arXiv:2603.04690v1 [math.ST] 5 Mar 2026

相依函数型数据下广义回归函数局部线性估计量的强一致性。

Danilo H. Matsuoka[a], *, **Hudson da Silva Torrent**[b]

摘要

本研究聚焦于异质分布且强混合数据的广义非参数标量对函数回归模型。我们给出了回归函数局部线性估计量几乎完全收敛的收敛速率。结果表明，在我们的条件下，紧集上的逐点收敛速率与一致收敛速度相同。另一方面，研究证明，当数据相依时，其收敛速率可能慢于独立数据下的收敛速率。模拟研究表明，与局部常数估计量（FLC）相比，函数型局部线性估计量（FLL）具有良好的表现和有限样本性质。此外，一步超前能源消耗预测案例表明，FLL估计量的预测结果显著优于FLC估计量。

关键词： 几乎完全收敛；局部线性估计量；函数型数据；混合性；非参数回归；渐近理论。

MSC2020： 62G20, 62G08, 62R10.

1 引言

自 Ferraty 和 Vieu（2006）推广以来，函数型回归模型中的非参数方法在过去几年里得到了深入研究。举几个例子，局部常数估计量（也称为$Nadaraya\text{-}Watson$ 估计量）及其变体已被用于估计非参数回归函数（Laib 和 Louani，2010；Ling 等，2015；Zhu 等，2017；Kara-Zaitri 等，2017；Shang，2013）、条件密度（Ezzahrioui 和 Ould-Sa¨ıd，2008；Liang 和 Baek，2016；Liang 等，2020）以及条件分布函数（Horrigue 和 Sa¨ıd，2015）。

在大多数情况下，所研究的模型包含一个标量响应和一个函数型协变量。不过，也有一些研究给出了响应变量同样为函数型（Lian 等，2012）或多元型（Omar 和 Wang，2019）的模型结果。

与有限维情形一样，Nadaraya-Watson估计量是更广泛的一类基于核的估计量中的一个特例，这类估计量称为局部多项式回归估计量 （参见 Wand and Jones，1994）。后者假设回归函数在局部范围内可由给定阶数 $k \in$N 的多项式很好地近似，而前者则固定$k = 0$。局部线性估计量（$k = 1$）因其良好的性质[4] 以及相对简单的形式而广受欢迎。Ba´ıllo 和 Gran´e（2009）、Berlinet 等人（2011）以及 Barrientos-Marin 等人（2010）率先提出了将局部线性思想应用于函数型数据的方法。值得注意的是，Barrientos-Marin 等人（2010）的开创性工作影响了

*通讯作者。当前版本：2026年3月6日[a]应用微观经济学研究组 - 经济学系，南里奥格兰德联邦大学。[b]数学与统计研究所 - 南里奥格兰德州联邦大学。电子邮箱：danilomatsuoka@gmail.com（Matsuoka）；hudsontorrent@gmail.com（Torrent）[4]它不受边界偏差影响，并且适用于随机设计和固定设计（参见 Fan，1992；Wand and Jones，1994）。

随后出现的多项研究，包括条件密度（Demongeot 等，2013）和条件分布函数（Demongeot 等，2014；Messaci 等，2015）的估计、独立数据（Zhou 和 Lin，2016）和相关数据（Xiong 等，2018）下的渐近正态性、删失数据的估计（Leulmi，2020），以及对离群值和异方差性稳健的估计（Belarbi 等，2018）等。

我们重点介绍 Leulmi 和 Messaci（2018）所作的扩展，该扩展为强混合函数型数据提供了强收敛速率。我们修改了他们的假设集合，以适用于常见的非对称核函数，例如多项式型核（三角核、二次核、三次核等），并允许采用更一般的依赖条件。就后者而言，我们弱化了强混合数据的联合概率与小球概率乘积之间关系的条件。在这里，数据允许呈异质分布。

本研究旨在考察强混合依赖下函数型数据的局部线性估计量的几乎完全收敛，包括逐点收敛和一致收敛。如上所述，Leulmi 和 Messaci（2018）已经研究过类似问题。不过，他们对渐近性质的处理略有不同。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些预备定义和符号。第 3 节给出一系列假设，并建立局部线性估计量的收敛速率。第 4 节介绍一项模拟实验，第 5 节则通过能源消费数据的应用补充本研究。第 6 节给出总体结论。主要结果和引理的证明分别见附录 A 和 B。

2 模型与估计

为建立估计问题，考虑定义在 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上、取值于 $\mathbb{R} \times \mathscr{F}$ 的 n 随机对 (Y_i, χ_i)，$i \in \{1, \ldots, n\}$，其中 $\mathscr{F}$ 是配备半度量 d 的某个抽象半度量空间[5]。此外，假设每个随机对 (Y_i, χ_i) 都服从广义回归模型：

$$\varphi(Y_i) = m_\varphi(\chi_i) + \epsilon_i, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

其中 $m_\varphi : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ 称为回归函数，$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个博雷尔函数，且随机误差 ϵ_i 满足 $E(\epsilon_i) = 0$，并且对所有 $i \neq j$，它与 χ_j 独立。注意，$\{(Y_i, \chi_i)\}_{i=1}^n$ 可以是相依且异质分布的。

显然，式 (1) 是对标准回归模型的推广，因为φ 可以设为恒等函数（即 $\varphi(t) = t$）。

事实上，上述广义模型涵盖了广泛的非参数估计问题。例如，对于任意 $y \in \mathbb{R}$，只需令 $\varphi(t) = 1_{(-\infty, y]}(t)$，便可研究条件累积分布函数（c.d.f.），因为此时 $m_\varphi(x) = P(Y \leq y \mid \chi = x)$。在满足某些正则性条件时（见 Demongeot 等，2014），若改为令 $\varphi(t) = H((y-t)/h_n)$，其中 H 是某个 c.d.f.，且 $h_n = o(1)$，则当 $n \to \infty$ 时，$m_\varphi(x) \to P(Y \leq y \mid \chi = x)$。另一方面，当研究条件密度 $f_{Y|\chi}$（假设其存在且足够光滑）时，选择 $\varphi(t) = G((y-t)/h_n)$ $y \in \mathbb{R}$，其中 G 为核函数，可推出当 $n \to \infty$ 时，$m_\varphi(x) \to f_{Y|\chi}(y \mid x)$（见 Demongeot 等，2013）。

[5]本文中的半度量 d 按照 Ferraty 和 Vieu（2006）的定义 3.2 定义。在某些数学领域，尤其是拓扑学中，d更常称为 $pseudometric$（参见 Kelley，2017；Howes，2012）。

按照 Barrientos-Marin 等人（2010）的建议，回归函数 $m_\varphi(x) = E(\varphi(Y_i) \mid \chi_i = x)$ $x \in \mathscr{F}$ 的局部线性估计量 $\hat{m}_\varphi(x)$，可定义为以下最小化问题的解 a

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(Y_i) - a - b\beta(\chi_i, x)]^2 K(d(\chi_i, x)/h), \tag{2}$$

其中 β：$\mathscr{F}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个已知函数，满足 $\forall x' \in \mathscr{F}$，$\beta(x', x') = 0$，$\{h\} := \{h_n\}$ 是满足 $h = o(1)$：$nh \to \infty$ 的严格正序列，其中 $n \to \infty$，且函数 $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ 是一个已知的非对称核函数，$\mathbb{R}^+$ 表示非负实数集。可以证明，(2) 对 a 有显式公式：

$$\hat{m}_\varphi(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} w_{i,j}(x)\varphi_j}{\sum_{i,j=1}^{n} w_{i,j}(x)}, \tag{3}$$

with

$$w_{i,j}(x) = \beta_i(x)(\beta_i(x) - \beta_j(x))K_i(x)K_j(x),$$

其中，b 稍微滥用一下记号，$K_i(x) = K(d(\chi_i, x)/h)$，$\beta_i(x) = \beta(\chi_i, x)$ 且 $\varphi_i = \varphi(Y_i)$.

(3) 中的估计量基于如下假设：在 x 附近，$a - b\beta(\cdot, x)$ 可以很好地近似 $m_\varphi(\cdot)$。这意味着，当 $\beta(x, x) = 0$ 时，a 近似等于 $m_\varphi(x)$，由此可认为 $m_\varphi(x)$ 可以通过 $\hat{m}_\varphi(x)$ 得到合理估计。显然，从概念上讲，该估计量是一种使用核权重 K_i 的局部加权最小二乘。这种方法自然延伸了传统多元局部多项式回归[6] 中的做法，即在 x处用某个次数的泰勒多项式来近似回归函数。

函数 $\beta(\cdot, \cdot)$ 和 $d(\cdot, \cdot)$ 可视为定位函数，因为它们用于确定 $\mathscr{F}$ 中一个元素相对于 $\mathscr{F}$ 中另一个元素的位置。$\beta(\cdot, x)$ 取决于关于 $a - b\beta(\cdot, x)$ 如何拟合数据 $\{(Y_i, \chi_i)\}$ 在 x 附近的假设，而半度量 $d(\cdot, x)$ 则更多地与 $\mathscr{F}$ 的拓扑结构有关，该结构也会影响式（2）中的加权方案。从理论上讲，半度量 d 对核估计量的收敛质量起着核心作用，因为它控制着零点周围的小球概率的行为（参见 Ferraty 和 Vieu（2006）第 13 章）。带宽 h 可视为平滑参数，h 的值越大，观测值的权重往往越均匀。

3 渐近性质

3.1 预备知识

渐近性质分析需要一些预备概念。为便于查阅，下面给出相关定义。

定义 1（强混合）。设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列随机变量，$\mathcal{F}_\ell^m = \sigma(X_i : \ell \le i \le m)$ 为由 $\{X_i\}_{i=\ell}^m$ 生成的 σ-代数。$\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的强混合系数 $\{\alpha(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 定义为

$$\alpha(j) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \{|P(A\cap B) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{k+j}^\infty\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

若序列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 $\lim_{j\to\infty} \alpha(j) =$，则称其为强混合（或 α-混合） $0.$

[6] 更多详情请参见 Wand and Jones (1994) 第 5.2 节，以及 Tsybakov (2008) 第 1.6 节。

定义 2（渐近阶）。 设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 分别为随机变量序列和实数序列。

(a) 当且仅当 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的阶几乎完全小于 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ 时，称 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为阶几乎完全小于 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$。

$$\forall\epsilon>0:\sum_{i\in\mathbb{N}}P(|X_i/a_i|>\epsilon)<\infty,$$

记作 $X_n=o_{a.co.}(a_n)$。特别地，若 $X_n=Z_n-Z=o_{a.co.}(1)$，则称 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎完全收敛到随机变量 Z。

(b) 当且仅当 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的阶几乎完全小于或等于 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 时，称 几乎完全小于或等于 。

$$\exists\epsilon>0:\sum_{i\in\mathbb{N}}P(|X_i/a_i|>\epsilon)<\infty,$$

记作 $X_n=O_{a.co.}(a_n)$。

(c) 若 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为实数序列，且存在 C_1， $C_2>0$，使得对于所有充分大的 n，都有 $C_1\leq|a_n/b_n|\leq C_2$，则称 $a_n=\Theta(b_n)$。

上述定义的渐近阶与文献中常见的渐近记号一致[7]。可以看出，几乎完全收敛是一种强收敛模式，因为根据 Borel-Cantelli 引理，对于任意 $\epsilon>0$， $X_n=o_{a.co.}(1)$ 蕴含 $P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n|>\epsilon\})=0$。换言之，当 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎完全收敛时，它也几乎必然收敛。

现在，我们引入一些有用的记号。设 $x\in\mathscr{F}$ 固定，并用 $B(x,r)=\{x'\in\mathscr{F}:d(x,x')\leq r\}$ 表示以 x 为中心、半径为 $r>0$ 的闭球，用$P_{i,j}$ 表示由随机对（χ_i,χ_j）诱导的推前测度。

令 $[t]$ 表示集合 $\{1,\ldots,t\},\forall t\in$ 自然数集，并令 $\mathbf{R}_+^*$ 表示严格正实数的集合。对于任意 $m\in$ 自然数集和 $i\in[n]$，定义算子$\gamma_{m,i}:\mathscr{F}\to$ 实数集$_+^*$ 为 $x\mapsto E(|\varphi(Y_i)|^m\mid\chi_i=x)$,并定义 $\forall i,j\in[n],\forall r_1,r_2,r_3,r_4>0$和 $\forall x'\in\mathscr{F}$,

$$\phi_{x,i}(r_1,r_2)=P(r_1\leq d(x,\chi_i)\leq r_2),$$
$$\Psi_{x,x',i,j}(r_1,r_2,r_3,r_4)=P(r_1\leq d(x,\chi_i)\leq r_2,r_3\leq d(x',\chi_j)\leq r_4).$$

在不会引起混淆的情况下，我们使用以下记号：$\phi_{x,i}(r_1):=\phi_{x,i}(0,r_1)$； $\phi_x(r_1):=\max_{s\in[n]}\phi_{x,s}(r_1)$； $\Psi_{x,x,i,j}(r_1,r_2,r_3,r_4):=\Psi_{x,i,j}(r_1,r_2,r_3,r_4)$；以及 $\Psi_{x,i,j}(r_1):=\Psi_{x,i,j}(0,r_1,0,r_1)$。

下文中，分别用 C 和 c 表示一个可取不同值的任意大正数和任意小正数。[8]

3.2 逐点一致性

在本节中，我们给出由（3）定义的局部线性估计量在 $x\in\mathscr{F}$上的逐点收敛速率。假定数据是具有算术混合速率的强混合数据，这是许多回归框架中的标准选择（Hansen, 2008；Leulmi 和 Messaci，2018；Ferraty和Vieu, 2004）。值得注意的是，数据允许非均匀分布。用于建立几乎处处收敛的渐近理论基于以下假设集合：

[7]作为比较，参见 Lehmann（2004）第 1.4 节和第 2.1 节。[8]由于文中出现的常数 $0<C<\infty$（彼此可能不同）构成一个有限集合，因此我们隐含地取它们中的最大值。同样地，我们隐含地取常数 $0<c<\infty$ 中的最小值。

假设 本节始终采用以下假设:

A1。对于所有 $h>0$ 和 $i\in[n]$, $\phi_{x,\,i}(h)>0$。

A2。存在 $0<b$, $C_2<\infty$, 使得 $|m_\varphi(x_1)-m_\varphi(x_2)|\leq C_2[d(x_1,\,x_2)]^b$ 对每个x_1, $x_2\in B(x,\,h)$都成立。

A3。存在 $0<c_3\leq C_3<\infty$, 使得 $c_3d(x,\,x')\leq|\beta(x,\,x')|\leq C_3d(x,\,x')$ 对所有$x'\in\mathscr{F}$都成立。

A4。对于所有 $m\in$ 自然数集和 $i\in[n]$, 算子 $\gamma_{m,\,i}$ 在 x 处连续。此外, 存在正常数 c_4, $C_4<\infty$, 使得 $c_4<\min_{s\in[n]}\gamma_{1,\,s}(x)$、$\max_{s\in[n]}\gamma_{m,\,s}(x)<C_4$, $\forall m\geq2$, 以及 $\sup_{i\neq j}E(|\varphi(Y_i)\varphi(Y_j)|\,|(\chi_i,\,\chi_j))\leq C_4$。

A5。核函数 $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}+$ 满足 $\int_0^1K(u)du=1$, 其导数 K' 在 $[0,1]$ 上存在, 且:

(I) $\exists0<c_5\leq C_5<\infty:\ c_5\mathbb{1}_{[0,1]}\leq K\leq C_5\mathbb{1}_{[0,1]}$; 或 (II) $K(1)=0$, $\operatorname{supp}K=[0,1)$ 且 $-C_5'\leq K'\leq-c_5'$, 其中某个 $0<c_5'\leq C_5'$。

每当 (II) 成立时, 还要求 $\exists c_0>0$, $\epsilon_0<1$, $n_0\in\mathbb{N}$: $\forall i\in[n]:\forall n>n_0:\int_0^{\epsilon_0}\phi_{x,\,i}(uh)du>c_0\phi_{x,\,i}(h)$。

A6. (i) 存在 $c_6>0$和 $\epsilon^*<1$, 使得 $\phi_{x\,i}^{-1}$, $(h)\int_0^{\epsilon^*}\phi_{x,\,i}(zh,\epsilon h)\frac{d}{dz}(z^lK(z))dz>c_6$, 对所有充分大的 i、$j\in[n]$、$l\in\{2,4\}$和 n均成立; (ii) $\forall i,j\in[n]:\ h^2\iint_{B(x,h)^2}\beta(u,\overline{x})\beta(v,x)dP_{i,\,j}(u,v)=o\Big(\iint_{B(x,h)^2}\beta(u,x)^2\beta(v,x)^2dP_{i,\,j}(u,v)\Big)$。

A7. $\max_{s\in[n]}\phi_{x,s}(h)=O(\min_{s\in[n]}\phi_{x,s}(h))$.

A8。序列 $(Y_i,\,\chi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是速率为 $a>3$ 的算术强混合序列, 即 $\exists\delta,\ C_8:\forall n\in$ 自然数集: $\alpha(n)\leq C_8n^{-(3+\delta)}$。此外, $\exists0<\Delta<\min(a+1,\,\delta):\ \phi_x(h)^{2(a+1)}\geq(\ln n)^{3(a+1)}n^{-\Delta}$;

A9。 $\exists C_9,\ c_9>0:\forall i,\ j\in[n]:\exists1/4<p_{1,\,i,\,j}\leq1/2\leq p_{2,\,i,\,j}<3/4$ 使得

$$c_9[\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)]^{1/2+p_{2,i,j}}\leq\Psi_{x,i,j}(h)\leq C_9[\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)]^{1/2+p_{1,i,j}}.$$

A10。存在 $c_{10}>0$ 使得 $\forall i,\ j\in[n]$, 且 n 足够大时, 若 K 在 **A5** 中属于类型 (I), 则

$$\frac{1}{\Psi_{x,i,j}(h)}\int_0^1\Psi_{x,i,j}(zh,h,0,h)\frac{d}{dz}(z^2K(z))dz>c_{10},$$

并且, 此外, 如果 K 在**A5**中属于类型 (II), 则有

$$-\frac{1}{\Psi_{x,i,j}(h)}\iint_0^1\Psi_{x,i,j}(zh,h,0,wh)\frac{d}{dz}(z^2K(z))K'(w)dzdw>c_{10}.$$

假设**A1**-**A4** 是文献中的标准假设（参见 Barrientos-Marin等人，2010；Ferraty和 Vieu，2006；Ferraty 等人，2010；Leulmi and Messaci，2018）。**A1** 要求观测到每个随机变量 χ_i 位于 x 附近的概率非零；**A2** 假定m_φ 是 b-H¨older 连续的，这将决定我们收敛问题的偏差阶，如命题 1 所示。在**A4**中，对 $E(|\varphi(Y_i)\varphi(Y_j)|\ |\ (X_i, X_j))$和$\gamma_{m,i}(x)$的一致有界为处理数据依赖性提供了一种方法。

满足**A5** 的核函数集合包括三角形核、二次核、三次核和均匀非对称核等常见选择。[9] 值得一提的是，我们的框架可以很容易地适用于形式为$\text{supp}K = [0, L]$的更一般支撑集，其中 $L > 0$。为简便起见，我们固定了 $L = 1$。**A6** 加强了Barrientos-Marin等人（2010）最初针对独立数据提出的假设(H6)和(H7)。包含在Leulmi 和 Messaci（2018）的假设(H7)中的**A6(ii)**刻画了 β 的局部行为，而**A6(i)**刻画了 h 相对于小球概率和核函数K的行为。

由于对所有 $i \in [n]$都有$\min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h) \le \phi_{x,i}(h) \le \max_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)$，**A7** 中关于$\max_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h) = O(\min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h))$的假设意味着，所有$\phi_{x,i}(h)\ i \in [n],$与 $n \to \infty$具有相同的渐近速率。然而，与同分布数据的情形不同，我们并不假设$\phi_{x,i}(h) = \phi_{x,j}(h)\ i \neq j$。

在 **A8** 中，要求 $\phi_x(h)^{2(a+1)} \ge (\ln n)^{3(a+1)} n^{-\Delta}$ with $\Delta < a + 1$，意味着 $\ln n/(n\phi_x(h)^2) = o(1)$，因此，如果数字 $p_{\max}$ 小于 $3/4$，则 $\ln\ n/(n\phi_x(h)^{4p_{\max}-1}) = o(1)$。这一条件对于确保 $\hat{}m_\varphi$ 的一致性至关重要。它强化了传统假设 $\ln n/(n\phi_x(h)) = o(1)$。[10]

假设我们的过程 $(Y_i, \chi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是强混合的，就等于隐含地限制了联合概率 $\Psi_{x,i,j}(h)$ 与长滞后长度下小球概率的乘积 $\phi_{x,i}\phi_{x,j}$ 之间的关系（即，当 $|i - j|$ 相对“较大”时）。[11] 这一限制符合混合性的定义，混合性被视为渐近独立的一种概念。补充材料中的命题3表明，若 $1 < n\min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)$，则存在指标 $i, j \in [n]$，使得 $\Psi_{x,i,j}(h) = \Theta(\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h))$.[12] 对于同分布的强混合数据，Leulmi 和 Messaci（2018）假设，对于某些 $C', C > 0$、某些 $d \in (0, 1],$，以及任意 $i, j \in [n]$，有 $C'\phi_x,1(h)^{1+d} < \Psi_{x,i,j}(h) \le C\phi_x,1(h)^{1+d}$。[13] 然而，在他们的框架中，这种情况只有在 $d = 1$ 时才可能，因为对于 $d \neq 1$，$\Psi_{x,i,j}(h)$ 不可能同时满足 $\Theta\big(\phi_x,1(h)^{1+d}\big)$ 和 $\Theta\big(\phi_x,1(h)^2\big)$。换言之，他们的设定下唯一可能的一致有界为 $C'\phi_x,1(h)^2 < \Psi_{x,i,j}(h) \le C\phi_x,1(h)^2,$，或者更一般地，$\Psi_{x,i,j}(h) = \Theta(\phi_x,1(h)^2)$。

鉴于上述考虑，如果选择**A9**，便能获得更大的灵活性。如此一来，我们允许 $\Psi_{x,i,j}(h)$ 沿着各对 (i, j) 具有不同的渐近阶，其中$n \to \infty$。

A10 是一项技术性假设，用于给出局部线性权重期望的下界。[14] 与**A6(i)**类似，**A10**规定了 h 关于联合概率和核函数 K的局部行为。补充材料中的命题 4探讨了**A6(i)**和**A10**，并表明当使用多项式核函数或均匀型核函数时，它们对分形阶一般过程成立。

[9]参见 Ferraty 和 Vieu（2006）第42页的定义4.1。[10]由于 $(\ln\ n)^3 \ge \ln\ n$且 $c \in (0, 1)$，$\phi_x(h)^2 n \ln n \ge n^{1-\Delta/(a+1)} \to \infty$，因此，$\ln \phi_x\ h^n() 2n \to 0$当 $n \to \infty$时成立。进而可得 $\ln n/(n\phi_x(h)) \to 0$当 $\phi_x(h) \ge \phi_x(h)^2$时成立，只要 n足够大。[11]更多细节请参见补充材料中的命题3。[12]注意，如果 $\ln n/(n\min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)) = o(1)$，且 n 足够大，则 $1 < n\min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)$ 始终成立。[13]Leulmi 和 Messaci （2018）的假设 (H5a) 和 (H5b)，分别.....[14]Leulmi 和 Messaci（2018）的假设(H7)中也有类似的假设。

现在我们陈述$\hat{m}_{\varphi}(x)$的几乎完全收敛速率。令 $p_{\max} = \max_{(i,j)\in[n]^2} p_{2,i,j}$，其中$p_{2,i,j}$ 在**A9**中指定。

定理1。假设***A1-A10*** 均成立。那么

$$\hat{m}_{\varphi}(x) - m_{\varphi}(x) = O(h^b) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)^{4p_{max}-1}}}\right). \tag{4}$$

定理1表明，数据的异质性和依赖性不会影响估计量 $\hat{m}_{\varphi}(x)$ 的确定性部分（即偏差部分）（比较 Barrientos-Marin 等人（2010）的定理4.2）。事实上，它仅取决于回归函数 m_{φ} 的 H¨older 连续阶数。另一方面，可以看出，数据依赖性可能会减慢随机部分的收敛速度。与局部常数估计量的情形不同，在为局部线性权重的期望提供下界时，我们必须处理联合概率 $\Psi_{x,i,j}$。反过来，$\Psi_{x,i,j}$ 不仅受 $(\mathscr{F}, d)$ 的拓扑结构影响，还受其与 $\phi_{x,i}$ 和 $\phi_{x,j}$ 之间关系的影响（即受依赖结构影响）。根据 A9，与联合概率 $\Psi_{x,i,j}$ 相关联的指数 $p_{2,i,j}$ 越大，估计量的收敛速度越慢。原因如下：$p_{2,i,j}$ 的值较大，意味着观测到 χ_i 和 χ_j 的联合概率会随着 $n \to \infty$ 增大而迅速趋于零，这表明数据过度离散，从而导致收敛效率降低。

由于几何混合速率[15] 对任意衰减参数$a > 0$都意味着算术混合速率，[16] 定理1同样适用于几何 α-混合数据。

众所周知，几乎完全收敛意味着依概率收敛。下一个结果在略弱的条件下给出了依概率收敛速率。

推论1。 在满足定理*1*的条件（*A6(i)*除外）时，有

$$\hat{m}_{\varphi}(x) - m_{\varphi}(x) = O(h^b) + O_p\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)^{4p_{max}-1}}}\right). \tag{5}$$

特别地，如果数据是独立的（因此是 α-混合的，混合系数为零），则估计量以标准几乎完全收敛速率收敛（参见Barrientos-Marin等人（2010）的定理4.2或Ferraty和Vieu（2006）的推论11.6）。该结果表述如下。

推论2。 设定理*1*的条件得到满足。此外，如果 $\{(\chi_i, Y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是独立的，则有

$$\hat{m}_{\varphi}(x) - m_{\varphi}(x) = O(h^b) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)}}\right). \tag{6}$$

3.3 一致一致性

本节将在半度量空间$(\mathscr{F}, d)$的一个紧子集S上，建立几乎处处收敛速率的一致性。处理一致性的主要工具是用有限个球覆盖S。因此，Kolmogorov 和 Tikhomirov 于 1959年 引入的以下拓扑概念将会派上用场。

[15]我们称随机序列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为 *geometrically strongly mixing*，如果其混合系数满足 $\alpha(k) \leq t^k$，$k \in$ 自然数集，其中某个 $t \in (0, 1)$.[16]事实上，如果存在 $t \in (0, 1)$，使得 $\alpha(k) \leq Ct^k$，那么对所有 $a > 0$，都有 $\alpha(k) \leq Ck^{-a}$，因为当 $k \to +\infty$ 时 $t^k k^a \to 0$。

定义 3（柯尔莫哥洛夫熵）。设 S 是$(\mathscr{F}, d)$的一个子集，并设 $\epsilon > 0$ 给定。若 $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{N}\{x \in \mathscr{F}:\ d(x, x_k) < \epsilon\}$，则有限个元素 $x_1, \ldots, x_N \in \mathscr{F}$ 组成的集合称为 S 的一个 ϵ-网 。量 $\Phi_S(\epsilon) = \ln(N_\epsilon(S))$称为集合 S的*Kolmogorov* ϵ-熵，其中 $N_\epsilon(S)$是覆盖 S所需的最少开球数，这些开球属于$\mathscr{F}$ 且半径为 ϵ 。

假设 设$\{x_1, \ldots, x_{N_{r_n}(S)}\} \subseteq S$ 是 S的一个 r_n-网，其中 $\{r_n\}_{N\in\mathbb{N}}$ 为正实数序列。令 $\overset{a}{\approx}$ 表示渐近等价。渐近结果所需的假设列举如下。

H1。存在一个可微函数 ϕ 以及常数 $c\ C > 0$ $\forall x \in S\ h >$，使得，，：（），$0\ i \in [n]\ \ 0 < c\phi\ h\ \le \phi_{x\,i}\ h\ \le C\phi\ h$ ϕ ϕ'（）（）。此外，该函数及其导数分别满足 $\lim_{\eta\to 0}\phi(\eta) = 0$ 以及 $\exists\eta_0 > 0$：$\forall\eta < \eta_0$：$\phi'(\eta) < C$。

H2。存在 $0 < b,\ C < \infty$，使得对所有 $x_1 \in S$ 以及所有 $x_2 \in B$（$x_1,\ h$），均有$|m_\varphi(x_1) - m_\varphi(x_2)| \le C[d(x_1,\ x_2)]^b$;

H3. 函数 $\beta(\cdot,\cdot)$ 在 $x \in S$ 上一致满足 **A3** 以及如下利普希茨条件$\exists C > 0$：$\forall x \in \mathscr{F}$：$\forall x_1,\ x_2 \in S$：$|\beta(x, x_1) - \beta(x, x_2)| \le Cd(x_1, x_2)$;

H4. 核函数 K 在 $[0, 1]$ 上是利普希茨连续的，并且满足 **A5(I)** 或 **A5(II)**。若 $K(1) = 0$，则函数 $\phi_{x,i}$ 还必须满足如下附加条件：$\exists c_0 > 0, \epsilon_0 < 1, n_0 \in \mathbb{N}^*$：$\forall i \in [n]$：$\forall n > n_0$：$\inf_{x\in S}\int_0^{\epsilon_0}\phi_{x,i}(uh)du > c_0\inf_{x\in S}\phi_{x,i}(h)$;

H5. 序列 $(Y_i, \chi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是几何强混合的，即 $\alpha(k) \le t^k, k \in$ 自然数集, 对某个 $t \in (0, 1)$。此外，$\exists\Delta_1 \in (0,1)$，使得 $\phi_x(h)^2 \ge (\ln n)^3/n^{\Delta_1}$。

H6。 $\exists C\ c > 0\ \ \forall x\ x' \in S\ \ \forall i\ j \in [n]\ \ \exists 1/4 < p_{1\,i\,j} \le 1/2 \le p_{2\,i\,j} < 3/4\ \ c[\phi_{x,i}\ h\ \phi_{x'\,j}\ h\ ]^{1/2+p_{2\,i\,j}} \le$，：，：，：．．．．．：（）．（）．．．．．$\Psi_{x\,x'\,i\,j}\ h\ \le C[\phi_{x,i}\ h\ \phi_{x'\,j}\ h\ ]^{1/2+p_{1\,i\,j}}$．
（）（）．（）．．

H7。在 $x \in S$ 上一致地，以下假设成立：(i) **A4** 对 $m \ge 1$ 成立；(ii) **A6**；以及 (iii) **A10**。

H8。 $r_n = O(\ln\ n/n)$ 和 $\Phi_S(\ln n/n) \overset{a}{\approx} C\ln n$。

假设集 **H1-H8** 大致上是将条件 **A1- A10**推广到一致情形。**H1** 类似于 Ferraty 等（2010）的假设 (H1) 和 (H5a)，或 Benhenni 等（2008）的 (4) 和 (5)。**H3** 与 Messaci 等（2015）的假设 (U3) 或 Leulmi 和 Messaci（2018）的假设 (U3) 相同。假设 **H4** 和 **H8** 分别与 Ferraty 和 Vieu（2006）的 (H4) 和例 4 相关。H5 中的混合性衰减已被多项研究考察（Truong，1994；Vogt 和 Linton，2014；Ferraty 和 Vieu，2006）；在本文中，它有助于确定估计量随机部分的渐近阶（见命题 4 的证明）。

以下定理给出了式（3）中定义的估计量的统一几乎完全收敛速率。

定理 2. 假设***H1-H8*** 均成立。则

$$\sup_{x\in S}\left|\hat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x)\right| = O(h^b) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)^{4p_{max}-1}}}\right).$$

根据定理 2，我们可以在 S 上一致地获得与定理1相同的收敛速率。此外，可以验证，推论 1 和 2 的结论也可以类似地在 S 上一致地得到。

4 维纳过程的应用与模拟研究

考虑 $[0,1]$, 上的平方可积实值函数空间，记为 $\mathscr{F} = L^2[0,1]$，并赋予其标准内积 $< x_1, \ x_2 >$: $= \int_0^1 x_1(t)x_2(t)dt$, $\forall x_1, \ x_2 \in \mathscr{F}$。已知 $\mathscr{F}$ 在此内积下构成一个可分Hilbert空间。设 $\{\chi_i\}_{i=1}^n$ 是 n 个定义在 $[0,1]$ 上、取值于 $\mathscr{F}$ 的相互独立的标准维纳过程（也称为布朗运动）组成的集合。由于每个 $\chi_i := \{\chi_i(t) \ 0 \leq t \leq 1\}$ 都是一个具有连续协方差函数 $E(\chi_i(t)\chi_i(s)) := \min(t, \ s) \ \forall t, \ s \in [0,1]$ 的二阶零均值过程，我们可以根据 Karhunen-Lo`eve 定理将 $\chi_i(t)$ 展开如下

$$\chi_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t)N_{i,j}, \quad t \in [0,1], \tag{7}$$

其中 $v_j(t) = \sqrt{2}\sin((j-1/2)\pi t) \ j \in \mathbb{N}$ 是 $L^2[0,1]$ 上希尔伯特-施密特积分算子的特征函数，对应于按降序排列的特征值 $\lambda_j = [(j-1/2)\pi]^{-2}$；而 $\{N_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是相互独立的高斯随机变量序列，满足 $N_{i, \ j} \sim N(0, \ \lambda_j)$。

在本节中，我们通过模拟研究比较函数型局部线性回归算子（FLL）与函数型局部常数估计量（FLC）的性能。

数据生成过程： 解释曲线由（7）给出，并在 (0，1) 区间内 100 个等距点构成的网格上进行评估。因变量标量 Y 定义为

$$Y_i = \sqrt{N_{i,1} + N_{i,2}} + \epsilon_i \text{ for } i = 1, \ldots, n,$$

其中误差项 ϵ_i 服从平稳 AR(1) 过程

$$\epsilon_i = \alpha\epsilon_{i-1} + u_i, \tag{8}$$

其中 $u_i \sim N(0, \ 0。01)$，且 $\alpha \in \{0, 1/3, 2/3\}$。该实验包含 $n_r = 250$ 次蒙特卡洛重复试验。

性能评估： 为了评估 FLC 和 FLL 估计量的性能，我们计算估计量 s 和重复实验 j 的均方预测误差（MSPE），如下所示:

$$MSPE_s^{[j]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_{i,s}^{[j]} - m\left(\chi_i^{[j]}\right)\right)^2, \ j = 1, 2, \ldots, n_r \tag{9}$$

其中，$\hat{Y}_{i\,s}^{[j]}$，是估计量 $s \in \{$FLC、FLL$\}$ 对 $Y_i^{[j]}$ 的预测，且 $m\left(\chi_i^{[j]}\right) := \sqrt{N_{i}^{[j]}, \ _1 + N_{i\,2}^{[j]}, \ }$。

---

*Es*估计细节：估计量FLL和FLC具有以下一般公式 :

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} w_{i,j}(x)Y_j}{\sum_{i,j=1}^{n} w_{i,j}(x)}, \tag{10}$$

其中，对于FLL，$w_{i,\ j}(x)$由方程(3)给出；对于FLC，$w_{i,\ j}(x)$对所有$i = 1,\ \ldots\ldots,\ n$简化为$w_j(x) = K(d(\chi_j,\ x)/h)$。对于核密度，我们使用以下多项式核，其满足定理1和定理2的所有要求。

$$K(u) = \frac{3}{2}\left(1 - u^2\right) I_{[0,1]}(u). \tag{11}$$

为了选择带宽 h，我们使用留一交叉验证程序，其描述如下。给定一个样本 $(X_i,\ Y_i)$，$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$，最优带宽h_{opt} 定义为

$$h_{opt} = \arg\min_h n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(Y_k - \hat{m}_{(-k)}(X_k)\right)^2, \tag{12}$$

其中

$$\hat{m}_{(-k)}(X_k) = \frac{\sum_{i,j=1;i,j\neq k}^{n} w_{i,j}(X_k) Y_j}{\sum_{i,j=1;i,j\neq k}^{n} w_{i,j}(X_k)}. \tag{13}$$

对于定位函数 $\beta(\cdot,\ \cdot)$ 和 $d(\cdot,\ \cdot)$，我们考虑 PCA 半度量，该半度量由 Ferraty 和 Vieu（2006）提出，可概述如下。在假设 $E\int \chi^2(s)ds < \infty$ 的条件下，有以下展开式

$$\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int \chi(s) v_k(s) ds\right) v_k, \tag{14}$$

其中 $v_1,\ v_2,\ \ldots$ 是协方差算子的正交归一特征函数

$$\Gamma_\chi(t,s) = E\left(\chi(t)\chi(s)\right).$$

从经验角度来看，给定一个整数 r，令

$$\tilde{\chi}^{(r)} = \sum_{k=1}^{r} \left(\int \chi(s) v_k(s) ds\right) v_k, \tag{15}$$

是 χ的截断版本。基于 L^2范数，对所有$(X_1,\ X_2) \in \mathscr{F}^2$，可定义如下参数化半度量族

$$d_r^{PCA}(X_1, X_2) = \sqrt{\sum_{k=1}^{r} \left(\int (X_1(s) - X_2(s)) v_k(s) ds\right)^2}. \tag{16}$$

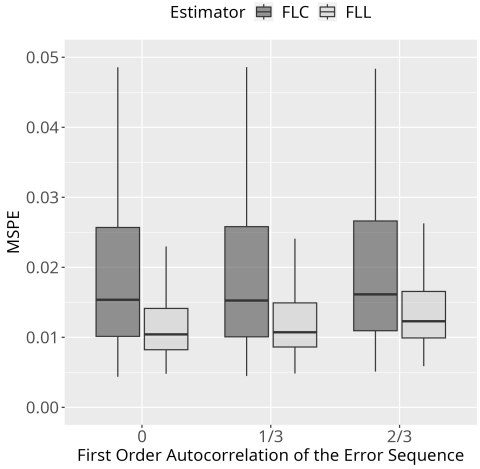
为了估计带宽 h 和PCA 半度量参数 r，我们采用(12)和(13)中所述的交叉验证程序。对于若干候选值 r 和 h，我们选择使(12)中取值最小的数对$(r_{opt},\ h_{opt})$。需要注意的是，FLL需要 r的两个值，一个与 $\beta(\cdot,\ \cdot)$相关联，另一个与 $d(\cdot,\ \cdot)$相关联。

结果：为进行性能比较，我们通过图1所示的箱线图报告FLC和FLL估计量的均方预测误差（均方预测误差）分布，如方程(9)所述。图中展示了三对箱线图，每一对对应于刻画误差序列的AR(1)过程系数的不同取值，如方程(8)中所强调。

总体而言，随着误差序列依赖性水平的提高，两种估计量的表现都略有下降。比较两种估计量可见，FLL 在均方预测误差方面明显优于 FLC，其中位数和四分位距均小于 FLC。在所考察的误差序列依赖性水平下，FLL 的表现始终优于 FLC。与局部常数估计量相比，局部线性函数型估计量表现更优，这一点也见于 Barrientos- Marin 等人（2010）以及 Leulmi 和 Messaci（2018）的研究。

图1： 均方预测误差 - 模拟研究

该图展示了 FLC 和 FLL 估计量的均方预测误差（MSPE）箱线图，具体定义见公式（9）。图中给出了表征误差序列的 AR(1) 过程系数的三个取值：0， 1/3 和 2/3。



5 实际数据应用

在本节中，我们比较 FLL 和 FLC 估计量在一步超前能源消耗预测情境下的表现。

我们在此使用的经验数据集是来自 America Electric Power（AEP）的每小时能源消耗数据。该数据采用公共领域许可，可在 Kaggle 网站（ https://www.kaggle.com/robikscube/hourly-energy-consumption）获取。

我们考察某一天每小时能源消耗的对数（log）（解释变量）与次日总消耗量的对数（响应变量）之间的关系。因此，解释变量是一条在 24 个点上离散化的曲线，而响应变量是一个标量变量。

数据的时间范围为 2004-10-01 至 2018-08-02，共有 $T = 5054$ 天的观测值。我们采用窗口长度为 $W = 1081$ 的滚动窗口方案（3 个完整年份加上预测时域）。因此，我们生成了 $T_{out} = 3973$ 个每日能源消耗的一步超前预测。

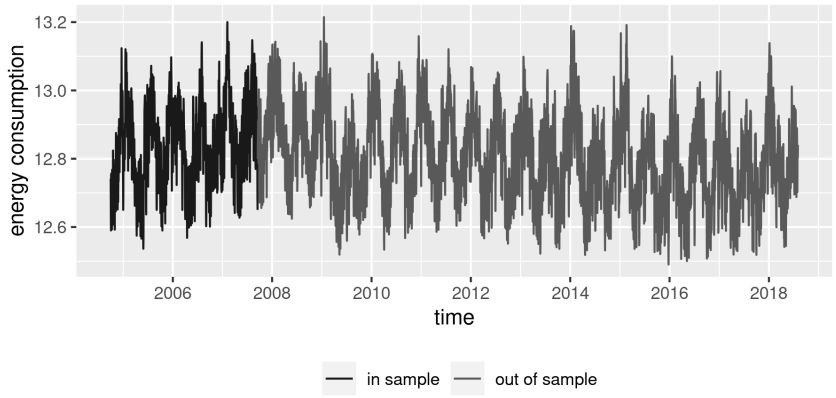
性能评估：我们按照 Welch 和 Goyal（2007）提出的方法，以图形方式分析累积平方预测误差（CSFE）。针对本研究的 CSFE 可定义为

$$CSFE_{i_t} = \sum_{j=i_1}^{i_t} \left[\left(\hat{y}_{j+1|j}^{FLC} - y_{j+1} \right)^2 - \left(\hat{y}_{j+1|j}^{FLL} - y_{j+1} \right)^2 \right], \tag{17}$$

其中 $\hat{y}_{j+1|j}^{FLC}$ 和 $\hat{y}_{j+1|j}^{FLL}$ 分别是 FLC 和 FLL 估计量的一步超前预测；y_{j+1} 是时刻 $j+1$ 的观测响应变量， i_t 且 $t = 1, 2, \ldots\ldots, T_{out}$ 是与预测过程相关的观测值索引。CSFE 增加意味着 FLL 估计量相较于 FLC 估计量具有更好的预测性能，而 CSFE 减少则意味着情况相反。为了检验并比较 FLL 和 FLC 的预测能力，我们采用 Giacomini 和 White（2006）提出的条件预测能力检验，简称*GW* 检验。这里的零假设是：就平方预测误差而言，FLC 的表现至少与 FLL一样好。

图 2：能源消耗时间序列

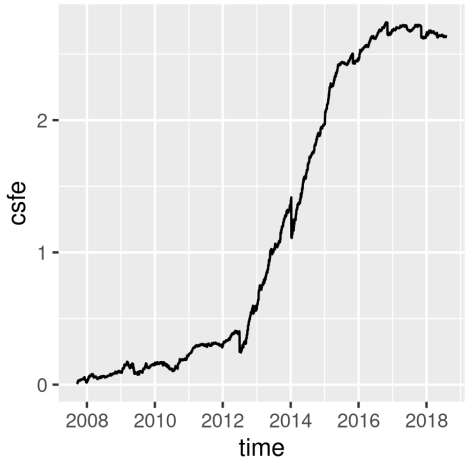
该图展示了 America Electric Power（AEP）的每小时能源消耗数据样本。数据范围从 2004-10-01 到 2018-08-02，共有 $T = 5054$ 天的观测数据。采用窗口长度等于 $W = 1081$的滚动窗口方案。因此，我们生成了 $T_{out} = 3973$ 个一步超前的每日能源消费预测。



估计细节：现在，我们详细说明 FLL 和 FLC 的估计程序。为选择带宽 h，我们采用方程（12）和（13）中描述的留一交叉验证程序。对于定位函数 $\beta(\cdot, \cdot)$ 和 $d(\cdot, \cdot)$，我们选择 PCA 半度量，该方法适用于离散点数量较少的情况。为估计带宽 h 和 PCA 半度量参数 r，我们采用与模拟研究中所述相同的方案。

图 3：CSFE——能源预测应用

该图展示了方程（17）中所述的累积平方预测误差（CSFE）。CSFE 增大意味着 FLL 估计量的预测性能优于 FLC 估计量，反之，CSFE 减小则意味着 FLL 估计量的预测性能较差。



结果：CSFE 的结果见图 3。总体而言，在所考察的几乎整个时期内，FLL 的表现往往优于 FLC。一个例外是样本的最后一段，大约从 2017 年第一季度开始。以平方预测误差作为性能标准时，GW 检验拒绝原假设，p 值为 1.17×10^{-08}，这意味着 FLL 估计量的预测准确度显著高于 FLC。

6 结论

本文的主要贡献在于：当数据呈异质分布且具有强混合性时，推动了函数型非参数建模的发展。理论结果表明，存在数据依赖性时，几乎完全收敛速率可能会变慢。这是因为我们的框架将数据的联合集中性质与其依赖性联系起来。然而，当数据相互独立时，则可得到标准收敛速率。此外，在我们的条件下，紧集上的逐点收敛速率与一致收敛速度相同。模拟结果显示，与局部常数估计量相比，函数型局部线性估计量总体表现良好。此外，一项一步超前能源消耗预测研究表明，前者估计量的预测结果显著比后者更准确。

声明

利益冲突。作者声明，他们不存在与本文内容相关的竞争性利益。

参考文献

Ba´ıllo, A. 和 Gran´e, A.（2009）。函数型预测变量与标量响应的局部线性回归。《多元分析杂志》，100(1):102–111。Barrientos-Marin, J., Ferraty, F. 和 Vieu, P.（2010）。局部建模回归与函数型数据。《非参数统计杂志》，22(5):617–632。Belarbi, F., Chemikh, S. 和 Laksaci, A.（2018）。函数型数据中非参数稳健回归的局部线性估计。《统计学与概率学通讯》，134:128–133。Benhenni, K., Hedli-Griche, S., Rachdi, M. 和 Vieu, P.（2008）。长记忆条件下函数型数据回归估计量的一致性。《统计学与概率学通讯》，78(8):1043–1049。Berlinet, A., Elamine, A. 和 Mas, A.（2011）。函数型数据的局部线性回归。《统计数学研究所年报》，63(5):1047–1075。Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. 和 Rachdi, M.（2013）。函数型数据：条件密度的局部线性估计及其应用。《统计学》，47(1):26–44。Demongeot, J., Laksaci, A., Rachdi, M. 和 Rahmani, S.（2014）。函数型数据条件分布的局部线性建模。*Sankhya A*，76(2):328–355。Ezzahrioui, M. 和 Ould-Sa¨ıd, E.（2008）。函数型数据条件众数函数的非参数估计量的渐近正态性。《非参数统计杂志》，20(1):3–18。Fan, J.（1992）。设计自适应非参数回归。《美国统计学会杂志》，87(420):998–1004。

Ferraty, F., Laksaci, A., Tadj, A. 和 Vieu, P.（2010）。函数型变量非参数估计的一致一致性速率。《统计规划与推断杂志》，140(2):335–352。Ferraty, F. 和 Vieu, P.（2004）。函数型数据的非参数模型及其在回归、时间序列预测和曲线判别中的应用。《非参数统计》，16(1-2):111–125。Ferraty, F. 和 Vieu, P.（2006）。非参数函数型数据分析：理论与实践。施普林格科学与商业媒体。Giacomini, R. 和 White, H.（2006）。条件预测能力检验。《计量经济学》，74(6):1545–1578。Hansen, B. E.（2008）。相依数据的核估计一致收敛速度。《计量经济理论》，第726–748页。Horrigue, W. 和 Sa¨ıd, E. O.（2015）。随机删失下相依函数型数据的非参数回归分位数估计：渐近正态性。《统计学通讯：理论与方法》，44(20):4307–4332。Howes, N. R.（2012）。现代分析与拓扑。施普林格科学与商业媒体。Kara-Zaitri, L., Laksaci, A., Rachdi, M. 和 Vieu, P.（2017）。涉及函数型数据的各种核估计量关于带宽的一致性。《非参数统计杂志》，29(1):85–107。Kelley, J. L.（2017）。一般拓扑学。Courier Dover出版社。Kolmogorov, A. N. 和 Tikhomirov, V. M.（1959）。函数空间中集合的 ε-熵与 ε-容量。《数学科学进展》，14(2):3–86。Laib, N. 和 Louani, D.（2010）。函数型平稳遍历数据的非参数核回归估计：渐近性质。《多元分析杂志》，101(10):2266–2281。Lehmann, E. L.（2004）。大样本理论要素。施普林格科学与商业媒体。Leulmi, S.（2020）。删失数据与函数型回归变量的非参数局部线性回归估计。《韩国统计学会杂志》。Leulmi, S. 和 Messaci, F.（2018）。函数型相依数据广义回归函数的局部线性估计。《统计学通讯：理论与方法》，47(23):5795–5811。Lian, H. 等（2012）。具有函数型响应的非参数函数型回归估计的收敛性。《电子统计学杂志》，6:1373–1391。Liang, H.-Y. 和 Baek, J.-I.（2016）。左截断相依数据条件密度估计的渐近正态性。《统计学论文》，57(1):1–20。Liang, H.-Y., Zhou, H.-B. 和 Guo, Q.-L.（2020）。截断、删失及相依数据下条件密度估计的渐近正态性。《统计学通讯：理论与方法》，49(22):5371–5391。Ling, N., Liang, L. 和 Vieu, P.（2015）。随机缺失下函数型平稳遍历数据的非参数回归估计。《统计规划与推断杂志》，162:75–87。

Messaci, F., Nemouchi, N., Ouassou, I., 和 Rachdi, M. (2015). 函数型数据条件分位数的局部多项式建模。统计方法与应用, 24(4):597– 622.

Omar, K. M. T. 和 Wang, B. (2019). 具有函数型协变量和多元响应的非参数回归方法。《统计学通讯：理论与方法》, 48(2):368–380. Rio, E. (2017). 弱相依随机过程渐近理论, 第80卷。施普林格。Rudin, W. (1976). 数学分析原理。麦格劳-希尔，纽约，第3版。Shang, H. L. (2013). 未知误差密度下非参数函数型回归模型的贝叶斯带宽估计。计算统计学与数据分析, 67:185–198. Truong, Y. K. (1994). 非参数时间序列回归。《统计数学研究所年报》, 46(2):279–293. Tsybakov, A. B. (2008). 非参数估计导论。施普林格科学与商业媒体。Vogt, M. 和 Linton, O. (2014). 平滑趋势存在时周期序列的非参数估计。生物计量学, 101(1):121–140. Wand, M. P. 和 Jones, M. C. (1994). 核平滑。CRC出版社。Welch, I. 和 Goyal, A. (2007). 股票溢价预测实证表现的全面考察。金融研究评论, 21(4):1455–1508. Xiong, X., Zhou, P., 和 Ailian, C. (2018). 函数型时间序列数据条件密度局部线性估计的渐近正态性。《统计学通讯：理论与方法》, 47(14):3418–3440. Zhou, Z. 和 Lin, Z. (2016). 函数型数据局部建模回归估计量的渐近正态性。《非参数统计杂志》, 28(1):116–131. Zhu, T., Politis, D. N., 等 (2017). 非参数函数型自回归模型的核估计及其自助法近似。《电子统计学杂志》, 11(2):2876–2906.

附录 A：辅助结果

引理在本节中，在可能的情况下，我们将省略以下术语对 x 的依赖性： $K_i(x) = K_i$ 和 $\beta_i(x) = \beta_i$。此外，定义 $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \{0\}$。以下引理的证明见《补充材料》第 2 节。

引理 1。假设**A1**，**A3**，**A4**，**A5**，**A6**（i）和**A10**成立。那么对于所有i、 $j \in [n]$ 以及充分大的 n， 我们有：

(*i*) $E(K_i^q|\beta_i|^\ell) \leq Ch^\ell \phi_{x,\ i}(h)$ $\forall (q,\ \ell) \in$ 自然数集 $\times$ 自然数集$_0$;

(ii) $E\left(K_i K_j |\beta_i|^{\ell_1} |\beta_j|^{\ell_2}\right) \leq Ch^{\ell_1+\ell_2} \Psi_{x,\ i,\ j}(h) \quad \forall \ell_1, \ell_2 \in [2]$;

(iii) $E(K_iK_j\beta_i^2) > c^*h^2\Psi_{x,\ i,\ j}(h)$ 其中 $c^* = c_3c_5\min(1,\ c_{10}) > 0$; ***(iv)*** $E(K_i^2\beta_i^\ell) > ch^\ell\phi_{x,\ i}(h)$ $\forall \ell \in \{0,2,4\}$; ***(v)*** $I(0 \le d(x, \chi_i) \le h)E(|\varphi_i|^\ell|\chi_i) \le C$, $\forall \ell \in$ 自然数集$_0$。

引理2. 集合 $S_1 = \{(i,j) \in [n]^2 :\ 1 \le |i-j| \le a_n\}$ 的基数与 $2na_n$ 渐近等价，其中 a_n 是某个发散到无穷大的正序列。

考虑如下协方差和

$$S^2_{n,\ell,k}(x) := \sum_{i,j=1}^{n} \left|\mathrm{Cov}\big(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x), \Lambda_j^{(k,\ell)}(x)\big)\right|,$$

其中

$$\Lambda_i^{(k,\ell)}(x) := \frac{1}{h^k}\{K_i(x)\beta_i(x)^k\varphi_i^\ell - E[K_i(x)\beta_i(x)^k\varphi_i^\ell]\},$$

对于 $i \in [n]$ 与 ℓ, $k \in$ 自然数集$_0$。

引理3. 设假设 **A1-A5**，**A8** 与 **A9** 成立。则对所有 $k \in \{0,1,2\}$、$\ell \in \{0,1\}$，可得

$$S^2_{n,\ell,k}(x) = O\big(n\phi_x(h)\big). \tag{18}$$

此外，若 ***A6(i)*** 和 ***A7*** 成立，则

$$S^2_{n,\ell,k}(x) = \Theta\big(n\phi_x(h)\big). \tag{19}$$

引理4. 设**H1**、**H3**、**H4**、**H7**(ii) 以及**H7**(iii) 这些假设成立。那么，对任意足够大的 i、$j \in [n]$和 n，有:

(i) $\sup_{x\in S} E(K_i^q|\beta_i|^\ell) \le Ch^\ell \sup_{x\in S}\phi_{x,i}(h), \forall (q,\ell) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$;

(ii) 对每个 ℓ_1、$\ell_2 \in [2]$, $\sup_{x\in S} E(K_iK_j|\beta_i|^{\ell_1}|\beta_j|^{\ell_2}) \le Ch^{\ell_1+\ell_2}\sup_{x\in S}\Psi_{x,i,j}(h)$; ***(iii)*** $\inf_{x\in S} E(K_iK_j\beta_i^2) > ch^2\inf_{x\in S}\Psi_{x,i,j}(h)$; ***(iv)*** 对所有 $\ell \in \{0,2,4\}$, $\inf_{x\in S} E(K_i^2\beta_i^\ell) > ch^\ell \inf_{x\in S}\phi_{x,i}(h)$; ***(v)*** $I(0 \le d(x,\chi_i) \le h)E(|\varphi_i|^\ell|\chi_i) \le C$, $\forall \ell \in$ 自然数集$0, \forall x \in S$。

引理5. 假设**H1-H6** 和**H7**(i)-(ii) 均成立。那么对所有 $k \in \{0,1,2\}$, $\ell \in \{0,1\}$，有

$$cn\phi(h) \le \inf_{x\in S} S^2_{n,\ell,k}(x) \le \sup_{x\in S} S^2_{n,\ell,k}(x) \le Cn\phi(h).$$

现在，对所有 $i \in [n]$, $\ell \in \{0,1\}$ 和 $x \in \mathscr{F}$，定义随机变量

$$T_i^\ell(x) = r_n\frac{|\varphi_i|^\ell}{h}1_{B(x,h)\cup B(x_{j(x)},h)}(\chi_i),$$

其中 $j(x) = \arg\min_{j\in[N_{r_n}(S)]} d(x, x_j)$。此外，令 $M_i^\ell(x) = T_i^\ell(x) - ET_i^\ell(x)$ 和 $W^2_{n,\ell}(x) = \sum_{j=1}^n |\mathrm{Cov}(M_i^\ell(x)\ M_j^\ell(x))|$。

引理 6. 假设**H1**、**H5**、**H6** 和**H7**(i) 成立。那么对于 $l \in \{0,1\}$，可得

$$c\frac{r_n^2}{h^2}n\phi(h) \le \inf_{x\in S} W^2_{n,\ell}(x) \le \sup_{x\in S} W^2_{n,\ell}(x) \le C\frac{r_n^2}{h^2}n\phi(h),$$

and

$$\sup_{x\in S}\max_{i\in[n]} ET_i^\ell(x) = O\left(\frac{r_n}{h}\phi(h)\right).$$

命题 令 $m_\ell(x) = (1/\Gamma(x))\sum_{i\neq j}^n w_{i,\ j}(x)\varphi_j^\ell$，其中 $\Gamma(x) = \sum_{i\neq j}^n E(w_{i,\ j}(x))$，且$\ell \in$ 为自然数集。此外，记 $p_{\min} = \min_{(i,j)\in[n]^2} p_{1,\ i,\ j}$ 以及 $p_{\max} = \max_{(i,j)\in[n]^2} p_{2,\ i,\ j}$。

命题 1. 假设 **A1**-**A3**, **A5**,**A6**(ii), **A7**,**A9** 和 **A10** 成立。于是

$$m_\varphi(x) - E(m_1(x)) = O(h^b).$$

命题 1 的证明 假设 **A6(ii)** 意味着

$$h^2 E(K_j K_i \beta_i \beta_j) = o\left(\iint_{B(x,h)^2} \beta(u,x)^2 \beta(v,x)^2 dP_{i,j}(u,v)\right) = o\big(h^4 \Psi_{x,i,j}(h)\big).$$

于是，利用引理 **1(iii)** 和 **A9**,

$$\begin{aligned} E(w_{i,j}(x)) &= E(K_j K_i \beta_i^2) - E(K_j K_i \beta_i \beta_j) \\ &> c^* h^2 \Psi_{x,i,j}(h) - c h^2 \Psi_{x,i,j}(h) = h^2 \Psi_{x,i,j}(h)(c^* - c) \\ &> c h^2 \Psi_{x,i,j}(h) > 0, \end{aligned} \tag{20}$$

对于某个 $c^* > 0$，所有充分大的 n s 以及足够小的 $c > 0$。

根据假设，χ_i 与 ϵ_j 和 $E(\epsilon_j) = 0, \forall i, j \in [n]$ 独立。此外，回归函数 $m_\varphi(\chi_j)$ 是 $\sigma(\chi_j, \chi_i)$-可测的，因为 $\sigma(\chi_j) \subseteq \sigma(\chi_j, \chi_i)\ \forall i, j$。于是

$$E(\varphi_j|(\chi_i,\chi_j)) = E(m_\varphi(\chi_j) + \epsilon_j|(\chi_i,\chi_j)) = m_\varphi(\chi_j) + E(\epsilon_j|(\chi_i,\chi_j)) = m_\varphi(\chi_j), \quad \forall i,j \in [n]. \tag{21}$$

给定随机变量 χ，定义其正部和负部如下：$\chi^+ := \max(\chi,\ 0)$ 和$\chi^- := \max(-\chi,\ 0)$，分别如此。于是，对于所有 n 充分大的情况，我们使用迭代期望定律、(20)、(21) 和**A2**，得到

$$\begin{aligned} m_\varphi(x) - E(m_1(x)) &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x)} m_\varphi(x) - \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{i\neq j} E\big(w_{i,j}(x)\varphi_j\big) \\ &= \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{i\neq j} E\big(w_{i,j}(x) m_\varphi(x)\big) - \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{i\neq j} E\big(w_{i,j}(x) E\big(\varphi_j|(\chi_i,\chi_j)\big)\big) \\ &= \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{i\neq j} E\big[w_{i,j}(x)\big(m_\varphi(x) - m_\varphi(\chi_j)\big)\big] \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{i\neq j} E|w_{i,j}(x)| \sup_{x'\in B(x,h)} |m_\varphi(x) - m_\varphi(x')| \\ &\leq C h^b \frac{\sum_{i\neq j} E|w_{i,j}(x)|}{\sum_{i\neq j} E(w_{i,j}(x))} \\ &= C h^b \frac{\sum_{i\neq j} E\big(|w_{i,j}(x)| - w_{i,j}(x) + w_{i,j}(x)\big)}{\sum_{i\neq j} E(w_{i,j}(x))} \\ &= C h^b \left\{ \frac{\sum_{i\neq j} E\big(|w_{i,j}(x)| - w_{i,j}(x)\big)}{\sum_{i\neq j} E(w_{i,j}(x))} + 1 \right\} \\ &= C h^b \left\{ \frac{\sum_{i\neq j} E\big(w_{i,j}(x)^+ + w_{i,j}(x)^- - w_{i,j}(x)^+ + w_{i,j}(x)^-\big)}{\sum_{i\neq j} E(w_{i,j}(x))} + 1 \right\} \\ &\leq C h^b \frac{\sum_{i\neq j} 2E\big(w_{i,j}(x)^-\big)}{\sum_{i\neq j} E(w_{i,j}(x))}. \end{aligned} \tag{22}$$

注意到

$$\{\omega \in \Omega : (K_i K_j(\beta_i - \beta_j)\beta_i)(\omega) < 0\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \beta_j(\omega) > \beta_i(\omega) > 0\} \cup \{\omega \in \Omega : \beta_j(\omega) < \beta_i(\omega) < 0\}.$$

然后，利用引理 1(ii),

$$\begin{aligned} E\big(w_{i,j}^-\big) &= E\big(-w_{i,j} I(w_{i,j} < 0)\big) = E((K_i K_j \beta_j \beta_i - K_i K_j \beta_i^2) I(w_{i,j} < 0)) \\ &\leq E\big\{(K_i K_j \beta_j \beta_i) I(w_{i,j} < 0)(I(\beta_j > \beta_i > 0) + I(\beta_j < \beta_i < 0))\big\} \\ &= |E\big(K_i K_j \beta_i \beta_j I(w_{i,j} < 0)\big)| \\ &\leq |E\big(K_i K_j \beta_i \beta_j\big)| \leq C h^2 \Psi_{x,i,j}(h). \end{aligned} \tag{23}$$

结合 (20) 和 (23)，可得

$$\frac{\sum_{i \neq j} E\big(w_{i,j}^-\big)}{\sum_{i \neq j} E\big(w_{i,j}\big)} \leq C \frac{\sum_{i \neq j} \Psi_{x,i,j}(h)}{\sum_{i \neq j} \Psi_{x,i,j}(h)} = C, \tag{24}$$

对所有 n 充分大。由 (22) 和 (24) 可立即得出 $m_\varphi(x) - E(m_1(x)) = O(h^b)$.

∎

注 1. 请注意，Leulmi and Messaci（2018）的引理 1 和引理 4 使用与 Barrientos-Marin等人（2010）相同的论证证明。然而，后两位作者的证明基于等式 $E(w_{i,\ j}) = E(w_{1,\ 2})\ \forall i,\ \ j \in [n]$，该等式对独立同分布数据成立，但对于相依同分布数据而言则完全不显然。

命题2. 设条件***H1-H4***、***H6***、***H7(ii)***和***H7(iii)***成立。则

$$\sup_{x \in S} |m_\varphi(x) - E(m_1(x))| = O(h^b).$$

T证明与命题 1 的证明思路相同，故略去。 .

命题3. 若假设***A1-A10***成立，则

$$m_1(x) - E m_1(x) = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n \phi_x(h)^{4p_{max}-1}}}\right), \tag{25}$$

and

$$m_0(x) - 1 = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n \phi_x(h)^{4p_{max}-1}}}\right). \tag{26}$$

如果排除***A6(i)***，则

$$m_1(x) - E m_1(x) = O_p\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n \phi_x(h)^{4p_{max}-1}}}\right), \tag{27}$$

and

$$m_0(x) - 1 = O_p\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n \phi_x(h)^{4p_{max}-1}}}\right). \tag{28}$$

证明 o f 命题3 我们首先证明（25）。按照Barrientos-Marin 等人（2010），令

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{i,j=1}^{n} K_i K_j \beta_i^2 \varphi_j - K_i K_j \beta_i \beta_j \varphi_j \\ &= \left[\frac{\big(nh\phi_x(h)\big)^2}{\Gamma(x)} \right] \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \left[\frac{K_j \varphi_j}{n\phi_x(h)} \right] \left[\frac{K_i \beta_i^2}{nh^2 \phi_x(h)} \right] - \left[\frac{K_i \beta_i}{nh\phi_x(h)} \right] \left[\frac{K_j \beta_j \varphi_j}{nh\phi_x(h)} \right] \right\} \\ &:= Q[S_{2,1} S_{4,0} - S_{3,1} S_{3,0}] \end{aligned}$$

其中，对于 $q \in \{2,3,4\}$ 和 $\ell \in \{0,1\}$,

$$S_{q,\ell} := \frac{1}{n\phi_x(h)} \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i \beta_i^{q-2} \varphi_i^{\ell}}{h^{q-2}} \text{ and } Q := \frac{\big(nh\phi_x(h)\big)^2}{\Gamma(x)}.$$

因此,

$$m_1(x) - E m_1(x) = Q\{[S_{2,1} S_{4,0} - E(S_{2,1} S_{4,0})] - [S_{3,1} S_{3,0} - E(S_{3,1} S_{3,0})]\}.$$

上面方括号中的第一项可写为

$$\begin{aligned} S_{2,1} S_{4,0} - E(S_{2,1} S_{4,0}) = (S_{2,1} - ES_{2,1})(S_{4,0} - ES_{4,0}) + ES_{4,0}(S_{2,1} - ES_{2,1}) \\ + ES_{2,1}(S_{4,0} - ES_{4,0}) - \mathrm{Cov}(S_{2,1}, S_{4,0}). \end{aligned}$$

第二项同样可以用类似方式表示。因此，一旦证明了以下关于 $q \in \{2,3,4\}$和 $\ell \in \{0,1\}$的结果，$m_1(x) - E m_1(x)$ 的渐近阶就可以确定:

(a) $ES_{q,\ell} = O(1)$;

(b) $Q = O(\phi_x(h)^{1-2p_{\max}})$;

(c) $S_{q,\ell} - ES_{q,\ell} = O_{a.co.}\Big(\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}\Big)$;

(d) $\mathrm{Cov}(S_{2,1}, S_{4,0}) = o\Big(\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}\Big), \mathrm{Cov}(S_{3,1}, S_{3,0}) = o\Big(\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}\Big)$.

第一个结果 (a) 可通过如下的引理 1(i)(v) 得到

$$ES_{q,\ell} \leq \frac{C}{n\phi_x(h)} \sum_{i=1}^{n} \frac{E(K_i \beta_i^{q-2})}{h^{q-2}} \leq \frac{C}{n\phi_x(h)} \sum_{i=1}^{n} \frac{h^{q-2}\phi_x(h)}{h^{q-2}} \leq C.$$

根据命题 1 证明中的 (20)，结合 **A7** 和 **A9**，可见当 n 足够大时，$\Gamma(x) \geq cn(n-1)h^2\phi_x(h)^{1+2p_{\max}}$。于是，(b) 由下式得到

$$Q = \frac{\big(nh\phi_x(h)\big)^2}{\Gamma(x)} \leq C\phi_x(h)^{1-2p_{\max}},$$

对所有足够大的 n 均成立。

接下来，通过应用 Fuk-Nagaev不等式（Rio，2017 的定理 6.2）证明 (c)。记 $S_{q,\ell} - ES_{q,\ell} = \big[n\phi_x(h)\big]^{-1} \sum_{i=1}^{n} Z_i^{(q,\ell)}$，其中

$$Z_i^{(q,\ell)} := \Lambda_i^{(q-2,\ell)}(x) = \frac{1}{h^{q-2}} \{K_i \beta_i^{q-2} \varphi_i^{\ell} - E[K_i \beta_i^{q-2} \varphi_i^{\ell}]\}.$$

显然， $EZ_i^{(q,\ell)} = 0$。此外，可以证明 $E\left|\Lambda_i^{(q-2,\ell)}\right|^r = O(\phi_x(h))$， $\forall r \geq 2$，因此 $Z_i^{(q,\ell)}$ 具有有限方差（参见补充材料中引理3证明里的不等式 (4)）。对于足够大的 n，根据马尔可夫不等式可得

$$P(|Z_i^{(q,\ell)}| > t) \leq \frac{E|Z_i^{(q,\ell)}|^r}{t^r} \leq \frac{C}{t^r}\phi_x(h) \leq \frac{1}{t^r}.$$

根据这些观察，Fuk-Nagaev不等式的条件得以满足。因此，我们有

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(q,\ell)}\right| > 4\lambda n\phi_x(h)\right) &\leq 4\left(1 + \frac{(\lambda n\phi_x(h))^2}{vS^2_{n,\ell,q-2}(x)}\right)^{-v/2} + 4C\frac{n}{v}\left(\frac{v}{\lambda n\phi_x(h)}\right)^{r(a+1)/(a+r)} \\ &:= M_{1,n} + M_{2,n}, \end{aligned} \tag{29}$$

对于任意 $\lambda > 0$， $v \geq 1$。令 $\lambda := \eta\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}$，并令 $v := C'(\ln n)^2$，其中 η， $C' > 0$ 为任意值。

我们从项 A_1开始。改写为

$$\begin{aligned} M_{1,n} &= 4\left(1 + \frac{\eta^2 n\phi_x(h)}{C'S^2_{n,\ell,q-2}(x)\ln n}\right)^{-v/2} = 4\left(1 - \frac{\eta^2 n\phi_x(h)}{C'S^2_{n,\ell,q-2}(x)\ln n + \eta^2 n\phi_x(h)}\right)^{v/2} \\ &:= 4(1-t_n)^{v/2}. \end{aligned}$$

借助引理3考察序列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，我们得到

$$t_n \leq \frac{\eta^2 n\phi_x(h)}{C'Cn\phi_x(h)\ln n + \eta^2 n\phi_x(h)} = \frac{1}{\ln n}\frac{\eta^2}{(C'c + \eta^2)} \leq \frac{1}{\ln n}, \tag{30}$$

and

$$t_n \geq \frac{\eta^2 n\phi_x(h)}{C'cn\phi_x(h)\ln n + \eta^2 n\phi_x(h)} \geq \frac{1}{\ln n + 1} \geq \frac{1}{2\ln n}, \tag{31}$$

通过选取 $\eta^2 = C'C$，并令所有 n 充分大。由（30）可知，对于所有足够大的 n， $0 \leq t_n \leq (\ln n)^{-1}$，这意味着 $t_n \to 0$， $n \to \infty$。众所周知， $g(t_n)$ 的一阶泰勒展开：$= \ln(1-t_n)$ 对于 $t_n \to 0$， $n \to \infty$，满足 $g(t_n) = g(0) + g'(0)(t_n - 0) + o(t_n) = -t_n + o(t_n)$。因此，$\ln(1-t_n) \overset{a}{\approx} -t_n$。[17] 显然，$(v/2)\ln(1-t_n) \overset{a}{\approx} -(v/2)t_n$ 也成立，并且由于指数函数在 R 上连续，不等式（31）意味着

$$(1-t_n)^{v/2} \overset{a}{\approx} \exp\left\{\frac{-t_n v}{2}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2\ln n}\frac{C'(\ln n)^2}{2}\right\} = n^{-C'/4}, \tag{32}$$

因此

$$M_{1,n} = O(n^{-C'/4}). \tag{33}$$

接下来，我们关注项 A_2。我们有

$$A_2 \leq C\frac{n}{(\ln n)^2}\left(\frac{(\ln n)^3}{n\phi_x(h)}\right)^{\frac{r(a+1)}{2(a+r)}} \leq Cn^{1-\frac{1}{2}\frac{(a+1)r}{a+r}}(\ln n)^{-2+\frac{3}{2}\frac{(a+1)r}{a+r}}\phi_x(h)^{-\frac{1}{2}\frac{(a+1)r}{a+r}}. \tag{34}$$

鉴于**A8**，在给定 $a = 3+\delta$的条件下定义 $g_1(r) = (a+1)r/(a+r)$。则 g_1是实数集$_+$ 上的正单调递增函数，使得$\lim_{r\to\infty} g_1(r) = a+1 = 4+\delta$。由**A8**，存在 $\Delta > 0$

[17]注意，如果没有引理3中的下界，就无法保证 $\ln(1-t_n) \overset{a}{\approx} -t_n$ 这一结果。

使得 $\epsilon := \delta - \Delta > 0$。则$(4+\delta) - g_1(r) < \epsilon$，或等价地，对任意充分大的 r，有 $4+\Delta < g_1(r)$。因此，由(34)和**A8**，

$$\begin{aligned} A_2 &\leq Cn^{1-(4+\Delta)/2}(\ln n)^{-2+3(a+1)/2}\phi_x(h)^{-(a+1)/2} \\ &= \frac{C}{n^{1+\Delta/2}(\ln n)^2}\left[\frac{(\ln n)^3}{\phi_x(h)}\right]^{(a+1)/2} \leq \frac{C}{n^{1+\Delta/2}(\ln n)^2}n^{\Delta/2} = \frac{C}{n(\ln n)^2}, \end{aligned} \tag{35}$$

对所有足够大的 n 和 r 均成立。由于在 (33) 中可以任意增大地选取 $C' > 0$，因此适当选择 C' 可推出 $A_1 = o\big(1/(n(\ln n)^2)\big)$。因此，结合 (29)、(33) 和 (35)，可得[18]

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\big(|S_{q,\ell} - ES_{q,\ell}| > \lambda\big) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(q,\ell)}\right| > 4\lambda n\phi_x(h)\right) \leq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2} < \infty,$$

其中 $\lambda := \eta\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}$，这表明所需结果成立。

此处省略 (d) 的证明，因为我们可以沿用引理3证明中的相同思路（见《补充材料》第 2 节）。值得注意的是，$1/(n\phi_x(h)) = o\big(\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}\big)$。

有了结果 (a)、(c) 和 (d)，可得

$$S_{2,1}S_{4,0} - E(S_{2,1}S_{4,0}) = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)}}\right).$$

同样的结果对 $S_{3,1}S_{3,0} - E(S_{3,1}S_{3,0})$ 也成立。因此，由 (b) 可得，

$$m_1 - Em_1 = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)}}\right)O\big(\phi_x(h)^{1-2p_{\max}}\big) = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)^{4p_{\max}-1}}}\right).$$

特别地，若我们令 $\varphi = 1$，则得到

$$m_0 - Em_0 = m_0 - 1 = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)^{4p_{\max}-1}}}\right),$$

从而证明了(26)。

现在我们关注(27)和(28)中依概率的渐近阶。由于结果(a)、(b)和(d)已经得到证明，且不依赖于**A6(i)**，因此只需证明$S_{q,\ell} - ES_{q,\ell} = O_p\Big(\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}\Big)$。这可由如下事实容易得到：

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S_{q,\ell}) &= E\left[\left(\frac{1}{n\phi_x(h)}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i^{(q-2,\ell)}(x)\right)^2\right] \\ &\leq \frac{1}{(n\phi_x(h))^2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big|\mathrm{Cov}\big(\Lambda_i^{(q-2,\ell)}(x), \Lambda_j^{(q-2,\ell)}(x)\big)\Big| = \frac{S^2_{n,\ell,q-2}(x)}{(n\phi_x(h))^2}. \end{aligned}$$

由引理3的结果(18)，$\mathrm{Var}(S_{q,\ell}) = O(1/(n\phi_x(h)))$，因此，利用切比雪夫不等式，我们有

$$P\left(|S_{q,\ell} - ES_{q,\ell}| \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{n\phi_x(h)}}\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_{q,\ell})n\phi_x(h)}{\epsilon} \leq \frac{C}{\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0,$$

这就推出了所需的结果。 ∎

[18]参见Rudin (1976)的定理3.29。

注2。 Leulmi and Messaci（2018）的引理2和引理5的证明需要在 $x \to 0$的条件下，对 ln$(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$进行泰勒近似，以便界定由Fuk-Nagaev不等式所蕴含的各项，其中 x与式（29）中的项 A_1 有关。然而，为确保 $x \to 0$ 在 $n \to \infty$ 时成立，他们的引理 A.2 中所述的结果$S^2_{n,\ \ell,\ q-2} = O(n\phi_x(h))$并不足够。为稳妥起见，我们在引理3（以及引理5和引理6）中给出了一个更强且足够的结果。

命题 4。 如果假设 ***H1-H8***成立，则

$$\sup_{x\in S}|m_1(x) - Em_1(x)| = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)^{4p_{\max}-1}}}\right), \tag{36}$$

and

$$\sup_{x\in S}|m_0(x) - 1| = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi_x(h)^{4p_{\max}-1}}}\right). \tag{37}$$

命题 4 的证明 正如命题3的证明中所述，只需证明对于 $q \in \{2,3,4\}$ 和 $\ell \in \{0,1\}$，在 $x \in S$ 上一致地有

(a) $ES_{q,\ell} = O(1)$;

(b) $Q = O(\phi_x(h)^{1-2p_{\max}})$;

(c) $S_{q,\ell} - ES_{q,\ell} = O_{a.co.}\Big(\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}\ \Big)$;

(d) $\mathrm{Cov}(S_{2,1}, S_{4,0}) = o\Big(\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}\ \Big), \mathrm{Cov}(S_{3,1}, S_{3,0}) = o\Big(\sqrt{\ln n/(n\phi_x(h))}\ \Big)$,

其中

$$S_{q,\ell} := \frac{1}{n\phi_x(h)}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i\beta_i^{q-2}\varphi_i^{\ell}}{h^{q-2}} \text{ and } Q := \frac{\big(nh\phi_x(h)\big)^2}{\Gamma(x)}.$$

（a）、（b）和（d）项可由与证明命题3时所采用的类似论证得到。

剩下需要证明（c）。对于 $x \in S$，令 $j(x) := \arg\min_{j\in[N_{r_n}(S)]} d(x, x_j)$。则

$$\begin{aligned}\sup_{x\in S}|S_{q,\ell}(x) - ES_{q,\ell}(x)| &\le \sup_{x\in S}|S_{q,\ell}(x) - S_{q,\ell}(x_{j(x)})| + \sup_{x\in S}|S_{q,\ell}(x_{j(x)}) - ES_{q,\ell}(x_{j(x)})| \\ &\quad + \sup_{x\in S}|ES_{q,\ell}(x_{j(x)}) - ES_{q,\ell}(x)| \\ &:= A_1 + A_2 + A_3.\end{aligned}$$

我们从术语 A_2 开始。利用测度P的单调性和次可加性，对于任意 $\lambda > 0$，有

$$\begin{aligned}P(A_2 > \lambda) &= P\Big(\max_{j\in[N_{r_n}(S)]}|S_{q,\ell}(x_j) - ES_{q,\ell}(x_j)| > \lambda\Big) \\ &\le \sum_{j=1}^{N_{r_n}(S)} P(|S_{q,\ell}(x_j) - ES_{q,\ell}(x_j)| > \lambda) \\ &\le N_{r_n}(S)\max_{j\in[N_{r_n}(S)]} P(|S_{q,\ell}(x_j) - ES_{q,\ell}(x_j)| > \lambda).\end{aligned}$$

应用 Fuk-Nagaev不等式可得

$$N_{r_n}(S)P(|S_{q,\ell}(x_j) - ES_{q,\ell}(x_j)| > \lambda) \le A_{2,1} + A_{2,2}$$

其中

$$A_{2,1} = CN_{r_n}(S)\left(1 + \frac{(\lambda n\phi(h))^2}{vS^2_{n,\ell,q-2}}\right)^{-v/2} \text{ and } A_{2,2} = CN_{r_n}(S)\frac{n}{v}\left(\frac{n}{\lambda n\phi(h)}\right)^{r(a+1)/(a+r)},$$

对任意 $v \ge 1$ 和 $r \ge 2$。令 $\lambda := \eta\sqrt{\ln n/(n\phi(h))}$ 和 $v := C'(\ln n)^2$，其中 $\eta, C' > 0$ 为任意常数。与命题3证明中对 (d) 项的处理类似，并借助引理5，可以验证在 $x \in S$ 上一致地

$$A_{2,1} \le CN_{r_n}(S)n^{-C'} \text{ and } A_{2,2} \le CN_{r_n}(S)\frac{n}{(\ln n)^2}\left(\frac{(\ln n)^3}{n\phi(h)}\right)^d$$

其中 $d = r(a+1)/[2(a+r)]$。注意，$N_{r_n}(S) \overset{a}{\approx} n^{C_0}$ 对某个来自 **H8** 的 $C_0 > 0$ 成立。于是，只要适当选取足够大的 $C' > 0$，就有 $A_{2,1} = O(n^{C_0 - C'}) = O(n^{-1-\xi})$，其中某个 $\xi > 0$。另一方面，由于对任意 $a > 0$，几何混合速率意味着算术混合速率，我们可以选取 $r = a = 4(2 + C_0)/(1 - \Delta_1) - 1 > 2$，从而得到 $d(\Delta_1 - 1) = -2 - C_0$，进而得出

$$A_{2,2} \le C\frac{n^{1+C_0}}{(\ln n)^2}\left(\frac{(\ln n)^3}{n\phi_x(h)}\right)^d \le C\frac{n^{1+C_0-d(1-\Delta_1)}}{(\ln n)^2} = \frac{C}{(\ln n)^2 n}. \tag{38}$$

由于 $n^{-1-\xi} = o(1/(n(\ln n)^2))$，项 $A_{2,\,1}$ 由 $A_{2,\,2}$控制，因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_2 > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi(h)}}\right) \le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2 n} < \infty.$$

接下来，我们处理项 A_1。改写

$$\begin{aligned} A_1 = &\frac{1}{n\phi(h)h^{q-2}}\sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i|^\ell K_i(x)1_{B(x,h)}(\chi_i)|\beta_i(x)^{q-2} - \beta_i(x_{j(x)})^{q-2}1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_i)| \\ &+ \frac{1}{n\phi(h)h^{q-2}}\sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i|^\ell|\beta_i(x_{j(x)})|1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_i)|K_i(x)1_{B(x,h)}(\chi_i) - K_i(x_{j(x)})|. \end{aligned}$$

Put

$$\begin{aligned} R^1_{i,q,x} &= 1_{B(x,h)}(\chi_i)|\beta_i(x)^{q-2} - \beta_i(x_{j(x)})^{q-2}1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_i)|, \\ R^2_{i,q,x} &= 1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_i)|K_i(x)1_{B(x,h)}(\chi_i) - K_i(x_{j(x)})|, \end{aligned}$$

并注意到

$$R^1_{i,q,x} = \begin{cases} |\beta_i(x) - \beta_i(x_{j(x)})|\left|\sum_{k=0}^{q-3}\beta_i(x)^{q-3-k}\beta_i(x_{j(x)})^k\right| & \text{, if } \chi_i \in B(x,h) \cap B(x_{j(x)},h) \\ |\beta_i(x)|^{q-2} & \text{, if } \chi_i \in B(x,h) \setminus B(x_{j(x)},h) \\ 0 & \text{, if } \chi_i \notin B(x,h) \end{cases}$$

$$R^2_{i,q,x} = \begin{cases} |K_i(x) - K_i(x_{j(x)})| & \text{, if } \chi_i \in B(x_{j(x)},h) \cap B(x,h) \\ K_i(x_{j(x)}) & \text{, if } \chi_i \in B(x_{j(x)},h) \setminus B(x,h) \\ 0 & \text{, if } \chi_i \notin B(x_{j(x)},h) \end{cases}.$$

此外，三角不等式意味着 $|d(x,\ \chi_i) - d(x_{j(x)},\ \chi_i)| \le d(x,\ x_{j(x)})$。根据这些观察，我们应用 **H3** 和**H4**得到

$$\begin{aligned}
A_1 &\le C\frac{r_n}{nh\phi(h)}\sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i|^{\ell}\big\{1_{B(x_{j(x)},h)\cap B(x,h)}(\chi_i) + 1_{B(x,h)\setminus B(x_{j(x)},h)}(\chi_i) \\
&\quad + 1_{B(x_{j(x)},h)\setminus B(x,h)}(\chi_i)\big\} \\
&= \frac{C}{n\phi(h)}\sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}\frac{r_n}{h}|\varphi_i|^{\ell}1_{B(x_{j(x)},h)\cup B(x,h)}(\chi_i) \\
&:= \frac{C}{n\phi(h)}\sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}T_i^{\ell}(x) \\
&= \frac{C}{n\phi(h)}\sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}[T_i^{\ell}(x) - ET_i^{\ell}(x)] + \frac{C}{n\phi(h)}\sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}ET_i^{l}(x) \\
&:= A_{1,1} + A_{1,2} \qquad (39)
\end{aligned}$$

根据引理 6，我们有 $A_{1,\ 2} = O(r_n/h)$。以与处理项 A_2 with 相同的方式应用 Fuk-Nagaev不等式

$$\lambda = \eta\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi(h)}} \text{ and } v = C'\left(\frac{r_n}{h}\right)^{-2}(\ln n)^2$$

可得 $A_{1,\ 2} = O_{a.co.}\big((r_n/h)^2\sqrt{\ln n/(n\phi(h))}\big)$。因此

$$\begin{aligned}
A_1 &= O\left(\frac{r_n}{h}\right) + O_{a.co.}\left(\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi(h)}}\right) = O_{a.co.}\left(\frac{r_n}{h}\left[1 + \underbrace{\frac{r_n}{h}\left(\frac{\ln n}{n\phi(h)}\right)^{1/2}}_{=o(1)}\right]\right) \\
&= O_{a.co.}\left(\frac{r_n}{h}\right) = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi(h)}}\right),
\end{aligned}$$

利用以下事实：$\phi(h) = \lim_{a\to 0}\int_a^h \phi'(h) \le Ch$ 来自 **H1**，以及

$$\frac{r_n}{h}\sqrt{\frac{n\phi(h)}{\ln n}} \le C\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi(h)}} = o(1),$$

来自 **H5** 和 **H8**。最后一项 A_3 满足

$$\begin{aligned}
A_3 &\le \sup_{x\in S}E|S_{q,\ell}(x) - S_{q,\ell}(x_{j(x)})| \le \frac{C}{n\phi(h)}\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in S}ET_i^{\ell}(x) \\
&\le C\frac{r_n}{h} \le C\sqrt{\frac{\ln n}{n\phi(h)}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 ∎

附录B：主要证明

定理1的证明 令 $m_\ell(x) = (1/\Gamma(x))\sum_{i\neq j}^{n} w_{i,\ j}(x)\varphi_j^\ell$ 其中 $\Gamma(x) = \sum_{i\neq j}^{n} E(w_{i,\ j}(x))$，对 $\ell \in$自然数集成立。于是

$$\begin{aligned}\hat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x) = \frac{1}{m_0(x)}\{[m_1(x) - Em_1(x)] - [m_\varphi(x) - Em_1(x)]\} \\ - \frac{m_\varphi(x)}{m_0(x)}[m_0(x) - 1].\end{aligned}$$

记为 $a_n = \sqrt{\ln n/(n\phi_x(h)^{4p_{\max}-1})}$。由命题1和命题3可得[19]

$$\begin{aligned}\hat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x) &= \big[1 + O_{a.co.}\big(a_n\big)\big]\big\{O_{a.co.}\big(a_n\big) + O(h^b)\big\} \\ &= O_{a.co.}\big(a_n\big) + O(h^b).\end{aligned}$$

∎

推论1和定理 2 的证明与定理1的证明类似，故略去。

推论2的证明在独立性条件下，

$$\Psi_{x,i,j}(h) = \big[\phi_{x,i}(th,h)\phi_{x,j}(wh,h)\big]^{1/2+p_{i,j}},\ \forall i,j \in [n],$$

其中 $p_{i,\ j} = p_{1,\ i,\ j} = p_{2,\ i,\ j} = 1/2$。因此 $p_{\max} = 1/2$，结论立即由定理1得出。

∎

附录C：以往研究的注记

本文是对 Barrientos-Marin 等人（2010）和 Leulmi 和 Messaci（2018）的文章（下文分别简称“BM”和“LM”）的扩展。BM研究了本文讨论的局部线性估计量，并将其用于独立同分布函数型数据。随后，LM将数据扩展为弱相关的情形。遗憾的是，后两位作者提出的一些条件似乎过于严格，且其推导的渐近性质缺乏严谨性。下文将讨论这些问题。

从现在起，考虑一个序列 $\{(Y_i,\ \chi_i)\}_{i\in n}$，其分布与 $(Y,\ \chi)$ 相同，且具有弱依赖性（α-混合），满足 $Y_i = m(\chi_i) + \epsilon_i,\quad i \in [n],$ 其中 $E(\epsilon_i|\chi_i) = 0$。

与渐近结果相关的问题

设 $f_0 : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 为一个可测函数。一般而言，我们无法得出结论认为

$$E(f_0(\chi_i)f_0(\chi_j)) = E(f_0(\chi_1)f_0(\chi_2)),\ \forall i \neq j.$$

例如，令 $f_0(\chi_i,\ \chi_j) = K_i\beta_iK_j\beta_j$，其中 $K = 1_{[0,1]}$ 为均匀核，且 $\beta = d$。那么

$$E(K_i\beta_iK_j\beta_j) = h^2\int_{[0,1]^2} uv\ dP'_{ij}(u,v),\ \forall i \neq j.$$

[19]更多详情请参见补充材料中的命题 5–6。

其中 $P'_{i,\ j}$ 是 $(d(\chi_i,\ x)/h,\ d(\chi_j,\ x)/h)$ 的概率分布。每个联合分布 $P'_{i,\ j}$ 取决于 $d(\chi_i,\ x)/h$ 与 $d(\chi_j,\ x)/h$ 之间的关系。由于这一事实，如果数据存在依赖性，我们无法得出所有 $E(K_i\beta_i K_j\beta_j)$ $i \neq j$, 都等于 $E(K_1\beta_1 K_2\beta_2)$。然而，这一等价关系被用于证明 LM 的主要结果。举例来说，考虑他们对引理 A.2（用于证明他们的引理2）的证明。根据他们的假设 (H5b) 和引理 A1(ii)(iii)，这两者仅以 χ_1 和χ_2的形式陈述，证明中使用了以下不等式：

$$\sum_{(i,j)\in S_1} E\big(K_i\beta_i^k K_j\beta_j^k\big) \leq \#S_1 E\big(K_1\beta_1^k K_2\beta_2^k\big) = O(nm_n\phi_{x,1}(h)^{1+d}), \quad k\in\{0,2\},\ 0<d\leq 1,$$

其中 $S_1 = \{(i,\ j)\colon\ 1\leq |i-j|\leq m_n\}$，其中 m_n 是一个发散序列。由于没有理由认为 $E\big(K_1\beta_1^k K_2\beta_2^k\big)$ 是求和中的最大项，因此我们只需检验等式。正如前文所述，该等式不必成立。

另一个例子见于他们对引理 1 的证明，其中重复使用了 BM 的论证。然而，后两位作者的证明使用了要求数据独立同分布的结果：(i)$E(w_{i,\ j}(x)) = E(w_{1,\ 2}(x))$ $\forall i\neq j$；以及 (ii) $E(w_{1,\ 2}(x)Y_2) = E(w_{1,\ 2}(x)m(\chi_2))$。注意，如下所示，对于所有 $i\neq j$，条件 (i) 在数据独立同分布时成立，

$$\begin{aligned} E(w_{i,j}) =& E(\beta_i^2 K_i K_j) - E(\beta_i K_i \beta_j K_j) \\ \overset{indep.}{=}& E(\beta_i^2 K_i)E(K_j) - E(\beta_i K_i)E(\beta_j K_j) \\ \overset{ident.}{=}& E(\beta_1^2 K_1)E(K_2) - E(\beta_1 K_1)E(\beta_2 K_2) = E(w_{1,2}). \end{aligned}$$

根据前面的讨论，在没有独立性假设的情况下，该等式不一定成立。现在，如果 χ_i 独立于 χ_j、$i\neq j$，则可以利用迭代期望定律验证 (ii)，

$$E(w_{1,2}Y_2) = E(E(w_{1,2}Y_2|\chi_2)) \overset{indep.}{=} E(w_{1,2}\ m(\chi_2)).$$

对于相依数据，我们需要计算给定 (χ_1,χ_2) 条件下的期望，

$$E(w_{1,2}Y_2) = E(w_{1,2}E(Y_2|(\chi_1,\chi_2)) = E(w_{1,2}(m(\chi_2)+E(\epsilon_2|(\chi_1,\chi_2))).$$

为确保 $E(\epsilon_2|(\chi_1,\chi_2)) = 0$ 可利用假设 $E(\epsilon_2|\chi_2) = 0$ 得到，需要额外要求误差 ϵ_2 独立于 χ_1。

根据 Fuk-Nagaev不等式，LM 在其引理2的证明中推导出了项 $A_1(x)$。该项等价于 $M_{1,\ n}$，它出现在命题3（附录 A）的证明中。LM 通过应用泰勒展开 $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ 对该项进行界定，其中 x 趋于零。在他们的情形下，

$$x \coloneqq x_n = \frac{\eta^2 n\phi_x(h)}{S^2_{n,\ell,q-2}(x)\ln n},$$

沿用命题3证明中的记号。根据 LM 的假设，$n\phi_x(h)/\ln n \to \infty$ 当 $n\to\infty$ 时。由于 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个正序列，如果不为 $S^2_{n,\ \ell,\ q-2}(x)$ 给出一个合适的正下界，我们就无法得出 $x_n = o(1)$（以确保该项发散到无穷的速度快于 $n\phi_x(h)/\ln n$）。

上述同样的问题也出现在他们关于一致收敛的计算中。

弱化假设

LM 框架要求核函数 K 在其支撑集 $[0,1]$, 上有一个正的下界，这一点可以从其假设 (H4) 和 (U4) 中看出。然而，常见的三角核、二次核或三次核函数都满足 $K(1)=0$，因此不在其分析范围内。假设 **A5** 和**H4** （分别见第 3.2 节和第 3.3 节）允许使用这两类函数。

鉴于我们先前对 LM 推导的渐近性质的讨论，他们关于局部联合累积分布函数（累积分布函数）与其边缘累积分布函数之间关系的假设 (H5b)（分别为 $\Psi_{x,1,2}(h)$ 和$\phi_{x,1}(h)\phi_{x,2}(h)$, 按我们的记号）不应仅以 ($\chi_1$,$\chi_2$) 表述，还应以 ($\chi_i$,$\chi_j$) $\forall i \neq j$ 表述。也就是说，

(H5b)' 存在 $0 < d \leq 1, C > 0, C' > 0$，使得 $C'[\phi_{x,1}(h)]^{1+d} < \Psi_{x,i,j}(h) \leq C[\phi_{x,1}(h)]^{1+d}, \forall i,j \in [n]: i \neq j.$

然而，值得探讨的是，假设 $\{(Y_i, \chi_i)\}$ 具有算术速率为 $a > 3$ 且 $\Psi_{x,i,j}(h) = \Theta\big([\phi_{x,1}(h)]^{1+d}\big)$ 的强混合性（对某个 $d \neq 1$ 及所有 $i \neq j$）是否相容。考虑集合 $S_s = \{(i,j): 1 \leq |i-j| < b_n\}$ 以及 $S_l = \{(i,j): b_n \leq |i-j| \leq n-1\}$。于是，(H5b)' 适用于所有联合累积分布函数 $\{\Psi_{x,i,j}(h)\}_{(i,j)\in[n]^2}: i\neq j = \{\Psi_{x,i,j}(h)\}_{(i,j)\in S_s} \cup \{\Psi_{x,i,j}(h)\}_{(i,j)\in S_l} := \Psi_{S_s} \cup \Psi_{S_l}$。补充材料中的命题3表明，对于 $b_n = 1/\phi_x$, $\Psi_{S_l} = \Theta(\phi_x, 1(h)^2)$ h。在这种情况下，注意到集合 S_l 对每个足够大的 n 都非空，因为它至少包含元素 $\{(i,j): |i-j| = n-1\}$。[20] 这足以表明，不存在 $d \neq 1$ 使得对所有 $i \neq j$ 均有 $\Psi_{x,i,j}(h) = \Theta\big([\phi_{x,1}(h)]^{1+d}\big)$。因此，如果明确考虑 $d = 1$, (H5b)' 的表述会更好。遗憾的是，对于强混合数据而言，(H5b)' 过于严格，因为渐近地，$\Psi_{x,i,j}(h) = \Theta(\phi_x, 1(h)^2)$ $\forall i \neq j$ 与数据独立时的情形（$\Psi_{x,i,j}(h) = \phi_x, 1(h)^2$）并无太大差异。

[20] $i\ j$ $|i-j| = n-1$ $1/\phi_{x\,1}\ h\ \leq |i-j|$ n $0 \leq$ 如果 (,) 满足条件，那么当 足够大时，它也 $n\phi_{x\,1}\ h\ - \phi_{x\,1}\ h\ - 1$ $n\phi\ h\ \to \infty$ $n \to \infty$ 满足 (,)，因为根据假设 ( )，有 (,) (,)。

《相依函数型数据下广义回归函数的局部线性估计量的强一致性》补充材料。

Danilo H. Matsuoka[a]，**Hudson da Silva Torrent**[b]

引言

本补充材料提供了正文中省略的细节。第 1 节给出附录 A 中所述引理的证明，第 2 节阐明一些基本方面，并举例说明正文中的假设在何种情况下成立。

1 引理的证明

本节将使用论文中引入的全部记号。

引理 1 的证明。设 $i, j \in [n]$ 给定。分别用 $I(\cdot)$ 和 $P'_{i,j}$表示由 $(d(x,\chi_i)/h, d(x,\chi_j)/h)$诱导的示性函数和推前测度。

(i) 根据**A3** 和**A5**，

$$\begin{aligned} E(K_i^q|\beta_i|^\ell) &\leq CE\big[K_i^q d(x,\chi_i)^\ell\big] = CE\big[I(0 \leq d(x,\chi_i) \leq h)K_i^q d(x,\chi_i)^\ell\big] \\ &\leq Ch^l P(0 \leq d(x,\chi_i) \leq h) = Ch^\ell \phi_{x,i}(h). \end{aligned}$$

(ii) 利用**A3** 和**A5**

$$\begin{aligned} E(K_iK_j|\beta_i|^{\ell_1}|\beta_j|^{\ell_2}) &\leq CE\big[I(0 \leq d(x,\chi_i) \leq h, 0 \leq d(x,\chi_j) \leq h)K_iK_j d(x,\chi_i)^{\ell_1} d(x,\chi_j)^{\ell_2}\big] \\ &\leq Ch^{\ell_1+\ell_2} P\big(0 \leq d(x,\chi_i) \leq h, 0 \leq d(x,\chi_j) \leq h\big) \\ &= Ch^{\ell_1+\ell_2} \Psi_{x,i,j}(h). \end{aligned}$$

(iii) 首先，设核函数 K 为**A5**（II）型。利用**A3**，基本

[a]应用微观经济学研究组 - 经济学系，南里奥格兰德联邦大学。[b]数学与统计研究所 - 南里奥格兰德州联邦大学。电子邮件：danilomatsuoka@gmail.com（Matsuoka）；hudsontorrent@gmail.com（Torrent）

微积分基本定理和Fubini定理，我们有

$$\begin{aligned}
E(K_iK_j\beta_i^2) &\geq c_3h^2\int_{[0,1]^2} u^2K(u)K(z)dP'_{i,j}(u,z)\\
&= c_3h^2\int_{[0,1]^2}\left[\int_0^u \frac{d}{dt}(K(t)t^2)dt\right]\left[\int_0^z K'(w)dw + K(0)\right]dP'_{i,j}(u,z)\\
&= c_3h^2\left\{\iint_0^1\int_{[t,1]\times[w,1]} dP'_{i,j}(u,z)\frac{d}{dt}(K(t)t^2)K'(w)dtdw\right.\\
&+ K(0)\int_0^1\int_{[t,1]\times[0,1]} dP'_{i,j}(u,z)\frac{d}{dt}(K(t)t^2)dt\Big\}\\
&= c_3h^2\left\{\iint_0^1 \Psi_{x,i,j}(th,h,wh,h)\frac{d}{dt}(K(t)t^2)K'(w)dtdw\right.\\
&+ K(0)\int_0^1 \Psi_{x,i,j}(th,h,0,h)\frac{d}{dt}(K(t)t^2)dt\Big\}.
\end{aligned}$$

根据假设，$K(0) = -\int_0^1 K'(w)dw$。注意，对于所有 $t,\ w \in [0,1]$，P-可测集

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{th \leq d(x,\chi_i) \leq h, wh \leq d(x,\chi_i) \leq h\},\\
E_2 &= \{th \leq d(x,\chi_i) \leq h, 0 \leq d(x,\chi_i) \leq h\}
\end{aligned}$$

满足 $E_1 \cap E_2 = E_1$, $E_2 \setminus E_1 = \{th \leq d(x,\ \chi_i) \leq h,\ 0 \leq d(x,\ \chi_i) \leq wh\}$ 且 $(E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) = E_2$。由于 $E_1 \cap E_2$ 和 $E_2 \setminus E_1$ 是不相交集合，因此有 $P(E_2) = P(E_1) + P(E_2 \setminus E_1)$，或等价地，

$$\Psi_{x,i,j}(th,h,0,h) - \Psi_{x,i,j}(th,h,wh,h) = \Psi_{x,i,j}(th,h,0,wh).$$

然后，利用 **A10** 及前面的论述，

$$\begin{aligned}
E(K_iK_j\beta_i^2) &\geq -c_3h^2\iint_0^1 \Psi_{x,i,j}(th,h,0,wh)\frac{d}{dt}(K(t)t^2)K'(w)dtdw\\
&> c_3c_{10}h^2\Psi_{x,i,j}(h)
\end{aligned}$$

对于所有 n 足够大时。鉴于上述论证，如果函数 K 属于**A5(I)**型，那么，对于所有 n 足够大时，

$$\begin{aligned}
E(K_iK_j\beta_i^2) &\geq c_3h^2\int_{[0,1]^2} u^2K(u)K(z)dP'_{i,j}(u,z) \geq c_3c_5h^2\int_{[0,1]^2} u^2K(u)dP'_{i,j}(u,z)\\
&= c_3c_5h^2\int_0^1 \Psi_{x,i,j}(th,h,0,h)\frac{d}{dt}(K(t)t^2)dt > c_3c_5c_{10}h^2\Psi_{x,i,j}(h).
\end{aligned}$$

(iv) 用 P'_i表示由 $d(x,\ \chi_i)/h$诱导的概率。由 **A3**、**A5** 和 **A6(i)**，可得

$$\begin{aligned}
E(K_i^2\beta_i^\ell) &\geq ch^\ell\int_{[0,1]} K(u)^2u^\ell dP'_i(u) \geq ch^\ell K(\epsilon_1)\int_{[0,\epsilon_1]} K(u)u^\ell dP'_i(u)\\
&= ch^\ell\int_0^{\epsilon_1} \phi_{x,i}(th,\epsilon_1 h)\frac{d}{dt}(K(t)t^\ell)dt > ch^\ell\phi_{x,i}(h),
\end{aligned}$$

对所有 $\ell \in \{2,4\}$ 以及某个 $0<\epsilon_1<1$均成立。现在我们转向 $\ell=0$的情形。对于属于 A5 中 (I) 型的 K，结论显然成立。若 K 属于 (II) 型，则

$$\begin{aligned}
E(K_i^2) &\geq K(\epsilon_0)\int_{[0,\epsilon_0]} K(u)dP_i'(u) \geq c\int_{[0,\epsilon_0]}\left[\int_0^u K'(t)dt + K(0)\right]dP_i'(u)\\
&\geq c\int_{[0,\epsilon_0]}\left[\int_0^u K'(t)dt - \int_0^{\epsilon_0} K'(z)dz\right]dP_i'(u)\\
&= c\int_0^{\epsilon_0} K'(t)\big[\phi_{x,i}(th,\epsilon_0 h) - \phi_{x,i}(\epsilon_0 h)\big]dt\\
&= -c\int_0^{\epsilon_0} K'(t)\phi_{x,i}(th)dt \geq c\int_0^{\epsilon_0}\phi_{x,i}(th)dt > c\phi_{x,i}(h),
\end{aligned}$$

对某个 $\epsilon_0 \in (0,1)$ 以及所有充分大的 n。

(*v*) 若 $\ell=0$，则 $E(|\varphi_i|^\ell|\chi_i)=1$。因此，令 $\ell \geq 1$。对于所有整数 $m>\ell$，条件詹森不等式表明

$$\big[E\big(|\varphi_i|^\ell|\chi_i\big)\big]^{m/\ell} \leq E\big(\big(|\varphi_i|^\ell\big)^{m/\ell}|\chi_i\big) = E\big(|\varphi_i|^m|\chi_i\big) = \gamma_{m,i}(\chi_i)$$

由 $\gamma_{m,i}$ 在 x 上的连续性，

$$\lim_{n\to+\infty} I(0\leq d(x,\chi_i)\leq h)\gamma_{m,i}(\chi_i) = \lim_{d(x,\chi_i)\to 0}\gamma_{m,i}(\chi_i) = \gamma_{m,i}(x).$$

因此，$I(0\leq d(x,\chi_i)\leq h)\gamma_{m,i}(\chi_i) = \gamma_{m,i}(x)+o(1)$。因此，由 **A4**，对所有足够大的 n

$$I(0\leq d(x,\chi_i)\leq h)E\big(|\varphi_i|^l|\chi_i\big) \leq 1+\max_{s\in[n]}\gamma_{m,s}(x)+o(1)\leq C.$$

∎

证明　引理2的证明。记集合 A 的基数为 $\#A$。定义，对于 $s\in\{1,\ldots,n-\lfloor a_n\rfloor\}$，

$$E_s = \{(s,s+1),\ldots,(s,s+\lfloor a_n\rfloor),(s+\lfloor a_n\rfloor,s),\ldots,(s+1,s)\}, \tag{1}$$

并且，对于 $s\in\{n-\lfloor a_n\rfloor+1,\ldots,n-1\}$，

$$G_s = \{(s,s+1),\ldots,(s,n),(n,s),\ldots,(s+1,s)\}. \tag{2}$$

注意，对于 $j\in\{1,\ldots,\lfloor a_n\rfloor-1\}$，$\#E_s = 2\lfloor a_n\rfloor$ 和 $\#G_s = \#G_{n-\lfloor a_n\rfloor+j} = 2(\lfloor a_n\rfloor - j)$。此外，$S_1 = \big(\bigcup_{s=1}^{n-\lfloor a_n\rfloor} E_s\big)\cup\big(\bigcup_{s=n-\lfloor a_n\rfloor+1}^{n-1} G_s\big)$，且 (1) 和 (2) 中的集合两两不相交。因此

$$\begin{aligned}
\#S_1 &= \sum_{s=1}^{n-\lfloor a_n\rfloor}\#E_s + \sum_{s=n-\lfloor a_n\rfloor+1}^{n-1}\#G_s = 2\lfloor a_n\rfloor(n-2\lfloor a_n\rfloor) + \sum_{j=1}^{\lfloor a_n\rfloor-1} 2(\lfloor a_n\rfloor - j)\\
&= 2\lfloor a_n\rfloor n - \lfloor a_n\rfloor^2 - \lfloor a_n\rfloor \overset{a}{\approx} 2na_n.
\end{aligned}$$

∎

引理3的证明。设

$$\begin{aligned}
S_{n,\ell,k}^2(x) &= \sum_{S_1}\big|\mathrm{Cov}\big(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x),\Lambda_j^{(k,\ell)}(x)\big)\big| + \sum_{S_2}\big|\mathrm{Cov}\big(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x),\Lambda_j^{(k,\ell)}(x)\big)\big|\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\big(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x)\big)\\
&:= J_{1,n} + J_{2,n} + V_n,
\end{aligned}$$

其中 $S_1 \coloneqq \{(i,\ j)\colon\ 1 \le |i-j| \le a_n\}$ 和 $S_2 \coloneqq \{(i,\ j)\colon\ a_n+1 \le |i-j| \le n-1\}$ 是 $[n]^2$ 的子集，a_n 是一个发散至无穷大的正实数序列。a_n 的增长速率将在后文指定。

我们从项 $J_{1,n}$ 开始。回想 **A4** 意味着 $E\big(|\varphi_i\varphi_j|^\ell \mid (\chi_i,\chi_j)\big) \le 1 + \sup_{i\neq j} E\big(|\varphi_i\varphi_j| \mid (\chi_i,\chi_j)\big) < C$。由于 $E(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x)) = 0$, $i \in [n]$，迭代期望定律、引理 1(i)(ii)(v)、2 以及假设 **A9** 给出

$$
\begin{aligned}
J_{1,n} &= \sum_{S_1} \big|E\big(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x)\Lambda_j^{(k,\ell)}(x)\big)\big| \\
&= \frac{1}{h^{2k}} \sum_{S_1} \big|E\big(K_iK_j(\beta_i\beta_j)^k(\varphi_i\varphi_j)^\ell\big) - E\big(K_i\beta_i^k\varphi_i^\ell\big)E\big(K_j\beta_j^k\varphi_j^\ell\big)\big| \\
&\le \frac{1}{h^{2k}} \sum_{S_1} \Big\{ E\big(K_iK_j|\beta_i\beta_j|^k E\big(|\varphi_i\varphi_j|^\ell \mid (\chi_i,\chi_j)\big)\big) \\
&+ E\big(K_i|\beta_i|^k E(|\varphi_i|^\ell|\chi_i)\big)E\big(K_j|\beta_j|^k E(|\varphi_j|^\ell|\chi_j)\big)\Big\} \\
&\le \frac{C}{h^{2k}} \sum_{S_1} \Big\{ E\big(K_iK_j|\beta_i\beta_j|^k\big) + E\big(K_i|\beta_i|^k\big)E\big(K_j|\beta_j|^k\big)\Big\} \\
&\le C \sum_{S_1} \Big\{ \big[\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)\big]^{1/2+p_{1,i,j}} + \phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)\Big\} \\
&\le Cna_n \max_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)^{1+2p_{\min}} = Cna_n\phi_x(h)^{1+2p_{\min}}, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

对所有足够大的 n，其中 $p_{\min} = \min_{(i,j)\in[n]^2} p_{1,i,j} \in (1/4, 1/2]$。

按照上述思路，我们还有

$$
V_n = \frac{1}{h^{2k}} \sum_{i=1}^n \big\{E\big(K_i^2\beta_i^{2k}\varphi_i^{2\ell}\big) - \big[E\big(K_i\beta_i^k\varphi_i^\ell\big)\big]^2\big\} \le C\sum_{i=1}^n \big\{\phi_{x,i}(h) + \phi_{x,i}(h)^2\big\} \le Cn\phi_x(h).
$$

接下来，我们通过 Davydov 不等式$J_{2,n}$ 来界定[4]。根据二项式定理、迭代期望定律和引理 1(i)(v),

$$
\begin{aligned}
E\big|\Lambda_i^{(k,\ell)}(x)\big|^q &= \frac{1}{h^{kq}} E\big|K_i\beta_i^k\varphi_i^\ell - E\big(K_i\beta_i^k\varphi_i^\ell\big)\big|^q \le \frac{1}{h^{kq}} E\big\{K_i|\beta_i^k\varphi_i^\ell| + E\big(K_i|\beta_i^k\varphi_i^\ell|\big)\big\}^q \\
&= \frac{1}{h^{kq}} E\Big\{\sum_{j=0}^q \binom{q}{j} \big[K_i|\beta_i^k\varphi_i^\ell|\big]^j \big[E\big(K_i|\beta_i^k\varphi_i^\ell|\big)\big]^{q-j}\Big\} \\
&\le \frac{C}{h^{kq}} \sum_{j=0}^q E\big(K_i^j|\beta_i|^{jk}E\big(|\varphi_i|^{\ell j}|\chi_i\big)\big)\big[E\big(K_i|\beta_i|^k E\big(|\varphi_i|^\ell|\chi_i\big)\big)\big]^{q-j} \\
&\le \frac{C}{h^{kq}} \sum_{j=0}^q h^{jk}\phi_{x,i}(h)\big[h^k\phi_{x,i}(h)\big]^{q-j} \\
&= C\sum_{j=0}^q \phi_{x,i}(h)^{1+q-j} \le C \max_{j\in\{0,\dots,q\}} \phi_{x,i}(h)^{1+q-j} \le C\phi_{x,i}(h), \qquad (4)
\end{aligned}
$$

[4]参见 Rio (2017) 的定理1.1或 Bosq (1998) 的推论1.1。

对于所有 $q \in$自然数集。利用 (4) 和 **A8**，由 Davydov 不等式可得

$$J_{2,n} = \sum_{S_2} \left|\mathrm{Cov}\left(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x), \Lambda_j^{(k,\ell)}(x)\right)\right| \leq C\phi_x(h)^{2/q} \sum_{S_2} \alpha(|i-j|)^{1-2/q}$$
$$\leq C\phi_x(h)^{2/q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:(i,j)\in S_2} |i-j|^{-a(1-2/q)} \leq C\phi_x(h)^{2/q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{w=a_n+1}^{\infty} 2w^{-a(1-2/q)},$$

对所有 $q > 2$。注意

$$\frac{a_n^{1-\rho}}{\rho-1} = \int_{a_n}^{\infty} t^{-\rho} dt = \sum_{w=a_n+1}^{\infty} \int_{w-1}^{w} t^{-\rho} dt \geq \sum_{w=a_n+1}^{\infty} \int_{w-1}^{w} w^{-\rho} dt = \sum_{w=a_n+1}^{\infty} w^{-\rho},$$

对所有 $\rho > 1$。令 $\rho = a(1-2/q)$。则 $\rho > 3(1-2/q) \geq 1$ 当 $q \geq 3$ 且 $a > 3$时。因此，鉴于 $a > 3$ **(A8)**,

$$J_{2,n} \leq C\phi_x(h)^{2/q} n \frac{a_n^{1-a(1-2/q)}}{a(1-2/q)-1} = Cn\phi_x(h),$$

通过选择 $q \geq 3$并令 $a_n = \phi_x(h)^{(1-2/q)/(1-a(1-2/q))}$ （这构成一个趋于 ∞ 的正序列，对所有 $q \geq 3$ 均成立）。此外，对于此处的 a_n，只要 q 选得足够大，$J_{1,n}$ 渐近地被 $J_{2,n}$ 支配。为此，令 $f(q) := a - 1/(1-2/q)$，给定 $a > 3$。则 f 是 $[3,\infty)$ 上的单调递减函数，满足 $\lim_{q\to\infty} f(q) = 1/(a-1)$。根据定义，$\forall \epsilon > 0$：$\exists q_\epsilon$：$\forall q \geq q_\epsilon$：$f(q) - 1/(a-1) < \epsilon$。取 $\epsilon = 2p_{\min} - 1/(a-1)$。A9 确保[5]，从而 $\epsilon > 0$，进而可推出，只要 q 选得足够大，$f(q) < 2p_{\min}$。因此，对于所有充分大的 $o\left(n\phi_x h\right)$，

$J_{1,n} = O\left(n\phi_x(h)\phi_x(h)^{2p_{\min}-f(q)}\right) = O(n\phi_x(h)(1))()$。

接下来，我们着重为 $S^2_{n,\ell,k}$ 提供下界。利用迭代期望定律、条件詹森不等式以及引理 1(i)(iv)，可得

$$\begin{aligned}
S^2_{n,\ell,k} \geq V_n &\geq n \min_{s\in[n]} \mathrm{Var}\left(\Lambda_s^{(k,\ell)}(x)\right) \\
&\geq \frac{n}{h^{2k}} \min_{s\in[n]} \left\{ E\left(K_s^2 \beta_s^{2k} \varphi_s^{2\ell}\right) - \left[E\left(K_s |\beta_s^k \varphi_s^\ell|\right)\right]^2 \right\} \\
&= \frac{n}{h^{2k}} \min_{s\in[n]} \left\{ E\left(K_s^2 \beta_s^{2k} E\left(|\varphi_s|^{2\ell}|\chi_s\right)\right) - \left[E\left(K_s |\beta_s|^k E\left(|\varphi_s|^\ell|\chi_s\right)\right)\right]^2 \right\} \\
&\geq \frac{n}{h^{2k}} \min_{s\in[n]} \left\{ E\left(K_s^2 \beta_s^{2k} \left(E\left(|\varphi_s|^\ell|\chi_s\right)\right)^2\right) - \left[E\left(K_s |\beta_s|^k E\left(|\varphi_s|^\ell|\chi_s\right)\right)\right]^2 \right\} \\
&= \frac{n}{h^{2k}} \min_{s\in[n]} \left\{ \left(E\left(K_s^2 \beta_s^{2k}\right) - \left[E\left(K_s |\beta_s|^k\right)\right]^2\right) \underbrace{\left(\gamma_{1,s}(x) + o(1)\right)^{2\ell}}_{\geq 0} \right\} \\
&\geq cn \min_{s\in[n]} \left\{ \left(\phi_{x,s}(h) - C\phi_{x,s}(h)^2\right) \left(\gamma_{1,s}(x) + o(1)\right)^{2\ell} \right\} \\
&= cn \min_{s\in[n]} \left\{ \phi_{x,s}(h)(1 - \underbrace{C\phi_{x,s}(h)}_{=o(1)}) \left(\gamma_{1,s}(x) + o(1)\right)^{2\ell} \right\} \\
&\geq cn \min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h) \min_{s\in[n]} \left(\gamma_{1,s}(x) + o(1)\right)^{2\ell} \\
&\geq cn\phi_x(h) \min\left(1, \min_{s\in[n]} \left(\gamma_{1,s}(x) + o(1)\right)^2\right) \geq cn\phi_x(h),
\end{aligned}$$

[5]根据假设，$1 \geq 2p_{\min} > 1/2$ 和 $(a-1)^{-1} < 1/2$。

对每个 n 充分大时均成立。证明完毕。 ∎

引理4的证明。引理4的证明与引理 1 的证明类似，故略去。

引理5的证明。令

$$\begin{aligned}\sup_{x\in S} S^2_{n,\ell,k}(x) &= \sup_{x\in S}\sum_{S_1}\left|\mathrm{Cov}\big(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x),\Lambda_j^{(k,\ell)}(x)\big)\right| \\ &\quad + \sup_{x\in S}\sum_{S_2}\left|\mathrm{Cov}\big(\Lambda_i^{(k,\ell)}(x),\Lambda_j^{(k,\ell)}(x)\big)\right| \\ &\quad + \sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(\Lambda_i^{(k,\ell)}) \coloneqq Q_{1,n}+Q_{2,n}+Q_{0,n},\end{aligned}$$

其中 $S_1=\{(i,j):\ 1\le|i-j|\le a_n\}$ 且 $S_2=\{(i,j):\ a_n+1\le|i-j|\le n-1\}$，并且 a_n 是某个趋于无穷大的正实数序列。运用与引理3证明中类似的论证，可得 $Q_{0,n}=O(n\phi(h))$，

$$Q_{1,n}=O\big(na_n\phi(h)^{1+1/2}\big), \tag{5}$$

并且

$$\sup_{x\in S}E\left|\Lambda_i^{(k,\ell)}(x)\right|^q=O(\phi(h)). \tag{6}$$

根据混合条件 **H5**，Davydov 不等式和 (6) 可推出，

$$\begin{aligned}Q_{2,n} &\le C\phi(h)^{2/q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{w=a_n+1}^{\infty}t^{(1-2/q)w}=C\phi(h)^{2/q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{w=a_n+1}^{\infty}\int_{w-1}^{w}t^{(1-2/q)w}dz \\ &\le C\phi(h)^{2/q}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_n}^{\infty}t^{(1-2/q)z}dz=Cn\phi(h)^{2/q}\frac{t^{(1-2/q)a_n}}{-(1-2/q)\ln t} \\ &\le Cn\phi(h)^{2/q}t^{(1-2/q)a_n},\end{aligned}$$

对于任意的 $q>2$ 和某个 $t\in(0,1)$。令 $a_n=Cd_n$，其中 d_n 是一个趋于无穷大的正序列，$C>0$ 是任意常数。此外，令 $C^*>0$ 为满足以下条件的任意常数：对于所有充分大的 n（使得 $\ln d_n>1$），$-C(1-2/q)(d_n/\ln d_n)\ln t\ge C^*$，然后

$$\ln t^{\bar{C}(1-2/q)d_n}\le\ln d_n^{-C^*}\iff t^{\bar{C}(1-2/q)d_n}\le d_n^{-C^*}.$$

由于 $d_n/\ln d_n\to\infty$，只要适当增大 C，我们总能找到任意大的 $C^*>0$。由此可立即得到 $Q_{2,n}=O(n\phi_x(h)^{2/q}d_n^{-C^*})$。

取 $d_n=\phi(h)^{-1/2}$。因此，对于任意的 $q>2$，我们总能选取一个足够大的 $C^*>0$，从而得到

$$\begin{aligned}Q_{1,n}&=O\big(n\phi(h)^{1+1/2}d_n\big)=O\big(n\phi(h)\big),\\ Q_{2,n}&=O\big(n\phi(h)^{2/q}d_n^{-C^*}\big)=o\big(n\phi(h)\big).\end{aligned}$$

因此，$\sup_{x\in S}S^2_{n,\ell,k}(x)=O(n\phi_x(h))$。$\inf_{x\in S}S^2_{n,\ell,k}(x)$ 的下界可用与引理3证明中相同的方法得到。 ∎

引理 6 的证明。设

$$\sup_{x\in S} W_{n,\ell}^2(x) = \sup_{x\in S}\sum_{S_1}\left|\mathrm{Cov}(M_i^\ell(x), M_j^\ell(x))\right| + \sup_{x\in S}\sum_{S_2}\left|\mathrm{Cov}(M_i^\ell(x), M_j^\ell(x))\right| + \sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(M_i^\ell(x)) := G_{1,n} + G_{2,n} + G_{3,n},$$

其中，集合 S_1 和 S_2 的定义方式与引理3的证明中完全相同。对于 $x \in S$，定义指标 $j(x) = \arg\min_{j\in[N_{r_n}(S)]} d(x, x_j)$，并记 $B_{x,n} := B(x, h) \cup B(x_{j(x)}, h)$。此外，给定一个可测集 E 和一个随机变量 χ，定义 $1_A(\chi) = 1$。于是，根据**H7(i)**，

$$\begin{aligned} G_{1,n} &= \left(\frac{r_n}{h}\right)^2 \sup_{x\in S}\sum_{S_1}\Big|E\big[|\varphi_i\varphi_j|^\ell 1_{B_{x,n}}(\chi_i)1_{B_{x,n}}(\chi_j)\big] \\ &\quad - E\big[|\varphi_i|^\ell 1_{B_{x,n}}(\chi_i)\big]E\big[|\varphi_j|^\ell 1_{B_{x,n}}(\chi_j)\big]\Big| \\ &\le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^2 \sup_{x\in S}\sum_{S_1}\big\{E\big[1_{B_{x,n}}(\chi_i)1_{B_{x,n}}(\chi_j)\big] + E\big[1_{B_{x,n}}(\chi_i)\big]E\big[1_{B_{x,n}}(\chi_j)\big]\big\}. \end{aligned}$$

一般而言，对于任意可测集 A 和 B，我们有 $1_{A\cup B}(\chi) \le 1_A(\chi) + 1_B(\chi)$。因此，

$$1_{B_{x,n}}(\chi_i)1_{B_{x,n}}(\chi_j) \le [1_{B(x,h)}(\chi_i) + 1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_i)][1_{B(x,h)}(\chi_j) + 1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_j)],$$

这意味着

$$\begin{aligned} E\big[1_{B_{x,n}}(\chi_i)1_{B_{x,n}}(\chi_j)\big] &\le \Psi_{x,i,j}(h) + \Psi_{x_{j(x)},i,j}(h) + \Psi_{x,x_{j(x)},i,j}(h) + \Psi_{x_{j(x)},x,i,j}(h) \\ &\le 4C\sup_{x\in S}\max_{s\in[n]}\phi_{x,s}(h)^{1+2p_{\min}} \le C\phi(h)^{1+2p_{\min}}, \end{aligned}$$

利用**H1** 和**H6**，对于所有足够大的 n，其中 $p_{\min} = \min_{(i,j)\in[n]^2} p_{1,\,i,\,j}$。类似地，

$$\begin{aligned} E\big[1_{B_{x,n}}(\chi_i)\big]E\big[1_{B_{x,n}}(\chi_j)\big] &\le \big(\phi_{x,i}(h) + \phi_{x_{j(x)},i}(h)\big)\big(\phi_{x,j}(h) + \phi_{x_{j(x)},j}(h)\big) \\ &\le C\phi(h)^2, \end{aligned}$$

在 $x \in S$ 上一致成立。因此，当 n 足够大时，

$$G_{1,n} \le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^2 \sum_{S_1}\big\{\phi(h)^{1+2p_{\min}} + \phi(h)^2\big\} \le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^2 n a_n \phi(h)^{1+2p_{\min}}.$$

Next，我们利用 Davydov 不等式对 $G_{2,n}$ 进行界定。为此，注意到对于任意 $q > 2$，

$$\begin{aligned} \sup_{x\in S} E|Z_i^\ell(x)|^q &= \left(\frac{r_n}{h}\right)^q \sup_{x\in S} E\big|\big\{|\varphi_i|^\ell 1_{B_{x,n}}(\chi_i) - E\big(|\varphi_i|^\ell 1_{B_{x,n}}(\chi_i)\big)\big\}^q\big| \\ &= \left(\frac{r_n}{h}\right)^q \sup_{x\in S} E\left|\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\{|\varphi_i|^{\ell k}1_{B_{x,n}}(\chi_i)\}\{E(1_{B_{x,n}}(\chi_i)\gamma_{\ell,i}(\chi_i))\}^{q-k}\right| \\ &\le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^q \sum_{k=0}^{q}\sup_{x\in S} E(1_{B_{x,n}}(\chi_i))\{E(1_{B_{x,n}}(\chi_i))\}^{q-k} \\ &\le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^q \sum_{k=0}^{q}\phi(h)^{1+q-k} \le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^q \phi(h). \end{aligned}$$

因此，f 对于所有 $q>2$ 以及某个 $t\in(0,1)$，根据 Davydov 不等式和 **H5**，可得

$$G_{2,n}\le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\phi(h)^{2/q}\sum_{S_2}\alpha(|i-j|)^{1-2/q}\le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\phi(h)^{2/q}t^{(1-2/q)a_n}.$$

沿用引理5的证明思路，我们令 $a_n=C_1\phi(h)^{-1/2}$，从而得到 $G_{1,}$ $O(\ r_n/h\ ^2n\phi\ h\ )$ $G_{2\,n}=O(\ r_n/h\ ^2n\phi\ h\ [\phi\ h\ ^{2/q-1+C'/2}])=o(\ r_n/h\ ^2n\phi\ h\ )^{n}=$ ( ) ( )，并且 . ( ) ( ) ( ) ( ) ( )，其中某个 $C'>0$ 足够大。

最后一项$G_{3,\ n}$ 可按如下方式估计

$$\begin{aligned}G_{3,n}&\le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\Big\{\sup_{x\in S}E\big(1_{B(x,h)}(\chi_i)+1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_i)\big)\\&\quad+\sup_{x\in S}\big[E\big(1_{B(x,h)}(\chi_i)+1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_i)\big)\big]^2\Big\}\\&\le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^2 n\big\{\phi(h)+\phi(h)^2\big\}\le C\left(\frac{r_n}{h}\right)^2 n\phi(h).\end{aligned}$$

因此，$\sup_{x\in S}W^2_{n,\ \ell}(x)\ =O\big((r_n/h)^2n\phi(h)\big)$。现在，我们关注一致下界。可以得到

$$\begin{aligned}\inf_{x\in S}W^2_{n,\ell}(x)&\ge\inf_{x\in S}\sum_{1}^{n}\mathrm{Var}\big(Z_i^{\ell}(x)\big)\\&\ge cn\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\inf_{x\in S}\Big\{\min_{s\in[n]}\big[E\big(1_{B_{x,n}}(\chi_i)\big)-\big(E\big(1_{B_{x,n}}(\chi_i)\big)\big)^2\big]\Big\}\\&\ge cn\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\Big\{\inf_{x\in S}\min_{s\in[n]}E\big(1_{B_{x,n}}(\chi_i)\big)-\sup_{x\in S}\max_{s\in[n]}\big(E\big(1_{B_{x,n}}(\chi_i)\big)\big)^2\Big\}.\end{aligned}$$

一般而言，对于可测集 A 和 B，有 $1_{A\cup B}(\chi)=1_A(\chi)+1_B(\chi)-1_{A\cap B}(\chi)\ge1_A(\chi)+1_B(\chi)-1_B(\chi)=1_A(\chi)$。然后

$$\inf_{x\in S}W^2_{n,\ell}(x)\ge cn\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\big[\phi(h)-C\phi(h)^2\big]\ge cn\left(\frac{r_n}{h}\right)^2\phi(h).$$

最后，

$$\begin{aligned}\sup_{x\in S}\max_{i\in[n]}ET_i^{\ell}(x)&\le C\frac{r_n}{h}\sup_{x\in S}\max_{i\in[n]}E\big(1_{B(x,h)}(\chi_i)+1_{B(x_{j(x)},h)}(\chi_i)\big)\\&\le C\frac{r_n}{h}\phi(h).\end{aligned}$$

∎

2 理论细节

我们的框架考虑一组取值于实数集 $\times\ \mathscr{F}$ 上的随机对 $(Y_i,\ \chi_i)$，$i\in\{1,\dots,n\}$，定义在 $(\Omega\ \mathcal{A},\ P)$ 上，其中 $\mathscr{F}$ 是配备半度量（有时称为伪度量） d的半度量空间。本文中，默认对任意 $i\in\{1,\dots,n\}$ 和某个点 $x\in\mathscr{F},\ d(x,\ \chi_i)$ 都是随机变量。下面的命题阐明了 $d(x,\ \chi_i)$ 的可测性。

命题 2.1。 设 $x \in \mathscr{F}$和 χ_i: (Ω $\mathcal{A}$) $\to(\mathscr{F}, \mathcal{A}')$，其中 $\mathcal{A}' = \mathcal{B}(\mathscr{F})$ 是由 $(\mathscr{F}, d)$ 上由 d诱导的拓扑生成的 σ-代数。那么 $d(x, \chi_i)$ 是一个随机变量。

命题 2.1 的证明 令 τ_d表示由 d 诱导的半度量空间 $(\mathscr{F}, d)$ 上的拓扑，并令 $B_r(x)$ 表示相对于 d、半径为 r 且中心为 x 的开球。于是可以证明， $\{B_{1/j}(x)\}_{j\in\mathbb{N}*}$是 τ_d的局部基，进而可推出 $(\mathscr{F}, \tau_d)$ 是第一可数的。

设 $y \in (\mathscr{F}, d)$ 和 $\{y_j\} \subseteq \mathscr{F}$为一个序列，且当 $j \to \infty$时 $y_j \to y$。任取 $\epsilon > 0$。则 $\exists j_0 : \forall j > j_0 : d(y, y_j) < \epsilon$。因此，对于 $j > j_0$，有

$$d(y_j, x) \le d(y_j, y) + d(y, x) < d(y, x) + \epsilon, \text{ and} \tag{7}$$
$$d(x, y) \le d(x, y_j) + d(y_j, y) < d(x, y_j) + \epsilon. \tag{8}$$

(7) 和 (8) 的结合意味着 $|d(x, y) - d(x, y_j)| < \epsilon$。由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，$d(x, y_j) \to d(x, y)$ $j \to \infty$，因此函数 $d(\cdot, x)$ 是序列连续的。

已知（Munkres，2000 年，定理 21.3），定义在第一可数空间上的序列连续函数$d(\cdot, x)$: $\mathscr{F} \to$ R 是连续的。

接下来，考虑集合 $\mathcal{W} = \{A \subseteq \mathrm{R} : d(\cdot, x)^{-1}[A] \in \mathcal{B}(\mathscr{F})\}$。容易验证，$\mathcal{W}$ 是一个 σ-代数。根据 $d(\cdot, x)$ 的连续性， $\mathcal{W}$ 包含 R 中的所有开集，即 $\tau \subseteq \mathcal{W}$ ，其中 τ 是 R 上的标准拓扑。根据生成的 σ-代数的极小性， $\sigma(\tau) = \mathcal{B}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{W}$，这意味着 R 中任意博雷尔集的原像也属于 $\mathcal{B}(\mathscr{F})$。因此， $d(\cdot, x)$ 是 $\mathcal{B}(\mathscr{F}) - \mathcal{B}(\mathrm{R})$ 可测的。因此，$d(\cdot, x) : (\mathscr{F}, \mathcal{B}(\mathscr{F})) \to$(R $\mathcal{B}$ (R)) 与 χ_i: (Ω $\mathcal{A}$) $\to(\mathscr{F}, \mathcal{B}(\mathscr{F}))$ 的复合函数是 $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathrm{R})$ 可测的，证毕。

∎

一般而言， $\{Y_i, \chi_i\}$ 的强混合依赖性会影响相关协方差和、部分和的方差以及指数不等式的处理。在我们的工作中，分别使用 Davydov 不等式和 Fuk-Nagaev 不等式来界定协方差和和的概率。更准确地说，只要序列 $\{d(x, \chi_i)\}_{i\in\mathbb{N}*}$ 继承了$\{Y_i, \chi_i\}_{i\in\mathbb{N}*}$所假设的强混合性质，我们的证明就可以应用这类不等式。下一个结果展示了 $\{(Y_i, \chi_i)\}$的混合依赖性与 $\{d(x, \chi_i)\}$的混合依赖性之间的关系。

命题 2.2. 设 $x \in \mathscr{F}$。若 $\{(Y_i, \chi_i)\}$ 是强混合的，且混合系数为 α，并且$(\mathscr{F}, \mathcal{B}(\mathscr{F}))$ 是一个可测空间，则序列 $\{d(x, \chi_i)\}$ 也是强混合的，且混合系数为 α。

命题 2.2 的证明 对于任意自然数 $0 < w \le k$，都有

$$\mathcal{F}_w^k := \sigma((Y_i, \chi_i), w \le i \le k) = \sigma\left(\bigcup_{i=w}^{k} \sigma((Y_i, \chi_i))\right) = \sigma\left(\left[\bigcup_{i=w}^{k} \sigma(Y_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=w}^{k} \sigma(\chi_i)\right]\right)$$
$$\supseteq \sigma\left(\bigcup_{i=w}^{k} \sigma(\chi_i)\right) = \sigma(\chi_i, w \le i \le k) := \mathcal{G}_w^k.$$

根据命题 2.1， $\{d(x, \chi_i)\}$ 是一个随机变量序列。显然， $\sigma(d(x, \chi_i)) = \{\chi_i^{-1} \circ d \cdot x^{-1}[A] \quad A \in \mathcal{B} \quad\} \subseteq \{\chi_i^{-1}[B] \quad B \in \mathcal{B}\mathscr{F}\} = \sigma\ \chi_i$ $\mathcal{G}_w^k \supseteq$(,) : (实数集) : ( ) ( )，因此，((,)) : 。 $\sigma\ d\ x\ \chi_i \quad w \le i \le k \quad = \mathcal{D}_w^k$ $\mathcal{F}_w^k \supseteq \mathcal{D}_w^k$ 由子集的传递性，。因此

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{|P(A)P(B) - P(A \cap B)| : A \in \mathcal{D}_1^k, B \in \mathcal{D}_{k+j}^{\infty}\right\} \le \alpha(j).$$

■

在时间序列的语境中，混合序列的概念与随机变量的渐近独立相关联。混合性时间序列可以视为一个随机变量序列，其过去与未来是渐近独立的。在假定 $\{(Y_i,\chi_i)\}$ 是强混合的情况下，我们间接地限制了$\Psi_{x、i、j}(r_1,r_2,r_3,r_4)$与$\phi_{x、i}(r_1,r_2)\phi_{x、j}(r_3,r_4)$之间的关系，每当 $|i-j|$ 相对“较大”时，其中为便于参考

$$\begin{aligned}
&\phi_{x,i}(r_1,r_2) = P(r_1 \le d(x,\chi_i) \le r_2),\\
&\Psi_{x,i,j}(r_1,r_2,r_3,r_4) = P(r_1 \le d(x,\chi_i) \le r_2, r_3 \le d(x,\chi_j) \le r_4),
\end{aligned}$$

采用以下记号 $\phi_{x,\ i}(r_2) := \phi_{x,\ i}(0,\ \ r_2)$ 和 $\Psi_{x,\ i,\ j}(r_2) := \Psi_{x,\ i,\ j}(0,\ \ r_2,\ \ 0,\ \ r_2)$，对任意 $r_1,\ \ r_2,\ \ r_3,\ \ r_4 > 0$。

鉴于 Leulmi 和 Messaci（2018）的研究，一个值得探讨的问题是：假设 $\{(Y_i,\ \ \chi_i)\}$ 是强混合的，且对于某个 $p \neq 1/2$ 以及所有 $i,\ \ j$，$\Psi_{x,\ i,\ j}(h) = \Theta\big([\phi_{x,i}(h)\phi_{x,\ j}(h)]^{1/2+p}\big)$，这样的假设是否相容?

命题2.3。 设 $x \in \mathscr{F}$。若 $\{(Y_i,\chi_i)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ 是强混合的，则

$$\Psi_{x,i,j}(h) = \Theta\big(\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)\big), n \to \infty, \tag{9}$$

对任意满足 $|i-j| \ge b_n$ 的 $i、\ j \in [n]$，以及 $\alpha(b_n) = o\big(\phi_{x,\ i}(h)\phi_{x,\ j}(h)\big)$。特别地，若$\{(Y_i,\chi_i)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ 是具有算术速率 $a > 3$ 或几何速率的强混合过程，则 (9) 对 $b_n = \big[\min_{s\in[n]} \phi_{x,\ s}(h)\big]^{-1}$ 成立。

命题2.3的证明 设 $A = \{0 \le d(x,\chi_i) \le h\}$ 且 $B = \{0 \le d(x,\chi_j) \le h\}$。显然$A \in \sigma(d(x,\chi_i))$，因为 $A = d(x,\chi_i)^{-1}([0,h])$，同理，$B \in \sigma(d(x,\chi_j))$。由命题 2.2立即可得 $\alpha(|i-j|) \ge |P(A \cap B) - P(A)P(B)|$，因此，

$$\begin{aligned}
&P(A\cap B) \le P(A)P(B) + \alpha(|i-j|), \text{ and}\\
&P(A\cap B) \ge P(A)P(B) - \alpha(|i-j|).
\end{aligned}$$

由于 $\{\alpha(k)\}$ 是一个非增序列，且 b_n 满足 $\alpha(b_n) = o\big(\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)\big)$，对任意 $|i-j| > b_n$

$$\begin{aligned}
\Psi_{x,i,j}(h) &\ge \phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h) - \alpha(b_n) = \phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)\left[1 - \frac{\alpha(b_n)}{\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)}\right]\\
&\ge c\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h),
\end{aligned}$$

只要 n 充分大。同样，对任意充分大的 $|i-j| > b_n$ 与 n

$$\Psi_{x,i,j}(h) \le \phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h) + \alpha(b_n) \le C\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h).$$

对于第二个结果，只需证明 $\alpha\big(\big[\min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)\big]^{-1}\big) = o(\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h))$. 假设 $\{(Y_i,\chi_i)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ 是强混合的，且具有算术速率 $a > 3$。那么

$$\frac{\alpha\big(\big[\min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)\big]^{-1}\big)}{\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)} \le C\frac{\min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)^a}{\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)} \le C \min_{s\in[n]} \phi_{x,s}(h)^{a-2} = o(1).$$

现在，假设其几何混合率为： $\alpha(k) \leq Ct^k, t \in (0,1)$。成立：

$$\frac{\alpha\left(\left[\min_{s\in[n]}\phi_{x,s}(h)\right]^{-1}\right)}{\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)} \leq C\frac{t^{1/\min_{s\in[n]}\phi_{x,s}(h)}}{\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)} \leq C\frac{t^{1/\min_{s\in[n]}\phi_{x,s}(h)}}{(\min_{s\in[n]}\phi_{x,s}(h))^2} = o(1),$$

因为几何衰减率优于任何多项式衰减率。 ∎

在等分布混合数据的情形下，注意，若假设 $\ln n/(n\phi_x,1(h)) = o(1)$，那么对于足够大的 n，总会存在指标 $i,j \in [n]:|i-j| \geq 1/\phi_x,1(h)$。对于这些指标，我们不能假设 $C'\phi_x,1(h)^{1/2+p} \leq \Psi_x,i,j(h) \leq C\phi_x,1(h)^{1/2+p}$，其中某个 $p \neq 1/2$ 及任意大的 n均如此，因为命题 2.4 表明 $\Psi_x,i,j(h) = \Theta(\phi_x,1(h)^2)$。

众所周知，χ_i 的集中性质会影响核估计量的收敛速率（参见 Ferraty 和 Vieu（2006）第 13 章）。特别是，与其他类型的过程（例如指数型过程）相比，分形阶过程表现出良好的收敛速率。Ferraty 和 Vieu（2006）的引理 13.6 展示了分形型过程的普遍性：我们可以构造一个半度量 d，使得任何取值于带有内积的可分Hilbert空间中的过程必然都是分形型过程。

对于下一个命题，我们回顾论文第 3 节中的一些记号。设 x 为 $\mathscr{F}$中的一个元素， $h > 0$为满足 $h = o(1)$ 的带宽，并定义 $\phi_{x,\ i}(r_1,\ r_2) = P(r_1 \leq d(x,\ \chi_i) \leq r_2)$，其中 $\phi_{x,\ i}(r_2) := P(0 \leq d(x,\ \chi_i) \leq r_2)$，对任意 $r_1,\ r_2 > 0$均成立。从现在起，我们也使用通用的正小常数和大常数，分别记为 c和 C。

命题 2.4。 假设 χ_i 的分形阶为[6] $\theta > 0$, $L > 0$ ，且核函数定义为

- $K(t) = L^{-(\alpha+1)}(1+1/\alpha)(L^\alpha - t^\alpha)1_{[0,L]}(t),\ \alpha > 0;\ or$
- $K(t) = 1_{[0,L]}(t)/L.$

那么，当 n 充分大时，有

$$\int_0^\epsilon \phi_{x,i}(zh,\epsilon h)\frac{d}{dz}(z^\ell K(z))dz > c\phi_{x,i}(h),\ 0 < \epsilon \leq L,\ \ell \in \mathbb{N}^*; \tag{10}$$

$$\int_0^h \phi_{x,\ i}(z)^\delta dz > ch\phi_{x,\ i}(h)^\delta,\ \text{对任意}\ \delta > 0; \tag{11}$$

$$\int_0^1 \phi_{x,i}(zh,h)^{1/2+p}\frac{d}{dz}(z^2K(z))dz > c\phi_{x,i}(h)^{1/2+p},\ for\ any\ 0 < p < 1,\ and\ L = 1. \tag{12}$$

此外，若将假设 *A9*（第 *3.2* 节）调整为

A9'. $\forall i,j \in [n]:\ \ \forall w,t \in [0,1]:\ \ \exists 1/4 < p_{1,\ i,\ j} \leq 1/2 \leq p_{2,\ i,\ j} < 3/4$ 使得

$$[\phi_{x,i}(th,h)\phi_{x,j}(wh,h)]^{1/2+p_{2,i,j}} \leq \Psi_{x,i,j}(th,h,wh,h) \leq [\phi_{x,i}(th,h)\phi_{x,j}(wh,h)]^{1/2+p_{1,i,j}},$$

那么假设 *A10* 成立。

[6]若存在某个常数 $C_x > 0$，使得 $\phi_{x,\ i}(\epsilon) \overset{a}{\approx} C_x\epsilon^\theta,\ \epsilon \to 0$，则称随机变量 χ_i 关于半度量 d 的分形阶为 θ。

命题 2.4 的证明 为简便起见，令 $k_0 = L^{-(\alpha+1)}(1+1/\alpha) > 0$。对于多项式型核，我们有，在 $[0, L]$

$$\begin{aligned}\phi_{x,i}(zh, \epsilon h)\frac{d}{dz}(z^\ell K(z)) = C_x h^\theta k_0 \big[&\ell L^\alpha \epsilon^\theta z^{\ell-1} - (\ell+\alpha)\epsilon^\theta z^{\ell+\alpha-1} \\ &- \ell L^\alpha z^{\ell+\theta-1} + (\ell+\alpha) z^{\ell+\alpha+\theta-1}\big] + o(h^\theta),\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_0^\epsilon \phi_{x,i}(zh, \epsilon h)\frac{d}{dz}(z^\ell K(z))dz &= C_x h^\theta k_0 \epsilon^{\ell+\theta}\left[L^\alpha - \epsilon^\alpha - \frac{\ell L^\alpha}{\ell+\theta} + \frac{\ell+\alpha}{\ell+\alpha+\theta}\epsilon^\alpha\right] \\ &\quad + o(h^\theta) \\ &= C_x h^\theta k_0 \epsilon^{\ell+\theta}\theta\left\{\frac{\alpha L^\alpha + (\ell+\theta)(L^\alpha - \epsilon^\alpha)}{(\ell+\theta)(\ell+\theta+\alpha)}\right\} + o(h^\theta) \\ &:= C_x h^\theta M + o(h^\theta).\end{aligned}$$

由于 $L \geq \epsilon$, $M > 0$。那么

$$\frac{1}{\phi_{x,i}(h)}\int_0^\epsilon \phi_{x,i}(zh, \epsilon h)\frac{d}{dz}(z^\ell K(z))dz \to M, n \to \infty,$$

因此，存在 $c > 0$，使得当 n 足够大时，(10) 成立。类似地，若 K 是均匀核，则可以证明

$$\int_0^\epsilon \phi_{x,i}(zh, \epsilon h)\frac{d}{dz}(z^\ell K(z))dz = C_x h^\theta \frac{\theta}{\ell+\theta}\frac{\epsilon^{\ell+\theta}}{L} + o(h^\theta)$$

这意味着当 n充分大时，(10) 成立。

接下来，

$$\int_0^h \phi_{x,i}(z)^\delta dz = C_x \frac{h^{\delta\theta+1}}{1+\delta\theta} + o(h^{\delta\theta+1})$$

这意味着对于所有足够大的 n，(11)都成立。

接下来，我们关注不等式 (12)。假设核函数为多项式型。通过应用分部积分法，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \phi_{x,i}(zh, h)^{1/2+p}\frac{d}{dz}(z^2 K(z))dz \\ &\qquad \overset{a}{\approx} C_x \frac{\alpha+1}{\alpha} h^{\theta(1/2+p)} \int_0^1 \big(1 - z^\theta\big)^{1/2+p}\big[2z - (2+\alpha)z^{\alpha+1}\big]dz \\ &\qquad = C_x \frac{\alpha+1}{\alpha} h^{\theta(1/2+p)}\Bigg\{\big(1 - z^\theta\big)^{1/2+p}\big(z^2 - z^{2+\alpha}\big)\Big|_0^1 \\ &\qquad\qquad + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}+p\right)\big(1 - z^\theta\big)^{p-1/2}\theta z^{\theta-1}\big(z^2 - z^{\alpha+2}\big)dz\Bigg\} \\ &\qquad = C_x \frac{\alpha+1}{\alpha} h^{\theta(1/2+p)}\left(\frac{1}{2}+p\right)\theta\int_0^1 \big(1 - z^\theta\big)^{p-1/2} z^{\theta-1}\big(z^2 - z^{\alpha+2}\big)dz. \quad (13)\end{aligned}$$

令 $g(z) = z^2 - z^{\alpha+2} = z^2(1 - z^\alpha) \geq 0$。可以验证，$[2/(2+\alpha)]^{1/\alpha} \in \big(1/\sqrt{e}, 1\big)$ 是 g 在 (0,1) 上的唯一临界点，并且 g 在 $\big([1/(2+\alpha)]^{1/\alpha}, [2/(2+\alpha)]^{1/\alpha}\big)$ 上递增。

因此，通过代入 $w = 1 - z^\theta$,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}+p\right)\theta\int_0^1 \left(1-z^\theta\right)^{p-1/2} z^{\theta-1} g(z)dz \\
&> \left(\frac{1}{2}+p\right)\theta g\left([1/(2+\alpha)]^{1/\alpha}\right)\int_{[1/(2+\alpha)]^{1/\alpha}}^{[2/(2+\alpha)]^{1/\alpha}} \left(1-z^\theta\right)^{p-1/2} z^{\theta-1}dz \\
&= \left(\frac{1}{2}+p\right) g\left([1/(2+\alpha)]^{1/\alpha}\right)\int_{1-[1/(2+\alpha)]^{\theta/\alpha}}^{1-[2/(2+\alpha)]^{\theta/\alpha}} -w^{p-1/2}dw \\
&= \left\{\left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^{2/\alpha} - \left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^{(2+\alpha)/\alpha}\right\}\left\{\left[1-\left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^{\theta/\alpha}\right]^{1/2+p} - \left[1-\left(\frac{2}{2+\alpha}\right)^{\theta/\alpha}\right]^{1/2+p}\right\} \\
&:= M\frac{\alpha}{\alpha+1} > 0.
\end{aligned}$$

因此,

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\phi_{x,i}(h)^{1/2+p}} \int_0^1 \phi_{x,i}(zh,h)^{1/2+p} \frac{d}{dz}(z^2K(z))dz > M > 0,$$

这意味着（12）对所有足够大的 ns 都成立。

为证明最后一个结果，注意到必定存在某个 $p \in (1/4, 3/4)$，使得

$$[\phi_{x,i}(th,h)\phi_{x,j}(wh,h)]^{1/2+p} = \Psi_{x,i,j}(th,h,wh,h),$$

若 A9' 成立，则对任意 $i,j \in [n], w,t \in [0,1]$。因此，由（12）可得,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Psi_{x,i,j}(zh,h,0,h)\frac{d}{dz}(z^2K(z))dz &= \int_0^1 [\phi_{x,i}(zh,h)\phi_{x,j}(h)]^{1/2+p}\frac{d}{dz}(z^2K(z))dz \\
&> c[\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)]^{1/2+p} = c\Psi_{x,i,j}(h).
\end{aligned}$$

若 K 属于类型（II），则由（12）和（11）可知,

$$\begin{aligned}
&-\iint_0^1 \Psi_{x,i,j}(zh,h,0,wh)\frac{d}{dz}(z^2K(z))K'(w)dzdw \\
&\quad = -\iint_0^1 [\phi_{x,i}(zh,h)\phi_{x,j}(wh)]^{1/2+p}\frac{d}{dz}(z^2K(z))K'(w)dzdw \\
&\quad > c\int_0^1 [\phi_{x,i}(zh,h)]^{1/2+p}\frac{d}{dz}(z^2K(z))dz \int_0^1 [\phi_{x,j}(wh)]^{1/2+p}dw \\
&\quad > c[\phi_{x,i}(h)]^{1/2+p}h^{-1}\int_0^h [\phi_{x,j}(t)]^{1/2+p}dt \\
&\quad > c[\phi_{x,i}(h)\phi_{x,j}(h)]^{1/2+p} = c\Psi_{x,i,j}(h).
\end{aligned}$$

■

命题 2.4 表明，对于一般的分形型过程，若选用常见的核函数（例如三角核、二次核、三次核或均匀非对称核），并适当加强**A6(i)** 和**A10**这两个假设，则本文的假设成立。若特别令 $w = t = 0$，则可由**A9'** 得到条件**A9** 。

接下来，我们将介绍 $O_{a.co.}$ 和 $o_{a.co.}$ 的基本性质。

Prop命题 2.5。 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个实数序列，并设 $X_n = O_{a.co.}(a_n)$。该 n

(i) $Z_n = O_{a.co.}(b_n)$ *or* $Z_n = O(b_n) \implies X_n Z_n = O_{a.co.}(a_n b_n)$;

(ii) $Z_n = o_{a.co.}(b_n)$ *or* $Z_n = o(b_n) \implies X_n Z_n = o_{a.co.}(a_n b_n)$;

(iii) $Z_n = O_{a.co.}(b_n)$ *or* $Z_n = O(b_n) \implies X_n + Z_n = O_{a.co.}(a_n + b_n)$;

(iv) $Z_n = o_{a.co.}(b_n)$ *or* $Z_n = o(b_n) \implies X_n + Z_n = O_{a.co.}(a_n + b_n)$;

(v) $a_n = O(b_n) \implies X_n = O_{a.co.}(b_n)$;

(vi) $a_n = o(b_n) \implies X_n = o_{a.co.}(b_n)$;

(vii) $O_{a.co.}(a_n) = a_n O_{a.co.}(1)$.

命题 2.5 的证明 用 $\epsilon_x > 0$ 表示满足 $\sum_{n\in自然数集} P(|X_n/a_n| > \epsilon_x) < \infty$ 的数。

(i) 若 $Z_n = O_{a.co.}(b_n)$，则存在 $\exists \epsilon_z > 0$，使得 $\sum_{n\in自然数集}\{P(|X_n/a_n| > \epsilon_x) + P(|Z_n/b_n| > \epsilon_z)\} < \infty$。取 $\epsilon = \epsilon_x \epsilon_z$，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n Z_n| > \epsilon |a_n b_n|) &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \{P(|X_n Z_n| > \epsilon |a_n b_n|, |X_n| \le \epsilon_x |a_n|) + P(|X_n| > \epsilon_x |a_n|)\} \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \{P(|Z_n| > \epsilon_z |b_n|) + P(|X_n| > \epsilon_x |a_n|)\} < \infty.\end{aligned}$$

若 $Z_n = O(b_n)$，则 $\exists M > 0$，$n_0 \in$ 自然数集：$\forall n > n_0$：$|Z_n/b_n| \le M$。对于 $\epsilon = M\epsilon_x$，有

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n Z_n| > \epsilon |a_n b_n|) \le n_0 + \sum_{n>n_0} P(|X_n| > \epsilon_x |a_n|) < \infty.$$

(ii) 使用与 **(i)** 中相同的论证即可得出结果，只是现在 $\epsilon_z > 0$ 和 $M > 0$可以是任意的。

(iii) 假设 $Z_n = O_{a.co.}(b_n)$。则存在 $\exists \epsilon_z > 0$，使得 $\sum_{n\in自然数集}\{P(|X_n/a_n| > \epsilon_x/2) + P(|Z_n/b_n| > \epsilon_z/2)\} < \infty$。对于 $\epsilon = 2\max(\epsilon_x, \epsilon_z)$，有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} P\left(\left|\frac{X_n + Z_n}{a_n + b_n}\right| > \epsilon\right) &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{P\left(\left|\frac{X_n}{a_n + b_n}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(\left|\frac{Z_n}{a_n + b_n}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right)\right\} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|\left|\frac{1}{1 + b_n/a_n}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(\left|\frac{Z_n}{b_n}\right|\left|\frac{1}{1 + a_n/b_n}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right)\right\} \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(\left|\frac{Z_n}{b_n}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right)\right\} < \infty.\end{aligned}$$

若 $Z_n = O(b_n)$，则 $\exists M > 0, n_0 \in$ 自然数集：$\forall n > n_0$：$|Z_n/b_n| \le M$。因此，若我们令 $\epsilon = \epsilon_x + M$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} P\left(\left|\frac{X_n + Z_n}{a_n + b_n}\right| > \epsilon\right) &\le n_0 + \sum_{n>n_0} P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|\left|\frac{1}{1 + b_n/a_n}\right| + M\left|\frac{1}{1 + a_n/b_n}\right| > \epsilon\right) \\ &\le n_0 + \sum_{n>n_0} P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| > \epsilon - M\right) < \infty.\end{aligned}$$

(iv) 对任意的 $\epsilon_z, M > 0$，采用与 **(iii)** 的证明相同的论证即可得出该结果。

(v) 根据假设，对于某个 $n_0, M > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n/b_n| > \epsilon) \leq n_0 + \sum_{n>n_0} P(|X_n| > \epsilon|a_n|/M) < \infty,$$

如果我们取 $\epsilon = \epsilon_x M$。

(vi) 设 $\epsilon' > 0$ 为任意值。根据假设，存在 n_0 使得

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n/b_n| > \epsilon) \leq n_0 + \sum_{n>n_0} P(|X_n| > \epsilon|a_n|/\epsilon') < \infty,$$

如果 $\epsilon = \epsilon_x\epsilon'$。

(vii) 若等价关系 $X_n = O_{a.co.}(a_n) \iff X_n/a_n = O_{a.co.}(1)$ 成立，则结论成立。但根据定义，这显然成立。 ∎

命题 2.6。 设 $a_n = o(1)$。对于任意 $M \in$ 实数集，有

$$X_n - M = O_{a.co.}(a_n) \implies 1/X_n = 1/M + O_{a.co.}(a_n).$$

命题 2.6 的证明

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{M}\right| > \epsilon|a_n|\right) &\leq P(|X_n - M| > \epsilon|a_n M X_n|, |X_n/M| \leq 2) + P(|X_n/M| > 2) \\ &\leq P(|X_n - M| > 2\epsilon M^2|a_n|) + P(|X_n/M| > 2) \end{aligned} \tag{14}$$

根据假设，存在 $\epsilon' > 0$ 和 $n_0 \in$ 自然数集，使得

$$\infty > \sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n - M| > \epsilon'|a_n|) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n| > \epsilon'|a_n| + |M|) \geq \sum_{n>n_0} P(|X_n| > 2|M|).$$

因此，由（14）可得,

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} P\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{M}\right| > \epsilon|a_n|\right) \leq 2n_0 + \sum_{n>n_0} \{&P(|X_n - M| > 2\epsilon M^2|a_n|) \\ &+ P(|X_n/M| > 2)\} < \infty \end{aligned}$$

对于 $\epsilon = \epsilon'/(2M^2)$ 。 ∎

参考文献

Bosq，D.（1998）。《随机过程的非参数统计：估计与预测》。《统计学讲义》。Springer New York。

Ferraty, F. 和 Vieu, P. (2006). 非参数函数型数据分析：理论与实践. 施普林格科学与商业媒体.

Leulmi, S. 和 Messaci, F. (2018年). 使用函数型相依数据对广义回归函数进行局部线性估计. 《统计学通讯：理论与方法》 , 47(23):5795–5811.

Munkres, J. (2000). 一般拓扑学. 普伦蒂斯·霍尔, 8:33–35.

Rio, E. (2017年). 弱相依随机过程的渐近理论，第80卷。施普林格 .