_T$，才能保证与非截断分量相关的概率具有可和性。反过来，这又迫使我们通过 Liebscher- Rio 的指数不等式（引理 8）对截断分量进行控制时施加更强的限制。这体现了一个标准的权衡：几乎必然收敛所需的条件比依概率收敛更强。

与 (7) 中的情形一样，(14) 中的下界随 $m$ 和 $c$ 增大，随 $s$ 减小。令 $s\to\infty$，该下界单调递减至 $4+m(1+2c)$，特别意味着 $\beta>4$ 是必要的。在条件 (13)-(14) 下，$\theta$ 位于 (0,1) 内。此外，当令 $\beta\to\infty$ 并设定 $m=0$ 时，$\theta$ 单调递增至 $1-4/s$；由于 $s>4$，该值始终严格小于 1。

## 3 非参数回归模型的应用

令 $Y_{t,T}\in\mathbb{R}$ 满足：对每个 $T\geq 1$ 和 $t\in\{1,\ldots,T\}$，

$$Y_{t,T}=g(t/T)+V_{t,T}, \tag{18}$$
$$V_{t,T}=\phi(t/T)V_{t-1,T}+e_{t,T}, \tag{19}$$

其中，$g(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 是定义在 $[0,1]$, 上的未知光滑函数，$\{e_{t,T}\}_{t=1}^{T}$ 是独立于 $V_0$ 的独立同分布随机变量；对每个 $T\geq 1$，$T$ 均满足 $\mathrm{E}(e_{t,T})=0$，且 $\mathrm{E}(|e_{t,T}|^s)<C$，其中 $s>2$ 为某个常数。由于 $V_{t-1,T}$ 关于 $\sigma(V_{0,T},e_{1,T},\cdots,e_{t-1,T})$ 可测，因此对所有 $t\geq 2$ 和 $T\geq 1$，都有 $\mathrm{E}(e_{t,T}V_{t-1,T})=0$。此外，为了模型识别以及过程 $\{V_{t,T}\}$ 的稳定性，我们分别假设 $\mathrm{E}(V_{0,T})=0$ 和 $\mathrm{E}(V_{0,T}^2)<\infty$。正如 Kristensen (2009) 和 Orbe 等人（2005）所示，在温和条件下，$\{V_{t,T}:1\leq t\leq T, T\geq 1\}$ 是 $\alpha$-混合的，其几何混合衰减速率见 Ferraty 和 Vieu（2006）的定义10.2；这意味着对任意 $\beta>0$，假设 A.1(2) 均成立。由于 $g(t/T)$ 是确定性的，$\alpha$-混合序列 $\{Y_{t,T}\}$ 的混合系数与 $\{V_{t,T}\}$ 的混合系数相同，因此只要假设 A.1 对 $\{V_{t,T}\}$ 成立，它也就对 $\{Y_{t,T}\}$ 成立。

模型 (18)-(19) 可改写为

$$Y_{t,T}=g(t/T)+\phi(t/T)\left(Y_{t-1,T}-g((t-1)/T)\right)+e_{t,T}, \tag{20}$$

这表明 $Y_{t,\ T}$ 围绕确定性趋势 $g(t/T)$ 随机波动，并以系数 $\phi(t/T)$ 所决定的速率向其回归。

我们采用两步半参数程序来估计 $g(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$。

步骤 *1*。我们使用局部线性估计量 估计 $g$，其定义如下：

$$\hat{g}(x)=e_1^{\intercal}S_{T,x}^{-1}D_{T,x},\qquad \forall x\in[0,1], \tag{21}$$

其中 $e_1=(1,\ 0)^{\intercal}$ 和

$$S_{T,x}=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{T}K_h(x_t-x) & \sum_{t=1}^{T}K_h(x_t-x)(x_t-x)/h\\ \sum_{t=1}^{T}K_h(x_t-x)(x_t-x)/h & \sum_{t=1}^{T}K_h(x_t-x)((x_t-x)/h)^2\end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$D_{T,x} = \frac{1}{T}\left[\begin{array}{c} \sum_{t=1}^{T} Y_{t,T} K_h(x_t - x) \\ \sum_{t=1}^{T} Y_{t,T} K_h(x_t - x)(x_t - x)/h \end{array}\right], \tag{23}$$

其中 $x_t := t/T$。经过简单代数运算可知，$\hat{g}$是关于$Y_{t,T}$的线性函数：

$$\hat{g}(x) = \sum_{t=1}^{T} W_{t,T}(x) Y_{t,T}, \tag{24}$$

其中$W_{t,T}(x) = T^{-1} e_1^{\intercal} S_{T,x}^{-1} X\left(\frac{t/T - x}{h}\right) K_h(t/T - x)$ 对于 $X(u) = (1, u)^{\intercal}$。

$\hat{}$步骤 2。给定估计值$\hat{g}$，计算残差$V_{t,T} = Y_{t,T} - \hat{g}(t/T)$。然后，我们用局部常数估计量估计 $\phi(\cdot)$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{\hat{\Psi}_1(x)}{\hat{\Psi}_2(x)} := \frac{1/T \sum_{t=2}^{T} G_v(x_t - x) \hat{V}_{t,T} \hat{V}_{t-1,T}}{1/T \sum_{t=2}^{T} G_v(x_t - x) \hat{V}_{t-1,T}^2}, \qquad \forall x \in [0,1], \tag{25}$$

其中 $G_v(u) := G(u/v)/v$, $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个核函数， $v$ 是满足$v = o(1)$ 的带宽， $Tv \to \infty$遵循 Kristensen (2009) 第3节中的表述。

估计量 (21) 和 (25) 的收敛速度是在附加假设下得到的：

A.4 [附加核正则条件]函数 $K: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 非负且对称，并满足 $\mu(\{u \in G_x: K(u) > 0\}) > 0$ 其中 $\mu$ 是勒贝格测度，且

$$G_x = \begin{cases} [-1, 0], & \text{if } x = 1 \\ [-1, 1], & \text{if } x \in (0,1) \\ [0, 1], & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

A.5 [光滑性条件] 函数 $g(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上二次连续可微。

A.6 [自回归部分]模型 (19) 满足以下条件：

(i) 存在 $0 < \phi < 1$，使得 $\max_{u \in [0,1]} |\phi(u)| \le \phi$；(ii) 存在 $s > 2$，使得 $\sup_{T \ge 1} \sup_{1 \le t \le T} \mathrm{E}\left(|e_{t,T}|^s\right) \le C$；(iii) 对所有 $1 \le t \le T$ 和所有 $T \ge 1$，误差 $e_{t,T}$ 具有单位方差和密度 $f_e(\cdot)$，且满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |f_e(u) - f_e(u+a)| du \le C|a|$。

假设 A.4 对大多数常用的紧支撑核都成立，例如 Epanechnikov 核、均匀核、三角核、三权重核和余弦核。假设 A.5 是非参数核回归中的标准条件，尤其有助于给出局部线性权重的一致界。根据 Orbe 等人（2005）的命题 1，假设 A.6 确保数组 $\{V_{t,T}\}$ 满足假设 A.1。

$\hat{}$ 以下定理建立了$\hat{g}$ 和 $\phi$的一致收敛速率。为避免$\hat{}$边界效应， $\phi$ 的速率在 $[0,1]$的一个内部子集上给出。不失一般性，我们将核支撑归一化为 $L_1 = 1$。一般情形 $L_1 > 0$ 可通过对核函数的自变量进行简单缩放得到，且不会影响任何渐近速率。

**定理 3**。 设 $K$ 和 $G$ 为满足假设 *A.2* 和 *A.4* 的核函数。假设假设 *A.3*、*A.5* 和 *A.6* 成立。令 $b_T = o(1)$ 为任意满足 $b_T/v \to \infty$的序列，并定义 $\mathcal{I}_T := [b_T, 1-b_T]$。若带宽 $h$和 $v$满足定理*1*中的$(8)$，其中 $v \overset{a}{\approx} c_v h$对某个 $c_v > 0$成立，则

$$\sup_{x\in[0,1]} |\hat{g}(x) - g(x)| = O(h^2) + O_p\left(\sqrt{\frac{\ln(T)}{Th}}\right),$$

*and*

$$\sup_{x\in\mathcal{I}_T} |\hat{\phi}(x) - \phi(x)| = O_p\left(h^2 + \sqrt{\frac{\ln(T)}{Th}}\right).$$

**推论 3.1**。 假设假设 *A.2* 和 *A.4-A.6* 成立。对于所有 $T \geq 1, 1 \leq t \leq T$， $\phi(t/T) = \phi$ 均为常数。此外，映射 $\phi \mapsto V_{0,T}(\phi)$ 满足以下关于参数依赖的条件：存在 $\xi_{0,T}(\phi) \geq 0$，使得几乎必然有

$$|V_{0,T}(\phi') - V_{0,T}(\phi)| \leq \xi_{0,T}(\phi)|\phi' - \phi|, \qquad \phi', \phi \in [-\bar{\phi}, \bar{\phi}] : |\phi' - \phi| \leq h$$

*and*

$$\sup_{T\geq 1} \mathrm{E}\left(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |V_{0,T}(\phi)|^s\right) \leq C, \qquad \sup_{T\geq 1} \mathrm{E}\left(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |\xi_{0,T}(\phi)|^s\right) \leq C.$$

于是，

$$\sup_{\phi\in[-\bar{\phi},\bar{\phi}]} \sup_{x\in[0,1]} |\hat{g}(x) - g(x)| = O(h^2) + O_p\left(\sqrt{\frac{\ln(T)}{Th}}\right).$$

此外，若通过要求 $s > 4$ 加强假设 A.6(ii)，且带宽满足定理 2 中的 (15)，则相同结果几乎必然成立。从平稳解 $V_{0,T}(\phi)$ 抽取 $V_{0,T}(\phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{-j,T}$

## 3.1 蒙特卡洛模拟

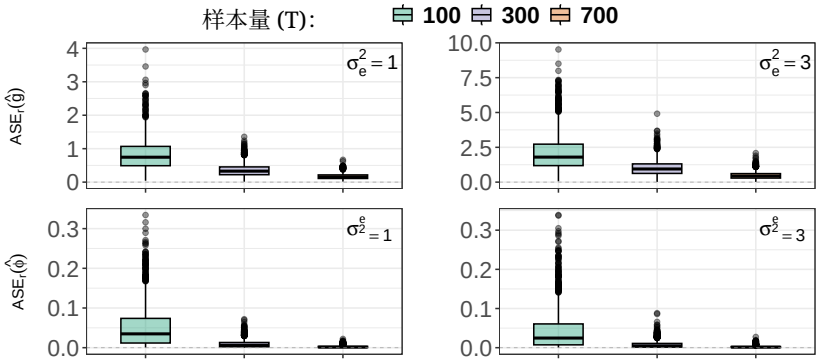
我们通过蒙特卡洛实验分析本节所介绍估计量的有限样本表现。对（ 18 19 $g\ u\ = -70 +$）-（）中 $134u - 120$ $1.1\ u - 0.56$ $\phi\ u\ = 0.755 + 0.02e^{-0.36u}$ $1.72\pi u + 2.1$ $e_{t\,T} \overset{i.i.d.}{\sim} N\ 0\ \sigma_e^2$ 定义的模型进行模拟，其中（）为 tanh(( ))，（）为 sin( )，,(,)，以及 $V_{0,T} \sim N(0, \sigma_e^2/(1 - [\phi(0)]^2))$。对于样本量 $T \in \{100, 300, 700\}$ 和参数 $\sigma_e^2 \in \{1, 3\}$ 的每种组合，模拟重复 $N = 2{,}000$ 次。

ˆ 通过平均均方误差（MASE）评估估计量 ˆ$g$ and $\phi$ 的表现。令 ˆ$m$ 表示 $m$的估计量，并假设有 $N$次重复模拟。随后，对每个 $r \in \{1, \cdots, N\}$计算 ASE$_r$( ˆ$m$) := $T^{-1}\sum_{t=1}^{T}$( ˆ$m(t/T)$ $- m(t/T))^2$。相应地，MASE 定义为所有重复模拟的 ASE 平均值，即 $L$( ˆ$m$) := $N^{-1}\sum_{r=1}^{N}$ ASE$_r$( ˆ$m$)。采用$hv$块交叉验证法（Racine，2000）选择带宽，以考虑弱依赖，并使用 Epanechnikov核进行平滑。

表1总结了模拟结果，其中报告了估计量 ˆ$g$ 和 $\phi$的 MASE 值。图1中的箱线图直观展示了其有限样本行为。结果表明，随着 $T$ 增加，MASE 值趋近于零，说明样本量越大，估计精度越高。这一实证表现与第2节确立的渐近结果一致。

表1：蒙特卡洛模拟结果。

| | $L(\hat{g})$ | $L(\hat{\phi})$ | $L(\hat{g})$ | $L(\hat{\phi})$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $\sigma_e^2 = 1$ | | $\sigma_e^2 = 3$ | |
| 100 | 0.816 | 0.051 | 2.139 | 0.043 |
| 300 | 0.360 | 0.009 | 1.012 | 0.008 |
| 700 | 0.171 | 0.002 | 0.477 | 0.002 |




ˆ 图1：$ASE_r(\hat{g})$ 和 $ASE_r(\phi)$ 的值的箱线图。

## 3.2 海平面异常的实证应用

我们将两步估计程序应用于黑海月平均海平面异常（SLA）数据。黑海是位于东南欧的半封闭海，与地中海的海水交换有限。其沿海地区土壤肥沃、生态系统丰富，为人类聚居提供了有利条件（Grinevetsky 等人（2015）），因此受到众多科学研究的关注。黑海沿岸海平面上升带来的主要威胁是海岸侵蚀和海水入侵（Av˛sar 和 Kuto˘glu（2020））。在考虑沿海安全问题时，与全球平均海平面相比，区域平均海平面更为重要（Milne 等人（2009）；Stammer 等人（2013））。

基于验潮仪和卫星测高观测数据，多项研究报告称，自19世纪60年代以来，黑海海平面总体呈正斜率趋势（Ginzburg 等人，2011；Boguslavsky 等人，1998；Alpar 等人，2000；Av˛sar 和 Kuto˘glu，2020）。平均海平面在1993-1999年间急剧上升（Cazenave 等人（2002）），随后在1999年-2023年间呈现较为平稳的上升趋势，并略有交替的上下波动（Av˛sar 和 Kuto˘glu（2020）；Wen 等人（2025））。特别是，Wen 等人（2025）记录到2020年后海平面快速上升。

我们使用来自欧盟哥白尼海洋服务的卫星测高数据集（DOI：10.48670/moi-00145；访问日期：2025年11月8日），该数据集对应于全球海洋网格化 L4 海面高度及其衍生变量再处理产品。黑海区域的地理覆盖范围界定为北纬40°—48°、东经26.5°—42°。对该区域内的每日海平面异常采用纬度余弦权重进行空间平均，并按时间汇总为月平均值。随后，使用 ICE5G-VM2 模型（Peltier，2004）对所得月序列进行冰川均衡调整（GIA）校正；根据多伦多大学资料库中的垂直陆地运动数据（访问日期：2025年11月8日），估算的区域 GIA 速率约为 0.145 毫米/年。样本涵盖 1999年1月至2025年4月（$T = 383$）。这些数据表示网格化海平面

异常，相对于1993—2012年平均参考期。采用 Vogt 和 Linton（2014年）提出的估计量去除年周期和半年周期。所得黑海海平面异常时间序列如图2所示（实线）。

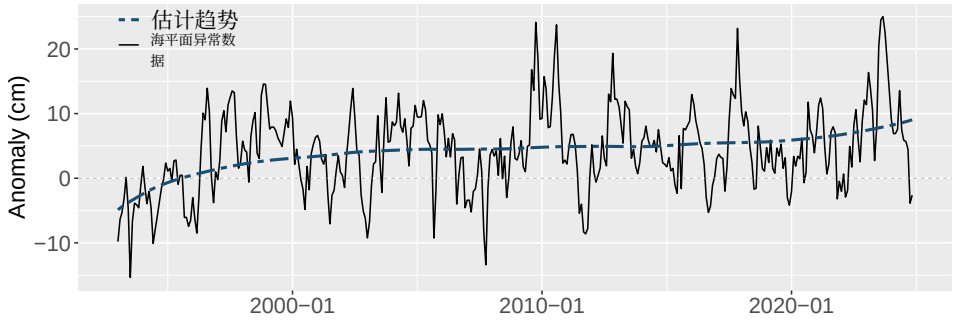



图2：黑海月度海平面异常。

使用我们的两步估计程序将模型 (18)-(19) 拟合到黑海海平面异常时间序列，得到趋势函数 $g$ 和自回归函数 $\phi$的估计值。式 (19) 中的自回归设定对于解释一般海平面异常时间序列中的短期持续性至关重要。该项捕捉长期平均轨迹的瞬时偏离，使模型能够将确定性长期趋势与短期动态区分开来。所选带宽和核函数分别对应$hv$-块带宽$h_0 \approx 0.29$ 和 $v_0 \approx 0.29$，以及Epanechnikov核。

图2还展示了估计的趋势函数 $\hat{g}$ （蓝色虚线）。在整个研究期间，该函数总体呈上升轨迹，表现为早期减速，随后在后半段加速。具体而言，趋势在1993—2000年大幅上升，此后直至2020年缓慢上升，并在2020—2025年明显加速。这种模式与前文提及的研究文章一致。

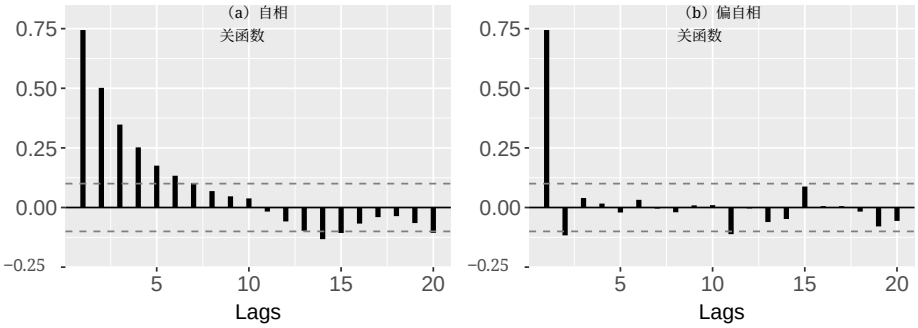


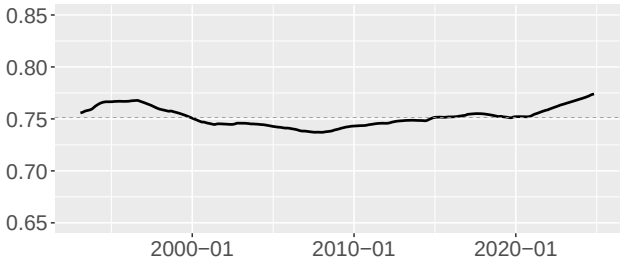

图3：第一步残差诊断。

表2：拟合ARMA模型的贝叶斯信息准则。

| | 滑动平均(0) | 滑动平均(1) | 滑动平均(2) | 滑动平均(3) | 滑动平均(4) |
|---|---|---|---|---|---|
| 自回归(0) | 2468.32 | 2256.87 | 2192.68 | 2183.90 | 2178.63 |
| 自回归(1) | 2160.11 | 2160.76 | 2166.69 | 2172.22 | 2177.93 |
| 自回归(2) | 2161.04 | 2166.70 | 2172.11 | 2177.69 | 2183.62 |
| 自回归(3) | 2166.57 | 2172.45 | 2172.57 | 2176.69 | 2182.51 |
| 自回归(4) | 2172.39 | 2177.70 | 2183.62 | 2189.57 | 2188.58 |

$\hat{}$ 我们使用标准诊断程序简要分析第一步残差 $V_{t,\ T} = Y_{t,\ T} - \hat{}g(t/T)$。图3(b)显示，偏自相关函数（PACF）在滞后1之后急剧下降

而自相关函数（ACF）则逐渐衰减，如图3(a)所示。图3中的水平虚线表示Bartlett近似95%置信限，$\pm 1.96/\sqrt{T}$，其对应于无自相关的原假设。对若干ARMA模型（表2）的考察表明，最低的贝叶斯信息准则（BIC）对应于AR(1)设定，其自回归参数约为 $\phi \approx 0.75$。特别是，只要 $\phi(\cdot)$ 不随时间发生过度变化，这一发现就支持模型（19）对数据的适用性。




ˆ 图4：自回归函数的估计值 $\phi$。

ˆ 根据公式（25）得到的估计值 $\phi$ 显示于图4中，这表明持续性程度适中且稳定，在整个样本期内数值均接近0.75。结合先前的残差分析，这些结果进一步支持模型（19）适用于该数据。

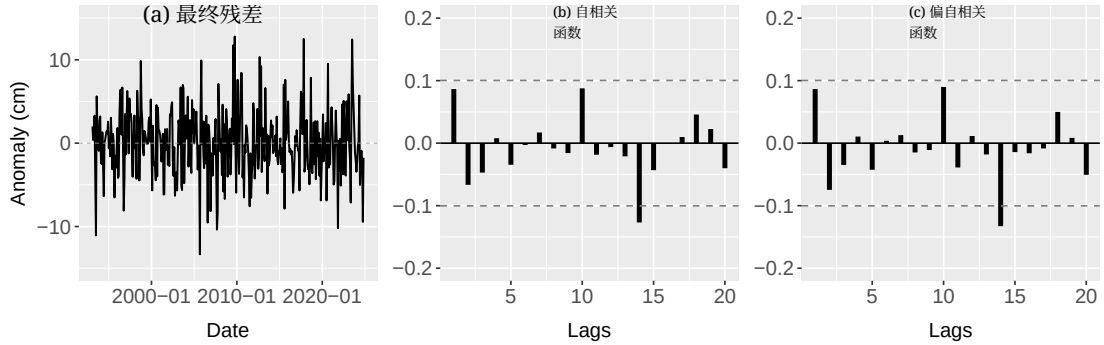



图5：最终残差诊断。

ˆ ˆ ˆ ˆ 给定估计值 ˆ$g$和 $\phi$，我们计算最终残差 ˆ$e_{t,\ T} = V_{t,\ T} - \phi(t/T)V_{t-1,\ T}$，如图5(a)所示。图5(b)和图5(c)中的相应自相关函数和偏自相关函数未显示出序列相依性的有力证据。表3报告了截至滞后30的Ljung-Box检验的p值。所有p值均超过传统显著性水平，这意味着没有充分证据拒绝最终残差不存在零自相关的原假设。这些最终残差的结果进一步支持了拟合模型总体上的适 adequacy。

表3：Ljung-Box检验的p值。

| Lag | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 | 25 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p值 | 0.20 | 0.53 | 0.42 | 0.66 | 0.27 | 0.42 | 0.49 | 0.49 | 0.53 | 0.67 | 0.76 |

# 4 结论

我们已在等距网格点的固定设计情形下，建立了强混合条件下通用核平均的弱一致收敛速率和强一致收敛速率

$x_{t,\ T} = t/T$。本研究跳脱经典的随机设计框架，开发了适用于确定性网格结构的工具。因此，我们得以在不依赖基于密度的条件化论证的情况下，获得 Hansen (2008) 和 Kristensen (2009) 结果在固定设计情形下的对应结论。这些速率对于设计空间和不断扩大的参数集均一致，并适用于依赖于参数的三角阵列。我们在不施加平稳性假设的情况下，建立了弱一致收敛和几乎处处一致收敛。不过，几乎处处收敛的结果需要更强的矩条件和混合条件。

作为示例，我们将一般理论应用于带有时变自回归误差的局部线性回归，推导了估计量的一致收敛速率，并用蒙特卡洛实验和实际数据应用补充了理论分析。

总体而言，这些结果为确定性设计下非平稳时间序列模型中基于核的推断提供了理论基础，这是实践中经常遇到的情形。

## 资助声明

本工作得到巴西教育部CAPES基金会（资助编号140650/2016-4）的支持。

## 利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

## 数据可用性声明

本研究使用的数据可从哥白尼海洋服务（https://doi.org/10.48670/moi-00145）公开获取。实证分析所依据的处理后数据可按照本文所述程序从该来源复现。

## 参考文献

Alpar, B., Dogan, E., Yuce, H., and Altiok, H.（2000）。黑海、爱琴海和东地中海土耳其沿岸的海平面变化。《地中海海洋科学》，1(1):141–156。Andrews, D. W.（1995）。半参数模型的非参数核估计。《计量经济学理论》，第560–596页。Av̧sar, N. B. and Kuto˘glu, S̩. H.（2020）。基于卫星测高和潮位计观测的黑海近期海平面变化。《*ISPRS*国际地理信息杂志》，9(3):185。Bandi, F. M. and Phillips, P. C.（2003）。标量扩散模型的完全非参数估计。《计量经济学》，71(1):241–283。Bierens, H. J.（1983）。广义条件下回归函数核估计量的一致相合性。《美国统计学会会刊》，78(383):699–707。

Boguslavsky, S., Kubryakov, A., and Ivashchenko, I.（1998）。黑海海平面变化。物理海洋学，9(3):199–208。Bosq, D.（2012）。随机过程的非参数统计：估计与预测。统计学讲义。Springer New York。Cai, Z.（2007）。存在序列相关误差的趋势时变系数时间序列模型。计量经济学杂志，136(1):163–188。Cazenave, A., Bonnefond, P., Mercier, F., Dominh, K., and Toumazou, V.（2002）。基于卫星测高和潮位计的地中海与黑海海平面变化。全球与行星变化，34(1-2):59–86。Creel, M. and Kristensen, D.（2012）。利用模拟非参数矩估计动态潜变量模型。计量经济学杂志，15(3):490–515。Dahlhaus, R., Neumann, M. H., Von Sachs, R., et al.（1999）。时变自回归过程的非线性小波估计。*Bernoulli*，5(5):873–906。El Machkouri, M.（2007）。固定设计下随机场的非参数回归估计。随机过程统计推断，10(1):29–47。Fan, J. and Yao, Q.（2003）。非线性时间序列：非参数与参数方法。Springer Science & Business Media。Fern´andez, M. F. and Fern´andez, J. M. V.（2001）。相关误差下的局部多项式回归估计。《统计学通讯：理论与方法》，30(7):1271–1293。Ferraty, F. and Vieu, P.（2006）。函数型数据的非参数分析：理论与实践。Springer。Francq, C. and Zako¨ıan, J.-M.（2005）。关于相依性可随样本量增长的变量混合三角阵列的中心极限定理。《计量经济学理论》，第1165–1171页。Ginzburg, A. I., Kostianoy, A. G., Sheremet, N. A., and Lebedev, S. A.（2011）。卫星测高在黑海中的应用。载于海岸测高，第367–387页。Springer。Grinevetsky, S. R., Zonn, I. S., Zhiltsov, S. S., Kosarev, A. N., and Kostianoy, A. G.（2015）。《黑海百科全书》。Springer。Hall, P. and Hart, J. D.（1990）。长程依赖下的非参数回归。随机过程及其应用，36(2):339–351。Hansen, B. E.（2008）。相依数据下核估计的一致收敛速率。《计量经济学理论》，24(3):726–748。Hirukawa, M., Murtazashvili, I., and Prokhorov, A.（2022）。贝塔核平滑非参数估计量的一致收敛速率。斯堪的纳维亚统计学杂志。Horn, R. A. and Johnson, C. R.（2012）。矩阵分析。剑桥大学出版社。Kim, T. Y. and Lee, S.（2005）。强混合过程的核密度估计量。《统计规划与推断杂志》，133(2):273–284。Kong, E., Linton, O., and Xia, Y.（2010）。m回归局部多项式估计的一致Bahadur表示及其在加性模型中的应用。《计量经济学理论》，第1529–1564页。

Kristensen, D. (2009). 异质相关数据下核估计量的一致收敛速率。《计量经济学理论》, 25(5):1433–1445. Kristensen, D. (2010). 已实现即期波动率的非参数滤波：一种基于核的方法。《计量经济学理论》, pages 60–93. Kristensen, D. and Shin, Y. (2012). 使用非参数模拟极大似然法估计动态模型。计量经济学杂志, 167(1):76–94. Li, Q. and Wooldridge, J. M. (2002). 使用生成回归元对相依数据的部分线性模型进行半参数估计。《计量经济学理论》, 18(3):625–645. Li, X., Yang, W., and Hu, S. (2016). 相依数据非参数回归估计量的一致收敛。《不等式与应用杂志》, 2016(1):1–12. Liebscher, E. (1996). $\alpha$-混合随机变量和的强收敛及其在密度估计中的应用。随机过程及其应用, 65(1):69–80. Masry, E. (1996). 时间序列的多元局部多项式回归：一致强相合性与收敛速率。《时间序列分析杂志》, 17(6):571–599. Milne, G. A., Gehrels, W. R., Hughes, C. W., and Tamisiea, M. E. (2009). 确定海平面变化的成因。自然·地球科学, 2(7):471–478. M¨uller, H.-G. (1991). 端点附近的平滑最优核估计量。*Biometrika*, 78(3):521–530. Nze, P. A. and Doukhan, P. (2004). 弱依赖：模型及其在计量经济学中的应用。《计量经济学理论》, 20(6):995–1045. Orbe, S., Ferreira, E., and Rodriguez-Poo, J. (2005). 形状约束下时变参数的非参数估计。计量经济学杂志, 126(1):53–77. Peligrad, M. (1992). 依赖假设下密度和回归函数核估计量一致相合性的性质。《随机过程与随机过程概率国际期刊》, 40(3-4):147–168. Peltier, W. R. (2004). 全球冰川均衡调整与冰期地球表面：ICE-5G（VM2）模型和GRACE。《地球与行星科学年度评论》, 32(1):111–149. Racine, J. (2000). 相依数据的一致交叉验证模型选择：hv区组交叉验证。《计量经济学杂志》, 99(1):39–61. Rio, E. et al. (1995). 平稳强混合序列的重对数律泛函定律。《概率年刊》, 23(3):1188–1203. Robinson, P. M. (1989). 时变参数的非参数估计, pages 253– 264. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. Rudin, W. (1976). 数学分析原理. 纯粹与应用数学国际丛书。McGraw-Hill, 第3版。Stammer, D., Cazenave, A., Ponte, R. M., a nd Tamisiea, M. E. (2013). 当代区域海平面变化的成因。《海洋科学年度评论》, 5:21–46. Tsybakov, A. (2008). 非参数估计导论. 统计学系列丛书。S

pring尔纽约。

Vogt, M. 和 Linton, O.（2014年）。存在平滑趋势时周期序列的非参数估计。*Biometrika*, 101(1):121–140。

Wand, M. P. and Jones, M. C. (1994). 核平滑。Chapman and Hall/CRC。

Wen, Z.、Saemian, P.、Xu, F.、Sun, W. 和 Tourian, M. J.（2025）。过去二十年黑海海平面变率及其驱动因素。《Geophysical Journal International》，243(1):ggaf316。

Withers, C. S.（1981）。相依变量的中心极限定理。i. *Zeitschrift f¨urWahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*，57(4):509–534。

Xia, Y. and H¨ardle, W.（2006）。部分线性单指标模型的半参数估计。《Journal of Multivariate Analysis》，97(5):1162–1184。

Yu, B.（1993）。相依数据的 $L^\infty$ 范数密度估计及其在吉布斯采样器中的应用。《The Annals of Statistics》，21(2):711–735。

# 附录 A：证明

我们使用以下记号：$[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ 对任意 $k \in \mathbb{N}$，$\sup_x := \sup_{x\in[0,1]}$，$\sup_\gamma := \sup_{\gamma\in\Theta_T}$，$\sup_i := \sup_{1\le i\le T}$，$\sup_T := \sup_{T\ge 1}$，$\sup_{T,i} := \sup_T \sup_i$ 以及 $\sup_{x,\gamma} := \sup_x \sup_\gamma$。定理1的证明。为简洁起见，记 $k_{i,T}(x) := K((i/T - x)/h)$ 和 $\pi_{i,j,T}(x) := ((i/T - x)/h)^j$。分解

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(x,\gamma) &= \frac{1}{Th}\sum_{i=1}^{T} \epsilon_{i,T}(\gamma) k_{i,T}(x) \pi_{i,j,T}(x) I(|\epsilon_{i,T}(\gamma)| > \tau_T) \\ &\quad + \frac{1}{Th}\sum_{i=1}^{T} \epsilon_{i,T}(\gamma) k_{i,T}(x) \pi_{i,j,T}(x) I(|\epsilon_{i,T}(\gamma)| \le \tau_T) \\ &:= R_{1,T}(x,\gamma) + R_{2,T}(x,\gamma),\end{aligned}$$

其中 $I(\cdot)$ 是示性函数，且 $\tau_T := (a_T h)^{-1/(s-1)}$，其中 $a_T := (\ln T/(Th))^{1/2}$。证明通过控制 $R_{1,T}(x, \gamma)$ 的贡献来进行，然后在 $[0,1] \times \Theta_T$ 中的合适网格上，对截断项 $R_{2,T}(x, \gamma)$ 应用指数不等式。

我们首先关注 $R_{1,T}$。记 $Y_{i,T} := \sup_\gamma |\epsilon_{i,T}(\gamma)|$。根据 H¨older 不等式、Markov 不等式以及条件 (9)，对 $i \in [T]$ 一致地有，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y_{i,T} I(Y_{i,T} > \tau_T)) &\le [\mathrm{E}(Y_{i,T}^s)]^{\frac{1}{s}} [P(Y_{i,T} > \tau_T)]^{1-\frac{1}{s}} \le [\mathrm{E}(Y_{i,T}^s)]^{\frac{1}{s}} \left[\frac{\mathrm{E}(Y_{i,T}^s)}{\tau_T^s}\right]^{1-\frac{1}{s}} \\ &= \mathrm{E}(Y_{i,T}^s)\tau_T^{1-s} \le C(1 + d_T^\lambda)\tau_T^{1-s} \le C d_T^\lambda \tau_T^{1-s}. \qquad (26)\end{aligned}$$

另一方面，根据引理 2，存在一个仅依赖于 $j$ 的 $C_j > 0$，使得

$$\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}(x,\gamma)| \le \frac{C_j}{Th}\sum_{i=1}^{T} Y_{i,T} I(|Y_{i,T}| > \tau_T). \qquad (27)$$

因此，对（27）取期望并利用不等式（26），存在 $c_1 > 0$ 使得

$$\mathrm{E}\left(\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}(x,\gamma)|\right) \le \frac{C_j}{Th}\sum_{i=1}^{T} \mathrm{E}\left(Y_{i,T} I(|Y_{i,T}| > \tau_T)\right) \le \frac{c_1}{h} d_T^\lambda \tau_T^{1-s} = c_1 d_T^\lambda a_T. \qquad (28)$$

因此，根据马尔可夫不等式，对所有 $\delta > 0$，取 $C_\delta = 2c_1/\delta$，我们有

$$P\Big(\sup_{x,\gamma}|R_{1,T}(x,\gamma) - \mathrm{E}\, R_{1,T}(x,\gamma)| > C_\delta d_T^\lambda a_T\Big) \le \frac{2}{C_\delta d_T^\lambda a_T}\,\mathrm{E}\,\Big(\sup_{x,\gamma}|R_{1,T}(x,\gamma)|\Big) \le \delta,$$

这表明

$$\sup_{x,\gamma}|R_{1,T}(x,\gamma) - \mathrm{E}\, R_{1,T}(x,\gamma)| = O_p(d_T^\lambda a_T). \tag{29}$$

Th我们，截断 $\epsilon_{i,\ T}$于 $\tau_T$会产生一个在 $x \in [0,1]$和 $\gamma \in \Theta$上均匀的 $O_p(d_T^\lambda a_T)$ 误差 $_{\ T}$.

现在，在对 $R_{2\ T}^{(a)}$ 进行界定之前，我们先给出一些有用的结果。用$N = \lceil d_T^m/$个$a_T h$矩形覆盖集合 $A = [0,1]\times\Theta_T$，其形式为 $A_j = \{(x,\gamma):\ |x - x_j| \le a_T h, \|\gamma - \gamma_j\| \le a_T h\}$，其中中心 $(x_l,\gamma_l)$ 选自 $A$，使得 $[0,1]\times\Theta_T \subseteq \bigcup_{j=1}^N A_j$。令 $\epsilon_{i,T}^*(\gamma) := \epsilon_{i,T}(\gamma) I(|\epsilon_{i,T}(\gamma)| \le \tau_T)$，以及 $k_{i,T}^*(x) := K^*((i/T - x)/h)$，其中 $K^*(x) = \Lambda_1 I(|x| \le 2L_1)$。定义

$$\tilde{\Psi}_j(x,\gamma) = (Th)^{-1}\sum_{i=1}^T |k_{i,T}^*(x)\pi_{i,j,T}(x)\epsilon_{i,T}^*(\gamma)|,$$
$$\underline{\Psi}_j(x,\gamma) = (Th)^{-1}\sum_{i=1}^T |k_{i,T}(x)\pi_{i,j,T}(x)|\xi_{i,T}(\gamma),$$

其中 $\xi_{i,T}(\gamma)$ 在假设 A.3 中引入。根据假设 A.3、引理 3-4 与$g(u) = |u|$，以及 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big|\tilde{\Psi}_k(x,\gamma)\big| &\le \frac{C(1+d_T^\lambda)^{\frac{1}{s}}}{Th}\sum_{i=1}^T |k_{i,T}^*(x)\pi_{i,k,T}(x)| \\
&= \frac{C d_T^{\frac{\lambda}{s}}}{h}\left\{h\int_R |K^*(w)||w|^k dw + O(1/T)\right\} = O\big(d_T^{\lambda/s}\big), \qquad (30)\\
\mathrm{E}\big|\underline{\Psi}_k(x,\gamma)\big| &\le \frac{C(1+d_T^\lambda)^{\frac{1}{s}}}{Th}\sum_{i=1}^T |k_{i,T}(x)\pi_{i,k,T}(x)| \\
&= \frac{C d_T^{\frac{\lambda}{s}}}{h}\left\{h\int_R |K(w)||w|^k dw + O(1/T)\right\} = O\big(d_T^{\lambda/s}\big) \qquad (31)
\end{aligned}$$

对任意 $k \le j$，且关于 $x \in [0,1]$和 $\gamma \in \Theta_T$一致成立，因为上文出现的两个积分均为 $O(1)$。

固定 $l \in \{1,\dots,N\}$和 $(x,\gamma) \in A_l$。那么

$$\begin{aligned}
|R_{2,T}(x,\gamma) - R_{2,T}(x_l,\gamma_l)| \le{}& \frac{1}{Th}\sum_{i=1}^T |\epsilon_{i,T}^*(\gamma)||\pi_{i,j,T}(x)||k_{i,T}(x) - k_{i,T}(x_l)| \\
&+ \frac{1}{Th}\sum_{i=1}^T |k_{i,T}(x_l)||\pi_{i,j,T}(x_l)||\epsilon_{i,T}^*(\gamma) - \epsilon_{i,T}^*(\gamma_l)| \\
&+ \frac{1}{Th}\sum_{i=1}^T |\epsilon_{i,T}^*(\gamma)||k_{i,T}(x_l)||\pi_{i,j,T}(x) - \pi_{i,j,T}(x_l)| \\
:= {}& A_T + B_{j,T} + C_T,
\end{aligned}$$

为简洁起见，略微滥用一下记号。我们声称

$$A_T \le 2^{j-1} a_T\big(\tilde{\Psi}_j(x_l,\gamma) + \tilde{\Psi}_0(x_l,\gamma)\big), \tag{32}$$
$$C_T \le j 2^j a_T(\tilde{\Psi}_d(x_l,\gamma) + \tilde{\Psi}_0(x_l,\gamma)) \tag{33}$$

其中 $d = \max\{0, j-1\}$，且对所有 $k \le j$

$$B_{k,T} \le a_T h \underline{\Psi}_k(x_l,\gamma_l) + U_{l,T} \tag{34}$$

with

$$U_{l,T} \coloneqq \frac{2}{Th}\sum_{i=1}^{T} |k^*_{i,T}(x_l)||\pi_{i,k,T}(x_l)| \sup_\gamma |\epsilon_{i,T}(\gamma)| I\Big(\sup_\gamma |\epsilon_{i,T}(\gamma)| > \tau_T\Big), \tag{35}$$

其满足

$$\max_{1\le l\le N} U_{l,T} = O_p(d_T^\lambda a_T) \quad \text{and} \quad \mathrm{E}\left(\max_{1\le l\le N} U_{l,T}\right) \le C d_T^\lambda a_T. \tag{36}$$

将 (32)-(36) 的证明推迟到论证完成后。因此，利用界 (30)-(34)，对于所有充分大的 $T$，我们得到

$$\begin{aligned}
|R_{2,T}(x,\gamma) - \mathrm{E}\, R_{2,T}(x,\gamma)| &\le |R_{2,T}(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\, R_{2,T}(x_l,\gamma_l)| \\
&\quad + |R_{2,T}(x,\gamma) - R_{2,T}(x_l,\gamma_l)| + \mathrm{E}|R_{2,T}(x,\gamma) - R_{2,T}(x_l,\gamma_l)| \\
&\le |R_{2,T}(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\, R_{2,T}(x_l,\gamma_l)| + (A_T + \mathrm{E}\, A_T) + (B_{j,T} + \mathrm{E}\, B_{j,T}) + (C_T + \mathrm{E}\, C_T) \\
&\le |R_{2,T}(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\, R_{2,T}(x_l,\gamma_l)| + C a_T \sum\nolimits_{k\in\{0,d,j\}} \big(\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma) + \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma)\big) \\
&\quad + a_T h\big(\underline{\Psi}_j(x_l,\gamma_l) + \mathrm{E}\,\underline{\Psi}_j(x_l,\gamma_l)\big) + U_{l,T} + C d_T^\lambda a_T \\
&\le |R_{2,T}(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\, R_{2,T}(x_l,\gamma_l)| + C a_T \sum\nolimits_{k\in\{0,d,j\}} \big|\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma)\big| \\
&\quad + a_T h\big|\underline{\Psi}_j(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\,\underline{\Psi}_j(x_l,\gamma_l)\big| + U_{l,T} + C d_T^\lambda a_T.
\end{aligned} \tag{37}$$

通过 (37) 中 $R_{2,T}$ 所用的类似论证，我们对任意 $k \le j$ 得到

$$\begin{aligned}
\big|\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma)\big| &\le \big|\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma_l)\big| \\
&\quad + a_T h\big|\underline{\Psi}_k(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\,\underline{\Psi}_k(x_l,\gamma_l)\big| + U_{l,T} + C d_T^\lambda a_T.
\end{aligned} \tag{38}$$

因此，结合 (32)-(38)，并取足够大的 $T$，利用 $Ca_T \le 1$ 可得

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,\gamma)\in A_l} |R_{2,T}(x,\gamma) - \mathrm{E}\, R_{2,T}(x,\gamma)| &\le |R_{2,T}(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\, R_{2,T}(x_l,\gamma_l)| \\
&\quad + \sum\nolimits_{k\in\{0,j,d\}} \Big\{\big|\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma_l)\big| + a_T h\big|\underline{\Psi}_k(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\,\underline{\Psi}_k(x_l,\gamma_l)\big|\Big\} \\
&\quad + 4U_{l,T} + C d_T^\lambda a_T \\
&\le \underbrace{|R_{2,T}(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\, R_{2,T}(x_l,\gamma_l)|}_{\coloneqq L_{l,T}^R} + \sum\nolimits_{k\in\{0,j,d\}} \underbrace{\big|\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_k(x_l,\gamma_l)\big|}_{\coloneqq L_{l,T}^{\tilde{\Psi},k}} \\
&\quad + \sum\nolimits_{k\in\{0,j,d\}} \underbrace{a_T h\big|\underline{\Psi}_k(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\,\underline{\Psi}_k(x_l,\gamma_l)\big|}_{Q_{l,T}^{\xi,k}} + 4U_{l,T} + C d_T^\lambda a_T \\
&\coloneqq L_{l,T}^R + \sum\nolimits_{k\in\{0,j,d\}} L_{l,T}^{\tilde{\Psi},k} + \sum\nolimits_{k\in\{0,j,d\}} Q_{l,T}^{\xi,k} + 4U_{l,T} + C d_T^\lambda a_T.
\end{aligned} \tag{39}$$

注意，中心化项 $Q^{\xi,k}_{l,T} = a_T h|\Psi_k(x_l,\gamma_l) - \mathrm{E}\,\Psi_k(x_l,\gamma_l)|$ 未必有界，因此不能直接应用 Liebscher-Rio 不等式（引理 8）。为解决这一问题，将 $\Psi_k = \Psi_k^{(a)} + \Psi_k^{(b)}$ 分解为

$$\begin{aligned}\underline{\Psi}_k^{(a)}(x_l,\gamma_l) &= (Th)^{-1}\sum_{i=1}^{T}|k_{i,T}(x_l)\pi_{i,k,T}(x_l)|\xi_{i,T}(\gamma_l)I(\xi_{i,T}(\gamma_l) > \tau_T)\\ \underline{\Psi}_k^{(b)}(x_l,\gamma_l) &= (Th)^{-1}\sum_{i=1}^{T}|k_{i,T}(x_l)\pi_{i,k,T}(x_l)|\xi_{i,T}(\gamma_l)I(\xi_{i,T}(\gamma_l) \le \tau_T).\end{aligned}$$

然后，根据三角不等式

$$Q^{\xi,k}_{l,T} \le a_T h\big|\underline{\Psi}_k^{(a)} - \mathrm{E}\,\underline{\Psi}_k^{(a)}\big| + \big|\underline{\Psi}_k^{(b)} - \mathrm{E}\,\underline{\Psi}_k^{(b)}\big| := M^{\xi,k}_{l,T} + L^{\xi,k}_{l,T}, \tag{40}$$

因为当 $T$ 足够大时， $a_T h \le 1$

不等式（39）–（40）给出

$$\sup_{(x,\gamma)\in A_l}\big|R_{2,T}(x,\gamma) - \mathrm{E}\,R_{2,T}(x,\gamma)\big| \le L_{l,T} + M_{l,T} + 4U_{l,T} + Cd_T^{\lambda}a_T, \tag{41}$$

其中

$$L_{l,T} := L^{R}_{l,T} + \sum_{k\in\{0,d,j\}} L^{\tilde{\Psi},k}_{l,T} + \sum_{k\in\{0,d,j\}} L^{\xi,k}_{l,T} \quad \text{and} \quad M_{l,T} := \sum_{k\in\{0,d,j\}} M^{\xi,k}_{l,T}.$$

$L_{l,T}$ 由有界加项的中心化核平均组成，因此可通过 Liebscher-Rio 不等式进行控制，而 $M_{l,T}$ 汇集了剩余的尾项，并可通过马尔可夫不等式进行控制。

记 $e_T(x,\gamma) := |R_{2,T}(x,\gamma) - ER_{2,T}(x,\gamma)|$。由于 $A = [0,1]\times\Theta_T \subseteq \bigcup_{l=1}^{N} A_l$ 且不等式（41）成立，对于所有 $C>0$，以下可测集关系均成立：

$$\begin{aligned}\left\{\sup_{(x,\gamma)\in A} e_T(x,\gamma) > C\right\} &\subseteq \left\{\sup_{(x,\gamma)\in\cup A_l} e_T(x,\gamma) > C\right\} = \left\{\max_{1\le l\le N}\sup_{(x,\gamma)\in A_l} e_T(x,\gamma) > C\right\}\\ &\subseteq \left\{\max_{1\le l\le N} L_{l,T} + M_{l,T} + 4U_{l,T} > C\right\}\\ &\subseteq \left\{\max_{1\le l\le N} L_{l,T} > C/3\right\}\bigcup\left\{\max_{1\le l\le N} M_{l,T} > C/3\right\}\bigcup\left\{\max_{1\le l\le N} U_{l,T} > C/12\right\}\\ &\subseteq \left(\bigcup_{l=1}^{N}\left\{L_{l,T} > C/3\right\}\right)\bigcup\left\{\max_{1\le l\le N} M_{l,T} > C/3\right\}\bigcup\left\{\max_{1\le l\le N} U_{l,T} > C/12\right\}.\end{aligned}$$

因此，根据测度的单调性和次可加性，

$$\begin{aligned}&P\left(\sup_{(x,\gamma)\in A}|R_{2,T}(x,\gamma) - ER_{2,T}(x,\gamma)| > 21Cd_T^{\lambda}a_T\right)\\ &\quad\le P\left(\max_{1\le l\le N} M_{l,T} > 6Cd_T^{\lambda}a_T\right) + P\left(\max_{1\le l\le N} U_{l,T} > (21/12)Cd_T^{\lambda}a_T\right)\\ &\qquad + \sum_{l=1}^{N} P\left(L_{l,T} > 7Cd_T^{\lambda}a_T\right)\\ &\quad\le \underbrace{P\left(\max_{1\le l\le N}\max_{0\le k\le j} M^{\xi,k}_{l,T} > 6Cd_T^{\lambda}a_T\right)}_{:=T_0^{(M)}} + \underbrace{P\left(\max_{1\le l\le N} U_{l,T} > Cd_T^{\lambda}a_T\right)}_{:=T_0^{(U)}}\end{aligned}$$

$$+\underbrace{N\max_{1\le l\le N}P(L_{l,T}^{R}>Cd_T^{\lambda}a_T)}_{:=T_1}+\underbrace{\sum_{k\in\{0,d,j\}}N\max_{1\le l\le N}P(L_{l,T}^{\tilde{\Psi},k}>Cd_T^{\lambda}a_T)}_{:=\sum_{q=2}^{4}T_q}$$
$$+\underbrace{\sum_{k\in\{0,d,j\}}N\max_{1\le l\le N}P(L_{l,T}^{\xi,k}>Cd_T^{\lambda}a_T)}_{:=\sum_{q=5}^{7}T_q}$$
$$:=T_0^{(M)}+T_0^{(U)}+\sum\nolimits_{q=1}^{7}T_q, \tag{42}$$

当 $T$ 充分大时。由 (36)，我们已有 $\max_{1\le l\le N}U_{l,T}=O_p(d_T^{\lambda}a_T)$，因此 $T_{(U)\,0}$ 受到控制。接下来，我们处理尾概率 $T_{(M)\,0}$。与 (26) 中的处理方式相同，条件 A.3(5) 意味着 $\mathrm{E}(\sup_\gamma \xi_{i,T}(\gamma)I(\sup_\gamma \xi_{i,T}(\gamma) > \tau_T)) \le Cd_T^{\lambda}\tau_T^{1-s}$。因此，由引理 2 和条件 (10)，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big(\max_{1\le l\le N}\max_{0\le k\le j}\Psi_k^{(a)}(x_l,\gamma_l)\Big) &\le \frac{C_j}{Th}\sum_{i=1}^{T}\mathrm{E}(\sup_\gamma \xi_{i,T}(\gamma)I(\sup_\gamma \xi_{i,T}(\gamma)>\tau_T))\\ &\le C_a\frac{d_T^{\lambda}\tau_T^{1-s}}{h}=C_a d_T^{\lambda}a_T,\end{aligned}$$

对于某个 $C_a>0$，因此利用马尔可夫不等式，

$$\begin{aligned}T_0^{(M)}&=P\Big(\max_{1\le l\le N}\max_{0\le k\le j}M_{l,T}^{\xi,k}>7Cd_T^{\lambda}a_T\Big)\le \mathrm{E}\Big(\max_{1\le l\le N}\max_{0\le k\le j}M_{l,T}^{\xi,k}\Big)\frac{1}{7Cd_T^{\lambda}a_T}\\ &\le 2a_T h\,\mathrm{E}\Big(\max_{1\le l\le N}\max_{0\le k\le j}\Psi_k^{(a)}(x_l,\gamma_l)\Big)\frac{1}{2Cd_T^{\lambda}a_T}\le\frac{C_a a_T h}{C}=o(1).\end{aligned}$$

因此，我们只需关注截断项 $T_1,\ldots,T_7$。接下来利用引理 8（Liebcher-Rio）对 $T_1$进行界定，其余项可用类似方法处理。令

$$Z_{i,T}(x,\gamma):=\epsilon_{i,T}^{*}(\gamma)\pi_{i,j,T}(x)k_{i,T}(x)-\mathrm{E}\left(\epsilon_{i,T}^{*}(\gamma)\pi_{i,j,T}(x)k_{i,T}(x)\right),$$

它满足 $|Z_{i,T}(x,\gamma)|\le 2C_j\tau_T:=b_T$（由引理 2），且 $\mathrm{E}\,Z_{i,T}(x,\gamma)=0$。由于 $K$ 的支撑集为 $[-L_1,L_1]$，我们有

$$R_{2,T}(x,\gamma)-ER_{2,T}(x,\gamma)=\frac{1}{Th}\sum_{i=1}^{T}Z_{i,T}(x,\gamma)=\frac{1}{Th}\sum_{i\in J_x(L_1)}Z_{i,T}(x,\gamma),$$

其中

$$J_x(L_1):=\Big\{i\in\{1,\ldots,T\}:\Big|\frac{i/T-x}{h}\Big|\le L_1\Big\},$$

其基数记为 $n_T(x):=\#J_x(L_1)$，满足 $\sup_x n_T(x)\le 4L_1Th$（引理 1）。由引理9，存在 $C_1>0$，使得对 $(x,\gamma)\in A$ 一致成立，

$$\sigma_{T,m_T}^2(x,\gamma):=\sup_{0\le j\le T-1}E\left[\left(\sum_{i=1}^{m_T}Z_{j+i,T}(x,\gamma)\right)^2\right]\le C_1 d_T^{\lambda}m_T.$$

令 $m_T=(a_T\tau_T)^{-1}$和 $\epsilon=Md_T^{\lambda}a_TTh$，其中 $M>0$是满足 $M>C_1$的任意常数。注意到 $m_T\to\infty$、$m_T\le\sqrt{T}\le T$和 $\frac{m_T b_T}{d_T^{\lambda}a_TTh}=\frac{2\bar{K}\ln T}{d_T^{\lambda}}=o(1)$，——

当 $T$ 足够大时，引理 8（Liebscher-Rio 引理）的条件成立。因此，对于所有 $(x,\gamma) \in A$ 以及所有充分大的 $T$,

$$\begin{aligned}
P(|R_{2,T}(x,\gamma)-ER_{2,T}(x,\gamma)| > Md_T^{\lambda}a_T) &= P\left(\left|\sum_{i\in J_x(L_1)} Z_{i,T}(x,\gamma)\right| > Md_T^{\lambda}a_T Th\right) \\
&\le 4\exp\left(-\frac{(Md_T^{\lambda}a_T Th)^2}{64\sigma^2_{T,m_T} n_T(x)/m_T + (Md_T^{\lambda}a_T Th)b_T m_T 8/3}\right) + 4\alpha_T(m_T)\frac{n_T(x)}{m_T} \\
&\le 4\exp\left(-\frac{(Md_T^{\lambda}a_T Th)^2}{254L_1C_1 d_T^{\lambda}Th + 6Md_T^{\lambda}\bar{K}Th}\right) + 16L_1(Am_T^{-\beta})\frac{Th}{m_T} \\
&\le 4\exp\left[-\frac{Md_T^{\lambda}}{254L_1+6\bar{K}}\ln T\right] + 16L_1 A m_T^{-1-\beta}Th \\
&= 4T^{-Md_T^{\lambda}/(254L_1+6\bar{K})} + 16L_1 ATh(a_T\tau_T)^{1+\beta}. \qquad (43)
\end{aligned}$$

利用与 $T_1$ 相同的论证，对于 $T_2,\ldots,T_7$，同样的界也成立。由于 $N \overset{a}{\approx} d_T^m/(a_T h)^{1+m}$，由 (42)-(43) 可得

$$\sum_{k=1}^{7} T_k = O\left(d_T^m \frac{T^{-Md_T^{\lambda}/(254L_1+6\bar{K})}}{(a_T h)^{1+m}}\right) + O\left(d_T^m \frac{Th(a_T\tau_T)^{1+\beta}}{(a_T h)^{1+m}}\right) := O(S_1) + O(S_2). \qquad (44)$$

若 $\lambda > 0$，则对于任意 $M > 0$，$d_T^{\lambda} \to \infty$ 和 $S_1 = o(1)$ 均成立。若 $\lambda = 0$，则选择足够大的 $M$，使其满足 $S_1 = o(1)$。两种情况下，$S_1 = o(1)$ 均成立。对于 $S_2$，经过简单的代数运算后，我们在 (8) 中使用条件 $1/h = O(T^{\theta}/\ln(T))$，得到

$$\begin{aligned}
S_2 &= T^{mr+1-\frac{(s-2)(1+\beta)}{2(s-1)}+\frac{1+m}{2}} h^{\frac{1-m}{2}-\frac{s(1+\beta)}{2(s-1)}} (\ln T)^{\frac{(s-2)(1+\beta)}{2(s-1)}-\frac{1+m}{2}} \\
&= O\Big(T^{\frac{1}{2(s-1)}\left\{\beta(2-s)+m(s-1)(1+2c)+2s-1+\theta\left[\beta s+m(s-1)+1\right]\right\}} \underbrace{(\ln T)^{-m-\frac{1+\beta}{s-1}}}_{=o(1)}\Big)
\end{aligned}$$

因为 $h$ 的指数是一个严格负数，且 $mr \le mc$。因此，利用条件 (6)，可得 $S_2 = o(1)$。所以，

$$\sup_{(x,\gamma)\in A} |R_{2,T}(x,\gamma) - ER_{2,T}(x,\gamma)| = O_p(d_T^{\lambda}a_T).$$

将这一结果与 (29) 结合，我们得到 $\sup_{(x,\gamma)\in A} |\hat{\Psi}(x,\gamma) - E\hat{\Psi}(x,\gamma)| = O_p(d_T^{\lambda}a_T)$，正如所需。

尚需证明不等式 (32) 和 (34)。固定 $l \in \{1,\ldots,N\}$ 以及 $(x,\gamma) \in A_l$。注意

$$\begin{aligned}
|\pi_{i,j,T}(x)| = \left|\frac{i/T-x}{h}\right|^j &= \left|\frac{i/T-x_l}{h} + \frac{x_l-x}{h}\right|^j \le 2^{j-1}\left(\left|\frac{i/T-x_l}{h}\right|^j + \left|\frac{x_l-x}{h}\right|^j\right) \\
&\le 2^{j-1}\big(|\pi_{i,j,T}(x_l)| + (a_T h)^j\big) \le 2^{j-1}\big(|\pi_{i,j,T}(x_l)| + 1\big) \\
&= 2^{j-1}\big(|\pi_{i,j,T}(x_l)| + |\pi_{i,0,T}(x_l)|\big).
\end{aligned}$$

因此，对 $\delta = a_T$ 应用引理 4，我们有

$$|\epsilon^*_{i,T}(\gamma)||\pi_{i,j,T}(x)||k_{i,T}(x) - k_{i,T}(x_l)| \le 2^{j-1}\big(|\pi_{i,j,T}(x_l)| + |\pi_{i,0,T}(x_l)|\big)a_T|\epsilon^*_{i,T}(\gamma)k^*_{i,T}(x_l)|, \qquad (45)$$

这立即推出（32）。至于（33），注意到利用幂差分解和二项式定理可得

$$|\pi_{i,j,T}(x) - \pi_{i,j,T}(x_l)| \le j2^j\left|\frac{x-x_l}{h}\right|\big(|\pi_{i,d,T}(x_l)| + |\pi_{i,0,T}(x_l)|\big) \le j2^j a_T\big(|\pi_{i,d,T}(x_l)| + |\pi_{i,0,T}(x_l)|\big),$$

其中 $d = \max\{j-1, 0\}$。因此，由于 $|K(u)| \leq |K^*(u)|$ 对于 $u \in \mathbb{R}$,

$$|\epsilon^*_{i,T}(\gamma)||k_{i,T}(x_l)||\pi_{i,j,T}(x) - \pi_{i,j,T}(x_l)| \leq j2^j a_T |\epsilon^*_{i,T}(\gamma)||k^*_{i,T}(x_l)|\big(|\pi_{i,d,T}(x_l)| + |\pi_{i,0,T}(x_l)|\big)$$

引导语得到所需的不等式。接下来，我们证明不等式 (34)。由分解式

$$\begin{aligned}\epsilon^*_{i,T}(\gamma) - \epsilon^*_{i,T}(\gamma_l) = &\big(\epsilon_{i,T}(\gamma) - \epsilon_{i,T}(\gamma_l)\big) I\big(|\epsilon_{i,T}(\gamma)| \leq \tau_T, |\epsilon_{i,T}(\gamma_l)| \leq \tau_T\big) \\ &+ \epsilon_{i,T}(\gamma) I\big(|\epsilon_{i,T}(\gamma)| \leq \tau_T, |\epsilon_{i,T}(\gamma_l)| > \tau_T\big) \\ &- \epsilon_{i,T}(\gamma_l) I\big(|\epsilon_{i,T}(\gamma_l)| \leq \tau_T, |\epsilon_{i,T}(\gamma)| > \tau_T\big),\end{aligned}$$

我们应用三角不等式，得到

$$\begin{aligned}|\epsilon^*_{i,T}(\gamma) - \epsilon^*_{i,T}(\gamma_l)| &\leq |\epsilon_{i,T}(\gamma) - \epsilon_{i,T}(\gamma_l)| + |\epsilon_{i,T}(\gamma)| I\big(|\epsilon_{i,T}(\gamma_l)| > \tau_T\big) \\ &\quad + |\epsilon_{i,T}(\gamma_l)| I\big(|\epsilon_{i,T}(\gamma)| > \tau_T\big) \\ &\leq |\epsilon_{i,T}(\gamma) - \epsilon_{i,T}(\gamma_l)| + 2Y_{i,T} I(Y_{i,T} > \tau_T), \qquad (46)\end{aligned}$$

其中 $Y_{i,T} = \sup_\gamma |\epsilon_{i,T}(\gamma)|$。根据假设A.3(3)中的 Lipschitz 性质，我们几乎必然（a.s.）有

$$|k_{i,T}(x_l)||\epsilon_{i,T}(\gamma) - \epsilon_{i,T}(\gamma_l)| \leq |k^*_{i,T}(x_l)|\xi_{i,T}(\gamma_l)\|\gamma - \gamma_l\| \leq a_T h |k^*_{i,T}(x_l)|\xi_{i,T}(\gamma_l), \qquad (47)$$

由于对于所有 $u \in \mathbb{R}$, $\|\gamma - \gamma_l\| \leq a_T h$ 和 $|K(u)| \leq |K^*(u)|$。不等式 (46)-(47) 得出 (34)。最后，我们证明 (36)。由于 $K^*$ 在 $[-2L_1, 2L_1]$ 上是紧支撑的，并且 $|K^*(u)| \leq \Lambda_1$,

$$\begin{aligned}\max_{1\leq l\leq N} U_{l,T} &\leq \frac{2}{Th} \sum_{i=1}^T \max_{1\leq l\leq N} \big\{|k^*_{i,T}(x_l)||\pi_{i,k,T}(x_l)|\big\} Y_{i,T} I(Y_{i,T} > \tau_T) \\ &\leq \frac{2^k L_1^k \Lambda_1}{Th} \sum_{i=1}^T Y_{i,T} I(Y_{i,T} > \tau_T).\end{aligned}$$

取期望后，不等式 (26) 蕴含

$$\mathrm{E}\left(\max_{1\leq l\leq N} U_{l,T}\right) \leq \frac{2^k L_1^k \Lambda_1}{Th} \sum_{i=1}^T \mathrm{E}\left(Y_{i,T} I(Y_{i,T} > \tau_T)\right) \leq \frac{c_2}{h} d_T^\lambda \tau_T^{1-s} = c_2 d_T^\lambda a_T,$$

对于某个 $c_2 > 0$。根据马尔可夫不等式，对于所有 $\delta > 0$，取 $M = c_2/\delta$ 可得

$$P\Big(\max_{1\leq l\leq N} U_{l,T} > M d_T^\lambda a_T\Big) \leq \frac{1}{M d_T^\lambda a_T} \mathrm{E}\left(\max_{1\leq l\leq N} U_{l,T}\right) \leq \delta,$$

如所需。 ∎

**技术说明**。与 Kristensen(2009) 和 Hansen (2008) 的论证相比，定理1证明中的以下方面尤其值得关注。

(i) 由于 $\sup_{x,\gamma} |\mathrm{E}\, R_{1,T}(x,\gamma)| \leq \mathrm{E}(\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}(x,\gamma)|)$，仅凭期望的逐点界无法通过马尔可夫不等式控制 $\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}(x,\gamma)|$ 的尾部行为。为保证 $P(\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}| > C d_T^\lambda a_T)$ 的概率界，我们采用稍大的截断水平 $\tau_T$，并使用式 (9) 中额外的一致矩有界性。

(ii) 在固定网格 $x_{i,T} = i/T$ 下，对于参数独立数据所得到的经典方差阶 $\sup_{x,\gamma} \sigma^2_{T,m_T}(x,\gamma) = O(m_T h)$（见 Hansen，2008年）无法由现有的确定性积分近似（见引理9）推出，除非 $m_T$ 的阶为 $T$。然而，在当前框架下，这种选择并不可行，因为它会违反 Liebscher-Rio 不等式（引理 8）的要求。因此，基数 $n_T(x) := \#J_x(L_1)$ 在应用该不等式时起着核心作用，这凸显了 $\operatorname{supp} K$ 的紧性的重要性。

(iii) 几乎处处局部Lipschitz条件（假设A.3(3)）对于控制$B_{k,\,T}$中的 (34) 至关重要。它产生如下形式的界 $|\epsilon_{i,\,T}(\gamma) - \epsilon_{i,\,T}(\gamma_j)| \le \xi_{i,\,T}(\gamma_j)\|\gamma - \gamma_j\|$，其中利普希茨系数在 $\gamma_j$ 处取值，这与对 $A = [0,1] \times \Theta_T$ 进行的有限覆盖论证直接兼容。

**定理 2 的证明** 我们使用与定理1证明中相同的记号。令

$$\tau_T := \left(\frac{T^3 \phi_T}{h}\right)^{\frac{1}{2(s-1)}} \quad \text{and} \quad a_T := \sqrt{\frac{\ln T}{Th}}.$$

如 (28) 所示，可得 $E\big(\sup_{x,\,\gamma} |R_{1,\,T}(x)|\big) = O\big(d_T^{\lambda} \tau_T^{1-s}/h\big)$。注意

$$\frac{\tau_T^{1-s}}{a_T h} = \frac{1}{T \ln T (\ln \ln T)^2}.$$

由于 $\sum_{T=3}^{\infty} 1/(T \ln T (\ln \ln T)^2) < \infty$（见 Rudin，1976，第 63 页），由马尔可夫不等式，对于所有 $C_0 > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{T=1}^{\infty} P\Big(\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}(x,\gamma) - E R_{1,T}(x,\gamma)| > C_0 d_T^{\lambda} a_T\Big) &\le \sum_{T=1}^{\infty} \frac{2E\big(\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}(x)|\big)}{C_0 d_T^{\lambda} a_T} \\ &\le \frac{2C}{C_0}\left\{2 + \sum_{T=3}^{\infty} \frac{1}{T \ln T (\ln \ln T)^2}\right\} < \infty.\end{aligned}$$

于是，根据 Borel-Cantelli 引理，对所有 $C_0 > 0$

$$P\Big(\limsup_{T\to\infty} \Big\{\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}(x,\gamma) - E R_{1,T}(x,\gamma)| > C_0 d_T^{\lambda} a_T\Big\}\Big) = 0,$$

这意味着几乎必然有 $\sup_{x,\gamma} |R_{1,T}(x) - E R_{1,T}(x)| = o\big(d_T^{\lambda} a_T\big)$

接下来，我们验证对于 $\tau_T = (T^3 \phi_T/h)^{1/(2(s-1))}$ 和 $A_l = \{(x,\gamma)$，式 (43) 仍然成立：$|x - x_l| \le a_T h (\ln \ln T)^2, \|\gamma - \gamma_l\| \le a_T h (\ln \ln T)^2\}$，从而 $N_a \approx d_T^m/(a_T h (\ln \ln T)^2)^{1+m}$。注意，对每个 $A_l$，当 $T$ 足够大时，均有 $\|\gamma - \gamma_l\| \le a_T h (\ln \ln T)^2 \le h$，因为$a_T (\ln \ln T)^2 = o(1)$。因此，当 $T$ 足够大时，假设A.3(3)适用于每个 $A_l$。特别地，

$$a_T \tau_T = T^{\frac{3}{2(s-1)} - \frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2(s-1)}} (\ln T)^{\frac{1}{2}} \phi_T^{\frac{1}{2(s-1)}} = T^{\frac{3}{2(s-1)} - \frac{1}{2} + \theta\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(s-1)}\right]} (\ln \ln T)^{-2}.$$

但当且仅当 $\theta < 1 - 4/s$ 时， $T$ 的指数为负；对于（13）中给定的 $\theta$，这一条件成立。因此，$a_T \tau_T = o(1)$ 以及选择 $m_T := (a_T \tau_T)^{-1} \to \infty$ 满足引理 8 的条件。选择充分大的 $M > 0$，使得 $mr + (1+\theta)\left[\frac{m+1}{2}\right] - \frac{M d_T^{\lambda}}{254 L_1 + 6\bar{K}} < -1$，由此可得

$$S_1 = \frac{T^{mr + \frac{m+1}{2} - \frac{M d_T^{\lambda}}{254 L_1 + 6\bar{K}}}}{(h\phi_T)^{(m+1)/2}} = O\Big(T^{mr + (1+\theta)\left[\frac{m+1}{2}\right] - \frac{M d_T^{\lambda}}{254 L_1 + 6\bar{K}}} \phi_T^{-1-m}\Big) = O\big((T\phi_T)^{-1}\big),$$

因为根据条件（15），$h^{-(m+1)/2} = O(T^{\theta(m+1)/2}\phi_T^{-(m+1)/2})$。对于 $S_2$，由（13）可得，

$$\begin{aligned}
S_2 &\le d_T^m \tfrac{T(a_T\tau_T)^{1+\beta}}{(a_T h(\ln\ln T)^2)^{1+m}} \\
&= T^{1+mr+\frac{1+m}{2}+\frac{(1+\beta)(4-s)}{2(s-1)}} h^{-\frac{(1+\beta)}{2(s-1)}-\frac{m+1}{2}} \phi_T^{\frac{(1+\beta)}{2(s-1)}-\frac{1+m}{2}} (\ln\ln T)^{-2(2+\beta+m)} \\
&= o\Big(T^{1+mr+\frac{1+m}{2}+\frac{(1+\beta)(4-s)}{2(s-1)}+\theta\left[\frac{(1+\beta)}{2(s-1)}+\frac{m+1}{2}\right]} \phi_T^{-(1+m)}\Big) \\
&= o((T\phi_T)^{-1}),
\end{aligned}$$

根据条件（15），因为 $h^{-(1+\beta)2(s-1)-\frac{m+1}{2}} = o\Big(T^{\theta\left[(1+\beta)2(s-1)+\frac{m+1}{2}\right]}\phi_T^{-(\frac{1+\beta}{2s-1}-\frac{m+1}{2})}\Big)$。

由于 $S_1 + S_2 = O((T\phi_T)^{-1})$ 且 $\sum_{T=3}^{\infty}(T\phi_T)^{-1} < \infty$，利用与（42）中相同的分解，我们对所有 $C_0 > 0$ 得到

$$\sum_{T=1}^{\infty} P\Big(\sup_{x,\gamma}|R_{2,T}(x,\gamma) - ER_{2,T}(x,\gamma)| > C_0 d_T^{\lambda} a_T\Big) \le C\sum_{T=1}^{\infty}(S_1+S_2) < \infty.$$

因此，Borel-Cantelli 引理表明，$\sup_{x,\gamma}|R_{2,T}(x,\gamma) - ER_{2,T}(x,\gamma)| = o(d_T^{\lambda}a_T)$ 几乎必然成立。结合关于 $R_{1,T}$ 和 $R_{2,T}$ 的界，即可得到所需结果。 ∎

**定理 3 的证明** 我们首先考察估计量 $\hat{g}$。记

$$|\hat{g}(x) - g(x)| \le |\hat{g}(x) - E\hat{g}(x)| + |E\hat{g}(x) - g(x)| := A_{1,T} + A_{2,T}, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{48}$$

由假设 A.2-A.4 和引理 6 可知，Tsybakov（2008年）的引理 1.3 和命题 1.12 的条件均得到满足。特别地，对于式 (24) 中定义的局部线性权重 $W_{t,T}(\cdot)$，关于 $x \in [0,1]$ 一致地有，

$$\sum_{t=1}^{T} W_{t,T}(x) = 1, \quad \sum_{t=1}^{T} W_{t,T}(x)\,(t/T - x) = 0, \quad \sup_{1\le t\le T}|W_{t,T}(x)| \le \frac{C}{Th}, \quad \sum_{t=1}^{T}|W_{t,T}(x)| \le C,$$

由于 $K$ 的紧支撑（见引理 3），仅有 $k_T = O(Th)$ 个非零项。此外，由于 $g \in C^2[0,1]$，其导数 $g'$ 是 Lipschitz 连续的。因此，利用 Tsybakov 的结果以及带有拉格朗日余项的 Taylor 展开，我们有

$$\begin{aligned}
A_{2,T} &= \Big|\sum_{t=1}^{T} W_{t,T}(x)\big\{g(t/T) - g(x)\big\}\Big| \\
&= \Big|\sum_{t=1}^{T} W_{t,T}(x)\big\{g(x) + g'[x + \tau_t(t/T - x)](t/T - x) - g(x)\big\}\Big| \\
&= \Big|\sum_{t=1}^{T} W_{t,T}(x)\big\{g'[x + \tau_t(t/T - x)](t/T - x)\big\} - \sum_{t=1}^{T} W_{t,T}(x)(t/T - x)g'(x)\Big| \\
&\le \sum_{t=1}^{T}|W_{t,T}(x)||t/T - x|\big|g'(x + \tau_t(t/T - x)) - g'(x)\big| \\
&\le C\sum_{t=1}^{T}|W_{t,T}(x)||t/T - x|^2 = C\sum_{t=1}^{T}|W_{t,T}(x)||t/T - x|^2 I\Big(\Big|\tfrac{t/T-x}{h}\Big| \le 1\Big) \\
&\le C\sum_{t=1}^{T}\sup_x|W_{t,T}(x)|h^2 \le Ch^2,
\end{aligned} \tag{49}$$

对 $x \in [0,1]$ 一致地，当所有 $T$ 充分大时，其中 $\tau_t \in$（0，1）。因此，$\sup_{x\in[0,1]} A_{2,T} = O(h^2)$。

现在转而讨论项 $A_{1,T}$。记

$$A_{1,T} = |e_1^\intercal S_{T,x}^{-1} D_{T,x}^V| \qquad ,$$

其中$S_{T,x}$ 按（22）定义，并且

$$D_{T,x}^V = T^{-1}\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T V_{t,T} K_h(t/T - x) \\ \sum_{t=1}^T V_{t,T} K_h(t/T - x)((t/T - x)/h) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} d_{T,0}^V(x) \\ d_{T,1}^V(x) \end{bmatrix}.$$

利用柯西-施瓦茨不等式和引理 7，结合 $v = \left(d_{T,0}^V(x) d_{T,1}^V(x)\right)^\intercal$，可得

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| e_1^\intercal S_{T,x}^{-1} \begin{bmatrix} d_{T,0}^V(x) \\ d_{T,1}^V(x) \end{bmatrix} \right| \leq \sup_{x\in[0,1]} \underbrace{\|e_1\|}_{=1} \left\| S_{T,x}^{-1} \begin{bmatrix} d_{T,0}^V(x) \\ d_{T,1}^V(x) \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{\lambda_0} \sup_{x\in[0,1]} \left\| \begin{bmatrix} d_{T,0}^V(x) \\ d_{T,1}^V(x) \end{bmatrix} \right\|,$$

对于所有 $T$ 充分大时均成立。因此，根据有限维实空间中 $L_2$ 范数与 $L_1$ 范数的等价性（Horn 和 Johnson，2012 年的推论 5.4.5）以及定理1，

$$\sup_{x\in[0,1]} A_{1,T} \leq \frac{1}{\lambda_0} \sup_{x\in[0,1]} \left\| \begin{bmatrix} d_{T,0}^V(x) \\ d_{T,1}^V(x) \end{bmatrix} \right\| \leq \frac{1}{\lambda_0} \left( \sup_{x\in[0,1]} \left| d_{T,0}^V(x) \right| + \sup_{x\in[0,1]} \left| d_{T,1}^V(x) \right| \right) = O_p(a(h)).$$

根据假设 A.6 和 Orbe 等人（2005）的命题 1，数组 $\{V_{t,T}\}$ 是几何强混合的，并且具有阶数为 $s > 2$的统一有界矩。因此，零均值数组 $\{V_{t,T}\}$满足定理1的条件，从而得到

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| d_{T,0}^V(x) \right| + \sup_{x\in[0,1]} \left| d_{T,1}^V(x) \right| = O_p(a(h)),$$

其中 $a(u) := \sqrt{\ln(T)/(Tu)}$。因此，$\sup_{x\in[0,1]} A_{1,T} = O_p(a(h))$。结合结果 (49) 和 (48)，可得

$$\sup_{x\in[0,1]} |\hat{g}(x) - g(x)| = O(h^2) + O_p(a(h)). \tag{50}$$

接下来，我们证明 $\sup_{x\in\mathcal{I}_T} |\hat{\phi}(x) - \phi(x)| = O(v^2) + O_p(a(v))$。定义不可行估计量

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{\tilde{\Psi}_1(x)}{\tilde{\Psi}_2(x)} := \frac{1/T \sum_{t=2}^T G_v(x_t - x) V_{t,T} V_{t-1,T}}{1/T \sum_{t=2}^T G_v(x_t - x) V_{t-1,T}^2}, \quad x \in \mathcal{I}_T. \tag{51}$$

其中 $x_t = t/T$，并记

$$\hat{V}_{t,T} = Y_{t,T} - \hat{g}(t/T) = \left(g(t/T) - \hat{g}(t/T)\right) + V_{t,T} := r_{t,T} + V_{t,T}, \quad 1 \leq t \leq T.$$

直接展开可得，对于 $x \in \mathcal{I}_T$，

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \frac{1/T \sum_{t=2}^T G_v(x_t - x) \left[ V_{t,T} V_{t-1,T} + V_{t,T} r_{t-1,T} + V_{t-1,T} r_{t,T} + r_{t,T} r_{t-1,T} \right]}{1/T \sum_{t=2}^T G_v(x_t - x) \left[ V_{t-1,T}^2 + 2 V_{t-1,T} r_{t-1,T} + r_{t-1,T}^2 \right]} \\ &= \frac{\tilde{\Psi}_1(x) + 1/T \sum_{t=2}^T G_v(x_t - x) \left[ V_{t,T} r_{t-1,T} + V_{t-1,T} r_{t,T} + r_{t,T} r_{t-1,T} \right]}{\tilde{\Psi}_2(x) + 1/T \sum_{t=2}^T G_v(x_t - x) \left[ 2 V_{t-1,T} r_{t-1,T} + r_{t-1,T}^2 \right]} \end{aligned}$$

$$:= \frac{\tilde{\Psi}_1(x) + R_{1,T}(x)}{\tilde{\Psi}_2(x) + R_{2,T}(x)}.$$

因此

$$\begin{aligned}|\hat{\phi}(x) - \tilde{\phi}(x)| &= \left|\frac{\tilde{\Psi}_1(x) + R_{1,T}(x)}{\tilde{\Psi}_2(x) + R_{2,T}(x)} - \frac{\tilde{\Psi}_1(x)}{\tilde{\Psi}_2(x)}\right| \\ &\leq \frac{|R_{1,T}(x)|}{|\tilde{\Psi}_2(x) + R_{2,T}(x)|} + |\tilde{\phi}(x)|\frac{|R_{2,T}(x)|}{|\tilde{\Psi}_2(x) + R_{2,T}(x)|}. \end{aligned} \tag{52}$$

通过应用 定理1于零均值数据 $V_{t,\ T}$ 采用核 $G$ 和带宽 $v$，可得

$$\sup_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} G_v(x_t - x)V_{t,T}\right| = O_p(a(v)) \quad \text{and} \quad \sup_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} G_v(x_t - x)V_{t-1,T}\right| = O_p(a(v)).$$

此外，引理 3 $_{x\in\mathcal{I}_T}|\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}G_v\ x_t - x\ | = O\ 1$ $_t|r_{t\ T}| =$给出 sup ( ) ( )。 $O_p\ h^2 + a\ h$

因此，利用 sup. ( ( )),

$$\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|R_{i,T}(x)| = O_p((h^2 + a(h))a(v) + (h^2 + a(h))^2) = o_p(h^2 + a(h)), \quad i \in \{1, 2\}, \tag{53}$$

由于 $h^2 + a(h) = o(1)$，且 $v \overset{a}{\approx} c_v h$ 意味着 $a(v) = O(a(h)) = o(1)$。另一方面，˜我们证明分母 $\inf_{x\in\mathcal{I}_T}|\Psi_2(x) + R_{2,\ T}(x)|$ 以趋近于1的概率远离零。如下文(58)所示，对 $x \in \mathcal{I}_T$ 一致地，且对所有充分大的 $T$

$$\mathrm{E}(\tilde{\Psi}_2(x)) = \Lambda(x) + O(v^2 + 1/T), \quad \Lambda(x) := \sigma_e^2/(1 - [\phi(x)]^2),$$

根据 A.6(i)，我们有 $\inf_{x\in\mathcal{I}_T}\Lambda(x) \geq \sigma_e^2/(1 - \bar{\phi}^2) := c_e > 0$。此外，由定理1可得˜ ˜ $\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\Psi_2(x) - \mathrm{E}\,\Psi_2(x)| = O_p(a(v)) = o_p(1)$。因此，根据三角不等式

$$\inf_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\tilde{\Psi}_2(x)\right| \geq \inf_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_2(x)\right| - \sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\Psi}_2(x) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_2(x)| \geq c_e - \sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\Psi}_2(x) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_2(x)|.$$

因此，若 $\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\Psi}_2(x) - \mathrm{E}\ \tilde{\Psi}_2(x)| \leq c_e/2$，则 $\inf_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\tilde{\Psi}_2(x)\right| \geq c_e/2$。因此，利用概率测度的单调性，

$$\begin{aligned}P\Big(\inf_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\tilde{\Psi}_2(x)\right| \geq c_e/2\Big) &\geq P\Big(\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\Psi}_2(x) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_2(x)| \leq c_e/2\Big) \\ &= 1 - P\Big(\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\Psi}_2(x) - \mathrm{E}\,\tilde{\Psi}_2(x)| > c_e/2\Big) \to 1, \quad T \to \infty. \end{aligned} \tag{54}$$

再次应用三角不等式，若 $\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|R_{2,\ T}| \leq c_e/4$ 且 $\inf_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\tilde{\Psi}_2(x)\right| \geq c_e/2$，则

$$\inf_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\Psi}_2(x) + R_{2,T}(x)| \geq \inf_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\Psi}_2(x)| - \sup_{x\in\mathcal{I}_T}|R_{2,T}(x)| \geq c_e/4,$$

因此，由于 $P$ 的单调性和次可加性，并利用 (53)-(54),

$$\begin{aligned}P\Big(\inf_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\Psi}_2(x) + R_{2,T}(x)| \geq c_e/4\Big) &\geq P\Big(\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|R_{2,T}| \leq c_e/4 \ \text{ and } \inf_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\tilde{\Psi}_2(x)\right| \geq c_e/2\Big) \\ &= 1 - P\Big(\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|R_{2,T}| > c_e/4 \ \text{ or } \inf_{x\in\mathcal{I}_T}\left|\tilde{\Psi}_2(x)\right| < c_e/2\Big)\end{aligned}$$

$$\geq 1 - P\Big(\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|R_{2,T}| > c_e/4\Big) - P\Big(\inf_{x\in\mathcal{I}_T}\big|\tilde{\Psi}_2(x)\big| < c_e/2\Big) \to 1, \quad T\to\infty.$$

因此，$\sup_{x\in\mathcal{I}_T}\{1/|\Psi_2(x)+R_{2,T}(x)|\} = O_p(1)$。假设 (55) 成立，其证明见下文 (60)，

$$\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\phi}(x)-\phi(x)| = O_p(v^2+a(v)) = o_p(1), \tag{55}$$

由此可得

$$\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\phi}(x)| \leq \sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\phi}(x)-\phi(x)| + \sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\phi(x)| = o_p(1)+O(1) = O_p(1),$$

由于 $\phi$ 在 $[0,1]$ 上有界。在（52）中取上确界，并利用（53）–（55），可得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\hat{\phi}(x)-\tilde{\phi}(x)| &\leq \sup_{x\in\mathcal{I}_T}\left\{\frac{1}{|\tilde{\Psi}_2(x)+R_{2,T}(x)|}\right\}\Big(\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|R_{1,T}(x)| + \sup_{x\in\mathcal{I}_T}|\tilde{\phi}(x)|\sup_{x\in\mathcal{I}_T}|R_{2,T}(x)|\Big)\\ &= o_p(h^2+a(h)).\end{aligned}$$

因此，只要（55）成立，就有

$$\hat{\phi}(x) = \tilde{\phi}(x) + o_p(h^2+a(h)), \tag{56}$$

关于 $x\in\mathcal{I}_T$ 一致成立。

根据假设 A.6，Orbe 等人（2005）的命题 1 中的条件均得到满足；该命题又用于保证对于所有 $\beta>0$ 以及某个 $s>2$，$\{V_{t,T}\}$ 满足假设 A.1。随后，我们利用定理1得到 $\sup_{x\in[0,1]}\big|\tilde{\phi}(x) - \mathrm{E}(\tilde{\phi}(x))\big| = O_p(a(v))$。根据 Dahlhaus 等人（1999），对于所有 $1\leq t\leq T$，$\mathrm{E}(V_{t,T}^2) = \Lambda(t/T) + o(1/T)$，其中 $\Lambda(t/T) := \sigma_e^2/(1-[\phi(t/T)]^2)$，且 $\sigma_e^2 := \mathrm{Var}(e_{t,T})$。由假设 A.6 和 A.5 可知，$\Lambda(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微，且 $\sup_{u\in[0,1]}|\Lambda'(u)|\leq C$。因此，根据中值定理，$\mathrm{E}(V_{t-1,T}^2) = \Lambda((t-1)/T) = \Lambda(t/T) + O(1/T)$ 关于 $t\in\{2,\cdots,T\}$ 一致成立。因此，通过有限和的积分近似（证明思路与引理 3 的证明类似）、二阶 Taylor 展开以及魏尔斯特拉斯极值定理，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\tilde{\Psi}_1(x)\right) &= \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} G_v(t/T-x)\phi(t/T)\,\mathrm{E}(V_{t-1,T}^2 + V_{t-1,T}e_{t,T})\\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} G_v(t/T-x)\phi(t/T)\,[\Lambda(t/T)+O(1/T)]\\ &= \frac{1}{v}\int_0^1 G\left(\tfrac{u-x}{v}\right)\phi(u)\Lambda(u)du + O(1)\frac{1}{Tv}\int_0^1 G\left(\tfrac{u-x}{v}\right)du + O(1/T)\\ &= \int_{-x/v}^{(1-x)/v} G(w)\,\phi(x+wv)\Lambda(x+wv)dw + O(1/T)\\ &= \phi(x)\Lambda(x) + O(v^2) + O(1/T) := \Psi_1(x) + O(v^2+1/T),\end{aligned} \tag{57}$$

关于 $x\in\mathcal{I}_T$ 一致，其中我们利用了以下事实：$G(\cdot)$ 是一个满足 $\int_{-1}^1 G(w)dw = 1$ 的二阶核；并且当 $T$ 足够大时，$[-1,1]\subseteq[-x/v,(1-x)/v]$ 关于$x\in\mathcal{I}_T$ 一致。特别地，对于所有 $|w|\leq 1$，$x+wv\in(0,1)$。类似地，关于$x\in\mathcal{I}_T$ 一致的结论也成立，

$$\mathrm{E}\left(\tilde{\Psi}_2(x)\right) = \Lambda(x) + O(v^2) + O(1/T) := \Psi_2(x) + O(v^2+1/T). \tag{58}$$

接下来，利用三角不等式和中值定理，我们得到

$$\big|\tilde{\phi}(x)-\phi(x)\big| = \left|\frac{\tilde{\Psi}_1(x)}{\tilde{\Psi}_2(x)} - \frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)}\right| = \left|\frac{\tilde{\Psi}_1(x)-\Psi_1(x)}{\tilde{\Psi}_2(x)} + \frac{\Psi_1(x)\big(\Psi_2(x)-\tilde{\Psi}_2(x)\big)}{\Psi_2(x)\tilde{\Psi}_2(x)}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Psi_2^*(x)}\big|\tilde{\Psi}_1(x)-\Psi_1(x)\big| + \frac{|\Psi_1^*(x)|}{[\Psi_2^*(x)]^2}\big|\Psi_2(x)-\tilde{\Psi}_2(x)\big|, \tag{59}$$

~其中，对于某些 $\tau_j \in [0,1]$, $j \in \{1,2\}$, $\Psi_j^*(x) = \Psi_j(x) + \tau_j(\Psi_j(x) - \Psi_j(x))$。正如 Kristensen (2009) 所论证的， $1/\Psi_2^*(x)$ 和 $|\Psi_1^*(x)|/[\Psi_2^*(x)]^2$ 关于 $x \in \mathcal{I}_T$ 一致地为 $O_{a.s.}(1)$。因此，根据式 (57)-(59)，并再次利用定理1，

$$\sup_{x\in\mathcal{I}_T}\big|\tilde{\phi}(x)-\phi(x)\big| = O_{a.s.}(1)\Big(O_p(a(v)) + O(v^2+1/T)\Big) = O_p\big(a(v)+v^2\big), \tag{60}$$

因为 $1/T = o(a(v))$。这证明了 (55)，因此 (56) 成立。将此结果与.....结合可得 (56)

$$\sup_{x\in\mathcal{I}_T}\big|\hat{\phi}(x)-\phi(x)\big| = O_p\big(a(h)+h^2\big) + O_p\big(a(v)+v^2\big) = O_p\big(a(h)+h^2\big).$$

∎

**推论 3.1 的证明**沿用定理 3 证明中的记号，偏差项满足

$$A_{2,T} = \left|\sum_{t=1}^{T} W_{t,T}(x)\big\{g(t/T)-g(x)\big\}\right| = O(h^2)$$

¯ ¯在 $x \in [0,1]$ 和 $\phi \in [-\phi,\phi]$ 上一致成立，因为权重 $W_{t,T}(x)$ 与 $\phi$ 无关。随机项 $A_{1,T}$ 通过将定理1应用于以下形式的项来控制

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} V_{t,T}(\phi)K_h(t/T-x)((t/T-x)/h)^j, \qquad j \in \{0,1\}.$$

¯因此，为了得到关于 $|\phi| \leq \phi$ 的一致性，只需证明 $\{V_{t,T}(\phi)\}$ 满足定理1的参数依赖条件：对于所有 $T \geq 1, t \in [T]$，存在 $\xi_{t,T}(\phi) \geq 0$，使得几乎处处有

$$|V_{t,T}(\phi') - V_{t,T}(\phi)| \leq \xi_{t,T}(\phi)\|\phi'-\phi\|, \qquad \phi',\phi \in \Theta : \|\phi'-\phi\| \leq h \tag{61}$$

and

$$\sup_{T\geq 1}\sup_{1\leq i\leq T} \mathrm{E}\Big(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |V_{i,T}(\phi)|^s\Big) \leq C, \tag{62}$$

$$\sup_{T\geq 1}\sup_{1\leq i\leq T} \mathrm{E}(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |\xi_{i,T}(\phi)|^s) \leq C. \tag{63}$$

在 $|\phi| < 1$ 下，模型 (19) 具有如下因果移动平均表示：$V_{t,T}(\phi)$，( )，，因此，( )(，( )(，)。$\phi^t V_{0\,T}\ \phi\ + \sum_{j=0}^{t-1}\phi^j e_{t-j\,T}$ $|V_{t\,T}\ \phi\ |^s \leq 2^{s-1}\ |V_{0\,T}\ \phi\ |^s + \sum_{j=0}^{t-1}\bar{\phi}^j|e_{t-j\,T}|^s$
注意，根据 H older 不等式，我们有

$$\sum_{j=0}^{t-1}\bar{\phi}^j|e_{t-j,T}| = \sum_{j=0}^{t-1}(\bar{\phi}^{\frac{j}{s}}|e_{t-j,T}|)\bar{\phi}^{\frac{j(s-1)}{s}} \leq \left(\sum_{j=0}^{t-1}\bar{\phi}^j|e_{t-j,T}|^s\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{j=0}^{t-1}\bar{\phi}^j\right)^{\frac{s-1}{s}}.$$

Thus

$$\begin{aligned}\sup_{t,T}\mathrm{E}\Big(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}}|V_{t,T}(\phi)|^s\Big) &\leq 2^{s-1}\left[\sup_{T}\mathrm{E}\Big(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}}|V_{0,T}(\phi)|^s\Big) + \sup_{t,T}\mathrm{E}(|e_{t,T}|^s)\sum_{j=0}^{\infty}\bar{\phi}^j\right] \\ &\leq C\left[1+\frac{1}{1-\bar{\phi}}\right] \leq C,\end{aligned} \tag{64}$$

因此 (62) 得证。现在，我们用归纳法证明 (61)。根据关于初始条件 ($t = 0$) 的假设，存在 $\xi_{0,T}$，使得几乎处处 (a.e.) 对所有满足 $|\phi' - \phi| \leq h$ 的 $\phi, \phi' \in \Theta$，都有 $|V_{0,T}(\phi') - V_{0,T}(\phi)| \leq \xi_{0,T}(\phi)|\phi' - \phi|$。固定 $t \geq 1$。假设存在一个非负函数 $\xi_{t-1,T}(\phi)$，使得几乎处处对所有满足 $|\phi' - \phi| \leq h$ 的 $\phi, \phi' \in \Theta$，都有 $|V_{t-1,T}(\phi') - V_{t-1,T}(\phi)| \leq \xi_{t-1,T}(\phi)|\phi' - \phi|$。由此归纳假设可得，几乎处处对所有满足 $|\phi' - \phi| \leq h$ 的 $\phi, \phi' \in \Theta$，

$$\begin{aligned}
|V_{t,T}(\phi') - V_{t,T}(\phi)| &= |\phi' V_{t-1,T}(\phi') - \phi V_{t-1,T}(\phi)| \\
&= |(\phi' - \phi)V_{t-1,T}(\phi') + \phi(V_{t-1,T}(\phi') - V_{t-1,T}(\phi))| \\
&\leq |\phi' - \phi||V_{t-1,T}(\phi')| + |\phi||V_{t-1,T}(\phi') - V_{t-1,T}(\phi)| \\
&\leq h|V_{t-1,T}(\phi')| + |\phi|\xi_{t-1,T}(\phi)|\phi' - \phi|, \qquad (65)
\end{aligned}$$

and

$$|V_{t-1,T}(\phi')| \leq |V_{t-1,T}(\phi)| + |V_{t-1,T}(\phi') - V_{t-1,T}(\phi)| \leq |V_{t-1,T}(\phi)| + \xi_{t-1,T}(\phi)|\phi' - \phi|. \qquad (66)$$

将 (66) 代入 (65) 得到

$$\begin{aligned}
|V_{t,T}(\phi') - V_{t,T}(\phi)| &\leq h|V_{t-1,T}(\phi)| + \xi_{t-1,T}(\phi)|\phi' - \phi| + |\phi|\xi_{t-1,T}(\phi)|\phi' - \phi| \\
&= \big(|V_{t-1,T}(\phi)| + (|\phi| + h)\xi_{t-1,T}(\phi)\big)|\phi' - \phi| \\
&\coloneqq \xi_{t,T}(\phi)|\phi' - \phi|, \qquad (67)
\end{aligned}$$

如所需。接下来，我们利用 (67) 中最后一个等式证明 (63) 成立。由于 $|\phi| \leq \phi < 1$，选择 $c \in (\phi, 1)$。于是，对所有 $|\phi| \leq \phi$ 以及所有充分大的 $T$，均有 $|\phi| + h \leq c < 1$。由 (64) 可知，存在 $M > 0$，使得对所有充分大的 $T$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |\xi_{t,T}(\phi)|^s\right) &= \mathrm{E}\left(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} \big||V_{t-1,T}(\phi)| + (|\phi| + h)\xi_{t-1,T}(\phi)\big|^s\right) \\
&\leq 2^{s-1}\left[\mathrm{E}\left(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |V_{t-1,T}(\phi)|^s\right) + \sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} (|\phi| + h)^s \,\mathrm{E}\left(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |\xi_{t-1,T}(\phi)|^s\right)\right] \\
&\leq 2^{s-1}\left[M + \underline{c}^s \,\mathrm{E}\left(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |\xi_{t-1,T}(\phi)|^s\right)\right], \qquad \forall t \in [T]. \qquad (68)
\end{aligned}$$

通过迭代不等式 (68)，并利用条件 $\sup_{T\geq 1} \mathrm{E}(\sup_{|\phi|\leq\bar{\phi}} |\xi_{0,\,T}(\phi)|^s) \leq C$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|\sup_{\phi} \xi_{t,T}(\phi)|^s) &\leq 2^{s-1}\big[M \sum_{k=0}^{t-1} \underline{c}^{ks} + \underline{c}^{ts} \,\mathrm{E}(\sup_{\phi} |\xi_{0,T}(\phi)|^s)\big] \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \underline{c}^k = C\frac{1}{1 - \underline{c}} \leq C. \qquad (69)
\end{aligned}$$

∎

# 附录 B：辅助结果

本附录汇集了若干用于附录 A 中证明的辅助引理（共 1 至 9 条）。为简洁起见，完整证明见补充材料。

量 $\hat{\Psi}(x, \gamma)$ 涉及对指标集合 $\{i\}_{i=1}^{T}$ 求和。如果核函数的支撑集为 $[-L_1, L_1]$，我们只需考虑指标子集 $J_x \subseteq \{1, \ldots, T\}$，该子集

取决于点 $x \in [0,1]$。重要的是要区分 $x$ 是 $[0,1]$，的内点还是 $x$ 是其边界点，因为相应的核平均可能表现出不同的渐近等价。从分析角度看，我们可以考察核平均在边界“附近”而非恰好位于边界处的行为。这种方法在评估核估计量的边界偏差时尤其方便（参见 M¨uller，1991年；Wand 和 Jones，1994年等）。受这些想法启发，我们将定义指标集合 $J_x$，它将在紧支撑核的情形中发挥作用。

设 $T_0 \in \mathbb{N}$ 和 $L_T$ 为正数序列（可能为常数），满足 $L_T \geq 1$、$L_T h < 1/2$ 和 $TL_T h > 1$ 对所有 $T \geq T_0$ 均成立。对于每个 $T \geq T_0$，定义指标集

$$J_x(L_T) = \{i \in [T] : i/T \in C_x(L_T)\}, \qquad x \in [0,1], \tag{70}$$

其中 $[T] := \{1, 2, \ldots, T\}$ 和

$$C_x(L_T) = \begin{cases} [0, x + L_T h], & \text{if } x \in [0, L_T h] \\ [x - L_T h, x + L_T h], & \text{if } x \in (L_T h, 1 - L_T h) \\ [x - L_T h, 1], & \text{if } x \in [1 - L_T h, 1] \end{cases}. \tag{71}$$

上述构造保证 $C_x$ 和 $J_x$ 定义良好且非空。要求 $L_T h < 1/2$ 可确保对所有 $x \in [0,1]$，$C_x(L_T) \subseteq [0,1]$。此外，由于设计点 $\{i/T\colon i = 1、\ldots\ldots、T\}$ 等距分布，$[0,1]$ 中长度大于 $1/T$ 的任意区间都至少包含一个设计点。由于对所有$x \in [0,1]$，$C_x(L_T)$的长度至少为 $L_T h$，条件 $TL_T h > 1$ 保证对每个 $x \in [0,1]$，$J_x(L_T)$非空。

**引理 1.** 设 $T \geq T_0$，且 $k_{x,\,T}(L_T)$ 是 $J_x(L_T)$的基数。假设 $L_T h \to 0$且 $TL_T h \to \infty$。那么，对 $x \in [0,1]$、$k_{x,\,T}(L_T)$ 逐点成立：$\overset{a}{\approx} c_x TL_T h$，其中 $c_x = 1 + I(x \in (0,\ 1))$。此外，上确界$_{x\in[0,1]} k_{x,\,T}(L_T) \leq 2TL_T h + 1$。

特别地，引理 1 蕴含 $\sup_x k_{x,\,T}(L_T) = O(TL_T h)$。就我们的目的而言，将假设 A.2 弱化为以下版本较为方便：

A.2’ 函数 $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$满足 $|K(u)| \leq \bar{K} < \infty$ 且 $\int_{\mathbb{R}} |K(u)|du \leq \bar{\mu} < \infty$。存在正数常数 $\Lambda_1$，$L_1$，$L_2 < \infty$，使得对于 $|u| > L_1$，$K(u) = 0$；并且对于所有 $u$，$u' \in [-L_1, L_1]$，$|K(u) - K(u')| \leq \Lambda_1 |u - u'|$。

假设 A.2’ 严格弱于 A.2，因为前者仅要求在$[-L_1, L_1]$上具有 Lipschitz 性质，而非在整条实直线上。

**引理 2.** 假设 $K$ 对某一固定的 $j \geq 0$满足假设 *A.2’*。则存在正常数 $C_j < \infty$，使得

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} |u|^j |K(u)| \leq C_j.$$

在假设 A.2’ 下，$|u|^j |K(u)| \leq L_1^j \bar{K}$，引理 2 立即成立。下一个引理建立了用有限和对积分的一致逼近。

**引理 3.** 假设核函数 $K$ 满足假设 *A.2’*。定义复合函数 $f = g \circ K$，其中 $g$在 $K$ 的值域上满足 *Lipschitz* 连续性，且满足 $g(0) = 0$。那么，对于任意固定的 $j \in \mathbb{N}$ 和任意 $0 \leq a \leq b \leq 1$，当 $T$ 充分大时，对所有 $x \in [0,1]$，以下关系一致成立：

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{i:i/T\in[a,b]} f\left(\frac{i/T - x}{h}\right)\left(\frac{i/T - x}{h}\right)^j - \int_a^b f\left(\frac{u-x}{h}\right)\left(\frac{u-x}{h}\right)^j du \right| \leq \frac{C}{T}, \tag{72}$$

*and*

$$\left|\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in[a,b]} f\left(\frac{i/T-x}{h}\right)\left|\frac{i/T-x}{h}\right|^j - \int_a^b f\left(\frac{u-x}{h}\right)\left|\frac{u-x}{h}\right|^j du\right| \le \frac{C}{T}. \tag{73}$$

引理 3 中的积分近似适用于对 $K(u)$进行 Lipschitz 变换的情形，例如 $|K(u)|$。

**引理 4.** 设 $K$ 为满足假设 *A.2* 的核函数，并设 $\delta > 0$。则存在函数 $K^*$ 以及常数 $L$、$\bar{K}^*$、$\mu^*$，使得 $|K^*| \le \bar{K}^* < \infty$、$\int_{\mathbb{R}} |K^*(u)|du \le \mu^* < \infty$且

$$|x_1 - x_2| \le \delta \le L_1 \implies |K(x_1) - K(x_2)| \le \delta K^*(x_1), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

特别地，我们可以取

$$K^*(x) = \Lambda_1 I(|x| \le 2L_1). \tag{74}$$

定义复合函数 $f^* = g \circ K^*$，其中 $g$ 在 $K^*$的值域上 *Lipschitz* 连续，且满足 $g(0) = 0$。则对于按 (74) 定义的 $K^*$，对任意固定的 $j \in \mathbb{N}$ 以及任意 $0 \le a \le b \le 1$，当 $T$ 充分大时，下述结论对 $x \in [0,1]$ 一致成立：

$$\left|\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in[a,b]} f^*\left(\frac{i/T-x}{h}\right)\left(\frac{i/T-x}{h}\right)^j - \int_a^b f^*\left(\frac{u-x}{h}\right)\left(\frac{u-x}{h}\right)^j du\right| \le \frac{C}{T}, \tag{75}$$

*and*

$$\left|\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in[a,b]} f^*\left(\frac{i/T-x}{h}\right)\left|\frac{i/T-x}{h}\right|^j - \int_a^b f^*\left(\frac{u-x}{h}\right)\left|\frac{u-x}{h}\right|^j du\right| \le \frac{C}{T}. \tag{76}$$

**推论 1.** 假设引理 *3* 和引理 *4* 的条件成立。设 $K^*$ 由 (74) 给出，并定义 $f_{L_T}(u) := f(u)I(|u| > L_T)$ 与 $f^*_{L_T}(u) := f^*(u)I(|u| > L_T)$。则对任意固定的 $j \in \mathbb{N}$，当 $T$ 充分大时，下述结论对 $x \in [0,1]$ 一致成立：

$$\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} f_{L_T}\left(\frac{i/T-x}{h}\right)\left(\frac{i/T-x}{h}\right)^j - \int_0^1 f_{L_T}\left(\frac{u-x}{h}\right)\left(\frac{u-x}{h}\right)^j du\right| \le \frac{C}{T}, \tag{77}$$

$$\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} f^*_{L_T}\left(\frac{i/T-x}{h}\right)\left(\frac{i/T-x}{h}\right)^j - \int_0^1 f^*_{L_T}\left(\frac{u-x}{h}\right)\left(\frac{u-x}{h}\right)^j du\right| \le \frac{C}{T}. \tag{78}$$

考虑与核平滑估计相关的量（例如，Nadaraya-Watson 估计量和局部线性估计量），

$$s_{T,j}(x) := \frac{1}{Th}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{t/T-x}{h}\right)^j K\left(\frac{t/T-x}{h}\right), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

以下引理推广了 Fern´andez 和 Fern´andez（2001）中的命题 1。

**引理 5.** 在假设 *A.2* 和 $L_1 = 1$ 下，对于任意固定的 $j \in \mathbb{N}$，有

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|s_{T,j}(x) - \mu_j(x)\right| = O\left(\frac{1}{Th}\right),$$

其中 $\mu_j(x) = \int_{G_x} u^j K(u)du$ 满足

$$G_x = \begin{cases} [-1,0], & \text{if } x = 1 \\ [-1,1], & \text{if } x \in (0,1) \\ [0,1], & \text{if } x = 0 \end{cases}. \tag{79}$$

Lem滑动平均 5 表明，在 (22) 中定义的矩阵 $S_{T,x}$ 收敛到 $S_x$，当 $T \to \infty$ 时，其中

$$S_x = \int_{G_x} \begin{bmatrix} 1 & u \\ u & u^2 \end{bmatrix} K(u)du. \tag{80}$$

**引理 6.** 设 $K \geq 0$ 满足带有 $L = 1$ 的假设 *A.2*，并按 (80) 定义 $S_x$。若$\mu(\{u \in G_x : K(u) > 0\}) > 0$，则 $S_x$ 是正定的。此外，存在 $\lambda_0 > 0$ 和 $T_0 < \infty$ 使得

$$\min_{x\in[0,1]} \{\lambda_{\min}(S_{T,x})\} \geq \lambda_0, \qquad \forall\, T \geq T_0, \tag{81}$$

其中 $\lambda_{\min}(S_{T,x})$ 表示 $S_{T,x}$ 的最小特征值。

在下一引理中，$\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的欧几里得（$L_2$）范数。

**引理 7.** 假设引理 *6* 的条件成立。则对所有 $v \in \mathbb{R}^2$ 以及所有充分大的 $T$，

$$\sup_{x\in[0,1]} \|S_{T,x}^{-1} v\| \leq \frac{1}{\lambda_0}\|v\|.$$

为证明定理 1 和定理 2 中的一致收敛速率，使用了两个中间结果。第一个给出了 $\alpha$-混合相依下部分和的尾概率界，第二个建立了核平均块的方差界。

我们首先陈述一个适用于三角阵列的指数型不等式，该不等式基于 Liebscher (1996) 的定理 2.1，而后者又由 Rio 等（ 1995 ）的定理 5 推出。

**引理 8** (Liebscher-Rio)。 设 $\{Z_{i,T}\}$ 为一个均值为零的三角阵列，满足$|Z_{i,\ T}| \leq b_T$，并令 $\alpha_T$ 表示其强混合系数。那么，对于任意满足 $4b_T m_T < \epsilon$的 $\epsilon > 0$ 和 $1 \leq m_T \leq T$，

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{T} Z_{i,T}\right| > \epsilon\right) \leq 4\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{64\sigma^2_{T,m_T} T/m_T + \frac{8}{3}\epsilon b_T m_T}\right) + 4\alpha_T(m_T)\frac{T}{m_T},$$

其中 $\sigma^2_{T,\ m_T} =$上确界$_{0\leq j\leq T-1} E[(\sum_{i=j+1}^{\min\{j+m_T,T\}} Z_{i,\ T})^2]$。

为了界定引理 8 中出现的方差项 $\sigma^2_{T,\ m_T}$，必须考虑 $\{Z_{t,T}\}$可能非零的协方差。Hansen (2008) 和 Kristensen (2009) 的方法是分别对短、中、长滞后的此类协方差进行界定。然而，在我们的固定设计情形下，无需进行这种划分；利用引理 3 中建立的一致积分近似即可完全避免这种做法。我们强调，在定理 1-2 的证明中，引理 8 中出现的方差项 $\sigma^2_{T,\ m_T}$ 均指数组 $\{Z_{t,T}\}$ 限制在由核诱导的指标集上的分块方差。具体而言，对于任意正的递增序列 $L_T$，对每个 $x \in [0,1]$ 定义指标集

$$J_l(L_T) := \left\{i \in \{1,\dots,T\} : \left|\frac{i/T - x}{h}\right| \leq L_T\right\}, \qquad n_T(x) := \#J_x(L_T). \tag{82}$$

令 $\{i_r(x)\}^{n_T(x)}{}_{r=1}$为 $J_x(L_T)$ 的递增枚举。给定一个三角阵 $\{Y_{i,T}(\gamma) : T \geq 1, 1 \leq i \leq T\}$，令

$$\widetilde{Y}_{r,T}(x,\gamma) := Y_{i_r(x),T}(\gamma), \qquad r \in \{1,\dots,n_T(x)\},$$

and

$$\sigma^2_{n_T(x),m_T} = \sup_{0\le\ell\le n_T(x)-1} \mathrm{Var}\left(\sum_{r=\ell+1}^{\min\{\ell+m_T,n_T(x)\}} \widetilde{Y}_{r,T}(\gamma)K\left(\frac{i_r(x)/T-x}{h}\right)\left(\frac{i_r(x)/T-x}{h}\right)^j\right).$$

上述定义的量 $\sigma^2_{n_T(x)\ m_T}$ 对应于在定理 1 和定理 2 的证明中应用引理 8 时涉及的方差项。

**引理9**。 设 $\{Y_{i,T}(\gamma)\colon T\ge 1, 1\le i\le T\}$ 为满足 ***A.1*** 和 ***A.3*** 中矩条件 (4) 的 $\alpha$-混合三角阵。假设 $\beta > s/(s-2)$，并设 $m_T$为正序列，使得对所有 $x\in[0,1]$，均有 $m_T \le n_T(x)$。在 ***A.2*** 条件下，对所有充分大的 $T$，有

$$\sup_{x\in[0,1]} \sigma^2_{n_T(x),m_T} \le C(1+\|\gamma\|^\lambda)^{2/s} m_T.$$

# 《固定设计下异质相依数据的核平均一致收敛》的补充材料。

**Danilo H. Matsuoka**[a]，**Hudson da Silva Torrent**[b]

## 引言

本补充材料包含为求简洁而未在正文中给出的辅助引理和技术结果的证明。方括号中的所有引用（例如， [第 2]，[附录 B]）均指向主论文中的相应部分。

下文使用以下记号： $[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ 对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$\sup_x := \sup_{}$，$\sup_{x \in [0,1]} := \sup_\gamma$，$\sup_{} := \sup_{\gamma \in \Theta_T}$，$\sup_i := \sup_{}$，$\sup_{1 \leq i \leq T,\ i} := \sup_{} = \sup_T$和 $\sup_{x,\ \gamma} := \sup_{} = \sup_x$。全文中， $C > 0$ 表示一个通用常数，其值可因出现位置不同而异，且与 $T$， $x$和 $\gamma$无关。记号“$\overset{a}{\approx}$”表示渐近等价。

## 辅助结果的证明

在本文档中，方括号内的引用（例如， [第 1]，[附录 B]）指的是主论文中的相应部分。

**Proo引理 1 的证明**。定义 $h_{1,\ x} =$最大值$\{0, x - L_T h\}$ 和 $h_{2,\ x} =$最小值$\{1, x + L_T h\}$。于是

$$J_x(L_T) = \{i \in [T] : i/T \in [x - L_T h, x + L_T h]\} = \{i \in [T] : i/T \in [h_{1,x}, h_{2,x}]\},$$

以及 $k_{x,\ T}(L_T) = \#J_x(L_T)$ 是满足 $h_{1,\ x} \leq i/T \leq h_{2,\ x}$ 的连续整数 $i$ 的个数。一方面，$\lceil T h_{1,\ x} \rceil$ 是满足 $i \geq T h_{1,\ x}$ 的最小整数 $i$。另一方面，$\lfloor T h_{2,\ x} \rfloor$ 是满足 $i \leq T h_{2,\ x}$ 的最大整数 $i$。因此，$k_{x,\ T}(L_T) = \lfloor T h_{2,\ x} \rfloor - \lceil T h_{1,\ x} \rceil + 1$。于是

$$k_{x,T}(L_T) \leq (T h_{2,x}) - (T h_{1,x}) + 1 = T(h_{2,x} - h_{1,x}) + 1, \tag{1}$$
$$k_{x,T}(L_T) \geq (T h_{2,x} - 1) - (T h_{1,x} + 1) + 1 = T(h_{2,x} - h_{1,x}) - 1. \tag{2}$$

固定 $x \in [0, 1]$。若 $x \in \{0, 1\}$，则对所有 $T$，$h_{2,\ x} - h_{1,\ x} = L_T h$。若 $x \in (0,\ 1)$，则当 $T$ 足够大时， $L_T h <$最小值，这意味着 $h_{2,\ x} - h_{1,\ x} = (x + L_T h) - (x - L_T h) = 2L_T h$。将 (1)-(2) 除以 $T L_T h$，得到

$$\frac{h_{2,x} - h_{1,x}}{L_T h} - \frac{1}{T L_T h} \leq \frac{k_{x,T}(L_T)}{T L_T h} \leq \frac{h_{2,x} - h_{1,x}}{L_T h} + \frac{1}{T L_T h}, \tag{3}$$

对所有足够大的 $T$ 都成立。在 (3) 中取极限，得到 $k_{x,\ T}(L_T)/(T L_T h) \to c_x$, $T \to \infty$，其中 $c_x = 1 + I(x \in (0,\ 1))$，因为 $1/(T L_T h) = o(1)$。最后，由于 $\sup_x \{h_{2,x} - h_{1,x}\} \leq 2L_T h$，不等式 (1) 推出 $\sup_x k_{x,\ T}(L_T) \leq 2T L_T h + 1$。 ∎

[a]应用微观经济学研究组 - 经济学系，南里奥格兰德联邦大学。[b]数学与统计研究所 - 南里奥格兰德联邦大学。
电子邮箱：danilomatsuoka@gmail.com（Matsuoka）；hudsontorrent@gmail.com（Torrent）

**引理 3 的证明**。不等式 (76) [附录 B] 的证明与不等式 (75) [附录 B], 的证明采用相同的论证, 因此我们只证明后者。固定 $0 \le a \le b \le 1$ 和 $x \in [0,1]$。定义 $\zeta(u) := f(u)u^j$ 和 $\ell_x(u) := \zeta(\frac{u-x}{h})$, 对所有 $u \in [0,1]$ 均成立。采用这一记号,

$$\ell_x(i/T) = f\left(\frac{i/T - x}{h}\right)\left(\frac{i/T - x}{h}\right)^j.$$

设 $i_a := \lceil aT \rceil$ 且 $i_b := \lfloor bT \rfloor$。则

$$\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in[a,b]} \ell_x(i/T) = \frac{1}{T}\sum_{i=i_a}^{i_b} \ell_x(i/T) = \frac{1}{T}\ell_x(i_a/T) + \frac{1}{T}\sum_{i=i_a+1}^{i_b} \ell_x(i/T),$$

and

$$\int_a^b \ell_x(u)du = \int_{i_a/T}^{i_b/T} \ell_x(u)du + \int_a^{i_a/T} \ell_x(u)du + \int_{i_b/T}^b \ell_x(u)\,du.$$

因此，根据三角不等式,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{T}\sum_{i=i_a}^{i_b} \ell_x(i/T) - \int_a^b \ell_x(u)du\right| &\le \left|\frac{1}{T}\sum_{i=i_a+1}^{i_b} \ell_x(i/T) - \int_{i_a/T}^{i_b/T} \ell_x(u)du\right| + \frac{1}{T}|\ell_x(i_a/T)| \\ &\quad + \left|\int_a^{i_a/T} \ell_x(u)du\right| + \left|\int_{i_b/T}^b \ell_x(u)\,du\right| \\ &:= A_{x,T} + B_{x,T} + C_{x,T} + D_{x,T}.\end{aligned}$$

此外，根据 $i_a$ 和 $i_b$的定义，必有

$$0 \le \frac{i_a}{T} - a \le \frac{1}{T}, \quad \text{and} \quad 0 \le b - \frac{i_b}{T} \le \frac{1}{T}. \tag{4}$$

由于 $K$ 在 $[-L_1, L_1]$ 上是利普希茨的，且 $g$ 在 $K$的值域上是利普希茨的，因此复合函数$f = g \circ K$ 在 $[-L_1, L_1]$上是利普希茨的。此外，由于对于 $|u| > L_1$ 有 $K(u) = 0$，且 $g(0) = 0$，我们有对于 $|u| > L_1$有 $f(u) = 0$。因此， $f$ 具有紧支撑，因而在 $\mathbb{R}$上有界且可积。因此， $f$ 满足引理 2的条件。应用该引理可得 $\sup_{u\in\mathbb{R}} |u|^j |f(u)| \le C_j$，从而 $|\ell_x(u)| \le \sup_{u\in\mathbb{R}} |u|^j |f(u)| \le C_j$。因此，利用 (4),

$$\sup_{x\in[0,1]} B_{x,T} \le \sup_{u\in\mathbb{R}} |\ell_x(u)| \frac{1}{T} \le \frac{C_j}{T}, \tag{5}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} C_{x,T} \le \sup_{u\in\mathbb{R}} |\ell_x(u)| \int_a^{i_a/T} du \le C_j\left(\frac{i_a}{T} - a\right) \le \frac{C_j}{T}, \tag{6}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} D_{x,T} \le \sup_{u\in\mathbb{R}} |\ell_x(u)| \int_{i_b/T}^b du \le C_j\left(b - \frac{i_b}{T}\right) \le \frac{C_j}{T}. \tag{7}$$

接下来，我们聚焦于 $A_{x,\ T}$。由于 $u \mapsto u^j$ 在 $[-L_1, L_1]$上连续可微，因此它在此区间上满足利普希茨条件。此外， $f$ 在 $[-L_1, L_1]$上有界且满足利普希茨条件。因此，乘积$\zeta(u) = f(u)u^j$在 $[-L_1, L_1]$上满足利普希茨条件。事实上,

$$|\zeta(u) - \zeta(v)| \le |f(u) - f(v)||u|^j + |f(v)||u^j - v^j| \le C|u - v|, \qquad u, v \in [-L_1, L_1]. \tag{8}$$

因此，对所有 $u, v \in \mathbb{R}$ 使得 $|(u - x)/h| \le L_1$ 且 $|(v - x)/h| \le L_1$,

$$|\ell_x(u) - \ell_x(v)| = \left|\zeta\left(\frac{u-x}{h}\right) - \zeta\left(\frac{v-x}{h}\right)\right| \le \frac{C}{h}|u - v|. \tag{9}$$

因为对 $|u| > L_1$有 $f(u) = 0$，我们同样有 $\zeta(u) = f(u)u^j = 0$对 $|u| > L_1$成立，因此

$$\ell_x(u) = \zeta((u-x)/h) = 0, \quad \text{if } |(u-x)/h| > L_1. \tag{10}$$

令 $J_{x,T} = \{i \in \{i_a+1, \ldots, i_b\}: i/T \in C_x(L_1)\}$，其中 $C_x(L_1)$ 如附录 B]中的公式 (71) 所示。根据 (10)，$A_{x,T}$中关于 $\{i_a+1, \ldots, i_b\}$ 的求和首先限制在 $J_{x,T}$上，因为否则 $\ell_x(i/T) = 0$。我们将 $J_{x,T} = J^*_{x,T} \cup \partial J^*_{x,T}$划分为若干部分，其中 $J^*_{x,T} := \{i \in \{i_a+1, \ldots, i_b\}: [(i-1)/T, i/T] \subseteq C_x(L_1)\}$，以及 $\partial J^*_{x,T} := J_{x,T} \setminus J^*_{x,T}$。由于 $J^*_{x,T} \subseteq J_x(L_1) = \{i \in [T: i/T \in C_x(L_1)]\}$，引理 1 推出 $\sup_{x\in[0,1]} \# J^*_{x,T} = O(Th)$。注意，若$J_{x,T} = \emptyset$，则 $\partial J^*_{x,T}$为空。若 $J_{x,T} \neq \emptyset$，则 $\partial J^*_{x,T}$为空，当且仅当 $\min J_{x,T}/T = \min C_x(L_1)$。否则，$\partial J^*_{x,T} = \{i_0\}$，因此 $\# \partial J^*_{x,T} = 1$。于是，$\sup_{x\in[0,1]} \# \partial J^*_{x,T} = 1$。

根据 (9)，$\ell_x(u)$ 在 $u \in [(i-1)/T, \ i/T]$ if $i \in J^*_{x,T}$ 上是利普希茨连续的。因此，根据积分中值定理，对每个 $i \in J^*_{x,T}$，存在 $\xi_i \in ((i-1)/T, \ i/T)$ 使得

$$\int_{(i-1)/T}^{i/T} \ell_x(u)\, du = \frac{1}{T}\ell_x(\xi_i).$$

因此，由于 $|i/T - \xi_i| \le 1/T$，对所有 $i \in J^*_{x,T}$，我们有

$$\left|\frac{1}{T}\ell_x(i/T) - \int_{(i-1)/T}^{i/T} \ell_x(u)\, du\right| = \frac{1}{T}\left|\ell_x(i/T) - \ell_x(\xi_i)\right| \le \frac{C}{Th}\left|\tfrac{i}{T} - \xi_i\right| \le \frac{C}{T^2 h}.$$

此外，由于 $\sup_{u\in\mathbb{R}} |\ell_x(u)| \le C_j \le C$，对所有 $i \in \partial J^*_{x,T}$

$$\left|\frac{1}{T}\ell_x(i/T) - \int_{(i-1)/T}^{i/T} \ell_x(u)du\right| \le \left|\frac{1}{T}\ell_x(i/T)\right| + \left|\int_{(i-1)/T}^{i/T} \ell_x(u)du\right| \le \frac{C}{T}.$$

因此，利用上述结果可知，对所有充分大的 $T$

$$\begin{aligned} A_{x,T} &\le \sum_{i\in J^*_{x,T}} \left|\frac{1}{T}\ell_x(i/T) - \int_{(i-1)/T}^{i/T} \ell_x(u)du\right| + \sum_{i\in \partial J^*_{x,T}} \left|\frac{1}{T}\ell_x(i/T) - \int_{(i-1)/T}^{i/T} \ell_x(u)du\right| \\ &\le \sup_{x\in[0,1]} \# J^*_{x,T} \frac{C}{T^2 h} + \sup_{x\in[0,1]} \# \partial J^*_{x,T} \frac{C}{T} \le \frac{C}{T}. \end{aligned} \tag{11}$$

由界 ( 5 7 11 $\sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{T}\sum_{i\ i/T\in[a,b]} \ell_x\ i/T\ - \int_a^b \ell_x\ u\ du\right| =$)-( ) $O$ 和 ( )，我们有 sup: ( ) ( ) $(1/T)$，如所声称的。 ∎

**引理 4 的证明**。我们首先证明，在附录 B 中定义的函数 (85) []满足关于 $K^*$ 的条件。定义 $K^*(x) = \Lambda_1 I(|x| \le 2L_1)$。固定 $\delta > 0$，并令 $x_1, x_2$ 满足 $|x_1 - x_2| \le \delta \le L_1$。由于 $K$ 是 Lipschitz 连续的，我们有

$$|K(x_1) - K(x_2)| \le \Lambda_1 |x_1 - x_2| = \Lambda_1 |x_1 - x_2| \{I(|x_1| \le 2L_1) + I(|x_1| > 2L_1)\}.$$

若 $|x_1| > 2L_1$ 且 $|x_1 - x_2| \le L_1$，则 $|x_2| \ge |x_1| - |x_1 - x_2| > 2L_1 - L_1 = L_1$。由于 $K$ 具有紧支撑，$K(x_1) - K(x_2) = 0$，因此项 $I(|x_1| > 2L_1)$ 不产生任何贡献。因此，有 $|K(x_1) - K(x_2)| \le \delta K^*(x_1)$。此外，$|K^*| \le \Lambda_1$，且 $\int_{\mathbb{R}} |K^*(u)| du \le \Lambda_1 (4L_1)$。

现在我们转向（86）中的积分近似 [附录 B]。令 $K^*(x) = \Lambda_1 I(|x| \le 2L_1)$。那么，$K^*$ 在 $[-2L_1, 2L_1]$上有界、可积且满足利普希茨条件。因此，应用引理 3 即可得到所需结果。 ∎

**推论 1 的证明**。对每个 $x \in [0,1]$, $C^c_x(L_T)$ 定义 := $[0,1] \setminus C_x(L_T)$，其中 $C_x(L_T)$ 由附录 B 中的 (71) [] 给出。于是

$$u \in C_x(L_T) \iff \left|\frac{u-x}{h}\right| \le L_T,$$

因此

$$I\Big(\Big|\frac{u-x}{h}\Big| > L_T\Big) = I\big(u \in C_x^c(L_T)\big), \qquad u \in [0,1]. \tag{12}$$

令 $\ell_x(u) \coloneqq f((u-x)/h)((u-x)/h)^j$。利用 (12)，我们改写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} f_{L_T}\Big(\frac{i/T-x}{h}\Big)\Big(\frac{i/T-x}{h}\Big)^j &= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\ell_x(i/T)I\Big(\Big|\frac{i/T-x}{h}\Big| > L_T\Big)\\ &= \frac{1}{T}\sum_{i:\,i/T\in C_x^c(L_T)}\ell_x(i/T),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_{L_T}\Big(\frac{u-x}{h}\Big)\Big(\frac{u-x}{h}\Big)^j du &= \int_0^1 \ell_x(u)I\Big(\Big|\frac{u-x}{h}\Big| > L_T\Big)du\\ &= \int_{C_x^c(L_T)}\ell_x(u)du.\end{aligned}$$

因此，只需对 $\sup_{x\in[0,1]}\big|\frac{1}{T}\sum_{i:\ i/T\in C_x^c(L_T)}\ell_x(i/T) - \int_{C_x^c(L_T)}\ell_x(u)du\big|$ 作界。

接下来，我们刻画 $C_x^c(L_T)$。由 (71) [附录 B]，可知，补集 $C_x^c(L_T)$ 至多是 $[0,1]$ 的两个子区间的并。更准确地说，

$$C_x^c(L_T) = \begin{cases}(x+L_Th,\,1], & x\in[0,L_Th],\\ [0,x-L_Th)\cup(x+L_Th,\,1], & x\in(L_Th,1-L_Th),\\ [0,x-L_Th), & x\in[1-L_Th,1].\end{cases}$$

定义 $I_{1,x,T} \coloneqq [0,\max\{0,x-L_Th\})$ 和 $I_{2,x,T} \coloneqq (\min\{1,x+L_Th\},1]$。注意，$[0,0)=\emptyset$ 且 $(1,1]=\emptyset$，因此当 $x\in[0,L_Th]\cup[1-L_Th,1]$ 时，$I_{1,x,T}$ 或 $I_{2,x,T}$ 可能为空。于是 $C_x^c(L_T) = I_{1,x,T}\cup I_{2,x,T}$。因此，根据三角不等式，

$$\Big|\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in C_x^c(L_T)}\ell_x(i/T) - \int_{C_x^c(L_T)}\ell_x(u)du\Big| \le \sum_{k=1}^{2}\Big|\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in I_{k,x,T}}\ell_x(i/T) - \int_{I_{k,x,T}}\ell_x(u)du\Big|.$$

对于每个 $k\in\{1,2\}$，若 $I_{k,x,T}=\emptyset$，则对应项为零。否则，$I_{k,x,T}$ 是包含于 $[0,1]$ 中的半开区间。将 $I_{k,x,T}$ 替换为其闭包 $\bar{I}_{k,x,T}$，至多会在有限和中增加一项，该项对应于一个（可能存在的）边界点 $i/T\in\{x\pm L_Th\}$，且不会影响积分。因此，由于 $\sup_{u\in\mathbb{R}}|\ell_x(u)|\le C$，这一替换只会产生 $O(1/T)$ 阶误差，且该误差关于 $x\in[0,1]$ 一致：

$$\Big|\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in I_{k,x,T}}\ell_x(i/T) - \frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in \bar{I}_{k,x,T}}\ell_x(i/T)\Big| \le \frac{1}{T}\sup_{u\in\mathbb{R}}|\ell_x(u)| \le \frac{C}{T}.$$

此外，每个 $I_{k,x,T}$ 在 $I_{k,x,T}\neq\emptyset$ 时均具有 $[a,b]$ 的形式。由引理 3 可得

$$\sup_{x\in[0,1]}\Big|\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in I_{k,x,T}}\ell_x(i/T) - \int_{I_{k,x,T}}\ell_x(u)du\Big| \le \frac{C}{T}, \qquad k\in\{1,2\},$$

对所有充分大的 $T$ 均成立。因此

$$\sup_{x\in[0,1]}\Big|\frac{1}{T}\sum_{i:i/T\in C_x^c(L_T)}\ell_x(i/T) - \int_{C_x^c(L_T)}\ell_x(u)du\Big| \le \frac{C}{T},$$

由此证明了 (88) [附录 B]。第二个不等式可用相同的论证，将 $f$ 替换为 $f^*$ 并使用引理 4 得出，故略去。 ∎

**引理 5 的证明**。应用引理 3，其中 $f(u) = K(u)u^j$ 和 $[a,b] = [0,1]$，并作变量代换 $w = (u-x)/h$，即可对 $x \in [0,1]$一致地得到

$$\begin{aligned} s_{T,j}(x) &= \int_0^1 K\left(\frac{u-x}{h}\right)\left(\frac{u-x}{h}\right)^j du + O\left(\frac{1}{Th}\right) \\ &= \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(w)w^j dw + O\left(\frac{1}{Th}\right). \end{aligned}$$

由于 $K(w) = 0$ 对于 $|w| > 1$成立，最后一个积分对于所有充分大的 $T$均等于 $\mu_j(x)$. ∎

**引理 6 的证明**。对于所有非零向量 $y = (y_1, y_2)' \in \mathbb{R}^2$，有

$$y^\intercal S_x y = \int_{G_x} y^\intercal \begin{bmatrix} 1 & u \\ u & u^2 \end{bmatrix} y K(u)\, d\mu(u) = \int_{G_x} (y_1 + y_2 u)^2 K(u)\, d\mu(u) \geq 0. \tag{13}$$

由于 $\mu(\{K > 0\} \cap G_x) > 0$ 且 $(y_1 + y_2 u)^2 = 0$ 在 $\{K > 0\} \cap G_x$中至多在一点处成立，因此存在 $G_x$ 的一个具有正测度的子集，在该子集上 $K(u) > 0$ 且 $(y_1 + y_2 u)^2 > 0$。因此，(13) 中的积分必为严格正数，并且 $S_x$ 是正定的。

接下来，我们为 $\lambda_{\min}(S_{T,x})$给出一个一致下界。由于 $S_x$ 对于每个 $x \in [0,1]$都是正定的，$\det(S_x)$ 和 $\operatorname{tr}(S_x)$ 都是关于 $x$的严格正连续函数。由于 $[0,1]$ 是紧致的，存在

$$\underline{d} := \min_{x\in[0,1]} \det(S_x) > 0, \quad \bar{t} := \max_{x\in[0,1]} \operatorname{tr}(S_x) < \infty \quad \text{and} \quad \underline{t} := \min_{x\in[0,1]} \operatorname{tr}(S_x).$$

根据引理 5，$S_{T,x} \to S_x$ 关于 $x \in [0,1]$一致。由 $\det(\cdot)$ 和 $\operatorname{tr}(\cdot)$ 的连续性，对于任意 $\epsilon \in (0,1)$，存在 $T_0 < \infty$，使得对所有 $T \geq T_0$ 及所有 $x \in [0,1]$,

$$\det(S_{T,x}) \geq (1-\epsilon)\underline{d}, \quad \operatorname{tr}(S_{T,x}) \leq (1+\epsilon)\bar{t} \quad \text{and} \quad \operatorname{tr}(S_{T,x}) \geq (1-\epsilon)\underline{t} \tag{14}$$

由于 $S_{T,x}$ 是对称的，其特征值满足 $\lambda_{\min}(S_{T,x})\lambda_{\max}(S_{T,x}) = \det(S_{T,x})$，且 $\lambda_{\min}(S_{T,x}) + \lambda_{\max}(S_{T,x}) = \operatorname{tr}(S_{T,x})$，其中 $\lambda_{\max}(S_{T,x})$ 表示 $S_{T,x}$ 的最大特征值。由式 (14)，$\det(S_{T,x}) > 0$，且 $\operatorname{tr}(S_{T,x}) > 0$，并且对所有 $T \geq T_0$ 及所有 $x \in [0,1]$,

$$\lambda_{\min}(S_{T,x}) \geq \frac{\det(S_{T,x})}{\operatorname{tr}(S_{T,x})} \geq \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\frac{\underline{d}}{\bar{t}} := \lambda_0 > 0.$$

由于 $\lambda_0$ 不依赖于 $x$，该界关于 $[0,1]$一致成立。 ∎

**引理 7 的证明**。根据引理 6，存在 $T_0 < \infty$ 和 $\lambda_0 > 0$，使得 $\lambda_{\min}(S_{T,x}) \geq \lambda_0$ 对所有 $x \in [0,1]$ 及所有 $T \geq T_0$ 均成立。由于每个 $S_{T,x}$ 都是实对称正定矩阵，因此可进行正交对角化 $S_{T,x} = PDP^\intercal$，其中 $P = (p_1, p_2)$ 是一个正交矩阵，其列为 $S_{T,x}$ 的特征向量，而 $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ 包含其特征值。于是，对于任意 $v \in \mathbb{R}^2$,

$$\|S_{T,x}^{-1} v\|^2 = v^\intercal (S_{T,x}^{-1})^2 v = (P^\intercal v)^\intercal (D^{-1})^2 (P^\intercal v) = \sum_{i=1}^2 \frac{(p_i^\intercal v)^2}{\lambda_i^2} \leq \frac{1}{\lambda_0^2}\sum_{i=1}^2 (p_i^\intercal v)^2 = \frac{1}{\lambda_0^2}\|v\|^2,$$

其中，不等式由 $\lambda_i \geq \lambda_0$ 对所有 $i$ 成立得出。对 $x \in [0,1]$ 取上确界，即得所需结果。

∎

**引理9的证明**。固定 $x \in [0,1]$、$\gamma \in \Theta$和 $0 \leq \ell \leq T-1$。定义$k_{r,T}(x) := K((i_r(x)/T - x)/h)$以及$\pi_{r,j,T}(x) := ((i_r(x)/T - x)/h)^j$，并令

$$S_{\ell,m_T}(x,\gamma) := \operatorname{Var}\left(\sum_{r=\ell+1}^{\min\{\ell+m_T, n_T(x)\}} \widetilde{Y}_{r,T}(\gamma)\pi_{r,j,T}(x)k_{r,T}(x)\right).$$

若原始数组 $\{Y_{i,T}(\gamma)\colon\ T \geq 1,\ 1 \leq i \leq T\}$ 满足假设 A.1，则子数组$\sim\{Y_{r,T}(\gamma)\colon\ T \geq 1,\ 1 \leq r \leq n_T(x)\}$ 同样是 $\alpha$-混合的，其混合系数满足相同的界，$\tilde{\alpha}_{\gamma,\,T}(k) \leq \alpha_{\gamma,\,T}(k) \leq Ak^{-\beta}$。此外，在假设 A.3(4)下，一致矩有界性得以继承

$$\sup_{T\geq 1}\sup_{1\leq r\leq n_T(x)} \mathrm{E}(|\widetilde{Y}_{r,T}(\gamma)|^s) \leq \sup_{T\geq 1}\sup_{1\leq i\leq T} \mathrm{E}(|Y_{i,T}(\gamma)|^s) \leq \bar{C}_1(1+\|\gamma\|^\lambda).$$

~因此，假设 A.1 和 A.3(4) 对子数组 $\{Y_{r,T}(\gamma)\}$ 仍然成立。因此，利用 Davydov 不等式（Bosq，2012 年中的定理 1.1）、H¨older 不等式以及引理 2，可得对于某些常数 $\beta,\ s > 2$,

$$\begin{aligned}
S_{\ell,m_T}(x,\gamma) &\leq \sum_{r,t=\ell+1}^{\min\{\ell+m_T,n_T(x)\}} \left|k_{r,T}(x)k_{t,T}(x)\pi_{r,j,T}(x)\pi_{t,j,T}(x)\operatorname{Cov}(\widetilde{Y}_{r,T},\widetilde{Y}_{t,T})\right| \\
&\leq \Big(\sup_{u\in\mathbb{R}}|K(u)||u|^j\Big)^2 \sum_{r,t=\ell+1}^{\ell+m_T} \left|\operatorname{Cov}(\widetilde{Y}_{r,T},\widetilde{Y}_{t,T})\right| \\
&\leq C_j^2\Bigg\{\sum_{r=\ell+1}^{\ell+m_T}\mathrm{E}(|\widetilde{Y}_{r,T}|^2) + \sum_{\substack{r,t=\ell+1\\ r\neq t}}^{\ell+m_T}\left|\operatorname{Cov}(\widetilde{Y}_{r,T},\widetilde{Y}_{t,T})\right|\Bigg\} \\
&\leq C_j^2\Bigg\{\sum_{r=\ell+1}^{\ell+m_T}(\mathrm{E}\,|\widetilde{Y}_{r,T}|^s)^{2/s} + \sum_{\substack{r,t=\ell+1\\ r\neq t}}^{\ell+m_T} C\alpha_T(|r-t|)^{(s-2)/s}(\mathrm{E}\,|\widetilde{Y}_{r,T}|^s)^{1/s}(\mathrm{E}\,|\widetilde{Y}_{t,T}|^s)^{1/s}\Bigg\} \\
&\leq C(1+\|\gamma\|^\lambda)^{2/s}\Bigg\{m_T + \sum_{r=\ell+1}^{\ell+m_T}\Bigg(\sum_{\substack{t=\ell+1\\ t\neq r}}^{\ell+m_T}|r-t|^{-\beta(s-2)/s}\Bigg)\Bigg\}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

注意 到，对于每个 $r \in \{\ell+1,\ldots,\ell+m_T\}$，存在仅依赖于 $s$ 的 $C_s > 0$，使得

$$\sum_{\substack{t=\ell+1\\ t\neq r}}^{\ell+m_T}|r-t|^{-\beta(s-2)/s} \leq 2\sum_{i=1}^{m_T} i^{-\beta(s-2)/s} \leq 2\sum_{i=1}^{\infty} i^{-\beta(s-2)/s} \leq 2C_s,$$

由于 $\beta(s-2)/s > 1$。因此，由式 (15) 可得

$$\sup_x \sigma^2_{n_T(x),m_T} = \sup_x \sup_{0\leq\ell\leq n_T(x)-1} S_{\ell,m_T}(x,\gamma) \leq C(1+\|\gamma\|^\lambda)^{2/s} m_T,$$

如所述。 ∎

# 参考文献

Bosq，D.（2012）。随机过程的非参数统计：估计与预测。统计学讲义。Springer New York。