arXiv:2603.04693v1 [math.LO] 5 Mar 2026

# 论受规分割

SU GAO 和 STEVE JACKSON

Abstract. 本文研究零维波兰空间上 $\mathbb{Z}^n$ 的自由作用的连续矩形划分与博雷尔矩形划分的组合学，具体而言，研究空间 $2^{\mathbb{Z}^n}$上 $\mathbb{Z}^n$ 的移位作用的自由部分 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$。我们通过研究 $\mathbb{R}^n$相应的受控划分概念来开展这项研究。本文考察的主要概念是划分的连续规整数与博雷尔 *regulation*数。其定义为相应受控划分中可能在同一点相交的矩形的最大数量。连续调节数和博雷尔调节数 $\gamma_c, \gamma_B$ 分别是对 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$的连续矩形划分（博雷尔矩形划分）取遍后，这些数值可能达到的最小值。本文证明，对于 $n = 2$，有 $\gamma_c = \gamma_B = 3$；对于 $n \geq 3$，有 $n + 2 \leq \gamma_B \leq \gamma_c \leq 3 \cdot 2^{n-2}$。对于 $n = 3$，我们将此结果改进为$\gamma_c = \gamma_B = 5$。这表明，维数为 $n = 2$ 与维数为 $n > 2$ 时的博雷尔组合学存在显著差异。

## 1. Introduction

本文可视为对可数阿贝尔群作用的Borel组合学研究的一项贡献。一般意义上的Borel组合学研究始于Kechris、Solecki 和 Todorcevic的开创性论文 [6]。自此以来，研究中反复出现这样一种现象：Borel组合学问题的答案往往与定义域可数的经典组合学问题的答案不同。例如，在标记群 $G$ （具有特定有限生成集的群）的背景下，关于 $G$的Cayley图的组合学问题，其答案往往不同于关于 $G$ 在波兰空间 $X$上自由Borel作用的Schreier图的Borel组合学问题。本文将再举一个这类差异的例子。

本文所讨论的具体组合学问题源自另一条研究脉络，即对可数Borel等价关系的Borel标记构造的研究。这项技术最初是为超有限性证明而设计的（例如参见 [5] 和 [2]）。近年来，它在回答一些关于阿贝尔群作用的Borel组合学问题时发挥了关键作用（参见[4]）。

更具体地说，我们考虑波兰空间 $X$ 上的所谓博雷尔矩形划分，其中加法群 $\mathbb{Z}^n$ 以博雷尔方式自由作用于 $X$。这些是 $X$的博雷尔划分 P，其中划分 P 中的每个集合 $P$都具有 $R\cdot x$的形式，其中 $x \in X$ 和 $R$ 满足 $R$ 是 $\mathbb{Z}^n$中的一个矩形。由于该作用是自由的，将 $X$上的 Schreier 图限制在作用的每个等价类上时，本质上都是 $\mathbb{Z}^n$上的 Cayley 图的一个副本；而博雷尔矩形划分 P

第一作者感谢中国国家自然科学基金委员会（NSFC）项目（12271263 和 12250710128）对其研究的部分资助。第二作者的研究得到美国国家科学基金会项目（DMS-1800323 和 DMS-2452099）的部分资助。

将其限制在 $X$上的每个等价类时，会在 $\mathbb{Z}^n$上产生一个矩形划分 Q。

为了研究 $\mathbb{Z}^n$ 上的矩形划分 Q，我们将 $\mathbb{Z}^n$ 的每个元素替换为一个以该元素为中心、边长为 1 的 $n$ 维立方体，从而得到对 $\mathbb{R}^n$ 的划分，划分出的 $n$ 维矩形内部互不相交，我们称之为受规分割。严格来说，我们要求受规分割中的每个区域都是有限的（即边长有限）。在二维情形下，文献中称这些划分为矩形剖分，它们一直是组合几何的研究对象（参见例如 [8] 和 [7]）。对于 $\mathbb{R}^n$ 的受规分割，我们尤其关注划分中有多少个不同区域可以交于一点（即一点相对于某个受规分割的规整数）。我们将在引理 4.2 中证明，对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意受规分割 P，都存在某个点，其相对于 P 的规整数至少为 $n+1$。因此，当每个点的规整数至多为 $n+1$ 时，我们称受规分割 P 是极小的。

$\mathbb{R}^n$ 的极小受控分割具有一个显著性质（定理 3.10）：对于任意点 $x$，都存在一个足够小的邻域 $U$，使得其中诱导的受控划分的任意子集族 $U$，其并集都与一个 $n$ 维矩形同胚。这一性质有助于简化某些博雷尔标记构造（如 [4] 中的构造），并产生具有更强拓扑正则性性质的标记集。在二维中，极小受控分割被称为一般矩形剖分（见 [8]）；而极小矩形剖分（例如 [7] 中）一词则用于指代由最少数量矩形组成的有限多边形区域的矩形剖分。[9]指出了二维一般矩形剖分具有上述拓扑正则性性质。人们对极小矩形剖分的兴趣，主要源于这样一个观察：寻找极小矩形剖分可以在多项式时间内完成（例如参见 [7], [1], [10]），这也解释了为什么相关文献大多来自计算机科学领域。

因此，如果矩形划分在 $\mathbb{Z}^n$ 极小，即其在 $\mathbb{R}^n$ 上诱导的受控划分是极小的，我们就称其为极小矩形划分。此外，我们也将 $\mathbb{Z}^n$ 上的矩形划分称为 受控划分。这一术语同样适用于 $\mathbb{Z}^n$ 的自由Borel作用的矩形划分。本文的主要结果有些出人意料，具体如下。

**定理 1.1**。对于 $\mathbb{Z}^2$ 在波兰空间 $X$ 上的任意自由*Borel*作用，都存在 $X$ 的一个博雷尔极小受规划分。相反，对于任意 $n \geq 3$，以及 $\mathbb{Z}^n$ 在波兰空间 $X$ 上的任意自由*Borel*作用，都不存在 $X$ 的博雷尔、非退化的极小受规划分。

这里，如果一个受控划分并非由低维的矩形区域组成，且这些矩形区域均垂直于同一个标准单位向量，则称该受控划分是非退化的。

鉴于定理 1.1，自然要为 $\mathbb{Z}^n$ 引入博雷尔和连续调节数 $\gamma_B(n)$、$\gamma_c(n)$。给定 $\mathbb{Z}^n$ 在 $X = 2^{\mathbb{Z}^n}$ 上的移位作用的自由部分的一个博雷尔或连续矩形划分 P，对于每个 $x \in X$，划分 $\mathrm{P}_x$ 会诱导出等价类 $[x]$ 的一个划分，该划分可视为 $\mathbb{Z}^n$ 的一个划分。这也会得到上文提到的 $\mathbb{R}^n$ 的相应受控划分 $\mathrm{P}'_x$。令 $\gamma(\mathrm{P})$ 为满足以下条件的最小 $k$：对于所有 $x \in X$，$\mathbb{R}^n$ 中的每个点都至多属于 $\mathrm{P}'_x$ 的 $k$ 个矩形。那么，$\gamma_B(n)$ 是

$\gamma$(P) 在 $X$ 的所有博雷尔非退化矩形划分中的最小值。同理，$\gamma_c(n)$ 的定义方式相同，但使用的是移位空间的连续划分 P。显然，对于所有 $n$，都有 $\gamma_B(n) \le \gamma_c(n)$。对于 $n = 2$，我们实际上证明了 $\gamma_B(2) = \gamma_c(2) = 3$；而对于 $n > 2$，定理 1.1 表明 $\gamma_c(n) \ge \gamma_B(n) > n + 1$。我们将给出 $\gamma_c(n)$ 的一个上界；结合定理 1.1，这便得到关于连续调节数和博雷尔调节数的以下结果。

**定理 1.2.** 对于 $n = 2$，我们有 $\gamma_B(2) = \gamma_c(2) = 3$。对于 $n > 2$，我们有 $n + 2 \le \gamma_B(n) \le \gamma_c(n) \le 3 \cdot 2^{n-2}$。对于 $n = 3$，我们有改进 $\gamma_B(3) = \gamma_c(3) = 5$。

我们不知道是否存在 $n$ 的某些取值，使得 $\gamma_B(n) \ne \gamma_c(n)$。我们也不知道 $\gamma_B(n)$ 与 $\gamma_c(n)$ 的渐近增长率，尤其是它们是线性增长还是指数增长。

我们对主要定理的证明使用了迫迫法。众所周知，迫迫法是证明关于博雷尔组合学的否定性结果的有用工具（见 [3]）。事实上，我们给出了主要定理的两个迫迫法证明。在第一个证明中，我们在维数 3 证明该定理，然后将证明提升到任意维数 $n \ge 3$。在第二个证明中，我们通过直接在维数 $n \ge 3$ 中工作，给出一种不同的迫迫法构造。然而，这两个证明都基于对 $\mathbb{R}^n$ 的最小受控分割的若干观察。特别地，我们证明了主要定理的如下有限版本，其针对 $\mathbb{R}^n$ 中矩形的最小局部受控分割。

**定理 1.3**。对于 $\mathbb{R}^2$ 中的任意矩形 $R$ 以及由 $R$ 的两两不相交子矩形组成的任意有限集$\mathcal{S}$，都存在 $R$ 的一个有限极小局部受控划分$\mathcal{P}$，使得$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$。相比之下，对于任意 $n \ge 3$ 和任意 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n$ 维矩形 $R$，都存在由 $R$ 的两两不相交 $n$ 维子矩形组成的有限集$\mathcal{S}$，使得不存在任何 $R$ 的有限极小局部受控划分$\mathcal{P}$，满足$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$。

本文其余部分安排如下。第 2 节定义基本概念，并证明 $\mathbb{R}^n$ 的所有受控划分都具有一项一般性质，由此我们可以为受控划分和局部受规分划定义极小性。第 3 节给出极小局部受规分划的典范描述（定理 3.9），并据此证明极小局部受规分划的拓扑正则性（定理 3.10）。第 4 节定义并刻画 $\mathbb{R}^n$ 的极小受控划分，并证明其存在性。第 5 节分析极小（局部）受控划分，并证明定理 1.3 的第二部分。第 6 节证明，对于任意 $n \ge 2$，考虑 $\mathbb{Z}^n$ 在伯努利移位空间 $2^{\mathbb{Z}^n}$ 的自由部分上的连续作用，存在一个开闭受控划分，使得所有点的规整数均不超过 $3 \cdot 2^{n-2}$（定理 6.9）。第 7 节将维数 3 时的这一上界改进为 5。第 8 节是本文的主要部分，我们将在此证明定理 1.1 的第二部分。最后，第 9 节进一步讨论一般情况下 $\mathbb{R}^n$ 的极小受控划分，并概述主要结果的另一种迫迫法证明。

致谢。 作者感谢 Andrew Marks 就本文主题进行了有益的讨论。

## 2. Regulated Partitions of $\mathbb{R}^n$

在全文中，我们固定 $n \ge 1$，令 0 为 $\mathbb{R}^n$ 的原点，并令 $e_1, \dots, e_n$表示 $\mathbb{R}^n$中的标准单位向量:

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

其中只有第 $i$ 个坐标为 1。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq i \leq n$，令$\pi_i(x) = \pi_{e_i}(x) = e_i, x$ 表示 $x$ 的第 $i$ 个坐标。对于任意子集 $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$，令 $V_A = \{e_i : i \in A\}$，并令

$$\pi_A = \pi_{V_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^A \cong \mathbb{R}^{|A|}$$

是由下式给出的投影映射

$$\pi_A(x) = \pi_{V_A}(x) = (\pi_i(x))_{i \in A} = (\pi_v(x))_{v \in V_A}.$$

对于 $0 \leq k \leq n$， $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $k$维矩形 是形如

$$R = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

其中

(i) 每个 $I_i$ 都具有 $[a_i, b_i]$ 的形式，其中 $a_i \leq b_i$ 为实数；(ii) 恰好有 $k$ 个 $i$ 使得 $I_i$ 不是单点集。

因此，在退化情形下，0维矩形就是一个点。

若 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形，我们将其内部记为 int($R$)。于是对于

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

其中对所有 $i$均有 $a_i < b_i$ ，

$$\mathrm{int}(R) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

我们还令 $\partial R$ 表示 $R$的边界，即 $\partial R = R \setminus \mathrm{int}(R)$。 $\partial R$ 可以唯一地写成$\mathbb{R}^n$中 $2n$ 个互不相同的（$n-1$）维矩形之并，我们称这些矩形为 $R$的面。对于 $R$的每个面 $F$ ， $F$ 的法向量是唯一的单位向量 $e_i$ ，它垂直于 $F$中的所有向量； $F$ 的方向是形如 $+e_i$ 或 $-e_i$的向量中唯一一个从 $F$指向$R$ 内部的向量，其中 $e_i$ 是 $F$的法向量。如果 $R$ 的两个不同面具有相同的法向量，则它们平行且方向相反；否则它们垂直。 $R$ 中任意一组两两垂直的面都有非空交集。如果 F 是$R$ 中一组非空的两两垂直的面，且 $|\mathbf{F}| = k$，则 $1 \leq k \leq n$ 以及交集 $\bigcap \mathbf{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个（$n-k$）维矩形。对于每个 $x \in R$，我们定义 $x$ 相对于$R$的边界秩，记作 $\beta_R(x)$，为满足以下条件的最大 $0 \leq k \leq n$： 存在 $R$ 中的一组两两垂直的面 F，使得 $|\mathbf{F}| = k$ 且 $x \in \bigcap \mathbf{F}$。因此， $\beta_R(x) = 0$ 当且仅当 $x \in \mathrm{int}(R)$；并且如果 $x \in \partial R$，则 $1 \leq \beta_R(x) \leq n$。对于 $0 \leq m \leq n-1$， $R$ 的 $m$阶边界是所有满足 $\beta_R(x) = n - m$的 $x \in R$ 的集合。这些几何概念可以如下用代数方式轻松描述。如果

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

其中，对于所有 $1 \leq i \leq n$，若 $R$ ，则 $a_i < b_i$ 是 $n$维矩形，位于 $\mathbb{R}^n$中。 $R$ 的一个面形式如下

$$\{x \in R : \pi_i(x) = a_i\} \text{ or } \{x \in R : \pi_i(x) = b_i\}$$

对于某个 $1 \leq i \leq n$；前一个面的方向为 $+e_i$ ，后一个面的方向为 $-e_i$。对于每个 $x \in R$，定义 $x$ 相对于 $R$ 的边界关联序列 为

$$B_R(x) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

其中，对于每个 $1 \le i \le n$,

$$\beta_i = \begin{cases} +1, & \text{if } \pi_i(x) = a_i, \\ -1, & \text{if } \pi_i(x) = b_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么， $\beta_R(x)$ 是 $B_R(x)$ 中非零项的数量。

**定义 2.1**。设 $n \ge 1$。$\mathbb{R}^n$ 的一个 受控覆盖 是由 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n$ 维矩形构成的集合 P，满足

(1) 存在一个离散子集 $D \subseteq \mathbb{R}$ 和一个常数 $d > 0$（称为 P 的离散常数），使得

- 对任意互不相同的 $r_1$， $r_2 \in D$、 $|r_1 - r_2| > d$，且
- 每个 $R \in$P 都具有如下形式

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

其中 $a_i$， $b_i \in D$ 且对于所有 $1 \le i \le n$均有 $a_i < b_i$；

(2) 对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，存在 $R \in$P 使得 $x \in R$。

如果受控覆盖 P 还满足以下条件，则称其为<强制受控划分

(3) 若 $R_1$， $R_2 \in$ P 互不相同，则 int($R_1$) ∩ int($R_2$) = ∅。

满足 (2) 和 (3) 的集合称为 $\mathbb{R}^n$ 的<强制矩形剖分 。受控划分定义中的条件 (3) 等价于

(3') 若 $R_1$， $R_2 \in$P，则 $R_1 \cap R_2 = \varnothing$ 或 $R_1 \cap R_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中某个 $k < n$ 的 $k$ 维矩形。

**定义 2.2**。令 $n \ge 1$，并令 $R$ 为 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形。$R$ 的局部受控覆盖 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n$维矩形组成的有限集合 P，满足⋃P = $R$。若对于任意不同的 $R_1, R_2 \in$ P，int($R_1$) ∩ int($R_2$) = ∅，则 $R$ 的局部受控覆盖 P 称为 $R$ 的局部受控划分 。

下面的引理可由定义直接得出。

**引理 2.3**。若$\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的受控覆盖（划分），且 $R$ 是一个 $n$维矩形，则

$$\mathcal{Q} = \{P \cap R : P \in \mathcal{P} \text{ and } P \cap R \text{ is an } n\text{-dimensional rectangle}\}$$

是 $R$的局部受控覆盖（划分）。

**定义 2.4**。令 $R$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$维矩形，并令 $x \in$ int($R$)。$R$ 的局部受控覆盖（划分） P 称为关于 $x$，如果对于所有 $P \in$P以及 $P$的所有面 $F$，要么 $x \in F$，要么 $F$ 包含于 $R$的某个面中。

容易看出，如果 P 是关于 $R$ 的局部受控覆盖，那么 $x \in \bigcap$P。此外，如果 P 是 $R$ 的局部受控划分，那么当且仅当 $x \in \bigcap$P 时，它关于 $x$。

**引理 2.5.** 如果 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in$ 内部($R$)，且 $\mathcal{P}$ 是 $R$ 的局部受控覆盖（划分），那么存在一个 $n$ 维矩形 $R_x$，使得 $R_x \subseteq R$，并且

$$\mathcal{Q} = \{P \cap R_x : P \in \mathcal{P}\}$$

是关于 $x$ 的 $R_x$ 局部受规覆盖（划分）。

证明。 注意,

$$U = \bigcup\{P \in \mathcal{P}: x \in P\}$$

是 $x$ 的一个邻域。如果 $\{P \in \mathrm{P}: x \in \mathrm{int}(P)\}$ 非空，那么

$$V = \bigcap\{P \in \mathcal{P}: x \in \mathrm{int}(P)\}$$

也是 $x$ 的一个邻域；否则我们可以令 $V = \mathbb{R}^n$。然后我们可以令 $R_x$ 为一个 $n$ 维矩形，使得

$$x \in \mathrm{int}(R_x) \subseteq R_x \subseteq U \cap V.$$

□

例 2.6。 令 $R_0 = [-1,1]^n$ 且 $x_0 = \vec{0}$。令 $\mathrm{P}_0$ 为所有形如以下形式的 $n$ 维矩形组成的集合

$$I_1 \times \cdots \times I_n$$

其中每个 $I_i$ 或为 $[-1,0]$，或为 $[0,1]$。那么 $|\mathrm{P}_0| = 2^n$ 且 $\mathrm{P}_0$ 是 $R_0$ 关于 $x_0$ 的一个局部受控划分。另一方面，若 P 是 $R_0$ 关于 $x_0$ 的任意局部受控覆盖，那么 P 的任意元素都具有以下形式

$$J_1 \times \cdots \times J_n$$

其中每个 $J_i$ 或为 $[-1,0]$、$[0,1]$，或为 $[-1,1]$。更一般地，对于任意 $n$ 维矩形 $R$ 以及 $x \in \mathrm{int}(R)$，$R$ 关于 $x$ 的局部受控覆盖与 $R_0$ 关于 $x_0$ 的局部受控覆盖之间，存在一个显然的一一对应关系，该对应通过平移（从 $x$ 到 $x_0$）和重新缩放（将边长 $R$ 缩放为 $R_0$ 的边长）实现。

**定义2.7**。 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形，P是 $R$的一个局部受规覆盖（划分），且 $x \in \mathrm{int}(R)$。

(i) 若存在 $P \in$P，使得 $x$ 包含于 $P$ 的一个面中，且该面的法向量为 $e_i$，则称标准单位向量 $e_i$ 是相对于P的 $x$ 的边界向量；等价地，$x \in P$ 且 $\pi_i(B_P(x)) \neq 0$。(ii) $x$ 相对于P的边界秩 记作 $\beta_{\mathcal{P}}(x)$，定义为 $x$ 相对于P的不同边界向量的数量。(iii) $x$ 相对于P的分割数 记作 $\nu_{\mathcal{P}}(x)$，是P中包含 $x$的不同元素的数量。

对于 $\mathbb{R}^n$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$的受控覆盖（划分）P，也类似地定义这些概念。

对于点附近的局部受规覆盖（划分），我们定义以下代数表示法来表达所关注的信息。

**定义2.8.** 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形，$x \in$int($R$)，且P是 $R$关于 $x$的一个局部受规覆盖。假设 $|\mathrm{P}| = m$。设 $P_1$，……，$P_m$是P的一个枚举。 $m \times n$ 矩阵 $M = (a_{i,j})_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$，其中

$$a_{i,j} = \pi_{e_j}(B_{P_i}(x))$$

称为 $x$ 关于P的一个主矩阵 。对于 $x$ 关于P的一个主矩阵，我们将列视为以向量 $e_1$，……，$e_n$为指标，将行视为以P的元素为指标。

下述观察是显然的。

**引理 2.9**。 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形，$x \in$内部（$R$），且 $\mathcal{P}$ 是关于 $x$的 $R$ 的局部受规覆盖。设 $M = (a_{i,j})_{m \times n}$ 是相对于$\mathcal{P}$的 $x$的主矩阵。则有以下结论:

*(i)* 对任意 $1 \le j \le n$， $e_j$ 是 $x$ 的边界向量，当且仅当存在 $1 \le i \le m$ 使得 $a_{i,\,j} \neq 0$。*(ii)* $x$ 相对于 $\mathcal{P}$的边界秩 $\beta_{\mathcal{P}}(x)$，等于 $M$ 中不恒为零的列数。

**定义 2.10.** 设 $M = (a_{i,j})_{m\times k}$ 为一个矩阵，其元素属于 $\{0, \pm 1\}$。对每个 $1 \le j \le k$, 设 $M_{j,+}$ 与 $M_{j,-}$ 为 $M$ 的子矩阵，定义如下。$M_{j,+}$ 由 $M$ 去掉第 $j$ 列以及所有满足 $a_{i,j} = -1$ 的第 $i$ 行而得到。因此 $M_{j,+}$ 是一个具有 $m' \le m$ 的 $m' \times (k-1)$ 矩阵。类似地，$M_{j,-}$ 由 $M$ 去掉第 $j$ 列以及所有满足 $a_{i,j} = +1$ 的第 $i$ 行而得到。

**定义 2.11.** 设 $R$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in \text{int}(R)$, 且 P 为 $R$ 在 $x$ 附近的局部受规覆盖。对每个 $1 \le j \le n$，设 $\mathrm{P}_{j,+} = \{P \in \mathrm{P} : \pi_j(B_P(x)) \neq -1\}$ 与 $\mathrm{P}_{j,-} = \{P \in \mathrm{P} : \pi_j(B_P(x)) \neq +1\}$。

**引理 2.12.** 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in$内部$(R)$，且 $\mathcal{P}$ 是 $R$ 关于 $x$ 的局部受控覆盖（划分）。设 $M = (a_{i,j})_{m\times n}$ 是关于$\mathcal{P}$ 的 $x$ 的主矩阵。那么对任意 $1 \le j \le n$，令 $A = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$，有：

*(i)* $\pi_A(P_{j,+})$ 和 $\pi_A(P_{j,-})$ 都是关于$\pi_A(R)$ 的 $\pi_A(x)$ 的局部受控覆盖（划分）；*(ii)* $M_{j,+}$ 和 $M_{j,-}$ 分别是关于 $\pi_A(P_{j,+})$ 和$\pi_A(P_{j,-})$ 的 $\pi_A(x)$ 的主矩阵。

证明。 由定义可立即得出。 □

对于点 $x$ 关于以 $x$ 为中心的局部受控划分的主矩阵，以下是一些无需证明的简单观察。

**引理 2.13.** 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in$ 内部$(R)$，且 $\mathcal{P}$ 是 $R$ 关于 $x$ 的局部受控划分。设 $M = (a_{i,j})_{m\times n}$ 是关于$\mathcal{P}$ 的 $x$ 的主矩阵。则有以下结论：

*(i)* 对任意 $1 \le i \le m$ 和 $1 \le j \le k$, $a_{i,\,j} \in \{0, \pm 1\}$；*(ii)* 对任意 $1 \le j \le k$, 若存在 $1 \le i \le m$ 使得 $a_{i,\,j} \neq 0$，则存在$1 \le i' \le m$ 使得 $a_{i',\,j} = -a_{i,\,j}$。

引理 2.12 和 2.13 启发了以下定义。

**定义 2.14**。 设 $M = (a_{i,\,j})_{m\times k}$ 是一个矩阵，其元素属于 $\{0, \pm 1\}$。递归地定义 $M$ 为分离的，具体如下。若 $k = 1$，则 $M$ 是分离的，当且仅当 $M$ 恒为零，或者存在 $1 \le i, \; i' \le m$ 使得 $a_{i,\,1} a_{i',\,1} = -1$。若 $k > 1$，则 $M$ 是分离的，当且仅当对每个 $1 \le j \le k$, $M_{j,\,+}$ 和 $M_{j,\,-}$ 均为分离的。

**引理 2.15**。 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in$内$(R)$，且 $\mathcal{P}$ 是关于 $x$ 的 $R$ 的局部受控划分。设 $M$ 是相对于 $\mathcal{P}$ 的 $x$ 的主矩阵。那么 $M$ 是分离的。

证明。 对 $n$进行归纳。对于 $n = 1$，由引理 2.13 可知该引理成立。一般的归纳情形由引理 2.12 得出。□

**引理 2.16**。 设 $M=(a_{i,j})_{m\times n}$ 是一个分离矩阵，其元素属于 $\{0,\pm 1\}$。对于每个 $1\le i\le m$，令

$$P_i = I_1\times\cdots\times I_n$$

其中

$$I_j=\begin{cases}[0,1], & \text{if } a_{i,j}=+1,\\ [-1,0], & \text{if } a_{i,j}=-1,\\ [-1,1], & \text{if } a_{i,j}=0.\end{cases}$$

则 $\mathcal{P}=\{P_i: 1\le i\le m\}$ 是关于 $R_0=[-1,1]^n$ $x_0=\vec{0}$ 的局部受规覆盖，而 $M$ 是关于 $\mathcal{P}$ 的 $x$ 的主矩阵。

证明。对 $n$ 使用归纳法。若 $n=1$，则由分离性的定义可立即得到该引理。设 $n>1$。则 $M_1$、$_+$ 以及 $M_1$、$_-$ 都是分离的。令 $A=\{2,\dots,n\}$。令 $\mathrm{P1},_+=\{P\in \mathrm{P}: a_{i,j}\ne -1\}$ 和 $\mathrm{P1},_-=\{P\in \mathrm{P}: a_{i,j}\ne +1\}$。直接验证可知，$\pi_A(\mathrm{P1},_+)$ 是在 $\mathbb{R}^A$ 中由 $M_1$、$_+$ 按照引理假设定义的 $(n-1)$-维矩形的集合。根据归纳假设，$\pi_A(\mathrm{P1},_+)$ 是关于 $\pi_A(x_0)$ 的 $\pi_A(R_0)$ 的局部受规覆盖，并且 $M_1$、$_+$ 是关于 $\pi_A(\mathrm{P1},_+)$ 的 $\pi_A(x_0)$ 的主矩阵。同样，$\pi_A(\mathrm{P1},_-)$ 是关于 $\pi_A(x_0)$ 的 $\pi_A(R_0)$ 的局部受规覆盖，并且 $M_1$、$_-$ 是关于 $\pi_A(\mathrm{P1},_-)$ 的 $\pi_A(x_0)$ 的主矩阵。因此，P 是关于 $x_0$ 的 $R_0$ 的局部受规覆盖，而 $M$ 是关于 P 的 $x_0$ 的主矩阵。□

**定义 2.17**。 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，$x\in\mathrm{int}(R)$，且 P 是关于 $x$ 的 $R$ 的局部受控覆盖。若 $x$ 关于 P 的一个主矩阵是分离的，则称 P 为分离的 。

由引理 2.15，关于点 $x$ 的任意局部受控划分都是关于 $x$的分离局部受控覆盖。

**定理 2.18**。 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，设 $x\in$ 内$(R)$，并设 $\mathcal{P}$ 是关于 $x$ 的 $R$ 的分离局部受控覆盖。则 $\nu_{\mathcal{P}}(x)\ge\beta_{\mathcal{P}}(x)+1$。

证明。对 $|\mathrm{P}|=m$ 和 $\beta_{\mathcal{P}}(x)=k$ 使用归纳法。若 $\beta_{\mathcal{P}}(x)=0$，则定理成立，因为 $|\mathrm{P}|\ge 1$。若 $\beta_{\mathcal{P}}(x)=1$，则由引理 2.9 和分离性的定义，定理成立。设 $\beta_{\mathcal{P}}(x)=k>1$。不失一般性，假设 $e_1$ 是 $x$ 关于 P 的边界向量。由引理 2.12，$M_1,_+$ 是 $\pi_A(x)$ 关于局部受控覆盖 P1 的一个主矩阵，P1 是关于$\pi_A(x)$ 的覆盖，其中 $A=\{2,\dots,n\}$。设 $m_+$ 为 $M_1$ 的行数，$_+$，且 $k_+$ 为 $M_1$ 的非零列数，$_+$。于是 $m_+=|\mathrm{P1},_+|$ 且 $k_+=\beta_{\mathcal{P}_1,+}(\pi_A(x))$。由引理 2.13 (ii)，$m_+<m$。根据归纳假设，我们有 $m_+\ge k_++1$。

设 $m_-=m-m_+$ 和 $k_-=k-1-k_+$。令 $B$ 为所有满足以下条件的 $1<j\le n$ 的集合：对于所有满足 $\pi_1(P_\iota)=0$ 或 $+1$ 的 $1\le\iota\le m$，$a_{\iota,\,j}=0$。考虑矩阵 $m_-\times k_-$，它由 $M=(a_{i,\,j})_{m\times n}$ 保留所有满足 $a_{i,\,j}$ 的元素得到，其中 $a_{i,\,1}=-1$ 且 $j\in B$。图1 展示了 $N$ 相对于 $M_{1,\,+}$的位置。图中，$M^*_{1,\,+}$ 表示去除全零列后的矩阵 $M_{1,\,+}$。

我们将图1所含的信息概括如下：

$$M=\begin{pmatrix} +1/0 & M^*_{1,+} & 0\\ -1 & * & N\end{pmatrix}.$$

如果 $N$ 为空，那么 $k_-=0$ 和 $m_-\ge 1$，并且

$$m=m_++m_-\ge m_++1\ge k_++2=k+1$$

| | $e_1$ | $A-B$ | $B$ |
|---|---|---|---|
| $m_+$ | $+1$<br>$0$ | $M^*_{1,+}$ | $0$ |
| $m_-$ | $-1$ | | $N$ |
| | | $k_+$ | $k_-$ |

FIGURE 1. 矩阵 $M$的一个分解。

按需即可。在证明的其余部分，假设 $N$ 非空，即 $k_- > 0$。

我们断言 $N$ 是分离的。我们通过对 $k_-$使用归纳法来证明这一点。若 $k_- = 1$，则$N$是分离的，因为 $M$ 是分离的。设 $k_- > 1$。令 $j \in B$。则在与图1相同的意义下，我们有

$$M_{j,+} = \begin{pmatrix} +1/0 & M^*_{1,+} & 0 \\ -1 & * & N_{j,+} \end{pmatrix}.$$

根据归纳假设，$N_{j,+}$ 是分离的。类似地，$N_{j,-}$ 是分离的。这表明 $N$ 是分离的。

令 $\mathrm{Q} = \{P \in \mathrm{P} : \pi_1(B_P(x)) = -1\}$。则 $\pi_B(\mathrm{Q})$是$\mathbb{R}^B$ 中的一组矩形，它们在引理 2.16 的意义下对应于 $N$ 。由引理 2.16， $\pi_B(\mathrm{Q})$是 $\pi_B(R)$关于 $\pi_B(x)$的一个局部受规覆盖，且 $N$ 是$\pi_B(x)$关于 $\pi_B(\mathrm{Q})$的一个主矩阵。根据归纳假设，我们有 $m_- \geq k_- + 1$。

Now

$$m = m_+ + m_- \geq (k_+ + 1) + (k_- + 1) = k_+ + k_- + 1 + 1 = k + 1$$

如所需。这就完成了归纳情形的证明。定理的证明至此完成。□

**推论 2.19.** 以下结论成立：

*(1)* 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in \mathrm{int}(R)$ ，并设 $\mathcal{P}$ 是关于 $x$ 的 $R$ 的一个局部受控划分。那么 $\nu_{\mathcal{P}}(x) \geq \beta_{\mathcal{P}}(x) + 1$。*(2)* 设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个受控划分，并设 $x \in \mathbb{R}^n$。那么 $\nu_{\mathcal{P}}(x) \geq \beta_{\mathcal{P}}(x) + 1$。

证明。 (1) 由定理 2.18 和引理 2.15 得出，也就是说，每个关于某一点的局部受控划分都是分离的。(2) 由 (1) 以及引理2.3和引理2.5 立即得出。□

在结束本节之前，我们通过直接归纳法证明推论 2.19 (i) 的一个加强结论。

**定理 2.20.** 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，令 $x \in \mathrm{int}(R)$，并设$\mathcal{P}$ 是关于 $x$的 $R$ 的一个局部受控划分。对于 $x$ 相对于$\mathcal{P}$的任意非空边界向量集 $V$，令$\mathcal{P}_V$ 为所有满足某个 $v \in V$是 $x$ 相对于 $P$的边界向量的 $P \in \mathcal{P}$ 的集合。定义 $\mathcal{P}_\varnothing = \mathcal{P}$。那么 $|\mathcal{P}_V| \geq |V| + 1$。

证明。 对 $|V|$用归纳法。若 $|V| = 1$ ，则由引理 2.13 (ii) 可知该定理成立。设 $|V| > 1$。不失一般性，假设 $e_1 \in V$。则 $(\mathrm{P}_{1,-})_{e_1}$ 非空，且与 $\mathrm{P}_{1,+}$ 不相交。令 $A = \{2, \ldots, n\}$。则由引理 2.12 (i)， $\mathrm{Q} = \pi_A(\mathrm{P}_{1,+})$ 与 $\mathrm{Q}' = \pi_A(\mathrm{P}_{1,-})$ 均为 $\pi_A(R)$ 关于 $\pi_A(x)$ 的局部受规分划。令 $V\prime = V \setminus \{e_1\}$。则 $V'$ 非空。令 $U \subseteq V\prime$ 为 $\pi_A(x)$ 关于 Q 的所有边界向量 $v \in V'$ 的集合。则由归纳

假设， $|\mathrm{Q}_U| \geq |U|+1$。由此可得 $|(\mathrm{P}_{1,+})_U| = |\mathrm{Q}_U| \geq |U|+1$。令 $W = V \setminus U$。若 $W = \varnothing$, 则

$$|\mathcal{P}_V| \geq |(\mathcal{P}_{1,+})_U| + |(\mathcal{P}_{1,-})_{e_1}| \geq |\mathcal{Q}_U| + 1 \geq |V| + 1.$$

假设 $W \neq \varnothing$。那么每个 $v \in W$ 都是相对于 $\mathrm{Q}'$ 的 $\pi_A(x)$ 的边界向量。因此，根据归纳假设， $|\mathrm{Q}'_W| \geq |W|+1$。这意味着 $|\mathrm{P}_W| \geq |\mathrm{Q}'_W| \geq |W|+1$。由于每个 $v \in W$ 都不是相对于 $\mathrm{P}_{1,+}$ 的 $x$ 的边界向量，我们有 $\mathrm{P}_W \subseteq \mathrm{P} \setminus \mathrm{P}_{1,+}$。因此

$$|\mathcal{P}_V| \geq |\mathcal{P}_W| + |(\mathcal{P}_{1,+})_U| \geq |W| + 1 + |U| + 1 = |V| + 1,$$

如所需。 □

## 3. Minimal Locally Regulated Partitions

**定义 3.1**。设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in \mathrm{int}(R)$, 且 P 是 $R$ 关于 $x$ 的一个局部受控划分。若 P 满足 $\nu_{\mathcal{P}}(x) = \beta_{\mathcal{P}}(x) + 1$, 则称 P 为极小。

*定理 3.2*。设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in \mathrm{int}(R)$, 且 $P$ 是 $R$ 关于 $x$ 的一个局部受控划分。设 $1 \leq j \leq n$ 和 $A = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$。假设 $P$ 是极小的。那么 $\pi_A(P_{j,+})$ 和 $\pi_A(P_{j,-})$ 都是 $\pi_A(R)$ 关于 $\pi_A(x)$ 的极小局部受控划分。

证明。不失一般性，假设 $j = 1$。那么 $A = \{2, \ldots, n\}$。我们证明， $\pi_A(\mathrm{P}_{1,+})$ 和 $\pi_A(\mathrm{P}_{1,-})$ 都是关于 $\pi_A(x)$ 的 $\pi_A(R)$ 的极小局部受控划分。令 $M = (a_{i,j})_{m \times n}$ 为关于 P 的 $x$ 的一个主矩阵。如果 $M$ 的第一列全为零，或者等价地， $e_1$ 不是 $x$ 的边界向量，那么引理显然成立。因此，我们假设 $M$ 的第一列非零。令 $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ 为 $A$ 的一个划分，定义如下。

$A_0 = \{1 < j \leq n$: 的 $j$ 次列全为零$\}$, $A_1 = \{1 < j \leq n : j \notin A_0$ 且 $M_1$ 的 $j$ 次列 $,+$ 全为零 $\}$, $A_2 = \{1 < j \leq n : j \notin A_0$ 且 $M_1$ 的 $j$ 次列 $,-$ 全为零$\}$, $A_3 = A \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2)$。

注意， $A_1 \cap A_2 = \varnothing$。

Let

$$C_+ = \{1 \leq i \leq m : a_{i,j} = +1\},$$
$$C_- = \{1 \leq i \leq m : a_{i,j} = -1\},$$
$$C_0 = \{1 \leq i \leq m : a_{i,j} = 0\}.$$

那么，$\{C_+, C_-, C_0\}$ 是 {1、.....、 $m$} 的一个划分。 $M$ 中以 $C_-$ 为指标的行和以 $A_0 \cup A_1$ 为指标的列所对应的子矩阵，就是定理 2.18 的证明中所考虑的矩阵 $N$ ； 根据该证明，我们有

$$|C_-| \geq |A_1| + 1.$$

$M$ 中以 $C_+ \cup C_0$ 为指标的行和以 $A_2 \cup A_3$ 为指标的列所对应的子矩阵，就是定理 2.18 的证明中所考虑的矩阵 $M^*_{1,+}$ ； 根据该证明，我们有

$$|C_+| + |C_0| = |C_+ \cup C_0| \geq |A_2 \cup A_3| + 1 = |A_2| + |A_3| + 1.$$

由对称性可知，我们还有

$$|C_+| \geq |A_2| + 1.$$

由此可得

$$\nu_{\mathcal{P}}(x) = |C_+ \cup C_0 \cup C_-| \geq |C_+ \cup C_0| + |C_-| \geq |A_2| + |A_3| + 1 + |A_1| + 1 = \beta_{\mathcal{P}}(x) + 1.$$

由极小性可知，等式成立，因此有 $|C_-| = |A_1| + 1$and $|C_+| + |C_0| = |A_2| + |A_3| + 1$。由对称性，同样有 $|C_+| = |A_2| + 1$。由此可得 $|C_0| = |A_3|$。

现在不难看出， $\pi_A(\mathrm{P}_{1,+})$ 是关于 $\pi_A(x)$ 的 $\pi_A(R)$ 的局部受控划分。因此

$$\nu_{\pi_A(\mathcal{P}_{1,+})}(\pi_A(x)) = |\pi_A(\mathcal{P}_{1,+})| = |C_+ \cup C_0| = |A_2| + |A_3| + 1 = \beta_{\pi_A(\mathcal{P}_{1,+})}(x) + 1,$$

因此 $\pi_A(\mathrm{P}_{1,+})$ 是极小的。类似地， $\pi_A(\mathrm{P}_{1,-})$ 也是关于 $\pi_A(x)$ 的 $\pi_A(R)$ 的极小局部受控划分。□

**定义 3.3**。设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，且 $x \in \mathrm{int}(R)$，P,Q 是关于 $x$ 的 $R$ 的局部受控划分。若 $x$ 关于 P 的所有边界向量组成的集合与 $x$ 关于 Q 的所有边界向量组成的集合不相交，则称 P 和 Q 正交。

以下是定理 3.2 的证明的一个推论。

推论 *3.4*。设 $R$ 是 $n$ 维矩形，位于 $\mathbb{R}^n$ 中， $x \in int(R)$，且 $P$ 是关于 $x$ 的 $R$ 的最小局部受控分割。设 $1 \leq j \leq n$ 和 $A = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$。假设对于所有 $P \in P$，都有 $\pi_j(B_P(x)) \neq 0$。则 $\pi_A(P_j,+)$ 和 $\pi_A(P_j,-)$ 正交。

证明。 不失一般性，假设 $j = 1$。采用定理 3.2 证明中的记号，我们的假设为 $C_0 = \varnothing$。因此 $|A_3| = |C_0| = 0$。由此可知， $M_{1,+}^*$ 恰好包含在由 $A_2$ 标记的 $M$ 的列中，而 $M_{1,-}^*$（由 $M_{1,-}$ 的非零列组成）恰好包含在由 $A_1$ 标记的 $M$ 的列中。注意， $\{e_i : i \in A_2\}$ 是相对于 $\pi_A(\mathrm{P}_{1,+})$ 而言的 $\pi_A(x)$ 的所有边界向量的集合，而 $\{e_i : i \in A_1\}$ 是相对于 $\pi_A(\mathrm{P}_{1,-})$ 而言的 $\pi_A(x)$ 的所有边界向量的集合。因此它们不相交。□

本节余下部分将完整描述所有关于一个点的极小局部受控 y
划分。

**定义 3.5**。 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形， $x \in \mathrm{int}(R)$，设 P 是 $R$ 关于 $x$的一个局部受控划分，设 $e_j$ 是相对于 P 的 $x$的一个边界向量，且设 $P, Q \in \mathrm{P}$。若对所有 $j' \neq j$，$\pi_{j'}(B_P(x)) = \pi_{j'}(B_Q(x))$，且$\pi_j(B_P(x))\pi_j(B_Q(x)) = -1$，则称 $P$和 $Q$构成一个 $e_j$-对 。

等价地，若 $M = (a_{i,j})_{m \times n}$ 是相对于 P 的 $x$ 的一个主矩阵，则 $(P_i, P_{i'})$ 是一个 $e_j$-对，当且仅当 $M$ 的第 $i$行与第 $i'$行完全相同，除$a_{i,j}$ 和$a_{i',j}$ 取相反的非零值外。在这种情况下，我们也称 $(i, i')$ 是 $M$中的一个 $e_j$-对。

**引理3.6**。 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形， $x \in$内$(R)$，设 $\mathcal{P}$ 是关于 $x$ 的 $R$ 的局部受控划分，设 $e_j$ 是相对于$\mathcal{P}$的 $x$ 的边界向量，并设 $P, Q \in \mathcal{P}$ 是一个 $e_j$ 对。那么

$$\{P \cup Q\} \cup \mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$$

仍是关于 $x$ 的 $R$ 的局部受控划分。

证明。 只需注意，如果 $P$， $Q$ 构成一个 $e_j$-对，那么 $P \cup Q$ 就是一个矩形。 □

例 3.7。 下面的 $\mathbb{R}^3$ 局部受控划分 P 的示例，对于任何 $1 \le j \le 3$ 都不包含 $e_j$-对。首先将 $\mathbb{R}^3$ 划分为八个卦限，并按照通常的顺序将它们标记为卦限 I 至 VIII。于是

$$\mathcal{P} = \{\mathrm{I} + \mathrm{IV}, \mathrm{II} + \mathrm{VI}, \mathrm{III}, \mathrm{V}, \mathrm{VII} + \mathrm{VIII}\}$$

是这样一个划分。其主矩阵为

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

在该矩阵中，每一对不同的行至少有两个元素不同。

**引理 3.8.** 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形， $x \in$内部$(R)$，设$\mathcal{P}$ 是 $R$ 关于 $x$的一个最小局部受控分割。则存在一个 $1 \le j \le n$ 和一个 $e_j$-对 $P$， $Q \in \mathcal{P}$。

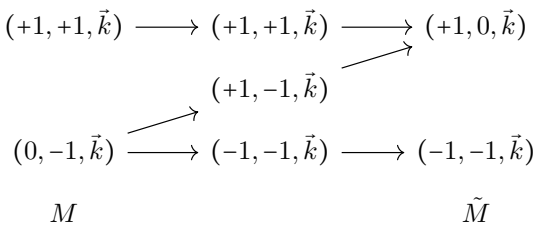
证明。 我们通过对 |P|使用归纳法来证明这一点。设 $P_1$，……， $P_m$ 枚举P。设 $M = (a_{i,\ j})_{m\times n}$ 是 $x$ 关于P的一个主矩阵。考虑 $j = 1$ 与 $A =${2，……， $n$}。采用定理 3.2的证明中的记号， $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$。考虑 $M$ 中对应于$\mathrm{P}_{1,\ +}$的那些行。这些是以$P_i \in$ P为指标的行，其中$a_{i,\ 1} = 0$ 或 +1。在定理 3.2的证明所用记号中，这些行的索引来自 $C_+ \cup C_0$。

在证明的其余部分，我们对 $|C_0| = |\{P \in \mathrm{P} : \pi_1(B_P(x)) = 0\}|$ 使用归纳法。

首先考虑 $C_0 = \varnothing$ 的情形。由定理 3.2， $\pi_A$(P1,+) 是关于 $\pi_A(x)$ 的 $\pi_A(R)$ 的最小局部受控划分；由归纳假设， $\pi_A$(P1,+) 中存在一个 $\eta > 1$ 和一个 $e_\eta$-对 ($\pi_A(P_i)$ $\pi_A(P_{i'})$)。这意味着 $M_{1,+}$ 的第 $i$ 行与第 $i'$ 行完全相同，除了 $a_{i,\eta}a_{i',\eta} = -1$。由此可得， $M$ 的第 $i$ 行与第 $i'$ 行完全相同，除了 $a_{i,\eta}a_{i',\eta} = -1$。因此，$(P_i, P_{i'})$ 是 P 中的一个 $e_\eta$-对。

接下来考虑 $C_0 \neq \varnothing$ 的情形。同样由定理 3.2， $\pi_A$(P1,+) 是关于 $\pi_A(x)$ 的 $\pi_A(R)$ 的最小局部受控划分。由归纳假设，$\pi_A$(P1,+) 中包含某个 $\eta \ge 2$ 对应的 $e_\eta$-对。由引理 2.12， $M_{1,+}$ 是相对于 $\pi_A$(P1,+) 的 $\pi_A(x)$ 的主矩阵，因此存在不同的 $i$, $i' \in C_+ \cup C_0$，使得 $M_{1,+}$ 的第 $i$ 行与第 $i'$ 行完全相同，除了 $a_{i,\eta}a_{i',\eta} = -1$。如果$i$, $i' \in C_+$或 $i, i' \in C_0$，那么 $M$ 的第 $i$ 行与第 $i'$ 行完全相同，除了$a_{i,\eta}a_{i',\eta} = -1$，因此 $(P_i, P_{i'})$ 是 P 中的一个 $e_\eta$-对。在证明的其余部分，假设 $i \in C_+$ 且 $i' \in C_0$。为简化记号，不失一般性地假设 $\eta = 2$，并假设 $M$ 的第 $i$ 行是 $(+1, +1, \vec{k})$，而 $M$ 的第 $i'$ 行是 $(0, -1, \vec{k})$，其中 $\vec{k}$ 是一个长度为 $n-2$ 、取值于 $\{0, \pm 1\}$ 的向量。

现在我们要定义一个关于 $x$ 的新局部受控划分 P。P 分两步定义。第一步，取 $P_{i'} \in$P，并用法向量为 $e_1$ 的超平面将其分为两部分 $P_+$ 和 $P_-$，其中 $\pi_1(B_{\tilde{P}_+}(x)) = +1$，且 $\pi_1(B_{\tilde{P}_-}(x)) = -1$。第二步，将 $P_i$ 和 $P_+$ 合并成一个新的矩形 $Q$。接着令 P $= \{Q, P_-\} \cup$P $\setminus \{P_i, P_{i'}\}$。在 P 的枚举中，赋予 $Q$ 指标 $i$ 和 $P_-$ 指标 $i'$。于是，在 P 的主矩阵 $M$ 中，除第$i$行和第 $i'$行外，其余各行都与 $M$ 中对应的行相同；新的第 $i$行是 $(+1, 0, \vec{k})$，第 $i'$ 行是 $(-1, -1, \vec{k})$。由于 P 与 P 具有相同的边界向量，且 $|\mathrm{P}| = |\mathrm{P}|$，因此 P 是极小的。




˜现在注意到 $|\{P \in \mathrm{P} : \pi_1(B_P(x)) = 0\}| < |\{P \in \mathrm{P} : \pi_1(B_P(x)) = 0\}|$。因此，根据˜归纳假设，存在一个 $e_\eta$-对 $(\iota,\ \iota')$，属于 $M$。如果 $\{\iota,\ \iota'\} \cap \{i,\ i'\} = \varnothing$，那么 $(\iota,\ \iota')$ 也是 $M$ 中的一个 $e_\eta$-对，证毕。

˜我们声称，在 $M$ 中不存在对于 $\iota \in C_-$ 和 $2 < \eta \le n$ 的 $e_\eta$-对 $(i',\ \iota)$。假设该声称不成立，即 $(i',\ \iota)$ 是对于 $\iota \in C_-$ 和 $2 < \eta \le n$ 的 $e_\eta$-对。于是，我们通过将 $P_{i'}$ 和 $P_\iota$ 合并为 $P_{i'}$，从 Pˆ 定义一个新的局部受控划分 P。我们ˆ ˜ ˆ 有 P 是 $x$ 的局部受控划分，且 $|\mathrm{P}| = |\mathrm{P}| - 1$。注意，P 与 P（以及 P）具有相同的边界向量。这就产生了矛盾。

˜同样地，我们也有，在 $M$ 中不存在对于 $\iota \in C_+$ 和 $2 < \eta \le n$ 的 $e_\eta$-对 $(i,\ \iota)$。

˜假设在 $M$ 中，$(i',\ \iota)$ 对某个 $\iota \in C_-$ 是一个 $e_2$-对。注意，在 $M$ 中，˜有 $(i,\ \iota)$ 确实是一个 $e_1$- 对，因此得证。假设在 $M$ 中，$(i',\ \iota)$ 对某个 $\iota \in C_+$ 是一个 $e_1$- 对。那么，$\tilde{M}$ 的第 $\iota$ 行是 $(+1,\ -1,\ \vec{k})$。于是我们有 ˜ ˜ ˜$P_\iota \subseteq P_i$，这与 $P$ 是一个局部受控划分矛盾。

˜最后，假设 $(i,\ \iota)$ 是 $M$ 中的一个 $e_1$-对，其中 $\iota \in C_-$ 为某个值。那么，$\tilde{M}$ 的第 $\iota$ 行是 $(-1,\ 0,\ \vec{k})$。于是我们有 $\tilde{P}_{i'} \subseteq \tilde{P}_\iota$，这与 $\tilde{P}$ 是一个局部受控划分矛盾。

因此，我们已经考察了所有情形，并且在每一种可能的情形中，都在 $M$ 中找到了一个 $e_\eta$-对。□

下面我们将介绍一种围绕一个点构造极小局部调节划分的典范方法。首先，我们按如下方式定义带标号简单树的概念。设 $k \ge 0$ 是一个整数。一个具有 $k+1$ 层的简单树是一个有根二叉树（即每个节点至多有两个子节点），其根节点位于第 0 层，所有终端节点都位于第 $k$ 层，并且在每一层 $\ell < k$ 上，第 $\ell$ 层至多有一个节点拥有两个子节点。如果在终端层以上的每一层中，都恰有一个节点拥有两个子节点，则称简单树为完全简单树。注意，对于具有多于一层的完全简单树 $T$，其根节点总是有两个子节点。

我们按如下方式将标签 $+1, -1$ 和0分配给简单树的节点。如果一个节点没有兄弟节点，则将其标为0；否则，我们将任意一对兄弟节点中的一个标为 $+1$，另一个标为 $-1$。如果 $T$ 是带标号简单树且 $t \in T$，则定义带标号简单树 $T_t$ 为 $T$ 的子树，以 $t$ 为根节点，并包含 $t$ 在 $T$ 中的所有后代节点作为其节点； $t$ 在 $T_t$ 中的标签（如有必要）被（重新）指定为0，而所有其他节点的标签与它们在 $T$中的标签相同。给定一棵有 $k+1$ 层的简单树 $T$，令 $T'$ 为从 $T$通过删除 $T$ 的所有层 $\ell > 0$ 而得到的完全简单树，在这些层上每个节点都没有兄弟节点；我们称 $T'$ 为 $T$的导出简单树 。令 $J(T)$表示在从 $T$构造 $T'$时被删除的层$0 < \ell \le k$的全部索引的集合。如果 $T$是带标号简单树，则在从 $T$ 构造 $T'$ 时，仅删除标签为0的节点，其余节点在 $T$中保留其标签。如果 $T$ 是带标记的满简单树，则令 $T_-$ 为

$(T_l)'$，其中 $t$ 是 $T$ 的根节点的标签为 $-1$的子节点，并令 $T_+$ 为$(T_l)'$，其中$t$是 $T$ 的根节点的标签为 $+1$的子节点。

不失一般性，设 $x = x_0 = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ 且设 $R = R_0 = [-1,1]^n$。令$i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ 为互不相同的索引，并令 $T$为具有 $k+1$ 层的带标记的满简单树。我们通过对 $k$ 归纳来定义划分 $\mathrm{P}(i_1, \ldots, i_k; T)$，如下所示。若 $k = 0$，则 $T$是仅含根节点的平凡树，并令 $\mathrm{P}(\varnothing; T) = \{R\}$。假设 $k > 0$。令 $S = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1\}$。令 $t_+$ 为 $T$ 根节点上标签为 $+1$ 的子节点，并令 $t_-$为 $T$ 根节点上标签为 $-1$ 的子节点。令 $I_+ \subseteq \{2, \ldots, k\}$ 为集合 $\{j+1 : j \in J(T_{t_-})\}$，并令 $I_- \subseteq \{2, \ldots, k\}$ 为集合 $\{j+1 : j \in J(T_{t_+})\}$。那么，由于 $T$ 的满性，我们有 $I_- \cap I_+ = \varnothing$且 $I_- \cup I_+ = \{2, \ldots, k\}$。根据归纳假设，我们已定义 $\mathrm{P}((i_j : j \in I_-); T_-) = \mathrm{P}_-$ 和 $\mathrm{P}((i_j : j \in I_+); T_+) = \mathrm{P}_+$，它们是 $\pi_S(R)$ 的局部受规分划。令

$$R_- = \{y \in R : \pi_{i_1}(y) \in [-1, 0]\}$$

and

$$R_+ = \{y \in R : \pi_{i_1}(y) \in [0, 1]\}.$$

定义

$$\mathcal{P}(i_1, \ldots, i_k; T) = \{\pi_S^{-1}(P) \cap R_- : P \in \mathcal{P}_-\} \cup \{\pi_S^{-1}(P) \cap R_+ : P \in \mathcal{P}_+\}.$$

至此完成了 $\mathrm{P}(i_1, \ldots, i_k; T)$ 的归纳定义。

$\mathrm{P}(i_1, \ldots, i_k; T)$ 的构造可用几何方式描述如下。我们依次用法向量为 $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ 的面划分 $R$。第一步，用一个包含 $x$ 、法向量为 $e_{i_1}$ 的超平面将 $R$ 分成两部分 $R_-$ 和 $R_+$，使得 $\pi_{i_1}(B_{R_-}(x)) = -1$ 且 $\pi_{i_1}(B_{R_+}(x)) = +1$。令 $t_- \in T$ 为 $T$ 的根节点中标签为 $-1$ 的子节点，令 $t_+ \in T$ 为 $T$ 的根节点中标签为 $+1$ 的子节点。于是，$t_-$ 和 $t_+$ 中恰有一个具有两个子节点。为明确起见，假设 $t_-$ 有两个子节点。第二步，接着用一个包含 $x$ 、法向量为 $e_{i_2}$ 的超平面进一步划分 $R_-$。重复此过程，直至考虑完 $T$ 的所有层。所得结果就是关于 $x$ 的 $R$ 的局部受控划分。

注意，$\mathrm{P}(i_1, \ldots\ldots, i_k; T)$ 是极小的，因为在上述构造的每一步 $0 < \ell \le k$，我们恰好将一个中间的 $n$ 维矩形一分为二，因此恰好得到 $\ell + 1$ 个矩形。

下面我们将证明，关于一个点的所有极小局部受控划分都由此方式得到。

**定理 3.9.** 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，$x \in \mathrm{int}(R)$，且 $\mathcal{P}$ 是关于 $x$ 的 $R$ 的极小局部受控划分。设 $k = \beta_{\mathcal{P}}(x)$。那么存在互不相同的 $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ 以及一个具有 $k+1$ 层的带标记的满简单树 $T$，使得 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(i_1, \ldots, i_k; T)$。

证明。对 $k$ 归纳。若 $k = 0$，则必有 $\mathrm{P} = \{R\}$，定理成立。设 $k > 0$。由极小性可知，$|\mathrm{P}| = k + 1$。设 $J = \{j_1, \ldots\ldots, j_k\}$ 为所有满足下述条件的 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 的集合：$e_j$ 是相对于 P 而言 $x$ 的边界向量。由引理 3.8，存在 $j \in J$ 和一个 $e_j$-对 $P, Q \in \mathrm{P}$。设 $\pi_j(B_P(x)) = +1$ 且 $\pi_j(B_Q(x)) = -1$。不失一般性，假设 $j = j_k$。考虑

$$\mathcal{Q} = \{P \cup Q\} \cup \mathcal{P} \setminus \{P, Q\}.$$

那么 Q 是关于 $x$ 的局部受控划分 $R$。注意，对于 $j \in J' =$，每个 $e_j$ $\{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$ 仍然是 $x$ 关于 Q 的边界向量，因此 $\beta_{\mathcal{Q}}(x) \ge k - 1$。由于 $\nu_{\mathcal{Q}}(x) = |\mathrm{Q}| = k$，由定理 2.18 可得 $\beta_{\mathcal{Q}} = k - 1$。这意味着

$e_{j_k}$ 不再是 $x$ 关于 Q 的边界向量。此外，Q 是极小的。

根据归纳假设，存在一棵带标记的满简单树 $T'$，共有 $k$ 层，使得 Q = P($i_1$, ....., $i_{k-1}$; $T$′)。$T'$ 的一个终端节点对应于 $P \cup Q \in$ Q。将这个节点记为 $t$。现在，我们通过将 $T$′ 的所有终端节点扩展为层 $k+1$ 上的一个或两个节点，令 $T$ 成为 $T$′ 的扩展。如果 $T$′ 的终端节点不是 $t$，那么它只有一个扩展。节点 $t$ 有两个扩展，分别对应于 $P$ 和 $Q$。在 $T$ 中，$t$ 的标签为 0，对应于 $P$ 的节点的标签为 +1，对应于 $Q$ 的节点的标签为 −1。容易看出，P = P($i_1$, ....., $i_k$; $T$)。□

我们指出，关于一个点的最小局部受控划分具有以下强拓扑性质。这一性质正是本文研究的初衷。

**定理 3.10.** 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$ 维矩形，$x \in$内($R$)，且 $\mathcal{P}$ 是关于 $x$的 $R$ 的最小局部受控划分。那么对于任意非空子集$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$，$\cup\mathcal{A}$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$ 维矩形。

证明. 不失一般性，设 $x = x_0 = \vec{0}$ 和 $R = R_0 = [-1,1]^n$。由定理 3.9，存在互不相同的 $i_1$、.....、$i_k \in$ {1、.....、$n$}，以及一个具有 $k+1$ 层的带标记的满简单树 $T$，使得 P = P($i_1$、.....、$i_k$; $T$)。设 $t$ 是第 $k$层上的唯一分裂节点，$j = i_k$，并设 $P$、$Q \in$ P 是与延伸 $t$的节点相对应的 $e_j$-对。注意到 $t$ 对应于 $P \cup Q$。

我们通过对 $k$ 使用归纳法来证明该定理。若 $k = 0$ 或 1，则该定理显然成立。假设 $k > 1$。设 A ⊆ P 为任意子集。若 A 同时包含 $P$与 $Q$，或不包含 $P$与 $Q$中的任何一个，则由归纳假设可知该定理成立。不失一般性，假设 $P \in$A，$Q \notin$A，且 $\pi_j(B_P(x)) = +1$。令 B = A ∖{$P$}。若 B = ∅，则 ∪A = $P$，且该定理平凡成立。我们假设 B ≠ ∅。

令 $S$ = {1, . . . , $n$} ∖{$j$}。那么，$\pi_S$(P$_{j,+}$) 是关于 $\pi_S(x)$ 的 $\pi_S(R)$ 的局部受控划分。注意，由于 $e_j$ 仅是相对于 $P$和 $Q$而言的 $x$ 的边界向量，因此我们有

$$\pi_S(\mathcal{A}) = \pi_S(\mathcal{B}) \cup \pi_S(P)$$

and

$$(\bigcup \pi_S(\mathcal{B})) \cap \pi_S(P) = \varnothing.$$

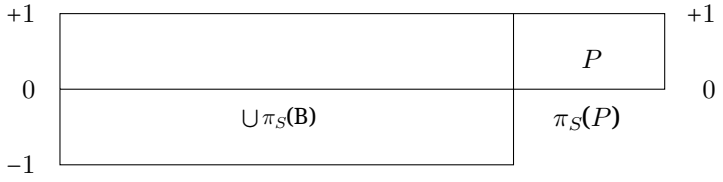



FIGURE 2. ∪A 的一个分解。

根据归纳假设，集合 $\pi_S(P)$、 $\bigcup\pi_S(\mathrm{B})$ 和 $\bigcup\pi_S(\mathrm{A}) = \bigcup\pi_S(\mathrm{B}) \cup\pi_S(P)$ 都与 $\mathbb{R}^S$ 中的 $(n-1)$ 维矩形同胚。注意

$$\begin{aligned}\bigcup\mathcal{A} &= \bigcup\mathcal{B}\cup P = \Big(\bigcup\pi_S(\mathcal{B})\times[-1,1]\Big)\cup\Big(\pi_S(P)\times[0,1]\Big)\\ &= \Big(\bigcup\pi_S(\mathcal{B})\times[-1,0]\Big)\cup\Big((\bigcup\pi_S(\mathcal{B})\cup\pi_S(P))\times[0,1]\Big).\end{aligned}$$

因此， $\bigcup\mathrm{A}$ 与两个 $n$ 维矩形的并同胚，且它们的交集是一个 $(n-1)$ 维矩形。由此可知， $\bigcup\mathrm{A}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形同胚。图 2 展示了所讨论的集合。□

## 4. Minimal Regulated Partitions of $\mathbb{R}^n$

**定义 4.1**。 令 $n \geq 1$ 和 $\gamma \geq 1$。设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个受控划分。

(1) 若每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 至多包含于 P 中的 $\gamma$ 个元素，我们称 P 为 $\gamma$-受控划分 。

(2) 若 P 是一个 $(n+1)$-受控划分，我们称 P 为极小 。

以下引理说明了“极小性”这一术语的合理性。

**引理 4.2**。 若$\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $\gamma$-受控划分，则 $n+1 \leq \gamma \leq 2^n$。

证明。 显然， $\gamma \leq 2^n$。为证明 $\gamma \geq n+1$，我们将证明存在 $x \in \mathbb{R}^n$，它包含在 P 的至少 $n+1$ 个元素中。我们对此使用$n$归纳法。当 $n = 1$ 时，这一点显然成立。假设 $n > 1$。令 $D \subseteq \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个离散子集，满足定义 2.1 中的 (1)。不失一般性，假设 $0 \in D$，并且存在 $R \in \mathrm{P}$，使得 $\pi_n(R) = [0,a]$ ，其中某个 $a > 0$。令 $d > 0$ 为 P 的一个离散常数。令 $S = \{1,\ldots,n-1\}$。定义

$$\mathcal{Q} = \{\pi_S(R) : R \in \mathcal{P}, [0,d] \subseteq \pi_n(R)\}.$$

那么 Q 是 $\mathbb{R}^{n-1}$的一个受控划分。根据归纳假设，存在$y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$，使得 $y_0$包含在 Q 的至少 $n$ 个元素中。令 $S_1,\ldots,S_n$枚举包含 $y_0$的 Q 中 $n$ 个不同元素。令 $R_1,\ldots,R_n \in \mathrm{P}$，使得对于 $1 \leq i \leq n$，有$S_i = \pi_S(R_i)$。那么 $R_1,\ldots,R_n$互不相同，并且对每个 $1 \leq i \leq n$，都有$R_i = S_i \times [a_i,b_i]$，其中某个 $a_i \leq 0 < d \leq b_i$。令 $b = \min\{b_i : 1 \leq i \leq n\}$。不失一般性，假设 $b = b_1$。令 $x_0 = (y_0,b) \in \mathbb{R}^n$。我们声称 $x_0$ 包含在 P 的至少 $n+1$ 个元素中。首先注意， $x_0$ 包含在每个$R_1,\ldots,R_n$中。还要注意， $x_0 \in S_1 \times [b,+\infty)$，但是

$$\mathrm{int}(S_1 \times [b,+\infty)) \cap \bigcup_{i=1}^{n} R_n = \varnothing.$$

因此，存在某个 $R_{n+1} \in \mathrm{P}$，不同于 $R_1$、.....、 $R_n$，且满足 $\mathrm{int}(R_{n+1}) \cap \mathrm{int}(S_1 \times [b,+\infty)) \neq \varnothing$，使得 $x_0 \in R_{n+1}$。由此，P 中至少有 $n+1$ 个元素包含 $x_0$。□

**引理 4.3**。 设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的极小调节分割。则对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$,$\nu_{\mathcal{P}}(x) = \beta_{\mathcal{P}}(x) + 1$。

证明。 对 $\beta_{\mathcal{P}}(x) \leq n$ 进行反向归纳。若 $\beta_{\mathcal{P}}(x) = n$，则由推论 2.19 可得该引理。假设 $\beta_{\mathcal{P}}(x) = k < n$。为导出矛盾，假设$\nu_{\mathcal{P}}(x) > k+1$。不失一般性，假设 $e_n$ 不是相对于 P 的 $x$ 的边界向量。不失一般性，假设 $\pi_n(x) = 0$。令 $D \subseteq \mathbb{R}$ 为

满足定义 2.1 (1) 的一个离散子集。令 $a > 0$ 为 $D$中大于 0 的最小元素。令 $S = \{1,\dots,n-1\}$。与引理 4.2 的证明类似，令

$$\mathcal{Q} = \{\pi_S(R) : R \in \mathcal{P}, [0,a] \subseteq \pi_n(R)\}.$$

那么，Q 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 和 $\pi_S(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$的一个受规分割。由于 $e_n$ 不是相对于 P 的 $x$ 的边界向量，因此可得 $\nu_{\mathcal{Q}}(\pi_S(x)) = \nu_{\mathcal{P}}(x) > k+1$。令 $S_1,\dots,S_{k+2}$ 枚举 Q 中包含 $\pi_S(x)$ 的 $k+2$ 个互异元素。令 $R_1,\dots,R_{k+2} \in$ P 满足：对 $1 \le i \le k+2$，有 $S_i = \pi_S(R_i)$。那么 $R_1,\dots,R_{k+2}$ 互不相同，且对每个 $1 \le i \le k+2$，都有 $R_i = S_i \times [a_i, b_i]$，其中某个 $a_i \le 0 < a \le b_i$。令 $b = \min\{b_i : 1 \le i \le n\}$。不失一般性，假设 $b = b_1$。令 $y = (\pi_S(x)\ b) \in \mathbb{R}^n$。那么，借助与引理 4.2 的证明类似的论证，$\nu_{\mathcal{P}}(y) \ge k+3$。然而，$\beta_{\mathcal{P}}(y) = \beta_{\mathcal{P}}(x) + 1 = k+1$。这与归纳假设矛盾。□

由此我们得到了关于受规分割的极小性的一个非平凡刻画。

**定理 4.4.** 设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个受控划分。那么，$\mathcal{P}$ 是极小的，当且仅当 $\nu_{\mathcal{P}}(x) = \beta_{\mathcal{P}}(x) + 1$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立。

**定义 4.5.** 设 P,Q 是 $\mathbb{R}^n$ 的受控划分。若对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$x$ 相对于 P 的所有边界向量组成的集合与 $x$ 相对于 Q 的所有边界向量组成的集合不相交，则称 P 和 Q正交 。

接下来我们证明 $\mathbb{R}^n$ 的极小调节分割存在。

**引理 4.6.** $\mathbb{R}^n$ 存在正交的极小调节分割。特别地，$\mathbb{R}^n$ 存在一个极小调节分割。

证明. 我们对 $n \ge 1$ 使用归纳法，证明存在一个 $\mathbb{R}^n$ 的 $(n+1)$-受控划分 P，使得任意 $R \in$P 都具有如下形式

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

其中 $a_i < b_i$ 均为偶整数。（为简便起见，我们称这种具有偶数坐标的受控划分 P。）承认这一点后，我们可以令 $\vec{1} = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$ 并

$$\mathcal{Q} = \{R + \vec{1} : R \in \mathcal{P}\}.$$

那么 Q 仍是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $(n+1)$-受控划分，并且 Q 与 P 正交。

对于 $n = 1$，显然可由 P $= \{[2k, 2k+2] : k \in \mathbb{Z}\}$ 证明该断言。假设$n > 1$。根据归纳假设，令 $\mathrm{P}_0$ 为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的一个具有偶数坐标的 $n$-受控划分。如上所述，令 $\mathrm{Q}_0 = \{R + \vec{1} : R \in \mathrm{P}_0\}$，其中 $\vec{1} = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^{n-1}$。那么 $\mathrm{P}_0$ 和 $\mathrm{Q}_0$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的正交 $n$-受控划分。

现在，对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个 $k$ 维矩形 $S$，$0 \le k \le n$，按如下方式定义一个矩形 $2S$：如果 $S$ 具有 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ 的形式，那么 $2S = [2a_1, 2b_1] \times \cdots \times [2a_k, 2b_k]$。令 P 为 $\mathbb{R}^n$ 的受控划分，其元素具有以下形式

$$2R \times [4m, 4m+2] \text{ where } R \in \mathcal{P}_0 \text{ and } m \in \mathbb{Z}$$

or

$$2R \times [4m-2, 4m] \text{ where } R \in \mathcal{Q}_0 \text{ and } m \in \mathbb{Z}.$$

那么 P 显然具有偶数坐标。我们验证 P 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $(n+1)$-受控划分。任取 $x \in \mathbb{R}^n$。我们证明 $x$ 至多包含于 P 的 $n+1$ 个元素中。若 $\pi_n(x)$ 不是偶数，则根据 $\mathrm{P}_0$ 和 $\mathrm{Q}_0$ 的 $n$-受控性，$x$ 至多包含于 P 的 $n$ 个元素中。

假设 $\pi_n(x)$ 是偶数。令 $S = \{1, \ldots\ldots, n-1\}$。假设 $\beta_{\mathcal{P}_0}(\pi_S(x)) = i$ 且 $\beta_{\mathcal{Q}_0}(\pi_S(x)) = j$。那么根据 $\mathrm{P}_0$ 和 $\mathrm{Q}_0$, 的正交性，我们有 $i + j \leq n-1$。由引理 4.3,

$$\nu_{\mathcal{P}}(x) = \nu_{\mathcal{P}_0}(\pi_S(x)) + \nu_{\mathcal{Q}_0}(\pi_S(x)) = i + 1 + j + 1 \leq n + 1.$$

因此，P 是 $(n+1)$-受控的。 □

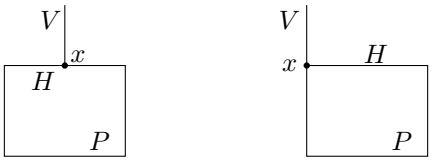
## 5. Locally Regulated Partitions in $\mathbb{R}^n$

**定义 5.1**。设 $R$ 是 $n$ 维矩形，位于 $\mathbb{R}^n$ 中，且 P 是 $R$ 的一个局部受控划分。若对每个 $x \in \in \mathrm{int}(R)$, $\nu_{\mathcal{P}}(x) = \beta_{\mathcal{P}}(x) + 1$，则称 P 为极小的。

本节讨论关于局部受控划分的以下扩展问题。设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，且 $\mathrm{P}_0$ 是 $R$ 的一族两两不相交的 $n$ 维子矩形。是否总存在 $R$ 的一个最小局部受控划分 P，使得 $\mathrm{P}_0 \subseteq \mathrm{P}$? 本节证明，对于 $n = 2$，答案是肯定的；而对于 $n \geq 3$，答案是否定的。

**引理 5.2**。设 $R$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个2维矩形，且 $\mathcal{P}_0$ 是 $R$ 的一个由两两不相交的2维子矩形组成的有限集。那么，存在 $R$ 的一个最小局部受控划分 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$。

证明。为得到 P，将 $P \in \mathrm{P}_0$ 的所有竖边“极大”地延长，即直到它们到达 $R$ 或另一个 $Q \in \mathrm{P}_0$ 的一条横边。由此得到 $R$ 的一个局部受控划分 P，且 $\mathrm{P}_0 \subseteq \mathrm{P}$。为看出 P 是极小的，假设以导出矛盾：$x \in \mathrm{int}(R)$ 且 $\nu_{\mathcal{P}}(x) = 4$。于是 $x$ 是一条竖直线段 $V$ 与一条水平线段 $H$ 的交集，这两条线段位于 P 的某些元素的边界上。由于我们由 $\mathrm{P}_0$ 构造 P 时并不引入水平线，$H$ 必定位于某个元素 $P \in \mathrm{P}_0$ 的边界上。不失一般性，假设 $H$ 是 $P$ 的一条边。我们考虑两种情形。




情形 1：$x$ 不是 $H$ 的端点。于是 $P$ 位于 $H$ 的一侧，而 $V$ 位于另一侧。我们有 $\nu_{\mathcal{P}}(x) = 3$，这与我们的假设矛盾。情况 2：$x$是 $H$ 的端点。于是 $x$ 是 $P$ 的一个角点。在这种情况下，$H$ 位于 $V$ 的一侧，并且不延伸到 $V$ 的另一侧。我们再次得到 $\nu_{\mathcal{P}}(x) \leq 3$，矛盾。□

接下来我们考虑 $n = 3$ 的扩展问题。

**定义 5.3**。设 $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = S \times [a_3, b_3]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个三维矩形，并设 P 是 $R$ 的局部受控划分。

(1) 如果 $P \in \mathrm{P}$ 且 $\pi_3(P) = [c, d]$，那么我们称 $P$具有下层 $c$和上层 $d$。(2) P 的层 是任意满足以下条件的 $d \in (a_3, b_3)$：$d$ 是某个 $P \in \mathrm{P}$ 的上层。

(3) 如果 $d$ 是 P 的一层，则定义

$$\mathcal{P}_{d,-} = \{P \in \mathcal{P}\colon\ P \text{ has upper level } d\}.$$

(4) 若 $d$ 是 P 的一层，则 $d$ 层上的一个极大曲面 是 $S$ 的一个极大子集 $M$，使得

$$M \times \{d\} \subseteq (S \times \{d\}) \cap \bigcup \mathcal{P}_{d,-}$$

且 int($M$) 是连通的。

我们不加证明地陈述以下简单观察。

**引理 5.4.** 设 $R = S \times [a_3, b_3]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个3维矩形，且$\mathcal{P}$ 是 $R$ 的一个局部受控划分。设 $d \in (a_3,\ b_3)$。则有以下结论：

*(i)* $d$ 是$\mathcal{P}$ 的一层，当且仅当 $d$ 是某个 $P \in \mathcal{P}$ 的下层。

*(ii)* 假设 $d$ 是$\mathcal{P}$的一层。定义

$$\mathcal{P}_{d,+} = \{P \in \mathcal{P}\colon\ P \textit{ has lower level } d\}.$$

$$\textit{Then } \bigcup \pi_{1,2}(\mathcal{P}_{d,+}) = \bigcup \pi_{1,2}(\mathcal{P}_{d,-}).$$

以下引理是关于 $\mathbb{R}^3$ 中最小局部受控划分的关键观察。

**引理 5.5.** 设 $R$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个3维矩形，且$\mathcal{P}$ 是 $R$的一个最小局部受控划分。那么，对于$\mathcal{P}$的任意层 $d$，该层 $d$上的任意极大曲面都是一个（2维）矩形。

证明。设 $M$ 是层 $d$上的一个极大曲面。根据定义， $M$ 是一个矩形多边形（即有限个矩形的并），且其内部连通。要证明 $M$ 本身是一个矩形，只需证明 $M$ 是凸的。反设 $M$ 不是凸的。那么 $M$ 包含一个凹角点$x$。图 3 展示了这种情况。

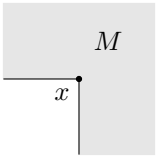



FIGURE 3. 假设存在的凹形极大曲面。

设 $R_x$ 是一个足够小的三维矩形，使得 $R_x$ 是 $x$ 的一个邻域，并且

$$\mathcal{Q} = \{P \cap R_x\colon P \in \mathcal{P}\}$$

是 $R_x$ 附近关于 $x$的一个局部受控划分。由于 P 是最小的，Q 也是最小的，因此有 $|\mathcal{Q}| = 4$。然而，显然 $|\mathcal{Q}_{d,\ +}| \geq 2$, $|\mathcal{Q}_{d,\ -}| \geq 2$，且 $\mathcal{Q}_{d,\ +} \cup \mathcal{Q}_{d,\ -} \neq \mathcal{Q}$。因此 $|\mathcal{Q}| \geq 5$，这就产生了矛盾。□

**定义 5.6**。 设 $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个三维矩形，P 是 $R$ 的一个局部受控划分，且 $a_3 \leq d_1 < d_2 \leq b_3$。一个（二维）矩形 $M$ 是从 $d_1$ 到 $d_2$ 的虚拟极大曲面，当且仅当

$$\partial M \times [d_1, d_2] \subseteq \bigcup \partial \mathcal{P} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \partial P.$$

给定一个二维矩形 $M$，我们称划分 P尊重 $M$ 从 $d_1$ 到 $d_2$，如果 $\partial M \times [d_1, d_2] \subseteq \bigcup \partial$ P $= \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \partial P$。因此， $M$是从 $d_1$ 到 $d_2$ 的虚拟极大曲面，意思就是 P 尊重从 $d_1$ 到 $d_2$ 的 $M$。

**引理 5.7.** 设 $R$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个3维矩形，并设$\mathcal{P}$ 为 $R$的一个最小局部受控分割。若 $M$ 是层 $d$上的一个极大曲面，则存在 $d_1 < d < d_2$，使得 $M$ 是从 $d_1$ 到 $d_2$的一个虚拟极大曲面。

证明. 由引理 5.5 $M$ 是一个（2维）矩形。考虑

$$\mathcal{P}^M_{d,+} = \{P \in \mathcal{P}_{d,+} : \pi_{1,2}(P) \subseteq M\}, \text{ and}$$

$$\mathcal{P}^M_{d,-} = \{P \in \mathcal{P}_{d,-} : \pi_{1,2}(P) \subseteq M\}.$$

则 $\bigcup \pi_{1,2}(\mathrm{P}^M_{d,+}) = \bigcup \pi_{1,2}(\mathrm{P}^M_{d,-}) = M$。设 $d_1$ 为 $\mathrm{P}^M_{d,-}$的元素的下层中的最大者，并设 $d_2$ 为 $\mathrm{P}_{d,+}$的元素的上层中的最小者。则 $M$ 是从 $d_1$ 到 $d_2$的一个虚拟极大曲面。□

**引理 5.8.** 设 $R = S \times [a_3, b_3]$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 3维矩形，并设 $\mathcal{P}$ 为 $R$的一个最小局部受控分割。设 $M_1$ 为从$d_1$ 到 $d_2$ 的一个虚拟极大曲面，且 $a_3 \le d_1 < d_2 < b_3$ 与 $d_2$ 为这样的最大者。则下列至少有一项成立：

> ***(i)*** 存在唯一的极大曲面 $M_2$，位于层 $d_2$ 上，使得 $M_1 \subsetneq M_2$; ***(ii)*** 存在 $d_3 > d_2$ 以及一个从 $d_2$ 到 $d_3$ 的虚拟极大曲面 $M_2$，使得 ***(iia)*** $M_1 \subsetneq M_2$, ***(iib)*** $\pi_i(M_1) = \pi_i(M_2)$ 对于恰好一个 $i \in \{1, 2\}$ 成立，***(iic)*** 对于任意 $(a, b) \in M_2 \setminus M_1$，$(a, b, d_2)$ 位于层 $d_2$ 上的一个极大曲面 $N$上，使得 $\mathrm{int}(N) \cap \mathrm{int}(M_1) \neq \emptyset$，并且 ***(iid)*** 对于任意位于层 $d_2$ 上的极大曲面 $N$，若 $\mathrm{int}(N) \cap \mathrm{int}(M_1) \neq \emptyset$，则有 $N \subseteq M_2$。

证明。 根据定义， $M_1 \subseteq S$ 是一个矩形。记 $T = M_1 \times [d_1, d_2]$。那么 $T$ 是一个三维矩形。考虑这些集合

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{P} : P \text{ has lower level } d_2,\ \pi_{1,2}(\mathrm{int}(P)) \cap M_1 \neq \emptyset\}$$

and

$$\mathcal{Q}^+ = \{P \in \mathcal{Q} : \pi_{1,2}(\mathrm{int}(P)) \setminus M_1 \neq \emptyset\}.$$

根据 $d_2$的极大性， $\mathrm{Q}^+ \neq \emptyset$。

注意，对于 $M_1$ 的任意一条边 $L$，若它与 $\bigcup \mathrm{int}(\pi_{1,2}(\mathrm{Q}^+))$ 不相交，则存在 $d_L > d_2$ 使得 $L \times [d_2, d_L] \subseteq \bigcup \partial \mathrm{P}$。再次由 $d_2$ 的极大性可知， $\bigcup \mathrm{int}(\pi_{1,2}(\mathrm{Q}^+))$ 至少与 $M_1$ 的一条边相交。

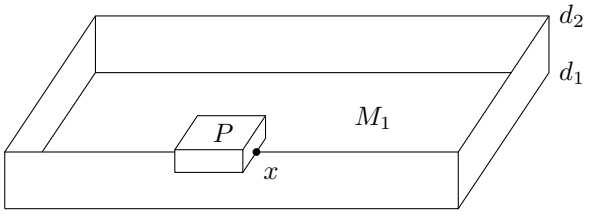



FIGURE 4. 寻找下一个虚拟极大曲面。

我们断言，若 $\cup\text{int}(\pi_{1,\ 2}(\mathrm{Q}^+))$ 与 $M_1$ 的一条边 $L$ 相交，则 $L \subseteq \cup\pi_{1,\ 2}(\mathrm{Q}^+)$。为证明这一断言，我们考虑图4所示的情形。假设 $P \in \mathrm{Q}^+$, $x$ 是 $L \times\{d_2\}$ 的一个内部点，且 $x$ 同时位于 $P$ 的一个垂直面和 $T$ 的一个垂直面上。由于 P 是极小的，我们有 $\nu_{\mathcal{P}}(x) = 4$。考察 $\nu_{\mathcal{P}}(x) = 4$ 可能实现的方式，稍加思考便可看出，存在唯一的 $Q \in \mathrm{Q}^+$，使得 $Q \neq P$ 且 $x \in \partial Q$。因此 $x \in \cup\pi_{1,\ 2}(\mathrm{Q}^+)$。对 $L$ 两个方向上的点重复这一论证，我们得出 $L \subseteq \cup\pi_{1,\ 2}(\mathrm{Q}^+)$。

现在，若 $\cup\text{int}(\pi_{1,2}(\mathrm{Q}^+))$ 与 $M_1$ 的两条相邻边相交，则根据该断言，这两条边都位于层 $d_2$ 上的某个极大曲面 $M_2$ 上。根据引理 5.5，$M_2$ 是一个矩形，因此必有 $M_1 \subsetneq M_2$，故此时结论 (i) 成立。

接下来，设 $M_1$ 的边为 $L_0$、$L_1$、$L_2$、$L_3$，其中 $L_0$ 与 $L_2$ 相对，$L_1$ 与 $L_3$ 相对。此外，假设 $\cup\text{int}(\pi_1,2(\mathrm{Q}^+))$ 与 $L_0$ 相交，但不与 $L_1$ 和 $L_3$ 相交。为明确记号，假设 $M_1 = [c_1, c_2] \times [e_1, e_2]$ 和 $L_0 = [c_1, c_2] \times \{e_1\}$。根据上述断言，$L_0$ 位于层 $d_2$上的某个极大曲面 $N_0$ 上。由引理 5.5，$N_0$ 是一个矩形，因此我们可以假设 $N_0$ 的形式为 $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$，其中 $\alpha_1 \leq c_1$、$\alpha_2 \geq c_2$ 和 $\beta_1 < e_1 < \beta_2$。此处我们可以假设 $\beta_2 < e_2$，因为否则 $N_0$ 是层 $d_2$ 上的一个极大曲面，且有$M_1 \subsetneq N_0$，因此结论 (i) 对 $M_2 = N_0$ 同样成立。现在我们断言$\alpha_1 = c_1$ 且 $\alpha_2 = c_2$。事实上，若 $\alpha_1 < c_1$，则考察点 $y = (c_1, \beta_2, d_2)$，它位于 $L_1 \times\{d_2\}$ 或 $L_3 \times\{d_2\}$ 的内部；类似于上述断言的论证可知，这与我们的假设矛盾：$\cup\text{int}(\pi_1,2(\mathrm{Q}^+))$ 不与 $L_1$ 或 $L_3$ 相交。因此 $\alpha_1 = c_1$。同理，$\alpha_2 = c_2$。这就证明了该断言。

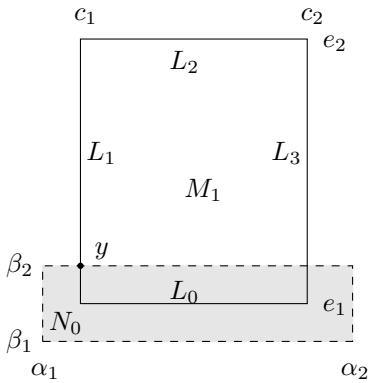



FIGURE 5. 虚拟极大曲面 $M_2$ 的存在性。

现在，如果 $\cup\text{int}(\pi_{1,2}(\mathrm{Q}^+))$ 与 $L_2$ 不相交，那么根据第二个断言，并将引理 5.7 应用于 $N_0$，我们得到一个从 $d_2$ 到某个 $d_3 > d_2$ 的虚拟极大曲面 $M_2 = [c_1, c_2] \times [\beta_1, e_2]$，其中 $d_3 \leq d_{L_1}, d_{L_2}, d_{L_3}$。在这种情况下，$\pi_1(M_2) = \pi_1(M_1)$，且 $\pi_2(M_2) \neq \pi_2(M_1)$。因此，结论 (iia) 和 (iib) 成立。结论 (iic) 也可由 $M_2$ 的构造直接得到。为验证 (iid)，任取一个极大曲面 $N$，使得 $\text{int}(N) \cap \text{int}(M_1) \neq \varnothing$。如果 $N \cap N_0 \neq \varnothing$，那么根据我们的构造，$N = N_0$ 且 $N \subseteq M_2$。如果 $N \cap N_0 = \varnothing$，那么事实上有 $N \subseteq M_1$，从而 $N \subseteq M_2$，正如所要求的。否则，$\text{int}(N) \setminus M_1 \neq \varnothing$，并且通过类似于本证明中第一个断言的论证得到矛盾。

最后，如果 $\cup \text{int}(\pi_{1,2}(Q^+))$ 与 $L_2$ 相交，则对于 $L_2$ 有一个与 $L_0$ 类似的断言，即存在一个位于 $L_2$ 所在的 $d_2$ 层上的极大曲面 $N_2$，其形式为 $[c_1, c_2] \times [\gamma_1, \gamma_2]$，其中 $\gamma_1 < e_2 < \gamma_2$。在这种情况下，我们得到一个从 $d_2$ 到某个 $d_3 > d_2$ 的虚拟极大曲面 $M_2 = [c_1, c_2] \times [\beta_1, \gamma_2]$，且 $d_3 \leq d_{L_1}, d_{L_3}$。同样，在此情况下结论 (ii) 成立。□

**定理5.9**。存在一个三维矩形 $R$ 和一个有限集$\mathcal{P}_0$，其中包含若干两两不相交的3维子矩形，且不存在满足 $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ 的 $R$ 的最小局部受控划分$\mathcal{P}$。

证明。令 $R = [0,4]^3$，并令 $\mathbf{P}_0 = \{P_0, P_1, P_2\}$，其中

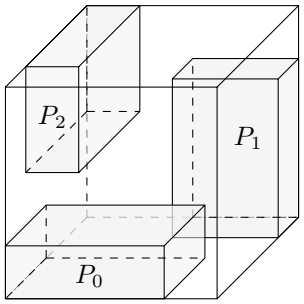



FIGURE 6. 极小局部受控划分的一个三维障碍。

$$P_0 = [0,3] \times [0,2] \times [0,1],$$
$$P_1 = [2,4] \times [3,4] \times [0,3],$$
$$P_2 = [0,1] \times [1,4] \times [2,4].$$

图6展示了 $R$ 和 $\mathbf{P}_0$。

反设 $\mathbf{P}$ 是 $R$ 的一个极小局部受控划分，且 $\mathbf{P}_0 \subseteq \mathbf{P}$。令 $d_1 = 1$，并令 $M_1$ 为包含 $\pi_{1,2}(P_0) = [0,3] \times [0,2]$ 的 $d_1$ 层极大曲面。根据引理 5.5，$M_1$ 是一个矩形。然而，由于 $P_1$ 的存在，我们有 $M_1 \subseteq [0,4] \times [0,3]$。

根据引理 5.7 $M_1$，$d_1$ 到某个 $d_2 > d_1$是一个虚拟极大曲面。令$d_2$ 为其中最大的一个。根据我们的构造，特别是由于 $P_2$的存在，我们有 $d_2 \leq 2$。于是根据引理 5.8，要么在层 $d_2$ 上存在一个极大曲面$M_2$，要么存在 $d_3 > d_2$ 以及一个从 $d_2$到 $d_3$ 的虚拟极大曲面 $M_2$，并且对于恰好一个 $i \in \{1, 2\}$，有 $\pi_i(M_1) = \pi_i(M_2)$。在这两种情况下，我们都有$M_1 \subsetneq M_2 \subseteq [0,4] \times [0,3]$。事实上，在前一种情况下，$M_2$ 是一个极大曲面，因此是一个矩形；由于 $P_1$的存在，$M_2 \subseteq [0,4] \times [0,3]$。在后一种情况下，根据引理 5.8 (iic)，$M_2$ 是一个虚拟极大曲面，它仅通过极大曲面延伸 $M_1$。由于 $P_0$ 与 $P_1$之间的空间关系，并且由于 $d_2 \leq 2$，我们也有 $M_2 \subseteq [0,4] \times [0,3]$。

现在可以重复这一构造和论证，从而得到一个递增序列

$$d_2 = \delta_0 < \delta_1 < \cdots < \delta_k \leq 2$$

以及虚拟极大曲面

$$M_2 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_k$$

使得对于每个 $0 \le i < k$， $N_{i+1}$ 都是从 $\delta_i$ 到 $\delta_{i+1}$的虚拟极大曲面。由归纳法，利用上述关于 $M_2$的同一论证，我们得到对于所有 $0 \le i \le k$， $N_i \subseteq [0,4] \times [0,3]$。现在令 $k$ 为满足条件的最大者。由于 P 是有限的，我们必有 $\delta_k = 2$和 $N_k \subseteq [0,4] \times [0,3]$。另一方面，由引理 5.8 (iid)， $N_k$必须延伸包含 $\pi_{1,\ 2}(P_2) = [0,1] \times [0,4]$的极大曲面，这就产生了矛盾。□

**推论 5.10.** 对于每个 $n \ge 3$，都存在一个 $n$ 维矩形 $R$，以及一个有限集 $\mathcal{P}_0$，其中包含 $R$ 的两两不相交的 $n$ 维子矩形，且不存在满足 $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ 的 $R$ 的最小局部受控分割 $\mathcal{P}$。

证明。对 $n \ge 3$ 使用归纳法。设 $n \ge 3$, $R_n$ 是一个 $n$ 维矩形，且 $\mathrm{P}_0^n$ 是 $R_n$ 的一个有限集，其中包含两两不相交的 $n$维子矩形，并且不存在满足 $\mathrm{P}_0^n \subseteq \mathrm{P}_n$ 的 $R$ 的最小局部受控分割 $\mathrm{P}_n$。令$R_{n+1} = R_n \times [0,1]$，并

$$\mathcal{P}_0^{n+1} = \{P \times [0,1] : P \in \mathcal{P}_0^n\}.$$

我们断言，不存在满足 $\mathrm{P}_0^{n+1} \subseteq \mathrm{P}$ 的 $R_{n+1}$ 的最小局部受控分割 P。

反设存在矛盾，即 P 是满足 $\mathrm{P}_0^{n+1} \subseteq \mathrm{P}$ 的 $R_{n+1}$ 的最小局部受控分割。令 $0 < c < 1$ 为一个不是 P 的层的 $P \in$，也就是说，不存在 $P \in \mathrm{P}$ 使得 $\sup \pi_n(P) = c$。于是

$$\mathcal{Q} = \{P \cap (R_n \times \{c\}) : P \in \mathcal{P}\}$$

是 $R_n \times \{c\}$ 的一个最小局部受控分割。设 $A = \{1,\ldots,n\}$。那么 $\pi_A(\mathrm{Q})$ 是 $R_n$ 的一个最小局部受控分割，且 $\mathrm{P}_0^n \subseteq \pi_A(\mathrm{Q})$，这与之矛盾。□

## 6. Clopen Regulated Partitions of $F(2^{\mathbb{Z}^n})$

**定义 6.1**。设 $n \ge 1$。

(1) 对每个 $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，令 $C_x \subseteq \mathbb{R}^n$ 定义为

$$C_x = \left[a_1 - \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{2}\right] \times \cdots \times \left[a_n - \frac{1}{2}, a_n + \frac{1}{2}\right].$$

(2) 对每个 $P \subseteq \mathbb{Z}^n$，令

$$C_P = \bigcup \{C_x : x \in P\}.$$

我们自然地称 $n$ 维矩形 为 $\mathbb{Z}^n$ 中的对象。具体而言，它们是形如 $R \cap \mathbb{Z}^n$ 的集合，其中 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形。如果 $P \subseteq \mathbb{Z}^n$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，那么 $C_P$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，使得 $C_P \cap \mathbb{Z}^n = P$。

对于满足 $a < b$ 的 $a, b \in \mathbb{Z}$，我们将集合 $[a,b] \cap \mathbb{Z}$ 简称为 $[a,b]$，称其为 中的区间，只要不会引起混淆。如果 $P$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，我们可以写作

$$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

其中 $[a_1, b_1]$、……、$[a_n, b_n]$是 $\mathbb{Z}$中的区间。 $P$的边长定义为$b_i - a_i$、 $i = 1$、……、$n$。注意，对应 $C_P$的边长实际上是$b_i - a_i + 1$、 $i = 1$、……、 $n$。

**定义 6.2**。令 $n \ge 1$。

(1) $\mathbb{Z}^n$ 的矩形划分是将 $\mathbb{Z}^n$ 划分为 $\mathbb{Z}^n$中的两两不相交的$n$维矩形。

(2) 对于 $\mathbb{Z}^n$的矩形划分 P，令

$$\mathcal{C}_\mathcal{P} = \{C_P : P \in \mathcal{P}\}.$$

如果 P 是 $\mathbb{Z}^n$ 的矩形划分，那么 $\mathsf{C}_\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的受控划分，满足

$$\mathcal{P} = \{Q \cap \mathbb{Z}^n : Q \in \mathcal{C}_\mathcal{P}\}.$$

因此，我们也将 $\mathbb{Z}^n$ 的矩形划分称为 $\mathbb{Z}^n$ 的受控划分。

**定义 6.3**。设 $n \geq 1$，设 $n+1 \leq \gamma \leq 2^n$，且设 P 是 $\mathbb{Z}^n$ 的矩形划分。如果 $\mathsf{C}_\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 $\gamma$-受控划分，则称 P 是 $\mathbb{Z}^n$ 的 $\gamma$-受控划分。如果 $\mathsf{C}_\mathcal{P}$ 是极小的，则称 P 是极小的。

**定义 6.4**。设 P 和 Q 是 $\mathbb{Z}^n$ 的受控划分。如果 $\mathsf{C}_\mathcal{P}$ 和 $\mathsf{C}_\mathcal{Q}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的正交受控划分，则称 P 和 Q正交。

**引理 6.5**。对于每个 $n \geq 1$，存在 $\mathbb{Z}^n$ 的正交极小受控划分。特别地，存在 $\mathbb{Z}^n$ 的极小受控划分。

证明。通过对引理 4.6 的证明进行改编即可。 □

接下来，我们考虑空间 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 中的连续构造和博雷尔构造。考虑 $\mathbb{Z}^n$ 在 $2^{\mathbb{Z}^n}$ 上的伯努利移位 作用，其定义为

$$(g \cdot z)(h) = z(h+g)$$

对于 $g$，$h \in \mathbb{Z}^n$ 和 $x \in 2^{\mathbb{Z}^n}$。$F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 是 $2^{\mathbb{Z}^n}$ 的自由部分，即 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 是满足以下条件的 $z \in 2^{\mathbb{Z}^n}$ 的集合：对于所有非恒等的 $g \in \mathbb{Z}^n$，都有 $g \cdot z \neq z$。令 $E_{\mathbb{Z}^n}$ 为 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的轨道等价关系，即

$$(u, v) \in E_{\mathbb{Z}^n} \iff \exists g \in \mathbb{Z}^n \ (g \cdot u = v).$$

那么 $E_{\mathbb{Z}^n}$ 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n}) \times F$ 的一个 $F_\sigma$ 子集。对于每个 $z \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$，$z$ 的轨道 是包含 $z$ 的 $E_{\mathbb{Z}^n}$ 等价类，我们将其记为 $[z]_{E_{\mathbb{Z}^n}}$，并简记为 $[z]$。

假设对于某个 $z \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$，有 $P \subseteq [z]$。那么对于某个 $S \subseteq \mathbb{Z}^n$，有 $P = S \cdot z$。若 $S$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，我们称 $P$ 是一个维矩形。注意，这不依赖于 $z$ 的选取。

**定义 6.6**。$F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的受控划分 是指一个划分 P，其中每个 $P \in$ P 都是一个 $n$ 维矩形。若 P 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的受控划分，则称 P 是既开又闭 的（博雷尔的），如果对于每个 $g \in \mathbb{Z}^n$，集合

$$\{u : \exists P \in \mathcal{P} \ (u, g \cdot u) \in P\}$$

是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的一个相对既开又闭（博雷尔）子集。

**定理 6.7** ([2, 定理 3。1])。对于任意整数 $n$、$\ell \geq 1$，存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的既开又闭受控划分$\mathcal{P}$，使得每个 $P \in \mathcal{P}$ 都是一个 $n$ 维矩形，其边长为 $\ell$ 或 $\ell+1$。

**定义 6.8**。令 $n \geq 1$，令 $n+1 \leq \gamma \leq 2^n$，并令 P 为 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的受控划分。若对于每个 $z \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$，则称 P 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的 $\gamma$-受控划分，

$$\{S \subseteq \mathbb{Z}^n : S \cdot z \in \mathcal{P}\}$$

是 $\mathbb{Z}^n$的一个 $\gamma$-受控划分。我们称 P 为极小，如果它是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$的一个$(n+1)$-受控划分。

本节的主要结果是下述关于闭开受控划分的定理。

**定理 6.9.** 对每个 $n \geq 2$，存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$的一个既开又闭的 $3{\cdot}2^{n-2}$-受控划分。

我们注意到，当 $n = 1$ 时，显然存在$F(2^{\mathbb{Z}})$的一个既开又闭的2-受控划分；这样的受控划分是极小的。在本定理所考虑的所有维数中，仅在 $n = 2$ 的情形下，所得到的受控划分是极小的。在本文其余部分，我们将证明，对任意 $n \geq 3$，不存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$的Borel 极小受控划分。本节其余部分专门用于定理 6.9 的证明。

在本节其余部分中固定 $n \geq 2$。设 $\rho$ 为 $\mathbb{R}^n$上的 $\ell_\infty$-度量。则对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及任意实数 $r > 0$，以$x$为中心、半径为 $r$ 的 $\rho$-闭球 $B_\rho(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) \leq r\}$是 $\mathbb{R}^n$ 中边长为 $2r$的 $n$维矩形。距离函数 $\rho$可以延拓到 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$：对 $u, v \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$，定义

$$\rho(u, v) = \begin{cases} \rho(g, \vec{0}), & \text{if } g \cdot u = v, \\ \infty, & \text{if } (u, v) \notin E_{\mathbb{Z}^n}. \end{cases}$$

我们将使用 [2] 中证明的以下引理。

**引理 6.10**（基本闭开标记引理，[2, 引理 2。1]）。设 $r > 0$ 是任意实数。那么存在一个相对闭开集 $S \subseteq F(2^{\mathbb{Z}^n})$，使得

（*i*）若 $u$、$v \in S$ 不同，则 $\rho(u, v) > r$；（*ii*）对于任意 $u \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$，存在 $v \in S$，使得 $\rho(u, v) \leq r$。

**引理 6.11**（[2, 引理 2。2]）。设 $r_2 > 2r_1 > 0$ 为实数，且设 $S_1$ 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的相对闭开子集，如引理 *6.10* 中针对 $r_1$ 所述。那么存在一个闭开集 $S_2 \subseteq S_1$，使得

（*i*）若 $u$、$v \in S_2$ 不同，则 $\rho(u, v) > r_2 - 2r_1$；（*ii*）对于任意 $u \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$，存在 $v \in S_2$，使得 $\rho(u, v) \leq r_1 + r_2$。

为证明定理 6.9，设 $r_2 \gg r_1 \gg \ell \gg 0$ 和 $S_2 \subseteq S_1$ 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的闭开子集，它们由引理 6.10 和 6.11 针对 $r_1$ 和 $r_2$ 给出。令 $g_1, \ldots, g_k$ 枚举集合中的所有非单位元

$$D = \{g \in \mathbb{Z}^n : \rho(g, \vec{0}) \leq r_1 + r_2\}.$$

归纳地定义 $T_0, T_1, \ldots, T_k$ 这一列 $S_1$ 的子集如下：

$$\begin{aligned} T_0 &= S_2, \\ T_i &= S_1 \cap (g_i \cdot S_2) \setminus \textstyle\bigcup_{j<i} T_j, \text{ for } 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

那么，$T_0, T_1, \ldots, T_k$ 构成 $S_1$ 的一个由闭开集组成的划分。由引理 6.11 (i)，对于任意 $0 \leq i \leq k$ 以及任意两个不同的 $u, v \in T_i$, $\rho(u, v) > r_2 - 2r_1$。

我们其余的构造将保持不变。这意味着，可以把该构造看作我们在每个 $E_{\mathbb{Z}^n}$-类中选取了一个基点 $z$，但构造的结果不依赖于 $z$ 的选取。此外，我们将针对每个轨道 $[z]$ 描述 $\mathbb{R}^n$ 的一个受控划分 $\mathrm{P}_z$。$F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 所需的受控划分由所有 $P \in \mathrm{P}_z$ 对应的 $(P \cap \mathbb{Z}^n) \cdot z$ 组成。

对每个 $z \in T_i$，我们通过关于$0 \leq i \leq k$的归纳法，将其与一个 $n$维矩形 $R_z$ 相关联。不失一般性，假设 $r_1 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$，且 $\ell > 0$ 是一个整数。如果 $i = 0$，我们令 $R_z$ 为 $n$维矩形 $B_\rho(z, r_1)$。注意，若 $u$，$v \in T_0$互不相同，则 $R_u \cap R_v = \varnothing$，因为 $\rho(u, v) > r_2 - 2r_1 \gg 2r_1$，前提是我们恰当地确保 $r_2 \gg r_1$

。假设 $0 < i \le k$，并假定已为所有 $u \in \bigcup_{j<i} T_j$ 定义了 $R_u$。令 $z \in T_i$。首先令 $R_z^*$ 为 $n$维矩形 $B_\rho(z, r_1)$。然后，对 $R_z^*$的每个面 $F^*$，若存在一个 $u \in \bigcup_{j<i} T_j$，使得 $\rho(u,z) \le 3r_1$，且存在 $R_u$ 的一个面 $F$，使得 $F^*$ 与 $F$ 之间的垂直距离小于 $\ell$，则通过将 $F^*$向外移动不超过 $\frac{1}{10} r_1$来调整它，使所得的面在 $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ 层上，且与 $R_u$的所有平行面之间的垂直距离至少为 $\ell$；这里 $u \in \bigcup_{j<i} T_j$满足 $\rho(u,z) \le 6r_1$。注意，对于满足 $\rho(u,z) \le 6r_1$的 $u \in \bigcup_{j<i} T_j$，其数量存在一个常数上界（该上界取决于 $n$，除此之外不取决于任何因素）。因此，只要恰当选取了 $r_1 \gg \ell$，就能找到对 $F^*$ 进行这样的调整。对 $R_z^*$的所有面进行上述调整后，所得的 $n$维矩形 $R_z$ 即为所求。注意，若 $u$、$v \in T_i$互不相同，则 $\rho(u,v) > r_2 - 2r_1 \gg 6r_1$，因此，上述描述的 $R_u$ 和 $R_v$ 的构造彼此不会干扰；特别是，$R_u$ 与 $R_v$ 的任意平行面之间的垂直距离至少为$\ell$。我们将这一性质称为正交性。

根据引理 6.10 (ii)，在每个轨道上，$\bigcup_{0\le i\le k}\{R_u : u \in T_i\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的受控覆盖。接下来，对每个 $z \in T_i$，我们定义一个局部受控划分，其划分对象为

$$H_z = R_z \setminus \bigcup_{j<i} \{R_u : u \in T_j\}$$

采用如下递归划分算法。注意，$H_z$ 是一个 $n$维矩形多面体，即它同胚于一个 $n$维矩形，并且是有限多个 $n$维矩形的并。此外，$H_z$ 的任意两个不同平行面的垂直距离至少为 $\ell$。算法如下。取 $H_z$ 的所有法向量为 $e_n$的面，将它们延拓为超平面，并用这些超平面把 $H_z$ 分成有限多个形如 $L \times [a,b]$的集合，其中 $L$ 是一个$(n-1)$维矩形多面体，且 $a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$。这里注意，$L$ 满足类似的性质：$L$ 的任意两个不同平行面的垂直距离至少为 $\ell$。现在对每个 $L$递归地应用该算法，得到 $L$的受控划分$\mathbf{P}_L$。于是，对于 $P \in \mathbf{P}_L$，形如 $P \times [a,b]$ 的集合给出 $H_z$的局部受控划分$\mathbf{P}_z$。

当我们为所有 $z \in T_i$ 和 $0 \le i \le k$ 完全定义了 $H_z$ 的局部受控划分 $\mathbf{P}_z$ 后，对于每个轨道，我们都得到了 $\mathbb{R}^n$ 的受控划分 $\mathbf{P}_{[z]}$。由于这一构造是有限的，$F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上所得的受控划分是既开又闭的。

还需要验证，在每个轨道上，我们得到的是 $\mathbb{R}^n$ 的 $3 \cdot 2^{n-2}$-受控划分。为此，考虑任意轨道 $[z]$上 $\mathbb{R}^n$ 的一个受控划分 $\mathbf{P}_{[z]}$。令 $x \in \mathbb{R}^n$，并令 $\gamma_n = 3 \cdot 2^{n-2}$。设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形，满足 $x \in \mathrm{int}(R)$，使得 $\mathbf{P} = \{P \cap R : P \in \mathbf{P}_{[z]}\}$ 是 $R$ 关于 $x$ 的局部受控划分。注意，如果 $x$ 相对于 $\mathbf{P}$ 没有边界向量，那么 $|\mathbf{P}| = \nu_{\mathcal{P}}(x) = 1 \le \gamma_n$，无需再证明其他内容。因此，不失一般性，我们可以假设 $x$ 至少有一个相对于 $\mathbf{P}$ 的边界向量。还要注意，如果存在 $u \in S_1$ 使得 $x \in \mathrm{int}(H_u)$，那么根据我们的构造，$e_1$ 不是 $x$ 的边界向量；在这种情况下，$|\mathbf{P}| \le 2^{n-1} \le \gamma_n$，结论也已得证。在证明的其余部分，我们假设对于任意 $u \in S_1$，都有 $x \notin \mathrm{int}(H_u)$。令 $i_x$ 为满足 $0 \le i \le k$ 且对某个 $z \in T_i$有 $x \in \partial H_z$ 的最大 $i$。证明 $x \in \partial H_z$的 $z \in T_{i_x}$ 是唯一的；在证明的其余部分中固定取此者。

如果 $e_j$ 是 $x$ 关于$\mathbf{P}$的边界向量，当 $e_j$ 是 $\partial H_z$ 的一个面 $F$的法向量且满足 $x \in F$时，我们称 $e_j$ 主动 对于 $x$，否则称 $e_j$ 被动 对于 $x$。特别地，如果 $x$ 位于延伸 $H_z$某一面的超平面上，则该面的法向量

对于 $x$ 是主动的，当且仅当 $x$ 位于 $H_z$的该面上。我们断言，这一陈述对所有满足 $x \in \partial H_u$的 $u \in S_1$ 仍然成立。为说明这一点，设 $u \in S_1$ 满足 $x \in \partial H_u$。则对某个 $0 \le i \le i_x$有 $u \in T_i$。现设 $x$ 位于延伸 $H_u$的面$F$的超平面上。首先设 $x \in F_。$则存在 $H_z$ 的一个面 $F_\prime$，使得 $F_\prime \subseteq F$且$x \in F'$。因此 $F$的法向量对于 $x$是主动的。其次设 $x \notin F_。$则由正交性，不存在 $H_z$的面 $F_\prime$满足 $x \in F'$，且 $F_\prime$与延伸 $F$的超平面位于同一超平面上。因此 $F$ 的法向量对于 $x$是被动的。

注意，根据我们的构造， $e_1$ 对于 $x$并非被动的，因为在构造过程中，从未延伸过法向量为 $e_1$ 的$R_u$ 的面。由于 $x \in \partial H_z$，对于 $x$至少存在一个活跃边界向量。令 $\alpha(x)$表示 $x$ 的活跃边界向量数量，令 $\pi(x)$表示 $x$的被动边界向量数量。我们有 $\alpha(x) \ge 1$且 $\alpha(x)+\pi(x) \le n$。注意，$\mathcal{P}$中由活跃边界向量定义的区域数量（即以活跃边界向量为法向量的超平面所定义的区域数量）至多为 $\alpha(x)+1$。这是因为，根据我们的构造，若 $e_j$ 和 $e_l$ 都是活跃向量且 $1 \le j < l \le n$，则以 $e_j$ 为法向量的超平面不会与以 $e_l$ 为法向量的超平面相交。因此，$\mathcal{P}$中的元素数量至多为$(\alpha(x)+1)\cdot 2^{\pi(x)}$。若 $\alpha(x) \ge 2$ 或 $\alpha(x)+\pi(x) < n$，则有

$$|\mathcal{P}| \le (\alpha(x)+1)\cdot 2^{\pi(x)} \le (\alpha(x)+1)\cdot 2^{n-\alpha(x)} \le 3\cdot 2^{n-2} = \gamma_n.$$

现在只需考虑 $\alpha(x) = 1$ 和 $\pi(x) = n-1$ 的情形。由于 $e_1$ 对 $x$ 而言不是被动的，在这种情形下， $x$ 唯一的活跃边界向量是 $e_1$ ，而所有其他的 $e_j, 1 < j \le n$ 都是 $x$ 的被动边界向量。根据我们的假设，对于每个 $1 \le j \le n$，都存在某个 $P_j \in \mathcal{P}$ 的一个面 $F_j$，使得 $x \in F_j$，且 $e_j$ 是 $F_j$ 的法向量。令 $N_j$ 为包含 $F_j$ 的超平面。

对于不同的 $1 \le j$、$l \le n$，若在 $N_l$ 的两侧各有某个 $P_j^* \in \mathcal{P}$ 的面 $F_j^*$，其法向量为 $e_j$，则称 $e_j$ 穿过 $e_l$。注意，根据我们的假设，对于所有 $1 < l \le n$， $e_1$ 都穿过 $e_l$。

**引理 6.12.** 根据我们的假设， $\alpha(x) = 1$ 且 $\pi(x) = n-1$，存在不同的 $1 \le j, l \le n$，使得 $e_j$ 不穿过 $e_l$。

证明。设 $u_1 = z$， $u_2$，……， $u_n$是 $\bigcup_{0\le i\le i_x} T_i$ 中的元素，且

(*) for each $1 < j \le n$, $N_j$ extends a face $F_j$ of $R_{u_j}$, $x \in N_j$ and $x \notin R_{u_j}$.

直观地说， $x$ 位于 $R_{u_1}$ 的一个面的内部，该面的法向量为 $e_1$；对于每个 $1 < j \le n$， $x$ 也位于 $R_{u_j}$ 的一个面的扩展上，因为 $e_j$ 是 $x$ 的被动边界向量。根据构造的正交性，对于每个 $1 \le j \le n$， $u_j$ 都是唯一的。

反设每个 $e_j$ 对所有互不相同的 $1 \le j$， $l \le n$ 都与 $e_l$ 相交。接下来我们断言，对于互不相同的 $1 \le j$， $l \le n$，有 $u_j \ne u_l$。首先，对于任意 $1 < j \le n$，显然有 $u_1 \ne u_j$。现在假设 $1 < j < l$ 且 $u_j = u_l = u$，那么在我们的构造中，法向量为 $e_l$ 的 $R_u$ 的面先被扩展，而法向量为 $e_j$ 的 $R_u$ 的面随后被扩展。根据构造的正交性， $e_j$ 不与 $e_l$ 相交，这就产生了矛盾。

在继续证明之前，我们采用一个坐标系来表示 $\mathcal{P}[z] = \mathcal{P}[x]$ 的元素。假设对每个 $1 \le j \le n$,

$$R_{u_j} = [a_1^j, b_1^j] \times \cdots \times [a_n^j, b_n^j].$$

假设 $x$ 的坐标为 $(x_1, \dots, x_n)$。那么每个 $x_j$ 要么是 $a_j^j$，要么是 $b_j^j$。不失一般性，假设 $x_j = a_j^j$。这也是超平面 $N_j$ 的方程。

由于对每个 $2 < j \le n$, $e_2$ 都与 $e_j$ 相交，因此有 $a_j^2 \le a_j^j \le b_j^2$。由于 $e_2$ 与 $e_1$ 相交，因此有 $a_1^2 \le a_1^1 \le b_1^2$。由此可得

$$x = (a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n) \in R_{u_2}.$$

这与 (*) 矛盾。 □

假设 $e_j$ 不与 $e_l$ 相交。那么在 $N_l$ 的一边，P 中至多有 $2^{n-1}$ 个元素；而在另一边，P 中至多有 $2^{n-2}$ 个元素。由此得到

$$|\mathcal{P}| \le 2^{n-1} + 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2} = \gamma_n.$$

定理 6.9 的证明完成。

## 7. A Clopen 5-Regulated Partition of $F(2^{\mathbb{Z}^3})$

本节给出 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的一个闭开 5-调节划分。这改进了定理 6.9 的 $n = 3$ 情形；鉴于下一节将证明的结果，这也是最优的。

**定理 7.1**。存在一个 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的既开又闭5-受控划分。

本节余下部分将用于证明定理 7.1。对于 $n = 3$ 情形，我们修改定理 6.9 证明中的构造。我们尽可能沿用该证明中的记号。

首先，让我们快速回顾一下在 $n = 3$ 的背景下，前述构造中使用的算法。令 $r_2 \gg r_1 \gg \ell \gg 0$。令 $S_1 \supseteq S_2$ 为引理 6.10 和 6.11 针对 $r_1$ 和 $r_2$ 给出的 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的闭开子集，并令 $T_0 = S_2$、$T_1$、.....、$T_k$ 为 $S_1$ 的一个划分，使得对于任意 $0 \le i \le k$ 以及互不相同的 $u$、$v \in T_i$，$\rho(u$、$v)$ 都很大（大致为 $r_2$）。接着，对每个 $z \in T_i$，我们关联一个三维矩形 $R_z$，使得所有 $R_z$ 都满足正交性。这意味着，对于任意彼此接近的互不相同的 $u$、$v \in S_1$，$R_u$ 和 $R_v$ 的平行面之间的垂直距离相对较大（大于 $\ell$）。对于每个 $z \in T_i$，令

$$H_z = R_z \setminus \bigcup_{j<i} \{R_u : u \in T_j\}.$$

那么 $H_z$ 是一个三维矩形多边形。我们划分 $H_z$ 的算法如下。设 $e_1, e_2, e_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准基向量。首先，我们延伸 $H_z$ 中所有法向量为 $e_3$ 的面。这将 $H_z$ 划分为若干个三维矩形多边形，每个多边形都是沿 $e_3$ 方向的圆柱体。确切地说，任意为 $[z]$ 固定一个坐标系后，每个由此得到的三维矩形多边形都具有 $K \times I$ 的形式，其中 $K$ 是一个二维矩形多边形，$I$ 是一个区间。接下来，算法通过延伸 $K \times I$ 中所有法向量为 $e_2$ 的面来划分 $K \times I$。由此得到若干个三维矩形。这些三维矩形进而构成 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的一个既开又闭受控划分。

我们将更详细地分析这个受控划分。令 $\mathrm{P}_{[z]}$ 表示限制在 $[z]$ 上的受控划分（我们将其视为 $\mathbb{R}^3$的一个受控划分）。任意固定 $x \in [z]$。令 P 为由 $\mathrm{P}_{[z]}$诱导、关于 $x$ 的一个局部受控划分。我们仍令 $\alpha(x)$表示 $x$ 的活跃边界向量的数量，并令 $\pi(x)$表示

$x$的被动边界向量的数量。如果 $\alpha(x)+\pi(x) \le 2$，则 $|\mathrm{P}| \le 4$。设$\alpha(x)+\pi(x) = 3$。若 $\alpha(x) = 3$，则算法给出 $|\mathrm{P}| = 4$。若 $\alpha(x) = 2$且 $\pi(x) = 1$，则算法给出 $|\mathrm{P}| = 4$ 或 $|\mathrm{P}| = 5$。因此，唯一可能导致 $|\mathrm{P}| = 6$ 的情形是 $\alpha(x) = 1$ 且 $\pi(x) = 2$。在这种情形下，引理 6.12 保证存在互不相同的 $1 \le i$、$j \le 3$，使得 $e_i$ 不与 $e_j$相交。令$k \in \{1,2,3\} \setminus \{i,j\}$。我们看到，只有在以下情形下才有 $|\mathrm{P}| = 6$： $e_k$ 同时与 $e_i$ 和 $e_j$ 相交， $e_j$ 同时与 $e_i$ 和 $e_k$相交，且 $e_i$ 与 $e_k$ 相交但不与 $e_j$相交。我们断言， $i = 2$ 和$\{j,k\} = \{1,3\}$。为此，令 $F_1$为 P 的某些元素的所有面 $F$的并集，使得 $x \in F$和 $F$以 $e_1$ 为法向量；类似地定义 $F_2$ 和 $F_3$。由于 $e_1$ 是 $x$唯一的活跃边界向量， $x$ 必定位于 $F_1$ 的内部，而 $F_1$ 是某个 $H_z$的某个面的部分。这意味着 $e_1$同时与 $e_2$ 和 $e_3$相交。接下来我们证明 $e_3$ 与 $e_1$相交。反设不然。于是 $F_3$只出现在 $F_1$的一侧。根据我们的假设， $e_2$ 与 $e_1$相交。现在，若 $e_3$不与 $e_2$相交，也就是说， $F_3$ 并未出现在 $F_2$的两侧，则可知 $|\mathrm{P}| \le 5$。反之，若 $e_3$ 与 $e_2$相交，也就是说， $F_3$ 出现在 $F_2$ 的两侧，那么在 $F_1$ 中 $F_3$ 出现的一侧， $F_2$ 并未出现在 $F_3$的两侧。这是因为在我们的构造中，算法先引入了 $F_3$；根据正交性，当 $F_2$ 出现在$F_1$的两侧时， $F_2$ 不可能出现在 $F_3$ 的两侧。由此我们已证明 $e_3$ 与 $e_1$相交。用类似的论证可知， $e_3$ 也与 $e_2$相交。断言得证。

在情形 $|\mathrm{P}| = 6$ 中，我们称 $x$ 棘手。图 7 展示了棘手点仅有的两种情形。

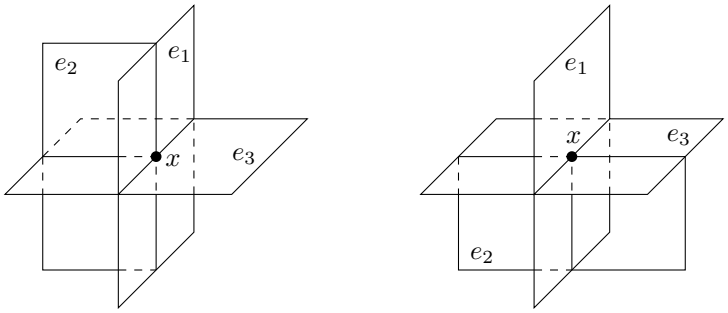



FIGURE 7. 棘手点的两种情形。

接下来，我们修改 $\mathrm{P}_{[z]}$，并定义一个新的受控划分 $\mathrm{Q}_{[z]}$。首先注意，对于所有 $z \in F(2^{\mathbb{Z}^3})$，$\mathrm{P}_{[z]}$ 的所有棘手点构成的集合是既开又闭的。现在，我们分两步修改 $\mathrm{P}_{[z]}$。第一步，我们找出所有棘手点 $x$，并在每个棘手点周围向 $\mathrm{Q}_{[z]}$中引入一个三维矩形 $L_x$。$L_x$ 的一个侧面是法向量为 $e_j$ 的平面的一部分，其中 $e_2$ 不与 $e_j$ 相交。我们选择 $L_x$ 的其他侧面，使其与邻域内所有现有平行面的垂直距离至少为 $\epsilon\ell$，其中 $\epsilon > 0$ 是一个常数；同时， $L_x$ 的边长介于 $\epsilon\ell$ （含）与 $\ell$ 之间。这是可行的，因为存在常数 $C$，使得在距离 $x$ 不超过 $6r_1$ 的范围内，$\mathrm{P}_{[z]}$中至多有 $C$ 个元素，并且我们可以选择 $\epsilon = 1/(2C)$。图 8 展示了在棘手点的两种情形下引入 $L_x$。

注意， $L_x$ 恰好与$\mathrm{P}_{[z]}$中包含 $x$的六个三维矩形中的两个相交。将$\mathrm{P}_{[z]}$ 的这两个元素分别记为$P_{x,1}$ 和$P_{x,2}$。令$Q_{x,1}$ 为

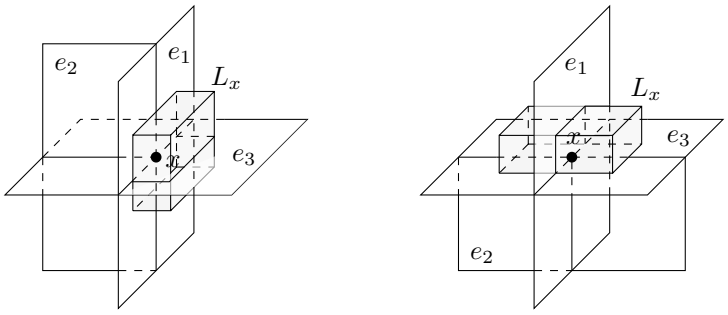



FIGURE 8. 在每个棘手点 $x$周围引入 $L_x$ 。

$P_x$,1 ∖ $L_x$ 的闭包，并令$Q_x$,2为$P_x$,2 ∖ $L_x$的闭包。于是$Q_x$,1 ⊆ $P_x$,1与$Q_x$,2 ⊆ $P_x$,2均为三维矩形多边形。现在，构造Q[$z$] 的第二步是在$Q_x$,1与$Q_x$,2中执行一种除法算法，该算法类似于我们此前对P[$z$] 所使用的除法算法，不同之处在于我们在$Q_x$,1与$Q_x$,2中对面延拓的法向量作不同的选取。确切地说，该算法如下进行。在$Q_x$,1中，首先将 $L_x$ 的法向量为 $e_1$ 的面延拓穿过$Q_x$,1，然后在所得区域中尚未成为三维矩形的某一个区域内，延拓 $L_x$ 的法向量为 $e_2$的面。在$Q_x$,2中，首先延拓 $L_x$ 的法向量为 $e_3$的面，然后在所得区域中尚未成为三维矩形的某一个区域内，延拓 $L_x$的法向量为 $e_2$的面。最终结果即为我们的受控划分Q[$z$]。

为了说明 Q[$z$] 具有所需的性质，我们只需分析在由 P[$z$]构造 Q[$z$] 的过程中，棘手点 $x$ 以及两个区域 $Q_{x,\ 1}$ 和 $Q_{x,\ 2}$ 发生了什么。为此，令 Q 为由 Q[$z$]诱导的关于 $x$ 的局部受控划分。于是显然有 |Q| = 5。对 Q[$z$] 在$Q_{x,\ 1}$ 和$Q_{x,\ 2}$ 内所有新引入的边界点进行全面检查表明，该算法不会为 Q[$z$]引入新的棘手点。

因此，我们得到了一个 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的闭开 5-调节划分。定理 7.1 的证明完毕。

## 8. BOREL REGULATED PARTITIONS OF $F(2^{\mathbb{Z}^n})$

回顾定义 4.1 中关于 $\mathbb{R}^n$的 $\gamma$-受控划分的概念，以及定义 6.3 将其扩展到 $\mathbb{Z}^n$ 、定义 6.6 将其扩展到等价关系$F(2^{\mathbb{Z}^n})$的内容。还要回顾定义 6.1 和定义 6.2，它们允许我们将 $\mathbb{Z}^n$ 的矩形划分视为 $\mathbb{R}^n$的受控划分。

定义 6.6 中 $\gamma$ 对 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的受控划分这一概念，以显而易见的方式进一步推广到 $\mathbb{Z}^n$ 在零维波兰空间上的自由作用。下面我们将为此类作用的受控划分引入非退化性这一概念。

**定义 8.1.** 令 $E$ 为 $\mathbb{Z}^n$ 在零维波兰空间 $X$ 上的自由作用所对应的轨道等价关系。

(i) $E$ 的受控划分 是 $X$ 的一个划分P，使得P的每个元素都具有形式 $R\cdot x$，其中 $R$ 是 $\mathbb{Z}^n$中一个维数为 $n$的矩形。

(ii) 受控划分P是非退化 的，如果对每个 $x \in X$ 以及每个$1 \le i \le n$，都存在 $y \in [x]$，使得 $e_i \cdot y$ 与 $y$ 属于P的同一元素。

在实践中，我们总是处理划分中的矩形具有正边长的受规分割。此类受规分割都是非退化的。

对于非退化受规分割，我们可以定义该作用的连续调节数和博雷尔规制数。

**定义 8.2.** 设 $E$ 为 $\mathbb{Z}^n$ 在一个零维波兰空间上的连续自由作用的轨道等价关系。$E$ 的连续调节数 $\gamma_c(E)$是最小的 $\gamma$，使得存在$E$的既开又闭非退化 $\gamma$-受控划分。类似地， $E$ 的博雷尔调节数 $\gamma_B(E)$是最小的 $\gamma$，使得存在 $E$的博雷尔非退化 $\gamma$-受控划分。

我们主要关注空间 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$本身，但这些论证适用于更一般的情形，即其上存在 $\mathbb{Z}^n$的自由连续作用的零维波兰空间。关于受规分割的主要问题如下。

问题 8.3. $\gamma_c(F(2^{\mathbb{Z}^n}))$和 $\gamma_B(F(2^{\mathbb{Z}^n}))$的值是什么?

为方便记号，我们用 $\gamma_c(n)$ 简写 $\gamma_c(F(2^{\mathbb{Z}^n}))$，$\gamma_B(n)$ 也同理。鉴于本文前文已证明的结果，尤其是引理 4.2 以及定理 6.9 和 7.1，我们有

$$\gamma_c(1) = \gamma_B(1) = 2,$$
$$\gamma_c(2) = \gamma_B(2) = 3,$$
$$4 \le \gamma_B(3) \le \gamma_c(3) \le 5,$$

并且对所有 $n > 3$,

$$n + 1 \le \gamma_B(n) \le \gamma_c(n) \le 3 \cdot 2^{n-2}.$$

由于这一最后的结果， $\mathbb{Z}^n$-作用的 $n + 1$-受控划分称为极小受控划分。

本节的目标是改进关于 $\gamma_c(n)$ 和 $\gamma_B(n)$（其中 $n \ge 3$）的这些估计。下面的定理是本节的主要定理。

**定理 8.4**。设 $n \ge 3$ 为一个整数。设 $E$ 是由 $\mathbb{Z}^n$ 在一个0维波兰空间上的自由博雷尔作用所诱导的轨道等价关系。那么，不存在 $E$ 的博雷尔、非退化、极小调节分割。

该定理揭示了二维情形与高维情形之间的鲜明对比。回想一下，对于维数 $n \le 2$，存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的既开又闭、非退化、极小调节分割。然而，对于维数 $n \ge 3$，不仅不存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的既开又闭、非退化、极小调节分割，甚至连博雷尔分割也不存在。也就是说，对于 $n > 2$，我们有 $\gamma_c(n) \ge \gamma_B(n) > n + 1$。结合定理 6.9，我们得到以下结果。

**定理 8.5.** 对于任意 $n \ge 3$，我们有

$$n + 2 \le \gamma_B(n) \le \gamma_c(n) \le 3 \cdot 2^{n-2}.$$

对于 $n = 3$，我们得到 $\gamma_c(3)$ 和 $\gamma_B(3)$ 的精确值如下。

**推论 8.6**。 $\gamma_B(3) = \gamma_c(3) = 5.$

本节余下部分将证明定理 8.4。在接下来的论证中，我们将考虑 $X = F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的情形，以及由 $\mathbb{Z}^n$ 在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的移位作用生成的等价关系 $E$。定理 8.4 中陈述的更一般情形并无实质性差异。因此，我们的目标是证明 $\gamma_B(n) \geq n+2$。

我们将在小节 8.2 中给出 $n = 3$ 情形下定理 8.4 的证明，然后在小节 8.3 中给出一般情形的证明。在给出这些证明之前，我们需要澄清所使用的记号。

8.1. **矩形在 $\mathbb{Z}^n$ 中的边界**。讨论 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的受控划分 P 时，我们一直关注每个轨道 $[x]$，将 P 在 $[x]$ 上的限制视为 $\mathbb{Z}^n$ 的受控划分，并进一步根据定义 6.1，将这个 $\mathbb{Z}^n$ 的受控划分与 $\mathbb{R}^n$ 的受控划分对应起来。在接下来的证明中，我们有时只考虑 P 在 $[x]$ 上的限制，而不再将其对应为 $\mathbb{R}^n$ 的受控划分。

为避免混淆并使后续讨论更加清晰，我们引入以下记号。对于任意子集 $A \subseteq F(2^{\mathbb{Z}^n})$，定义

$$\partial_{\mathbb{Z}} A = \left\{ y \in F(2^{\mathbb{Z}^n}) : y \in A \text{ and there is } 1 \leq i \leq n \text{ such that } e_i \cdot y \notin A \right\}$$

and

$$\mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(A) = A \setminus \partial_{\mathbb{Z}} A$$

并分别称它们为 $\mathbb{Z}$的边界和 $\mathbb{Z}$的内部。对于 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的受控划分 P，定义

$$\partial_{\mathbb{Z}} \mathcal{P} = \bigcup \{ \partial_{\mathbb{Z}} P : P \in \mathcal{P} \}$$

and

$$\mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{P}) = F(2^{\mathbb{Z}^n}) \setminus \partial_{\mathbb{Z}} \mathcal{P} = \bigcup \{ \mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(P) : P \in \mathcal{P} \}$$

并分别称它们为 $\mathbb{Z}$的边界和 $\mathbb{Z}$的内部。这些概念和记号同样适用于 $\mathbb{Z}^n$ 的子集以及 $\mathbb{Z}^n$ 的受控划分。

下面给出一个简单的引理，不加证明。

**引理 8.7.** 设 $P$、$Q$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的 $n$ 维矩形，且 $x \in \mathbb{Z}^n$。设 $C_x$、$C_P$ 和 $C_Q$ 是由定义 *6.1* 给出的 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n$维矩形。则有以下结论：

*(1)* $x \in P$ 当且仅当 $C_x \subseteq C_P$; *(2)* $x \in$内部$_{\mathbb{Z}}(P)$ 当且仅当 $C_x \subseteq$内部$(C_P)$; *(3)* $P \subseteq$内部$_{\mathbb{Z}}(Q)$ 当且仅当 $C_P \subseteq$内部$(C_Q)$。

我们还将使用以下记号。设 $\mathsf{S} = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq n\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的标准生成元集合。对于任意子集 $A \subseteq F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 和 $v \in \mathsf{S}$，定义

$$\partial_v A = \{ x \in A : v \cdot x \notin A \}$$

and

$$\mathrm{int}_v(A) = \{ x \in A : v \cdot x \in A \}.$$

因此，对所有 $v \in \mathsf{S}$，均有 $A = \partial_v A \cup \mathrm{int}_v(A)$。对于 $A \subseteq F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 和 $u,\ v \in \mathsf{S}$，令

$$\partial_{u \setminus v} A = \partial_u A \setminus \partial_v A = \partial_u A \cap \mathrm{int}_v(A).$$

如果 P 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的受控划分，且 $u,\ v \in \mathsf{S}$，那么令

$$\partial_v \mathcal{P} = \bigcup \{ \partial_v P : P \in \mathcal{P} \},$$

$$\mathrm{int}_v \mathcal{P} = \bigcup \{ \mathrm{int}_v P : P \in \mathcal{P} \} = F(2^{\mathbb{Z}^n}) \setminus \partial_v \mathcal{P},$$

and

$$\partial_{u\setminus v}\mathcal{P} = \bigcup\{\partial_{u\setminus v}P\colon P\in\mathcal{P}\}.$$

我们不加证明地陈述任意非退化受规分割的以下简单性质。

**引理 8.8.** 设 $\mathcal{P}$ 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的一个非退化受规分割。则对任意 $u, v\in \mathsf{S}$，使得 $u\neq\pm v$，$\partial_{u\setminus v}\mathcal{P}\neq\varnothing$。

8.2. **定理 8.4 在 $n=3$ 情形下的证明**。在我们的证明中，我们将使用定义 6.1 中引入的记号。也就是说，对于维数 $k\le 3$ 以及 $x\in\mathbb{Z}^k$，我们将谈论 $\mathbb{R}^k$中的一个 $k$维矩形 $C_x$。类似地，若 $P$是 $\mathbb{Z}^k$ 中的一个 $k$ 维矩形，则我们将谈论 $\mathbb{R}^k$ 中的一个 $k$ 维矩形 $C_P$。

我们还将使用定义 5.3 中关于受控划分的极大曲面概念、定义 5.6 中的虚拟极大曲面概念，以及引理 5.5、5.7 和 5.8 所给出的这些概念的性质。当然，这些是 $\mathbb{R}^3$ 中的概念，正如它们在第 5 节中所定义的那样，但我们通过定义 6.1 在 $\mathbb{Z}^3$ 和 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的语境中重新解释它们。更明确地说，若 P 是 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的一个受控划分，且 $[x]$ 是一条特定轨道，则 P 限制到 $[x]$ 上产生 Q $=\{C_P\colon P\in\mathsf{P}\ P\subseteq[x]\}$，即 $\mathbb{R}^3$ 的一个受控划分（对于坐标系，选取 $x$ 作为原点）。注意，Q 的所有边界点的坐标都在 $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$中。若$M$ 是 Q 在某个层 $d+\frac{1}{2}$ 上、对于某个整数 $d$的极大曲面，则

$$(M\cap\mathbb{Z}^2)\times\{d\}\text{ and }(M\cap\mathbb{Z}^2)\times\{d+1\}$$

是 $\partial_{\mathbb{Z}}$P 限制到 $[x]$ 的实际子集，其中每个子集都是 $\mathbb{Z}^3$ 中由 P 内三维矩形边界的并所构成的曲面。因此，我们将 $S=M\cap\mathbb{Z}^2$ 视为对 $M$ 极大曲面的重新诠释。现在，这些极大曲面成对出现，彼此的垂直距离为 1。也就是说，$S$ 同时出现在层 $d$ 和 $d+1$，其中 $S\times\{d\}$ 是某些 $P\in$P 的上面之并，而 $S\times\{d+1\}$ 是某些 $P\in$P 的下面之并。在这种情况下，我们仍将 $S$ 称为**极大曲面**，但将 $d$ 称为**下层**，将 $d+1$ 称为**上层**（属于同一个极大曲面 $S$）。根据引理 5.5，$\mathbb{R}^3$ 的受控划分中的每个极大曲面都是一个（二维）矩形。因此，$\mathbb{Z}^3$ 或 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的受控划分中的每个极大曲面也都是矩形。

类似地，若 P 是 $\mathbb{Z}^3$ 或 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的受控划分，$[x]$ 是一个特定轨道，并且 $M$是受控划分 Q $=\{C_P\colon P\in\mathsf{P}\ P\subseteq[x]\}$ 中从 $d_1+\frac{1}{2}$到 $d_2+\frac{1}{2}$的虚拟极大曲面，那么 $S=M\cap\mathbb{Z}^2$就是 P 中从$d_1+1$ 到 $d_2$ 的**虚拟极大曲面**。这里，与定义 5.6 对应的定义性质为

$$\partial_{\mathbb{Z}}S\times([d_1+1,d_2]\cap\mathbb{Z})\subseteq\partial_{\mathbb{Z}}\mathcal{P}.$$

即使 $d_1+1=d_2$，这一性质也并非显然。

现在我们可以证明 $n=3$ 情形下的定理 8.4 了。

假设 P 是 $F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的博雷尔非退化 4-调节划分。考虑用于添加泛型元素 $x_G\in F(2^{\mathbb{Z}^3})$ 的科恩强迫 $\mathbb{P}$，其中 $G$ 是一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子。因此，条件 $p\in\mathbb{P}$ 是从 $p\colon R\to$ 到 {0，1} 的有限部分函数，其中$R$ 是 $\mathbb{Z}^3$ 中的三维矩形。此外，$q\le_{\mathbb{P}}p$ 当且仅当 $q$ 扩展了 $p$。考虑将划分 P 限制在泛类 $[x_G]$上，记作 P$[x_G]$，由此我们将得到一个矛盾。任意固定一个原点后，我们将 P$[x_G]$ 视为 $\mathbb{Z}^3$ 的受控划分。

考虑 $\mathbf{P}[x_G]$ 在某个下层 $d \in \mathbb{Z}$ 上的一个极大曲面 $S$。我们断言，$S$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个有限矩形。事实上，根据引理 5.5，$C_S$ 是凸的，因此 $S$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个（可能是无限的）矩形。为导出矛盾，假设 $S$ 包含一条无限直线。不失一般性，并为明确起见，假设 $a$，$b \in \mathbb{Z}$ 满足

($\star$) $[a, \infty) \times \{b\} \subseteq S$ and $[a, \infty) \times \{b\} \times \{d\} \subseteq \partial_{e_3} \mathcal{P}$.

由于 $\mathbf{P}$ 是非退化的，因此存在某个 $(i, j, k) \notin \partial_{e_3} \mathbf{P}[x_G]$，也就是说，存在 $P \in \mathbf{P}[x_G]$，使得 $(i, j, k), (i, j, k+1) \in P$。令 $p \in G$，使得 $p$ 迫使 ($\star$) 和 $(i, j, k) \notin \partial_{e_3} \mathbf{P}[\dot{x}_G]$。注意集合

$$\begin{aligned} E = \{q \leq_{\mathbb{P}} p \colon & \text{there is a translation } \pi \colon \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3 \text{ such that} \\ & \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(\pi(p)) = \varnothing,\ \pi(i, j, k) \in [a, \infty) \times \{b\} \times \{d\}, \\ & \text{and } q \leq_{\mathbb{P}} \pi(p)\} \end{aligned}$$

在 $p$ 下稠密。为证明这一点，假设 $r \leq_{\mathbb{P}} p$。由于 $\mathrm{dom}(r)$ 是有限的，因此存在一个平移 $\pi \colon \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$，使得 $\mathrm{dom}(r) \cap \pi(\mathrm{dom}(r)) = \varnothing$ 且 $\pi(i, j, k) \in [a, \infty) \times \{b\} \times \{d\}$。于是 $r \cup \pi(r) \in \mathbb{P}$。令 $q = r \cup \pi(r)$。则 $q \leq_{\mathbb{P}} r$ 且 $q \in E$。这说明 $E$ 在 $p$ 下稠密。现在，由于 $G$ 是 $\mathbb{P}$-泛型且 $p \in G$，存在$q \in G \cap E$。但此时 $q$ 迫使 $[a, \infty) \times \{b\} \times \{d\} \subseteq \partial_{e_3} \mathbf{P}[\dot{x}_G]$，因为 $q \leq_{\mathbb{P}} p$；而 $q$ 迫使 $\pi(i, j, k) \notin \partial_{e_3} \mathbf{P}[\dot{x}_G]$，因为 $q \leq_{\mathbb{P}} \pi(p)$。因此 $\pi(i, j, k) \in [a, \infty) \times \{b\} \times \{d\} \subseteq \partial_{e_3} \mathbf{P}[x_G]$，同时 $\pi(i, j, k) \notin \partial_{e_3} \mathbf{P}[x_G]$，产生矛盾。这说明 $S$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个有限矩形。

接下来，我们分析 $\mathbf{P}[x_G]$ 中的虚拟极大曲面。按照上一段中的稠密性论证，对于从某个 $d_1 + 1$ 到 $d_2$、满足 $d_1 < d_2$ 的 $\mathbf{P}[x_G]$ 的任意虚拟极大曲面 $S$，都存在最大的有限个这样的 $d_2$。现在假设 $S_0$ 是 $\mathbf{P}[x_G]$ 在（上或下）层 $\delta_0$ 上的一个极大曲面。那么根据引理 5.7 和上述观察，存在有限个 $\delta_1 > \delta_0$，使得 $S_0$ 是从 $\delta_0 + 1$ 到 $\delta_1$ 的虚拟极大曲面，其中 $\delta_1$ 是最大的此类对象。根据引理 5.8，存在 $\delta_2 > \delta_1$ 和一个从 $\delta_1 + 1$ 到 $\delta_2$ 的虚拟极大曲面 $S_1$，使得 $S_0 \subsetneq S_1$。此外，存在最大的有限个这样的 $\delta_2$。重复这一构造和论证，我们得到一个无限递增序列

$$\delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_k < \cdots$$

以及从 $\delta_k + 1$ 到 $\delta_{k+1}$ 的虚拟极大曲面 $S_k$，其中每个 $\delta_{k+1}$ 都是最大的此类对象，且对所有 $k \geq 0$ 都有 $S_k \subsetneq S_{k+1}$。按照上一段中的稠密性论证，对于任意 $k \geq 0$ 以及 $S_k$ 的任意一条边 $L$，都存在 $K > k$，使得 $L \subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(S_K)$。由此可知，对于任意 $k \geq 0$，都存在 $K > k$，使得 $S_k \subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(S_K)$。因此，对于任意 $D > 0$，都存在 $\mathbf{P}[x_G]$ 的一个虚拟极大曲面 $S$，其所有边长都至少为 $D$。

令 $\mathsf{S} = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ 为 $\mathbb{Z}^3$ 的标准生成元集合。我们定义一个条件 $p_0 \in \mathbb{P}$，使得 $\mathrm{dom}(p_0) = [-s, s]^3 \cap \mathbb{Z}^3$ 对某个正整数 $s$成立，并且 $p_0$ 蕴含

($\star$) for any $u \in \mathsf{S}$, $v \in \mathsf{S} \setminus \{\pm u\}$, and $w \in \mathsf{S} \setminus \{\pm u, \pm v\}$, there is $a \in [-s, s] \cap \mathbb{Z}$ such that $aw \in \partial_{u \setminus v} \mathcal{P}_{[\dot{x}_G]}$.

为构造这个条件 $p_0$，考虑

$$\mathsf{T} = \{(u, v, w) \in \mathsf{S}^3 \colon v \neq \pm u \text{ and } w \neq \pm u, \pm v\}.$$

固定一个三元组 $(u, v, w) \in \mathsf{T}$。由引理 8.8，存在 $y_{u,v} \in [x_G]$ 使得 $y_{u,v} \in \partial_{u \setminus v} \mathbf{P}[x_G]$，因此存在 $q_{u,v} \in \mathbb{P}$ 迫使这一点成立。由于定义域$(q_{u,v})$是

有限的，存在 $a_{u,v,w} \in \mathbb{Z}$ 使得 $q_{u,v}$, $\pi_{u,v,w}(q_{u,v})$ 的一个平移迫使$a_{u,v,w}w \in \partial_{u\searrow v}\mathbf{P}[\dot{x}_G]$。事实上，我们可以找到这些 $a_{u,v,w}, q_{u,v}, \pi_{u,v,w}$，使得对所有互异的三元组 $(u,v,w),(u',v',w') \in \mathbf{T}$，

$$\mathrm{dom}(\pi_{u,v,w}(q_{u,v})) \cap \mathrm{dom}(\pi_{u',v',w'}(q_{u',v'})) = \varnothing.$$

现在令 $s$ 足够大，使得对于所有三元组 $(u,\ v,\ w) \in \mathbf{T}$，都有 $a_{u,\ v,\ w} \in [-s,s]$，且 $\mathrm{dom}(\pi_{u,\ v,\ w}(q_{u,\ v})) \subseteq [-s,s]^3$；并令 $p_0$ 的定义域为 $[-s,s]^3 \cap \mathbb{Z}^3$，且对三元组 $(u,\ v,\ w) \in \mathbf{T}$，扩展所有 $\pi_{u,\ v,\ w}(q_{u,\ v})$。这样的 $p_0$ 正是所需的。

我们非正式地说明构造此 $p_0$的一些动机。考虑 $u = +e_3$ 的情形。对于$v \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$ 的四种情况，$p_0$ 迫使存在四个点，它们都位于 $\mathbf{P}[x_G]$ 中某些矩形的上面。对于四个方向 $v \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$ 中的每一个，$p_0$ 迫使 $\partial_{+e_3\searrow v}\mathbf{P}[x_G]$ 中存在一个点。例如，对于 $v = +e_1$，$p_0$ 迫使存在一个点 $(0,a,0) \in \partial_{+e_3\searrow +e_1}\mathbf{P}[x_G]$，也就是说，存在某个 $P \in \mathbf{P}[x_G]$，使得 $(0,a,0)$、$(1,a,0) \in P$以及 $(0,a,1) \notin P$。这样的设计旨在禁止虚拟极大曲面从 $d_1$ 到 $d_2$ 出现，其中 $d_1 \le 0 \le d_2$，且其边界的一部分为 $[-s,s] \times \{0\}$ 或 $\{0\} \times [-s,s]$。

接下来，我们描述二维矩形的部分铺砌 $\mathbf{T}_2$，

$$R = \left[-s-(2s+1)^3, s+(2s+1)^3\right]^2 \cap \mathbb{Z}^2$$

铺砖的维数为 $(2s+1) \times (2s+1)$。每块铺砖都是 $[-s,s]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ 的平移，因此只需指定中心点的位置即可描述其位置。设 $A = (2s+1)^2$ 和 $B = 2s$。我们在以下各个位置放置一块铺砖的副本：

$$\big(\alpha(2s+1), \alpha+\beta A\big),\ \big(-\alpha-\beta A, \alpha(2s+1)\big),\ \big(-\alpha(2s+1), -\alpha-\beta A\big),\ \big(\alpha+\beta A, -\alpha(2s+1)\big)$$

for

$$(\alpha,\beta) \in \big([0,A-1] \times [0,B]\big) \cup \big\{(A,B)\big\}.$$

图9展示了当 $s = 1$ 时的部分铺砌 $\mathbf{T}_2$。外侧的虚线正方形是

$$R_0 = \left[-(2s+1)^3, (2s+1)^3\right]^2 \cap \mathbb{Z}^2.$$

我们用虚线将 $R_0$ 进一步划分为四个象限 I、II、III 和 IV，如图所示。将每个象限中的构造绕原点旋转 $90°$，即可得到下一个象限中的构造。

我们列出部分铺砌 $\mathbf{T}_2$，的以下性质，所有这些性质都可以通过直接计算和观察来验证。

(a) 相交的铺砌块必然重合，因此不同的铺砌块彼此不相交。(b) 对于任意 $t \in \left[-(2s+1)^3, (2s+1)^3\right] \cap \mathbb{Z}$，存在一个铺砌块，其中心点的$e_1$坐标为 $t$；还存在一个铺砌块，其中心点的 $e_2$坐标为 $t$。(c) 部分铺砌 $\mathbf{T}_2$ 包含四个角部铺砌块，它们的中心点构成一个边长为 $2(2s+1)^3$的正方形。(d) 如果将两个部分铺砌 $\mathbf{T}_2$ 并排放置（可以左右排列，也可以上下排列），且使角部铺砌块彼此重合，那么所得部分铺砌中的不同铺砌块仍然彼此不相交。因此，可以如此反复使用部分铺砌 $\mathbf{T}_2$，对$\mathbb{Z}^2$ 中的任意二维矩形进行部分铺砌，其边长的形式为 $2s + m \cdot 2(2s+1)^3$，其中 $m$为整数。

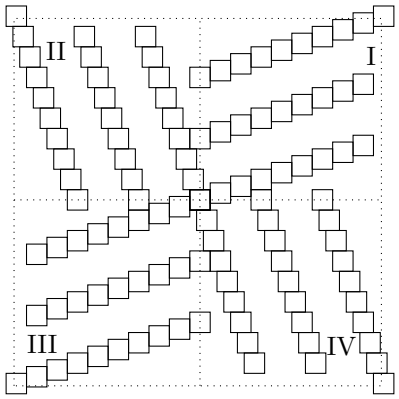



FIGURE 9. 部分铺砌 $T_2$；也是 $T_3$ 的俯视图。

现在考虑由尺寸为 $(2s+1)\times(2s+1)\times(2s+1)$的三维铺砌块构成的三维部分铺砌 $T_3$ 。对于 $\mathbb{Z}^3$中的一个边长为 $2(2s+1)^3+2s$ 的二维矩形 $R$，设

$$R=\left[-s-(2s+1)^3, s+(2s+1)^3\right]\times\left[-s-(2s+1)^3, s+(2s+1)^3\right]\times\{0\},$$

当且仅当 $(i,j)$ 是 $T_2$ 中某块密铺块的中心点时，我们通过在 $(i,\ j,\ 0)$ 处放置一个三维密铺块来得到 $T_3$。因此，图9可以视为 $T_3$ 的俯视图。$T_2$ 的性质 (a)–(d) 对 $T_3$ 仍然成立。我们还观察到以下附加性质。

(e) 可以在一个边长为 $2(2s+1)^3+2s$ 的三维矩形的每个面上放置一份 $T_3$，使角部铺砌块彼此重合，并且所得部分铺砌中的不同铺砌块仍彼此不相交。因此，可以如此反复应用部分铺砌 $T_3$，对 $\mathbb{Z}^3$ 中边长为 $2s+m\cdot 2(2s+1)^3$ 形式的任意三维矩形进行部分铺砌。

将 $T_3$ 的副本放置在这样的三维矩形上的算法，是将铺砌图案从一个面“滚动”到相邻的面上。图10展示了该算法的结果。图10仅显示正视图；未显示后视图和侧视图。

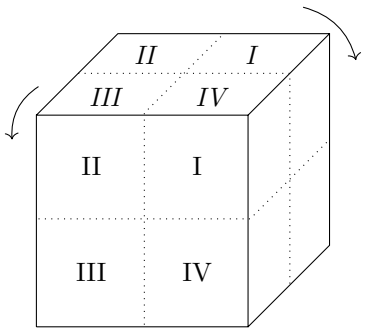



FIGURE 10. 对三维矩形的面进行部分密铺的“向下滚动”算法。

我们终于可以构造一个条件 $q \in \mathbb{P}$，以导出矛盾。

设 $D = 4(2s+1)^3$。由于 $\mathbb{P}_{[x_G]}$ 存在一个虚拟极大曲面，其所有边长均至少为 $D$，因此我们得到一个条件 $p \in \mathbb{P}$，其定义域 $\mathrm{dom}(p) = [-t,t]^3 \cap \mathbb{Z}^3$，其中 $t$ 为某个正整数，且 $p$ 保证存在一个虚拟极大曲面 $S$，它属于 $\mathbb{P}_{[x_G]}$，从某个 $d_1 < 0$ 延伸至 $d_2 = 0$，其中 $d_2$ 是满足条件的最大值，因此 $S$ 的边长均至少为 $D$，且 $S \times [d_1+1, d_2] \subseteq [-t,t]^3$。不失一般性，我们可以假设 $t$ 是 $D = 4(2s+1)^3$ 的正倍数。

Let

$$E = \left[-2s-2t, 2t+2s\right]^3 \cap \mathbb{Z}^3$$

and

$$E_0 = [-2t, 2t]^3 \cap \mathbb{Z}^3.$$

按照上文所示，反复应用 $\mathbf{T}_3$ 对 $E$ 的面进行部分密铺，并在每个密铺块所在的位置放置条件 $p_0$ 的一个副本（平移）。令 $q \in \mathbb{P}$ 为通过此构造对 $p$ 进行的扩展。

设 $x_G$ 是延拓 $q$的一般元素。则$\mathbb{P}_{[x_G]}$ 包含一个从 $d_1 < 0$ 到 $d_2 = 0$的虚拟极大曲面 $S_0 \subseteq [-t,t]^2$，其中 $d_2$ 是最大的此类曲面，从而 $S_0$的边长至少为 $D$。通过反复应用引理 5.8，我们得到一个递增序列

$$\delta_0 = 0 < \delta_1 < \cdots < \delta_k < \cdots$$

以及从 $\delta_k + 1$ 到 $\delta_{k+1}$的虚拟极大曲面 $S_k$，其中 $\delta_{k+1}$ 是最大的此类曲面，且对所有 $k \geq 0$均有 $S_k \subsetneq S_{k+1}$。设 $K$ 是使得 $\delta_K < 2t \leq \delta_{K+1}$成立的唯一数。

我们考虑两种情形。

情形 1： $S_K \subseteq [-2t, 2t]^2$。将 $\partial_{\mathbb{Z}} S_K$ 的一条极大线段记为 $\ell$。由于 $S_K$是从 $\delta_K + 1$ 到 $\delta_{K+1}$的虚拟极大曲面，存在 $v \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$，使得

$$\ell \times \{2t\} \subseteq \partial_v \mathcal{P}_{[x_G]}.$$

另一方面，由于 $S_0 \subseteq S_K$， $\ell$ 的长度至少为 $D = 4(2s+1)^3$。考虑满足 $w \neq \pm v$ 的$w \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$。那么 $w$ 与 $\ell$平行。根据我们对 $\mathbf{T}_3$ 的构造， $\ell$ 的长度至少为 $4(2s+1)^3$,，因此 $\ell \times \{2t\}$包含一条连接$C - sw$ 和 $C + sw$的线段，其中 $C$ 位于 $E_0$ 的顶部，并且是构造 $\mathbf{T}_3$时 $p_0$ 的一个副本的中心位置。根据 $p_0$的性质，必定存在某个$a \in [-s, s] \cap \mathbb{Z}$ 使得 $C + aw \in \partial_{+e_3 \setminus v} \mathbb{P}_{[x_G]}$。然而， $C + aw \in \ell$，这就产生了矛盾。

情况 2： $S_K \not\subseteq [-2t, 2t]^2$。在这种情况下，存在唯一的 $k < K$，使得 $S_k \subseteq [-2t, 2t]^2$，但 $S_{k+1} \not\subseteq [-2t, 2t]^2$。我们有 $\delta_{k+1} \leq \delta_K < 2t$。由于 $S_0 \subseteq S_k \subsetneq S_{k+1}$， $S_k$ 和 $S_{k+1}$ 的边长均至少为 $D$。由此可得

$$(S_{k+1} \times \{\delta_{k+1} + 1\}) \cap \partial_{\mathbb{Z}} E_0$$

包含长度至少为 $D$ 的水平线段。我们将这样的线段记为 $\ell$，并令 $w \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$ 与 $\ell$ 平行。令 $u \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$ 满足 $u \neq \pm w$。根据引理 5.8 (iic)， $\ell \times \{\delta_{k+1} + 1\}$ 位于某个极大曲面的上层。因此我们有

$$\ell \times \{\delta_{k+1} + 1\} \subseteq \partial_{-e_3} \mathcal{P}_{[x_G]}.$$

由于按照我们构造 $\mathbf{T}_3$ 的方式， $\ell$ 的长度至少为 $D = 4(2s+1)^3$,，因此 $\ell \times \{\delta_{k+1}+1\}$ 在 $C - sw$ 和 $C + sw$之间包含一条线段，其中 $C$位于 $E_0$ 的一条竖直侧边上，并且是构造 $\mathbf{T}_3$时一个 $p_0$ 副本的中心位置。根据 $p_0$ 的性质，必定存在某个 $a \in [-s, s] \cap \mathbb{Z}$，使得 $C + aw \in \partial_{u \setminus -e_3} \mathbb{P}_{[x_G]}$。又由于 $C + aw \in \ell$，这就产生了矛盾。

这就完成了维数 3 中定理 8.4 的证明。

**8.3. 高维情形下定理 8.4 的证明。**本小节专门证明定理 8.4 在 $n > 3$ 情形下成立。固定 $n > 3$，并反设 P 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的一个博雷尔非退化极小调节划分。

令 $\mathbb{P}$ 为添加泛型元素 $x_G \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的科恩强迫，其中 $G$ 是一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子。因此，条件 $p \in \mathbb{P}$ 是从 $p: R \to \{0, 1\}$ 到 $R$ 的有限部分函数，其中 $R$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个 $n$ 维矩形；对于 $p, q \in \mathbb{P}$，$q \leq_{\mathbb{P}} p$ 当且仅当 $q$ 扩展了 $p$。

我们仍将泛类 $\mathbb{Z}^n \cdot x_G$ 记作 $[x_G]$。但我们也考虑泛型扩张中 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上 $\mathbb{Z}^3$ 的一个作用$\alpha$，其定义如下：

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot_\alpha y = (a_1, a_2, a_3, 0, \ldots, 0) \cdot y.$$

显然，作用 $\alpha$ 是自由且博雷尔的。对于任意 $y \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$，令 $[y]_\alpha = \mathbb{Z}^3 \cdot_\alpha y$。现在我们定义 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上关于作用 $\alpha$ 的受控划分 Q：

$$Q \in \mathcal{Q} \iff \exists y \in Q \ \exists P \in \mathcal{P} \ Q = P \cap [y]_\alpha.$$

显然，Q 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上关于作用 $\alpha$ 的博雷尔调节分割。我们验证它是极小的。为此，考虑 Q 在任意 $[y]_\alpha$ 上的限制。于是，Q 限制在 $[y]_\alpha$ 上便导出一个受控划分 W $= \{C_Q : Q \in$ Q $\ Q \subseteq [y]_\alpha\}$，其定义域为$\mathbb{R}^3$。同时，注意到 P 限制在 $[y]$ 上也导出一个受控划分 V $= \{C_P : P \in$ P $\ P \subseteq [y]\}$，其定义域为 $\mathbb{R}^n$。特别要注意，$y$ 不在任何 $V \in$V 的边界上。令 proj 为从 $\mathbb{R}^n$ 到其前三个坐标的投影。那么

$$\mathcal{W} = \{\mathrm{proj}(V) : V \in \mathcal{V}, V \cap [y] \neq \varnothing\}.$$

现在令 $z$为 $\mathbb{R}^3$的任意元素，并令 $W_1$、.....、$W_k$枚举满足 $z \in W$的 $W \in$ W 的所有元素。对于每个 $W_j$，都存在唯一的 $V_j \in$V，使得 $V_j \cap [y] \neq \varnothing$ 且 proj$(V_j) = W_j$。这意味着 $\nu_{\mathcal{W}}(z) = \nu_{\mathcal{V}}(z)$。另一方面，$z$位于 $W_j$ 的边界上，当且仅当 $z$ 位于 $V_j$的边界上；若 $z$ 位于 $V_j$的一个面 $F$ 上，则 $F$的法向量只能是 $\pm e_i$，其中 $i = 1$为 2、3。这意味着 $\beta_{\mathcal{W}}(z) = \beta_{\mathcal{V}}(z)$。由于 P 是极小的，我们有 V 是极小的，且 $\nu_{\mathcal{V}}(z) = \beta_{\mathcal{V}}(z) + 1$。由此可得 $\nu_{\mathcal{W}}(z) = \beta_{\mathcal{W}}(z) + 1$，因此 W 是极小的。故 Q 是极小的。

现在我们关注类 $[x_G]_\alpha$，并通过重复 $n = 3$ 情形的证明来导出一个矛盾。检视该证明可见，只需验证Q限制于 $[x_G]_\alpha$时的非退化性假设，我们现在就来做这件事。假设$1 \leq i \leq 3$。由P的非退化性，存在 $z \in [x_G]$，使得 $e_i \cdot z$ 与 $z$ 属于P的同一元素。令 $p \in G$，从而 $p$ 力迫这一陈述；事实上，我们得到$g \in \mathbb{Z}^n$，使得 $p$ 力迫( $g + e_i) \cdot \dot{x}_G$ 与 $g \cdot \dot{x}_G$ 属于P的同一元素。等价地，$p$ 力迫 $g \cdot \dot{x}_G \notin \partial_{e_i}$P。令 $\theta$ 为 $\mathbb{Z}^n$ 的任一平移，使得对任意 $3 < j \leq n$，$\pi_j(\pi(g)) = 0$。于是 $\theta(p)$力迫存在 $z \in [\dot{x}_G]_\alpha$，使得 $z \notin \partial_{e_i}$P。由此可得，$\theta(p)$力迫存在 $z \in [\dot{x}_G]_\alpha$，使得 $z \notin \partial_{e_i}$Q。这一论证给出了如下元素集合的稠密性：$r \in \mathbb{P}$，使得 $r$ 力迫存在 $z \in [\dot{x}_G]_\alpha$，满足 $z \notin \partial_{e_i}$Q。因此我们得到存在 $z \in [x_G]_\alpha$，使得$z \notin \partial_{e_i}$Q，即为所需。

## 9. More Remarks on Higher Dimensions

在证明维数为 $n > 3$ 的定理 8.4 时，我们直接将 $n = 3$ 情形下的证明提升到了更高维。具体来说，我们不需要为 $n > 3$ 证明两个关键引理——引理 5.5 和 5.8。不过，值得注意的是，这两个

关于极小调节分割的组合引理在所有维数 $n$ 下都成立。它们还可以用于给出定理 8.4 的另一种证明，我们将在本节稍后简要概述。鉴于这些引理可能具有独立的研究价值，我们在一般情形下给出它们的证明。

极大曲面的定义 5.3 和虚拟极大曲面的定义 5.6 可推广到 $\mathbb{R}^n$ 的局部受规分划。按照定义 5.3，我们定义 层 的概念，只是现在使用 $\pi_n$ 而不是 $\pi_3$。然后我们定义 $\mathrm{P}_{d,-}$ 和 $\mathrm{P}_{d,+}$，并据此定义 极大曲面 的概念。从 $d_1$ 到 $d_2$，$\mathbb{R}^{n-1}$ 中的矩形 $M$ 为 虚拟极大曲面 的概念，也按照定义 5.6 进行定义，即 $\partial M \times [d_1, d_2] \subseteq \bigcup \partial \mathrm{P} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \partial P$。类似地，从 $d_1$ 到 $d_2$，P 尊重 $M$ 的概念也按照定义 5.6 进行定义。

我们首先推广关于极大曲面的引理 5.5。我们使用以下 g 引理。

**引理 9.1**。设 $k \geq 1$。设 $M$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的一个矩形多面体，即 $M$ 与一个 $k$ 维矩形同胚，并且它是有限个 $k$ 维矩形的并。假设对于每个 $x \in \partial M$，以及所有以 $x$ 为中心的充分小的 $k$ 维矩形 $R$，$R \cap M$ 都是一个 $k$ 维矩形。那么 $M$ 是一个 $k$ 维矩形。

证明。假设意味着，对于每个点 $x \in M$（不只是 $\partial M$ 中的点）以及每个足够小且以 $x$ 为中心的矩形 $R$，$R \cap M$ 都是一个矩形。因此，对于任意二维平面 $Q$，只要它是某些不同的 $e_i, e_j$ 所张成空间的平移 $e_i, e_j$，就有 $Q \cap M$ 也满足这样的性质：对于所有 $x \in Q \cap \partial M$ 以及所有足够小且以 $x$ 为中心的矩形 $R$，$Q \cap M \cap R$ 都是一个二维矩形。于是，$Q \cap M$ 是一个二维矩形多面体，并且满足：对于所有 $x \in Q \cap \partial M$ 以及所有以 $x$ 为中心的足够小的 $R$，$Q \cap M \cap R$ 都是一个二维矩形。由此很容易推出 $Q \cap M$ 是凸的，因此是一个二维矩形。

现在，我们用关于 $k$ 的归纳法证明：若 $M$ 是一个 $k$ 维矩形多面体，并且对于上述任意二维平面 $Q$，$Q \cap M$ 都是一个二维矩形，那么 $M$ 是一个 $k$ 维矩形。根据关于 $k-1$ 的归纳假设，对于每个垂直于某个 $e_i$ 的超平面 $H$，$H \cap M$ 都是一个 $(k-1)$ 维矩形。考虑一个垂直于 $e_k$ 且与 $M$ 相交的超平面 $H$。令 $R = H \cap M$。于是 $R$ 是一个 $(k-1)$ 维矩形。若 $M$ 不是一个 $k$ 维矩形，则必定存在两点 $x_1$、$x_2 \in R$，使得经过 $x_1$ 且平行于 $e_k$ 的直线 $L_1$，与经过 $x_2$ 且平行于 $e_k$ 的直线 $L_2$，和 $M$ 的交集不同。令 $y_0 = x_1$、$y_1$、……、$y_\ell = x_2$ 是 $R$ 中的点列，其中对每个 $j \leq \ell - 1$，$y_j$ 和 $y_{j+1}$ 恰有一个坐标不同。必定存在某个 $j \leq \ell - 1$，使得经过 $y_j$ 且平行于 $e_k$ 的直线，与经过 $y_{j+1}$ 且平行于 $e_k$ 的直线，和 $M$ 的交集不同。换言之，存在 $z_1$、$z_2 \in R$ 和 $i_0 \in \in \{1, \ldots, k-1\}$，使得对于所有 $i \in \in \{1, \ldots, k-1\}$，$\pi_{i_0}(z_1) \neq \pi_{i_0}(z_2)$，$\pi_i(z_1) = \pi_i(z_2) \setminus \{i_0\}$，并且经过 $z_1$ 且平行于 $e_k$ 的直线，与经过 $z_2$ 且平行于 $e_k$ 的直线，和 $M$ 的交集不同。但这样一来，经过 $z_1$、$z_2$ 且平行于 $e_{i_0}$、$e_n$ 的张成空间的二维平面 $Q$，与 $M$ 的交集就不是一个二维矩形，这就产生了矛盾。□

**定理9.2**。设 $n \geq 3$。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的极小调节划分。那么，$\mathcal{P}$ 的每个极大曲面都是一个$(n-1)$维矩形。

证明。设 $M$ 是 P 的一个极大曲面，位于层 $d$。显然， $M$ 是一个 $(n-1)$ 维矩形多面体。由引理 9.1，只需证明，对于每个 $x \in \partial M$ 以及每个足够小的 $(n-1)$ 维矩形 $R$（以 $x$ 为中心）， $R \cap M$ 是一个 $(n-1)$ 维矩形。为此，只需证明，每个足够小的 $n$ 维矩形 $R$（以 $(x,d)$ 为中心）都具有这样的性质： $R \cap (M \times \{d\})$ 是一个 $(n-1)$ 维矩形。

考虑一个以（$x,d$）为中心、足够小的 $n$ 维矩形 $R$。那么 $\mathrm{P}_R = \{P \cap R : P \in \mathrm{P}\}$ 是一个最小局部受控划分。回顾定理 3.9，它对任意最小局部受控划分进行了分析。使用该定理中的记号，我们得到互不相同的 $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$，以及一棵有 $k+1$ 层的带标记的满简单树 $T$，使得 $\mathrm{P}_R$ 由 $\mathrm{P}(i_1, \dots, i_k; T)$ 给出。由于 $x \in \partial M$ 和 $M$ 是极大曲面，存在 $1 \le m \le k$ 使得 $n = i_m$。于是，根据 $\mathrm{P}(i_1, \dots, i_k, T)$ 的定义，在构造 $\mathrm{P}(i_1, \dots, i_k, T)$ 的第 $m$ 步，令 $H_n$ 为垂直于 $e_{i_m} = e_n$ 的超平面，则 $H_n \cap M$ 不会与之前经过（$x,d$）的任何超平面相交，也就是说，不会与垂直于 $e_{i_1}, \dots, e_{i_{m-1}}$ 的超平面相交。由此可知， $H_n \cap M$ 是一个（$n-1$）维矩形。□

现在我们得到了引理 5.8 的如下推广。

**定理 9.3**。设 $R = S \times [a_n, b_n]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个 $n$ 维矩形，且 $\mathcal{P}$ 是 $R$ 的一个最小局部受控划分。设 $M_1$ 是一个从 $d_1$ 到 $d_2$ 的虚拟极大曲面，满足 $a_n \le d_1 < d_2 < b_n$，且 $d_2$ 是其中最大的一个。那么以下至少有一项成立：

*(i)* 在层 $d_2$ 上存在唯一的极大曲面 $M_2$，使得 $M_1 \subsetneq M_2$；*(ii)* 存在 $d_3 > d_2$，以及一个从 $d_2$ 到 $d_3$ 的虚拟极大曲面 $M_2$，使得 *(iia)* $M_1 \subsetneq M_2$，*(iib)* $\pi_i(M_1) \neq \pi_i(M_2)$ 对恰好一个 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ 成立，*(iic)* 对任意 $\vec{a} = (a_1, \dots a_{n-1}) \in M_2 \setminus M_1$， $\vec{a}$ 都位于层 $d_2$ 上的一个极大曲面 $N$ 上，使得 $\mathrm{int}(N) \cap \mathrm{int}(M_1) \neq \emptyset$。

证明。令 $M_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$ 和 $d_2 > d_1$ 如命题所述，并令 $P \in \mathrm{P}$ 不遵循 $M_1 \times [d_1, b_n]$，且有一个面 $F$ 满足 $\pi_n(F) = \{d_2\}$。令 $N$ 为 P 的极大曲面，使得 $N \times \{d_2\}$ 包含 $F$。记作 $N = [a'_1, b'_1] \times \cdots \times [a'_{n-1}, b'_{n-1}]$。

令 $A = \{1, \dots, n-1\}$ 和 $F' = \pi_A(F)$，即 $F = F' \times \{d_2\}$。那么 $F'$ 是一个（$n-1$）维矩形，并且根据假设，$\mathrm{int}(F') \cap \partial M_1 \neq \emptyset$。由于 $N \times \{d_2\}$ 延伸了不遵循 $M_1 \times [d_1, b_n]$ 的 $F$，因此存在一个坐标 $1 \le i \le n-1$，使得以下至少一项成立： $a'_i < a_i < b'_i$、 $a'_i < b_i < b'_i$。为明确起见，且不失一般性，我们假设 $a'_{n-1} < a_{n-1} < b'_{n-1}$。我们还可以假设存在一个坐标，记为 $1 \le m \le n-1$，使得 $[a'_m, b'_m]$ 不包含 $[a_m, b_m]$；否则， $N$ 真包含 $M_1$，这便推出所要证明的结论。以下至少一项成立：$a_m < a'_m < b_m$、 $a_m < b'_m < b_m$。不失一般性，假设 $a_m < b'_m < b_m$。

首先假设 $m \neq n-1$。设 $W$ 为超平面 $\pi_{n-1}(x) = a_{n-1}$ 中位于 $\pi_n(x) = d_2$ 超平面下方的部分，即 $W = \{x \in R : \pi_{n-1}(x) = a_{n-1}, \pi_n(x) \le d_2\}$。设 $F$ 如上所述， $G$ 为 $P$ 在超平面 $\pi_m(x) = b'_m$ 上的面。设 $z$ 为 $W$、 $F$ 与 $G$ 的交集上的一个点，该点容易存在。在三维情形中，点 $z$ 如图4中的点 $x$ 所示。设 $R$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中点 $z$ 附近的一个小 $n$ 维矩形。由于 P 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $(n+1)$-受控划分，定理 3.9 的分析适用。考虑这三个的排序 $<$

定理 3.9 中的曲面 $W$、 $F$、 $G$。由于 $F$分割 $W$，我们必有 $F < W$。由于$W$ 分割 $G$，我们有 $W < G$。因此， $F < W < G$ ，从而 $F < G$。但这样一来， $F$ 必须分割 $G$ ，然而它并不如此，因为极大曲面 $M_2$ 仅有满足 $\pi_m(x) \le \pi_m(z)$ 的点 $x$。因此，这种情况不可能发生。

现在假设 $m = n - 1$。令 $G$ 为超平面 $\pi_{n-1}(x) = b'_{n-1}$ ，并令 $F$ 再次表示超平面 $\pi_n(x) = d_2$ （这里稍微滥用了记号，因为 $F$ 原本是 $P$ 的一个面，但此处我们用它表示该面所在的超平面）。首先，假设存在一个 $\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-1, n\}$，使得 $\pi_\ell(N) \neq \pi_\ell(M_1)$。由于 $\ell \neq m = n - 1$，我们处于 $\pi_\ell(N) \supseteq \pi_\ell(M_1)$ 的情形，因此 $\pi_\ell(N) \supsetneq \pi_\ell(M_1)$。不失一般性，我们可以假设 $a'_\ell < b_\ell < b'_\ell$。现在令 $W$ 再次表示超平面 $\pi_\ell(x) = b_\ell$ 中位于超平面 $F$ 下方的部分。固定一点 $z \in F \cap G \cap W$。再次考虑 $\mathbb{R}^n$ 中以 $z$ 为中心的一个充分小的 $n$ 维矩形 $R$，并应用定理 3.9。由此可得， $F$ 将 $W$ 分开，因此 $F < W$，与定理 3.9 中一样。我们还有 $W$ 将 $G$ 分开，因为 $a_{n-1} < b'_{n-1} < b_{n-1}$ 且 $m = n - 1$。因此，$W < G$ ，从而 $F < G$，也就是说 $F$ 将 $G$ 分开，这与之前一样构成矛盾。

剩下的情况是，对于所有 $i \neq n - 1$， $\pi_i(N) = \pi_i(M_1)$。设 $N'$ 是层 $d_2$ 上另一个满足 $\mathrm{int}(N') \cap \partial M_1 \neq \varnothing$ 的极大曲面。前面的证明表明，至多存在一个 $j \in \{1, \dots, n-1\}$ 使得 $\pi_j(N') \neq \pi_j(M_1)$。若这样的 $j$ 存在且 $j \neq n - 1$，则 $\mathrm{int}(N \cap N') \neq \varnothing$ 且 $\mathrm{int}(N \setminus N') \neq \varnothing$，这与 $N'$ 的极大性矛盾。因此，对于任意这样的 $N'$，对于所有 $j \neq n - 1$，都有 $\pi_j(N') = \pi_j(M_1)$。令 $N''$ 为所有满足 $\mathrm{int}(N') \cap \partial M_1 \neq \varnothing$ 的层 $d_2$ 上的极大曲面 $N'$ 的并集。我们已经证明，对于所有 $j \neq n - 1$，都有 $\pi_j(N'') = \pi_j(M_1)$。令 $M_2 = M_1 \cup N''$。那么 $M_2$ 是一个 $(n-1)$ 维矩形。根据 $M_2$ 的定义，P 将 $M_2$ 从 $d_2$ 映到某个 $d_3 > d_2$。因此， $M_2$ 是一个满足 (iia)–(iic) 的虚拟极大曲面。□

利用定理 9.2 和 9.3，我们现在证明一个关于 $\mathbb{R}^n$的极小受控划分的结果，该结果本身也可能具有独立意义。之后，我们用这个结果简要概述定理 8.4 的另一种证明。

**引理 9.4.** 设 $n \ge 3$ 和 $b > d > 0$。设 $R$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形，其边长至少为 $b$。设 $\mathcal{P}$ 是 $R$ 的一个离散常数为 $d$的最小局部受控划分。假设内$(R) \cap \partial\mathcal{P} \neq \varnothing$。那么存在一条线段$s \subseteq R$，它平行于某个 $e_j$，且 $s$ 的长度为 $\sqrt{bd/(n-1)}$，并且 $s \subseteq \partial\mathcal{P}$。事实上，对于某个 $e_i \neq e_j$，我们有 $s \subseteq \partial_{e_i}\mathcal{P}$。

证明。 令 $c = \sqrt{bd/(n-1)}$。不失一般性，我们可以假设所有 $P \in$P 的边长都小于 $c$，否则引理显然成立。令 $M_1$ 为层级 $d_1$上的极大曲面，其中 $\min \pi_n(R) < d_1 < \min \pi_n(R) + c$。那么，P 从 $d_1$ 到某个 $d_2 > d_1$ 都遵循$M_1$，其中 $d_2$ 是满足条件的最大值。若 $d_2 - d_1 \ge c$，或者若 $M_1$ 有一条边的长度至少为 $c$，则结论成立，因此我们假设并非如此。根据定理 9.3，存在一个虚拟极大曲面 $M_2$，它是一个 $(n-1)$ 维矩形，且适当地包含 $M_1$，使得对于某个 $d_3 > d_2$，P 遵循 $M_2 \times [d_2, d_3]$。同样，若 $d_3 - d_2 \ge c$，则结论成立。注意，在从 $M_1$ 到 $M_2$ 的过程中， $e_1$、.....、$e_{n-1}$ 方向中的边长至少有一个严格增大。根据 P 的离散常数的定义，边长的增量至少为 $d$。若任一边长增大到至少 $c$，则结论成立，因此我们假设并非如此。我们重复这一论证，直到找到层级为 $d_k$ 的虚拟极大曲面 $M_k$，其中 $d_k < \max \pi_n(R)$ 是满足条件的最大值。我们可以假设，对于

所有 $1 \leq j \leq k-1$、 $d_{j+1} - d_j < c$，否则结论成立。这就得到

$$k \geq \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor \geq \frac{b}{c} - 1.$$

由于每个 $M_j$ 都有 $n-1$ 个边长，经过 $k$ 多步后，某个 $e_i$ 的边长必然至少为

$$\left\lceil \frac{k}{n-1} \right\rceil \cdot d \geq \frac{k}{n-1} d \geq \left( \frac{b}{c} - 1 \right) \frac{d}{n-1} = \sqrt{bd} - \frac{d}{n-1} \geq \frac{\sqrt{bd}}{n-1} = c.$$

引理的证明完成。 □

接下来，我们利用引理 9.4 概述定理 8.4 的另一种证明。我们将证明，假设的 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的极小调节分割 P 限制在某个科恩泛型实数 $x \in 2^{\mathbb{Z}^n}$ 的等价类上时，违反了引理 9.4（考虑相应的 $\mathbb{R}^n$ 的受控划分 $\mathrm{P}' = \mathrm{C}_{\mathcal{P}}$，如定义 6.2 中所述）。这将证明定理 8.4。

设 P 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的一个博雷尔、非退化的极小调节分割。令 $\mathbb{P}$ 为用于添加 $2^{\mathbb{Z}^n}$ 中一个元素的科恩强迫，因此条件 $p$ 是 $2^R$ 的元素，其中 $R = \mathrm{dom}(p)$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个有限矩形。令 $x$ 为 $\mathbb{P}$ 的一个泛型，我们将其视为 $2^{\mathbb{Z}^n}$ 的一个元素。令 $\mathrm{P}_x$ 为分割 P 限制在 $x$ 的等价类上的部分，并令 $\mathrm{P}'_x = \mathrm{C}_{\mathcal{P}_x}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的相应受控划分。

我们先构造一个初始条件 $p_0$。根据非退化条件的绝对性，我们知道 $\mathrm{P}_x$ 是非退化的，也就是说，对于每个方向 $e_i$，都存在一个平移 $s_i \cdot x$，使得 $s_i \cdot x$ 和 $(s_i + e_i) \cdot x$ 属于 $\mathrm{P}_x$中的同一个元素。于是，我们很容易得到一个定义域为 $\mathbb{Z}^n$ 中以$\vec{0}$ 为中心的矩形的 $p_0$，其边长为 $d_0$，使得对于所有方向 $e_j$ 和 $e_i \neq e_j$， $p_0$都强制“存在某个 $a_j \in \mathbb{Z}$，使得 $a_j e_j$ 和 $a_j e_j + e_i$ 属于 $\mathrm{dom}(p_0)$，并且属于 $\mathrm{P}_x$中的同一个元素。”

利用 $p_0$，我们将构造一个条件 $q \in \mathbb{P}$，随后将其扩展为一个泛型 $y \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$。我们将使 $\mathrm{dom}(q)$ 成为一个较大的 $n$维矩形 $R$，其边长为 $b$，并使 $q$ 强制不存在长度为$\sqrt{b}/(n-1)$、方向 $e_i$ 不平行于 $s$ 且满足 $s \subseteq \partial_{e_i} \mathrm{P}'_x$的线段 $s \subseteq R$。注意到 $\mathrm{P}'_x$ 的离散常数为 1，这将与引理 9.4 矛盾，并完成定理 8.4 的证明。

令 $b$ 为 $d_0$ 的一个较大倍数，且

$$b > \frac{\sqrt{b}}{n-1} \gg 10nC^2 \cdot d_0^2.$$

这里， $C$ 是一个仅取决于 $d_0$ 和 $n$ 的常数。我们取 $C$ 使其满足 $C > 2d_0^n$。

为定义条件 $q \in \mathbb{P}$，我们从 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个 $n$维矩形 $Q = [0,b]^n$ 开始，其边长为 $b$。对于满足 $1 \leq m \leq b$ 且为 $2Cd_0$的倍数的每个整数 $m$，考虑 $\mathbb{Z}^n$ 中由方程给出的超平面 $H_m$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m.$$

对于每个超平面 $H_m$，我们进行如下构造。令

$$m' = 1 + \left( \frac{m}{2Cd_0} \mod n \right).$$

对于每个 $k \in \{1、\ldots\ldots、n\}$，我们通过为任意给定的 $\vec{c} = (c_1、\ldots\ldots、c_n) \in \mathbb{Z}^n$ 指定 $T_k(c_1、\ldots\ldots、c_n)$ 来定义一个辅助对象 $T_k \in 2^{\mathbb{Z}^n}$。令 $(v_\ell)^{\ell < d_0^{n-1}}$ 枚举向量 $v$，它们位于

$$\mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_{k-1} \oplus \mathbb{Z}e_{k+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$$

其中 $v$ 的所有系数都属于 $[0, d_0)$。令 $j = \lfloor c_k/d_0 \rfloor$ 模 $d_0^{n-1}$，并设

$$T_k(c_1, \ldots, c_n) = p_0(\vec{c} + v_j \mod (d_0, \ldots, d_0)).$$

对于给定的 $m$，令 $Q_m$ 为 $T_{m'}$ 与 $H_m \cap Q$的 $Cd_0$ 邻域的交集。最后，令 $q$ 为 $\bigcup_m Q_m$ 在 $\mathrm{dom}(Q)$ 上的任意扩展。由于我们所考虑的 $m$ 的取值间隔至少为 $2Cd_0$，因此若 $m_1 \neq m_2$，则有$Q_{m_1} \cap Q_{m_2} = \varnothing$。由此，$q$ 定义良好。构造 $q$的示意图见图 11。

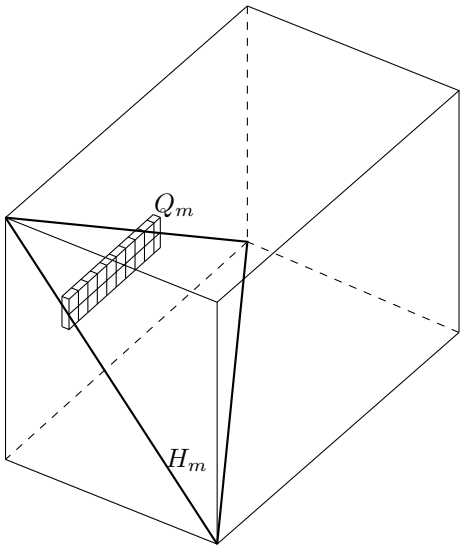



FIGURE 11. 条件 $q$的构造。图中展示了超平面 $H_m$ 之一及 $Q_m$ 的一部分，后者由 $p_0$的副本组成。

令 $y \in 2^{\mathbb{Z}^n}$ 为扩展 $q$的一般元素。则 $y \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$。令 P 为 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的博雷尔最小受规划分，并将其限制在 $y$的等价类上；我们将该等价类与 $\mathbb{Z}^n$的一个极小调节分割等同。令 $\mathrm{P}'$ 为 $\mathbb{R}^n$对应的极小调节分割。将引理 9.4 应用于 $\mathrm{P}'$ 和 $\mathrm{dom}(q)$（我们可以将其视为 $\mathbb{R}^n$中的一个 $n$维矩形），可得 $\mathrm{dom}(q)$中的一条线段 $s'$，它平行于某一坐标轴，设为 $e_j$；并且存在一个 $e_i \neq e_j$，满足 $s' \subseteq \partial_{e_i}\mathrm{P}'$，且 $s'$的长度至少为 $\sqrt{b}/(n-1)$。

设 $s \subseteq \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \partial P$是 $\mathbb{Z}^n$ 中平行于 $s'$ 且长度至少为 $|s'| - 1$的线段，并满足 $|\pi_i(s) - \pi_i(s')| \leq 1/2$。因此，对于 $s$上的任意点 $u$，点 $u$和 $u + e_i$位于P的不同元素中。线段 $s$ 至少相交

$$\left(\frac{\sqrt{b}}{n-1} - 1\right)\frac{1}{2Cd_0} > 5nCd_0$$

许多超平面 $H_m$。因此存在一个 $m$，使得

$$\frac{m}{2Cd_0} \equiv j-1 \mod n \text{ and } m \notin [0,n] \cup [b-n,n]$$

使得

$$s \cap H_m \neq \varnothing \text{ and } [\pi_j(z) - Cd_0, \pi_j(z) + Cd_0] \subseteq \pi_j(s)$$

其中 $z$ 是 $s$ 与 $H_m$的交点。存在一个 $a < d_0^n \leq \frac{1}{2}Cd_0$，使得位于 $s$上的 $z + ae_j$处于 $Q_m$ 中 $p_0$ 的一个副本的中心（注意$z + ae_j$ 与 $H_m$的距离不超过 $Cd_0$）。由此可知，存在一个 $c < d_0$，使得$z + (a+c)e_j$ 与 $z + (a+c)e_j + e_i$ 位于P的同一个矩形中。由于 $a + c < Cd_0$，$z + (a+c)e_j$ 位于 $s$ 上，这与 $s$的上述性质相矛盾。

## References

[1] D. Eppstein，《计算几何问题的图论解法》。载于 *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* 1 16，第–页。计算机科学讲义5911。施普林格，柏林，2010。[2] S. Gao与S. Jackson，可数阿贝尔群作用与超有限等价关系。 *Invent. Math.* 201 (2015)，第1期，309–383。[3] S. Gao、S. Jackson、E. Krohne与B. Seward，强迫构造与可数Borel等价关系。 *J. Symb. Log.* 87 (2022)，第3期，873–893。[4] S. Gao、S. Jackson、E. Krohne与B. Seward，阿贝尔群作用的博雷尔组合学。预印本，2024。可获取于 arXiv:2401.13866[5] S. Jackson、A. S. Kechris与A. Louveau，可数Borel等价关系。 *J. Math.* ( ), *Logic* 2 2002 1, 1 80 第 期，第–页。[6] A. S. Kechris、S. Solecki与S. Todorcevic，博雷尔色数。 *Adv. Math.* 141 (1999)，第1期，1–44。[7] M. B. Klug，寻找极小矩形剖分，未发表手稿，可获取于 https://math.uchicago.edu/~mbklug/rectangles.pdf
[8] *European J. Combin.* 33 N. Reading，一般矩形剖分。(2012)，第4期，610–623。[9] D. Richter，关于一般矩形剖分的若干注记。 *Contrib. Discrete Math.* 17 (2022)，第2期，41–66。[10] W. Lipski Jr.、E. Lodi、F. Luccio、C. Mugnai、L. Pagli，论二维数据组织。II. *Fund. Inform.* (4) 2 (1978/79)，第3期，245–260。

School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R. China*Email address*: sgao@nankai.edu.cnDepartment of Mathematics, University of North Texas, 1155 Union Circle#311430, Denton, TX 76203, U.S.A. *Email address*: jackson@unt.edu