arXiv:2603.04704v1 [math.CO] 5 Mar 2026

用少量单色连通分支覆盖完全 r部超图

Luke Hawranick* Ruth Luo†

2026年3月6日

摘要

超图的边染色称为 *spanning*，如果每个顶点都关联染色中使用的每一种颜色。在本文中，我们证明，对于 $k \geq 2r \geq 6$，在完全 r部r一致超图 H的边的任意生成 k-颜色染色中，H 的顶点均可由至多 $k-r+1$ 个单色连通分支的集合覆盖。由此证明了 Gy´arf´as 和 Kir´aly 提出的猜想，该猜想与 Ryser 猜想的一个特殊情形有关。我们还证明，对于 $k \in \{2,3\}$，完全二部图的每个生成 k-边染色都存在一种覆盖其顶点的方法，所使用的单色连通分量至多为 k 个。

1 引言

超图 H 的最小顶点覆盖 是顶点的一个子集 S，使得对于每条边 e属于 H，都有$e \cap S \neq \varnothing$。$H$ 的匹配是由两两不相交的边组成的集合。对于每个 r-均匀超图 H，最小顶点覆盖的大小至多是最大匹配大小的 r 倍。事实上，H 的每条边都与最大匹配中的某条边相交。这个界是紧的，例如，考虑底集大小为 $rt-1$ 且满足 $t \in \mathbb{N}$ 时，由所有 r-元子集构成的超图。Ryser 的一个著名猜想指出，若 H 是 r-部的，则该界中的乘数可以改进为 $r-1$。

猜想 1.1 (Henderson [8], 归因于 Ryser)。设 H 是一个 r-部、r-均匀超图。H 的最小顶点覆盖大小至多为 $r-1$ 乘以 H的最大匹配大小。

当 $r=2$时，该猜想等价于图的 K˝onig 定理。Aharoni 也证明了该猜想在$r=3$ 的情形下成立 [2]，而对于 $r=4$，Haxell 和 Scott [7], 取得了部分进展，但一般情况下仍未解决。如果猜想成立，那么对于某些 1.1 的取值，猜想将是紧的。对于 r，例如，当存在阶为 $r-1$ 的射影平面时，我们考虑其对应的超图（其中点为顶点，直线为边）。从射影平面中删去一个顶点所诱导的子超图将是一个极值例子 [12]。此外，Abu-Khazneh、Bar´at、Prokrovskiy 和 Szab´o [1] 构造了一个超图；当存在阶为 $r-2$的射影平面时，该超图也达到相同的界。

受下界中射影平面出现的启发，人们为解决最大匹配大小为 1 的超图上的猜想做了大量工作。这类超图称为相交超图，因为任意两条边都共享一个顶点。相交超图这一特殊情形等价于以下关于边着色完全图中单色连通分量的猜想。

猜想 1.2 (Gy´arf´as [5])。在使用 r 种颜色对完全图的边进行任意染色时，覆盖 $V(G)$ 所需的单色连通分支数至多为 $r-1$。

猜想 1.1和猜想 1.2 对于相交超图等价，理由如下 [9]。设 H 是猜想 1.1 中具有划分 $V(H)=\bigcup_{i=1}^{r} V_i$的相交超图。我们构造

*南卡罗来纳大学，哥伦比亚，SC 29208，美国。电子邮箱：hawranil@email.sc.edu。

†南卡罗来纳大学，哥伦比亚，SC 29208，美国。电子邮箱：ruthluo@sc.edu。该作者的研究部分得到了美国国家科学基金会拨款 DMS-2452134 的支持。

一个图 G_H，其中有 $V(G_H) = E(H)$。对于 $u, v \in V(G_H)$，根据边 u 和 v 在 H 中相交的部 V_i 的最小索引，为 $uv \in E(G_H)$ 着色。对于 G_H 的每个顶点 u，若其包含在颜色 i 的 G_H 的单色连通分支中，则 H 中对应的边在部 V_i 包含 H 的唯一顶点，记为 $u(i)$。如果 i 颜色中的一条边为 uw，则 $u(i) = w(i)$。此外，对于与颜色 i 的 u 属于同一连通分支的任意 $x \in V(G_H)$，由于该连通分支是连通的，我们有 $x(i) = u(i)$。因此，覆盖 $V(G_H)$ 的一组 k 单色连通分量对应于大小为 k 的 H 的顶点覆盖。现在令 G 为猜想 1.2 中的一个 r色完全图。任意排列每种颜色的单色连通分支，令 $C_{i,j}$ 为颜色 i的连通分支 j。构造超图 H_G，其 $V(H_G) = \{C_{i,j}\}_{i\in[r],j}$，并根据连通分支 $C_{i,j}$的颜色对 $V(H_G)$进行划分。对于每个 $v \in V(G)$ 以及每种颜色 i，记 $j_{v,i}$ 为包含 v的颜色为 i 的连通分支的编号。然后，对于每个顶点 $v \in V(G)$，将 r-元组$\{j_{v,i}\}_{i\in[r]}$ 加入 $E(H_G)$。 r一致、 r部的超图 H_G 是相交的，因为对于任意 $e, f \in E(H_G)$，都对应着顶点 $u, v \in V(G)$。边 uv被染成G中的某种颜色，设为颜色 k，这意味着 u 和 v 位于同一个颜色为 k的单色连通分支中。因此， e 和 f在 V_k处相交。于是，大小为 k 的顶点覆盖 H_G 对应于一个由 k 个单色连通分支组成的集合，这些分支共同覆盖 G中的所有顶点。

我们注意到，该猜想对 $r \leq 5$ [11]已由 Tuza 证明，但情形 $r \geq 6$仍未解决。关于 Ryser 猜想及其诸多变体的综述，见 [4] 。

Gy´arf´as [5] 与 Lehel [10] 就猜想1.2的二部类比提出了问题。我们用双团来指任意完全二部图。有人猜想，每一个 r-边染色的双团 G至多需要 $2r - 2$ 个单色连通分量来覆盖 V（G）。该界将是紧的——由出现于 [5] 并重复于 [3]的例子给出。

猜想 1.3 （[5, 10]）。 在双团边的每一个 r-染色中，顶点集可以被至多 $2r - 2$ 个单色连通分量的顶点所覆盖。

数十年后，Chen， Fujita、Gy´arf´as、Lehel 和 T´oth [3] 更广泛地研究了该问题，证明了 t
猜想对于 $r \leq 5$ a
nd 将一般性情形归结为设计型猜想。
我们将在超图这一更一般的设定下讨论这些问题。超图 H 的一个 （连通） 连通分支是一个极大子超图 $H' \subseteq H$，使得每一对顶点 $u, v \in V(H')$ 都由 H' 中的一列边相连，其中第一条边包含 u，最后一条边包含 v，且序列中相邻的边相交。注意，该序列可以为空。此外，若 H 的边被着色，则某种颜色 c 的一个单色连通分支 是 H 在颜色为 c 的边上的子超图的一个连通分支。

Kir´aly [9] 证明了猜想 1.2 的类似结论，对于 r-均匀超图，并带有 $r \geq 3$.

定理 1.4 (Kir´aly [9])。 若 H 是一个有 $r \geq 3$ 的 k 边染色完全 r 均匀超图，则覆盖 $V(H)$至多需要$\lceil k/r \rceil$ 个单色连通分量，且此界是紧的。

1.1 生成染色与新结果

我们注意到，对于某个顶点关联的边所取颜色不超过 $r - 1$ 种的染色，猜想1.2 显然成立，因为我们可以取以该顶点为中心的至多 $r - 1$ 个单色星。对于每个顶点，其关联边都取遍所有 r 种颜色的染色称为**生成的**。换言之，在生成染色中，每个顶点都能看到每种颜色。

一个完全 r部 r均匀超图 H 是一个具有顶点划分 $V(H) = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$ 及$E(H) = \{\{v_1, \ldots, v_r\}$ 的超图： $v_i \in V_i$, $i \in [r]\}$。Gy´arf´as 和 Kir´aly 研究了完全1.2 猜想在具有生成染色的完全 r部 r均匀超图中的对应版本。

定义**覆盖数**，cov(r， k)，为满足以下条件的最小整数 ℓ： 对于任意完全 r 部 r 均匀超图的边的生成 k 染色， $V(H)$ 都可以用至多 ℓ 个单色连通分量覆盖。他们证明了在情形 $k \geq r + 1$ 下的以下结果。

定理 1.5 (Gy´arf´as, Kir´aly [6])。 对于所有 $t \geq 1$ 和 $r \geq 3$，$\mathrm{cov}(r, r+t) \geq t+1$。此外，当 $t \leq r-1$时，$\mathrm{cov}(r, r+t) = t+1$。

对于 $r \geq 3$ 和 $k \leq r$，他们指出 $\mathrm{cov}(r, k) = 1$。对于其余情形，有如下猜想。

猜想 1.6 (Gy´arf´as, Kir´aly [6])。 对于所有 $t \geq 1$ 和 $r \geq 3$，$\mathrm{cov}(r, r+t) = t+1$。

在本文中，我们通过补全情形 $t \geq r$，证明猜想 1.6 。

定理 1.7. 对于所有 $t \geq r \geq 3$，$\mathrm{cov}(r, r+t) = t+1$。

$\mathrm{cov}(r, r+t) \geq t+1$的下界来自 [6] 中一个非平凡的构造。我们证明其上界。

猜想 1.6 对于 $r = 2$并不成立，即双团。例如，设 $k = r+t = t+2$，并考虑双团 $X \cup Y$，其中 $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ 和 $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$满足边 $x_i y_j$被赋予颜色 $j-i$(模 k)。在这个生成的 k-染色中，每个颜色类都是一个完美匹配，因此每个单色连通分支恰好包含一条边。于是，需要 $k > t+1$ 个单色连通分支才能覆盖所有顶点。

我们注意到，目前已知的达到下界的唯一构造 $2k-2$ 在猜想1.3 中是一个非生成的染色。上文提到的完美匹配构造给出了一个生成染色，从而推出 $\mathrm{cov}(2, k) \geq k$。在 [6], 中，Kir´aly 猜想 $\mathrm{cov}(2, k)$ 至少应为 $2k - 4\sqrt{k}$，尽管我们并不知道任何达到这一界限的显式构造。我们利用$, k) = k$ 的 $k \in \{2, 3\}$ 结果证明了 [3]。其余情形尚未解决，而且可能相当困难。

定理1.8。对于 $k \in \{2, 3\}$，$\mathrm{cov}(2, k) = k$。

问题 1.9。 确定$\mathrm{cov}(2, k)$ 对于 $k \geq 4$ 的值。

记号。 在我们的证明中，我们考虑一个完全的 r-部 r-一致超图 H，其各部为 $V_1, V_2, \ldots, V_r$，以及一个任意的生成 $(r+t)$-染色，其颜色为 $c_1, c_2, \ldots, c_{r+t}$。颜色为$c_i$ 的边所构成的子超图将顶点划分为若干个连通分量。任意选定这些连通分量的一个排序，并令 $H_{c_i,j}$ 表示颜色 c_i 中的第 j 个连通分量。

我们为每个顶点 $v \in V(H)$关联一个向量 $\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{r+t}) \in [n]^{r+t}$，使得 v 包含在颜色 c_i的第a_i 个连通分支中，对所有 $1 \leq i \leq r+t$均如此。我们用 $\vec{v}(i)$表示 $\vec{v}$的第 i个坐标。对于一对顶点 u 和 v，我们用 $\delta(u, v)$表示它们的向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$之间的汉明距离，即 u 和 v 所属连通分支不同的颜色数。

2 定理1.7的证明

假设对于某个 r-均匀、完全 r-部超图 H，存在一种生成的（$r+t$）-染色，使得 $V(H)$无法被 $t+1$ 个单色连通分支覆盖。
我们将使用以下几个断言，其中前四个已在 [6] 中证明，或被隐含地使用。为完整起见，我们简要给出它们的证明。

命题 2.1。 设 $v_1, \ldots, v_r$ 是顶点，且对所有 $i \in [r]$ 都有 $v_i \in V_i$。那么存在一种颜色 c_j，使得顶点 $v_1, \ldots, v_r$ 都包含在同一个连通分支中。也就是说，对所有 $i, k \in [r]$，都有 $\vec{v}_i(j) = \vec{v}_k(j)$。

证明。 由于 H 是完全 r-部多部超图，$\{v_1, \ldots, v_r\} \in E(H)$，且它被赋予某种颜色 c_j。 □

断言 2.2。 对于任意由 $t+1$ 个指标 $j_1, j_2, \ldots, j_{t+1} \in [r+t]$ 组成的集合，以及任意向量 $(a_1, \ldots, a_{t+1}) \in [n]^{t+1}$，存在一个顶点 $v \in V(H)$，使得对所有 $i \in [t+1]$ 都有 $\vec{v}(j_i) \neq a_i$。

证明。 如果存在一组 $t+1$ 指标和一个向量（a_1，……，a_{t+1}），使得对于每个顶点 $v \in V$（H），都有 $\vec{v}$（j_i）$= a_i$ 对某个 $i \in [t+1]$成立，那么 V（H）可由至多 $t+1$ 个单色连通分量覆盖：$H_{c_{j_1},\ a_1}$，……，$H_{c_{j_{t+1}},\ a_{t+1}}$，这就产生了矛盾。 □

断言 2.3。 对于任意颜色 c_j和任意一部 V_i，至少存在 $t+2$ 个顶点 v_1，……，$v_{t+2} \in V_i$，它们分别属于颜色 c_j的不同连通分支。也就是说，对于所有不同的 i、$k \in [t+2]$，都有 $\vec{v}_i(j) \neq \vec{v}_k(j)$。

证明。 反设 V_i至多被 $t+1$ 个颜色为 c_j的连通分量覆盖。令 $\mathcal{C}$为这些连通分量构成的集合。固定 $v \in V(H)-V_i$。由于 $E(H)$ 的 $(r+t)$-染色是生成的，且 H是 r-部的，因此存在一条颜色为 c_j 的边，同时包含 v 和 V_i中的一个顶点 v_i。于是，$\vec{v}_i(j) = \vec{v}(j)$，因此 $v \in \mathcal{C}$。故 $V(H)$ 被 $\mathcal{C}$覆盖，矛盾。 □

命题 2.4。 若 $u, v \in V(H)$ 属于不同的部，则 $\delta(u,v) \leq t+1$。

证明。反设存在属于不同部的 $u, v \in V(H)$，使得 $\delta(u,v) \geq t+2$。通过重新标记各部、颜色和连通分量，不妨设 $u \in V_r$, $v \in V_{r-1}$, $\vec{u} = (1,1,\ldots,1)$，且 $\vec{v} = (1,1,\ldots,1,2,\ldots,2)$，其中 $\vec{v}$中至多有 $r-2$ 个项为 1。根据断言 2.3，对每个 $i \in [r-2]$，存在 $v_i \in V_i$ 使得 $\vec{v_i}(i) \neq 1$。注意，$\{v_i : i \in [r-2]\} \cup \{u, v\}$ 是一个由 r 个来自两两不同部的顶点构成的集合。对每个 $i \in [r-2]$，有 $\vec{v_i}(i) \neq \vec{u}(i)$；对所有 $j > r-2$，有 $\vec{v}(j) \neq \vec{u}(j)$。这与命题 2.1 矛盾。 □

断言 2　.5. 存在顶点 u、$v \in V(H)$ 属于不同的部，使得 $\delta(u,v) \geq r$。

证明。再次通过重新标记颜色和连通分量，我们可以假设存在一个顶点 $a \in V_1$ ‘满足$\vec{a} = (1,1,\ldots,1)$。由断言 2.2，对于任意满足 $|J| = t+1$ 的指标集合 $J \subseteq [r+t]$，我们可以找到一个顶点b_J，使得对所有 $j_i \in J$ 都有 $\vec{b}_J(j_i) \neq 1$。（某些 b_J 可能是相同的顶点。）于是$\delta(a, b_J) \geq t+1 > r$。若存在某个 $b_J \notin V_1$，则 a与 b_J满足该断言，证明即告完成。因此假设所有这样的b_J 都属于 V_1。

同理，若存在任意一个 $b \in V_2$ 满足 $\delta(a,b) \geq r$，则结论成立。因此，我们可以假设每个 $b \in V_2$ 中至多有 $r-1$ 个坐标在 $\vec{b}$中不等于 1，于是存在一个由 $r+t-(r-1)$ 个 $= t+1$ 指标组成的集合 J，使得 $\vec{b}$在这些指标对应的位置上等于 1。固定这样的一个 $\vec{b}$和 J。根据构造，我们得到 $\delta(b, b_J) \geq t+1$，且 $b_J \in V_1$。因此，b和 b_J 满足该断言。

□

2.1 $r = 3$的情形

本节考虑情形 $t \geq r = 3$。我们用 $t+3$ 种颜色给 H着色。

对于任意三个顶点 a, b, c，若颜色 c_j满足 abc-区分 条件，即 a、b和 c属于颜色 c_j下不同的连通分支，则称颜色 c_j具有 abc-区分 性质。等价地，$\vec{a}(j)$、$\vec{b}(j)$和 $\vec{c}(j)$互不相同。

断言 2.6. 对于任意 $a \in V_1$、$b \in V_2$、$c \in V_3$，至多存在一种 abc-区分 *colo* r.

证明。 假设 t hat，对于某些 $a \in V_1$，$b \in V_2$，$c \in V_3$，至少存在 2 abc 种区分颜色。定义

$$I_{ab} = \{j : \vec{a}(j) = \vec{b}(j)\}.$$

类似地定义 I_{bc} 与 I_{ac}。对于每个 $j \in I_{ab}$，a 与 b 属于颜色 c_j的同一连通分支，$H_{c_j,\ \vec{a}(j)}$。此外，若 j 属于 I_{ab}，I_{bc}，I_{ac}的两个集合，则 a，b，c 均属于连通分支$H_{c_j,\ \vec{a}(j)}$。定义

$$\mathcal{C}_{ab} = \{H_{c_j, \vec{a}(j)} : j \in I_{ab}\}$$

为同时包含 a 与 b的单色连通分量之族。我们类似地定义 $\mathcal{C}_{bc}$ 与 $\mathcal{C}_{ac}$。则

$$|\mathcal{C}_{ab} \cup \mathcal{C}_{bc} \cup \mathcal{C}_{ac}| = |I_{ab} \cup I_{bc} \cup I_{ac}| = t+3-|\{j : c_j \text{ is } abc\text{-distinguishing}\}| \leq t+1.$$

我们将证明，可以用至多 $t+1$ 个单色连通分量覆盖 $V(H)$。任取 $v \in V_1$。向量 $\vec{v}$、b、$\vec{c}$ 必须在某个坐标 j上完全相同。根据定义，$j \in I_{bc}$，因此 $V_1 \subseteq \mathcal{C}_{bc}$。同样，$V_2 \subseteq \mathcal{C}_{ac}$ 和 $V_3 \subseteq \mathcal{C}_{ab}$。由于 $V(H) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$，证明完毕。

□

	连通分支 c_1	c_2	Part
$\vec{v_1}$	1	1	V_1
$\vec{v_2}$	2	2	V_2
$\vec{u}$	α_1	α_2	V_1
$\vec{v_3}$	β_1	2	V_3
$\vec{v'_3}$	2	β_2	V_3
$\vec{w_2}$	γ_1	1	V_2

图1：用于证明情形 $r = 3$ 的颜色 c_1 和 c_2 对应的连通分量。

我们现在重新 准备证明定理 1.7 ，其中 $r = 3$。在整个证明过程中，可以参考图 2 .1.

关于 $r = 3$ 的定理 1.7 的证明。根据命题 2.5，我们可以重新标记 V（H）的部，使得存在 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2$ ，其中 δ（v_1， v_2） ≥ 3。不妨设 $\vec{v_1}$（1） $= \vec{v_1}$（2） $= 1$，而 $\vec{v_2}$（1） $= \vec{v_2}$（2） $= 2$。由于 $t + 1 \geq r + 1 = 4$，只需证明 V（H）的每个顶点都被四个连通分量 H_{c_1},1、 H_{c_1},2、 H_{c_2},1 和 H_{c_2},2 的并集覆盖。反设存在某个 $u \in V$（H），其中 $\vec{u}$（1） $= \alpha_1 \notin \{1, 2\}$ 且 $\vec{u}$（2） $= \alpha_2 \notin \{1, 2\}$。根据断言 2.6， $u \notin V_3$，否则颜色 c_1 和 c_2 将是 v_1v_2u-可区分的。不失一般性，设 $u \in V_1$。若 $u \in V_2$，证明过程完全对称。

由断言 2.3，存在 $v_3 \in V_3$ 使得 $\vec{v_3}(1) = \beta_1 \notin \{1, 2, \alpha_1\}$。注意颜色 c_1 是 $v_1v_2v_3$-可区分的。由断言 2.6，因为颜色 c_2 并非同时也是 $v_1v_2v_3$- 可区分的，我们有 $\vec{v_3}(2) \in \{1, 2\}$。同样，颜色 c_1 是 uv_2v_3- 可区分的，因此 $\vec{v_3}(2) \in \{\alpha_2, 2\}$。故 $\vec{v_3}(2) = 2$。

类似地，由断言 2.3，存在 $v'_3 \in V_3$ 使得 $v'_3(2) = \beta_2 \notin \{1, 2, \alpha_2\}$。因为颜色 c_2 是 $v_1v_2v'_3$-可区分的且 $uv_2v'_3$-可区分的，由断言 2.6，我们有 $v'_3(1) = 2$。

由同样的论证，存在 $w_2 \in V_2$ 使得 $\vec{w_2}$(1) $= \gamma_1 \notin \{1, 2, \alpha_1, \beta_1\}$。颜色 c_1 是 $v_1w_2v_3$-区分的，故 $\vec{w_2}$(2) $\in \{1, 2\}$ ，并且是 $v_1w_2v'_3$-区分的，故 $\vec{w_2}$(2) $\in \{1, \beta_2\}$。于是， $\vec{w_2}$(2) $= 1$。这与颜色 c_1 同样是 $uw_2v'_3$-区分的这一事实相矛盾，其中 $\vec{w_2}$(2) $\in \{\alpha_2, \beta_2\}$。至此完成了情形 $r = 3$的证明。 □

2.2 情形 $r \geq 4$

我们现在假设 $r \geq 4$。在整个证明中，读者可参阅图2.2。

设 b_{r-1} 与 b_r 为满足 $\delta(b_{r-1}, b_r) \geq r$ 的顶点，这由命题 2.5 得到。不失一般性，假设$b_{r-1} \in V_{r-1}$与 $b_r \in V_r$，其中 $\vec{b}_r$ =(1, 1, 1 . . . , 1)， $\vec{b}_{r-1}$ =(2, 2, . . . , 2, 1, 1, . . . , 1)，且对某个 $q \geq 1$有 $r-1+q$个2。此外，由命题 2.4，我们有 $\delta(b_{r-1}, b_r) \leq t + 1 < r + t$，因此 $\vec{b}_{r-1}$ 至少包含一个1。

根据命题 2.3，存在顶点 $b_1 \in V_1$， $b_2 \in V_2$，.....， $b_{r-2} \in V_{r-2}$ 使得 $b_i(i) \notin \{1, 2\}$ 对所有 $i \in [r-2]$都成立。此外，根据命题 2.2，还存在顶点 d 和 d' (可能 $d = d'$)满足

$$\vec{d}(j) \neq \vec{b}_1(j) \text{ for } r \leq j \leq r - 1 + q; \qquad \vec{d}(j) \neq 1 \text{ for } r - 1 + q < j \leq r + t,$$

$$\vec{d'}(j) \neq \vec{b}_2(j) \text{ for } r \leq j \leq r - 1 + q; \qquad \vec{d'}(j) \neq 1 \text{ for } r - 1 + q < j \leq r + t.$$

顶点 d 属于部 V_i ，其中某个 i ，而 d' 属于 $V_{i'}$ ，其中某个 i'。我们考虑边 e =$\{b_1, \ldots, b_r\} - \{b_i\} \cup \{d\}$ 和 $e' = \{b_1, \ldots, b_r\} - \{b_{i'}\} \cup \{d'\}$，它们分别获得颜色 c_{j^*} 和 c_{k^*}。因此， e 中的 r 顶点的向量在第 j^*个坐标上必须都相同，对于 e'也类似。

断言 2.7。 $d, d' \in V_{r-1} \cup V_r$.

证明。若 $d \in V_i$ 其中 $i \in [r-2]$，则 e 包含 b_{r-1}, b_r, 以及 d。向量 d 与 b_r 在第 $(r-1+q)$个坐标之后不同，且 b_{r-1} 与 b_r 在第 1 至第 $r-1+q$ 个坐标上不同，矛盾。因此坐标 j^* 不可能存在。对 d' 同样成立。 □

因此 i，$i' \in \{r, r-1\}$。令 b_q 为 $\{b_{r-1}, b_r\} - \{b_i\}$中的唯一顶点。我们考虑对应于边 e中各顶点的 r 向量。注意到 $b_q \in e$。

向量 b_1 和 d 在从 r 到 $r-1+q$的坐标上不同，而 d 和 b_q 在坐标 $r-1+q$之后不同。此外，对于任意 $j \in [r-2]$，b_j 在坐标 j上不同于 $\vec{b}_q$。因此，各向量可能全部相同的唯一坐标是 $j^* = r-1$。我们有 $\vec{b}_1(r-1) = \ldots = \vec{b}_{r-2}(r-1) = \vec{b}_q(r-1) = \vec{d}(r-1)$。通过对称论证，$\vec{b}_1(r-1) = \ldots = \vec{b}_{r-2}(r-1) = \vec{d'}(r-1)$。这意味着 $\vec{d}(r-1) = \vec{d'}(r-1) =: \alpha$ 其中$\alpha = \vec{b}_q(r-1) = 1$ 当 $i = r-1$ 时，而 $\vec{b}_q(r-1) = 2$ 当 $i = r$时，并且 $i = i'$。

回顾一下，我们选择了满足 $j \in [r-2]$ 的顶点 b_j，使得 $b_j(j) \notin \{1, 2\}$。我们将证明，除了坐标 j 外，对于 $j \in [r-2]$，$\vec{b}_j$ 的前 $r-1$ 个元素必须分别等于 1 或 2。

断言 2.8。 </style}对于每个满足 的 和，都有 $(k) = \alpha$。此外，$d(2) = d(3) = \ldots = \vec{d}(r-1) = \alpha$。

证明。我们已经证明 $b_j(r-1) = \alpha$ 对所有 $j \in [r-2]$均成立，并且 $d(r-1) = \alpha$。首先固定 $2 \le k \le r-2$。根据断言 2.3，我们可以找到一个顶点 $b'_k \in V_k$ 满足 $\vec{b}'_k(r-1) \notin \{1, 2\}$。如果 $d \in V_r$，那么边 $f = \{b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, d\} - \{b_k\} \cup \{b'_k\}$ 具有某种颜色 $c_{j'}$，因此与这些 r 顶点对应的向量的第 j'个坐标必须相同。根据构造 $j' \neq r-1$，由于$\vec{b}'_k(r-1) \neq \vec{b}_{r-1}(r-1)$。我们不能有 $j' > r-1+q$，因为 $\vec{d}$和 $\vec{b}_{r-1}$ 在这些坐标上不同；同样也不能有 $r-1 < j' \le r-1+q$，因为 $\vec{d}$和 $\vec{b}_1$ 在这些坐标上不同。对于任意 $1 \le j \le r-2$、$j \neq k$，向量 $\vec{b}_j$ 在坐标 j处不同于 $\vec{b}_{r-1}$。剩下的唯一坐标是 $j' = k$。特别地，$\vec{b}_{r-1}(k) = 2 = \alpha$，因此对于所有 $j \neq k$，$\vec{d}(k) = \vec{b}_j(k) = \vec{b}_{r-1}(k) = \alpha$。类似地，我们可以证明，如果 $d \in V_{r-1}$，那么对于所有 $j \neq k$，$\vec{d}(k) = \vec{b}_j(k) = \vec{b}_r(k) = 1 = \alpha$。

最后，固定 $b'_1 \in V_1$使得 $\vec{b}'_1(r-1) \notin \{1, 2\}$。若 $d \in V_r$，令 $f' = \{b'_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, d'\}$，并令 k'为这些 r 个顶点的向量相同的一个坐标。由类似的论证可得 $k' = 1$，因此对所有 $j \neq 1$，$\vec{b}_j(1) = \vec{b}_{r-1}(1) = 2 = \alpha$。此外，若 $d \in V_{r-1}$，则 $\vec{b}_j(1) = 1 = \alpha$。 □

从现在起，我们假设 $d \in V_r$。$d \in V_{r-1}$ 的情形是对称的，因此略去不讨论。

定理 1.7 在 $r \ge 4$时的证明。令 $b'_{r-1} \in V_{r-1}$ 为满足 $\vec{b}'_{r-1}(r-1) \notin \{1, 2\}$的一个顶点。考虑边 $\{b_1, \ldots, b_{r-2}, b'_{r-1}, d\}$，其 r个顶点必定在某个坐标 j'上相同。根据 b_1的构造，....., b_{r-2}、b'_{r-1} 以及断言 2.8，可得 $j' \notin [r-1]$。此外，d与 b_1在从 r 到 $r-1+q$ 的坐标上不同。因此 $j' \ge r-1+q+1$。不失一般性，令 $j' = r+q$，并设

$$\vec{d}(r+q) = \vec{b}_1(r+q) = \ldots = \vec{b}_{r-2}(r+q) = \vec{b}'_{r-1}(r+q) =: \beta \neq 1,$$

（因为根据构造，$d\,(r+q) \neq 1$。）

现在令 d'' 为一个满足 $\vec{d''}\,(r-1) \neq 2$，$\vec{d''}\,(i) \neq \vec{b}_1\,(i)$ 的顶点，其中 $r \le i \le r-1+q$，且 $\vec{d''}\,(i) \neq 1$ 对于 $r+q+1 \le i \le r+t$成立。这涉及 $1+q+\,(t+1-q-1) = t+1$ 个坐标，因此根据命题2.2，这样的顶点存在。

顶点 d''属于某个集合 V_i。如果 $i = r$，那么边 $\{b_1, \ldots, b_{r-1}, d''\}$ 的顶点必须在某个坐标 j'上相同。根据构造，$j' \notin [r-1+q]$。此外，$j' \notin \{r+q+1, \ldots, r+t\}$，因为 $\vec{d''}$在这些坐标上与 b_{r-1} 不同。因此 $j' = r+q$。但是 $\vec{b}_{r-2}\,(r+q) = \beta \neq 1 = \vec{b}_{r-1}\,(r+q)$，这就产生了矛盾。类似地可以证明 $i \neq r-1$。

因此，我们可以假设 $i \in [r-2]$。考虑边 $\{b_1, \ldots, b_r\} - \{b_i\} \cup \{d''\}$ 中各顶点对应的向量，它们必须在某个坐标 j'' 上相同。由于 $\vec{b}_{r-1}$ 和 $\vec{b}_r$ 在前 $r-1+q$ 个坐标上不同，因此 $j'' \ge r+q$。

此外， $\vec{b}_r$ 和 $\vec{d}''$ 在从 $r+q+1$ 到 $r+t$ 的所有坐标上都不同。因此， $j''=r+q$。由于 $r\neq 3$，于是存在某个 $k\in\{1,\dots,r-2\}-\{i\}$。我们得到

$$1=\vec{b}_{r-1}(r+q)=\vec{b}_r(r+q)=\vec{d}''(r+q)=\vec{b}_k(r+q)=\beta.$$

这与 $\beta\neq 1$矛盾。 □

	连通分支													Part
	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_{r-2}	c_{r-1}	c_r	$\cdots$	c_{r-1+q}	c_{r+q}	c_{r+q+1}	$\cdots$	c_{r+t}	
$\vec{b}_1$	$*$	2	2	$\cdots$	2	2				β				V_1
$\vec{b}_2$	2	$*$	2	$\cdots$	2	2				β				V_2
$\vec{b}_3$	2	2	$*$	$\cdots$	2	2				β				V_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$				$\vdots$
$\vec{b}_{r-2}$	2	2	2	$\cdots$	$*$	2				β				V_{r-2}
$\vec{b}_{r-1}$	2	2	2	$\cdots$	2	2	2	$\cdots$	2	1	1	$\cdots$	1	V_{r-1}
$\vec{b}_r$	1	1	1	$\cdots$	1	1	1	$\cdots$	1	1	1	$\cdots$	1	V_r
$\vec{d}$		2	2	$\cdots$	2	2	$\neq\vec{b}_1$	$\cdots$	$\neq\vec{b}_1$	β	$\neq 1$	$\cdots$	$\neq 1$	V_r
$\vec{d}'$	2					2	$\neq\vec{b}_2$	$\cdots$	$\neq\vec{b}_2$	$\neq 1$	$\neq 1$	$\cdots$	$\neq 1$	V_r
$\vec{b}'_{r-1}$						$*$				β				V_{r-1}
$\vec{d}''$						$\neq 2$	$\neq\vec{b}_1$	$\cdots$	$\neq\vec{b}_1$		$\neq 1$	$\cdots$	$\neq 1$	$\rightarrow\leftarrow$

图2：情形 $r\geq 4$的证明中使用的向量。

3 定理的证明 1.8

Chen 等人 [3]对一类特殊的 k-边染色证明了如下结论。

观察3.1 ([3])**.** 设 G 是一个双团，并设 $k\geq 2$ 是一个整数。对于 G的任意 k-边染色，要么 $V(G)$ 可以被至多 $2k-2$ 个单色连通分量覆盖，要么每个颜色类都是完全二部图的不交并。

定理3.2 （推论1，见 [3]）。对于 $k\in\{2,3\}$ 任意一个对双团 G 进行的 k边染色，若每个颜色类都是若干双团的不交并，则存在一个对 V（G）的覆盖，且至多使用 k 个单色连通分支。此外，这些连通分支可以全部属于同一种颜色。

记号。设 G 是一个双团，其部为 X 和 Y。对于 $x\in V(G)$ 和一种颜色 i，令 $N_i(x)$ 表示 x的颜色为 i 的邻点集合。对于 $S\subseteq V(G)$，定义 $N_i(S)=\bigcup_{x\in S}N_i(x)$。令 $G_i(x)$ 表示 G 中包含 x 的颜色为 i 的单色连通分支（因此 $\{x\}\cup N_i(x)\subseteq G_i(x)$）。对于子集 $A\subseteq X$ 和 $B\subseteq Y$，令$G[A,B]$ 表示 G的导出子图，其顶点集为 $A\cup B$。注意， $G[A,B]$ 也是一个双团。

定理的证明 *1.8*。对于 $k=2$，根据观察 3.1 和定理 3.2，我们有 $2k-2=k$ 个连通分量就足够了。我们对 $k=3$证明该命题。假设 G 是一个部为 X 和 Y的三边染色双团。如果 G 的每个颜色类都是完全二部图的不交并，那么根据定理 k， 3.2个连通分量就足够了。否则，不失一般性，存在某个 $u\in X$ 和 $v\in Y$位于颜色类 1 的同一个连通分支中，使得uv 染成颜色 2。

由于对 G的染色是生成的， $N_3(u)$和 $N_3(v)$均非空。 $\{G_1(u)\ G_2(u)\ G_3(u)$中的连通分量覆盖 Y，而 $\{G_1(v)\ G_2(v)\ G_3(v)\}$ 覆盖 X。根据假设， $G_1(u)=G_1(v)$和 $G_2(u)=G_2(v)$。如果 $G[N_3(u)\ N_3(v)]$ 中的任意一条边的颜色为3，那么 $G_3(u)=G_3(v)$和 $V(G)$将构成一个由3个连通分支组成的覆盖，即$\{G_1(u)\ G_2(u)\ G_3(u)\}$。因此， $G[N_3(u)\ N_3(v)]$ 是一个双色双团，并且存在一个至多由

2个单色连通分支构成的覆盖。如果该覆盖只有一个连通分支，那么将其与 $G_1(u)$和$G_2(u)$合在一起，就得到一个由3个连通分支构成的覆盖。因此，设覆盖 $G[N_3(u)\ N_3(v)]$ 的两个连通分支为C和 D。定义 $C_X = C \cap X$， $C_Y = C \cap Y$， D_X， D_Y的定义类似。

情形 *1*： C和 D具有相同的颜色，并且 C_X、C_Y、 D_X和 D_Y中的每一个都至少含有一个顶点。我们不妨设 C和 D的颜色为 1。此外，我们还知道 $G[C_X, D_Y]$和 $G[C_Y, D_X]$是颜色 2 中的双团，否则 C和 D将属于同一个颜色 1 分量。注意， N_1（C_X） $\cap G_1$（u） $= \varnothing$，否则， G_1（u）和 C将属于同一个颜色 1 分量，并且 $\{G_1$（u） G_2（u） $D\}$覆盖 V（G）。

因此， $G[C_X, G_1$（u） $\cap Y]$以及类似地， $G[D_X, G_1$（u） $\cap Y]$是颜色 2 和 3 中的双色双团。考虑 N_2（C_X） $\cap G_1$（u）和 N_2（D_X） $\cap G_1$（u）。假设这些集合并不互不相交。那么， C_X中将存在一个顶点，D_X中也将存在一个顶点，它们属于 G的同一个颜色 2 分量。然而，由于 $G[C_X, D_Y]$和$G[C_Y, D_X]$是颜色 2 中的双团，我们将有 C 和 D 属于 G 的同一个颜色 2 分量，并且可以使用 3 个连通分支构造一个覆盖。

因此，我们有 $N_2(C_X) \cap G_1(u) \subseteq N_3(D_X) \cap G_1(u)$，因为 $N_3(D_X) \cup N_2(D_X)$覆盖了 $G_1(u) \cap Y$。这意味着 $G_1(u) \cap Y \subseteq N_3(C_X) \cup N_3(D_X)$。对 $G_2(u) \cap Y$采用类似的论证可得$G_2(u) \cap Y \subseteq N_3(C_X) \cup N_3(D_X)$。由于 $C_X, D_X \subseteq N_3(v) \subseteq G_3(v)$ $(G_1(u) \cup G_2(u)) \cap Y$中的每个顶点都包含在连通分支 $G_3(v)$ 中，因此 Y 中剩余的顶点属于连通分支 $G_3(u)$，所以 Y 可由颜色 3 的两个连通分量覆盖。对于每个 $x \in X$，由于 G 的染色是生成的，我们有 $N_3(x)$ 非空，因此 x 属于两个颜色 3 连通分量之一。因此， $V(G)$ 至多可由两个颜色 3 连通分量覆盖。

情形 *2*： C 和 D 的颜色不同。注意，这也涵盖了 C 和 D 颜色相同（例如颜色 1），且 C_X、C_Y、D_X、D_Y中有一些为空的情形。事实上，假设 C_X为空，那么由于 C是二部图的连通子图， C_Y 就是一个单顶点，因此我们可以改为取包含该顶点的颜色 2 分量作为 C 。

不失一般性，设 C属于颜色 1， D 属于颜色 2。若 $C \subseteq D$ 或 $D \subseteq C$，则 G 至多可由 3 个单色连通分支覆盖。因此，不失一般性，我们可以假设 $C_X - D_X \neq \varnothing$。如果$D_Y - C_Y$也非空，那么 $C_X - D_X$ 与 $D_Y - C_Y$之间的边必须着上某些颜色；但由于 C 和 D的极大性，这些边不能是颜色 1 或颜色 2，这就产生了矛盾。因此， $D_Y \subseteq C_Y$ 和$D_X - C_X \neq \varnothing$。此外，对于任意 $w \in D_X - C_X$，从 w到 C_Y的所有边都是颜色 2，因此 $D_Y = C_Y$。同样， $G[C_X, G_1(u)]$ 中没有边可以着上颜色 1。因此，该子图是一个由颜色 2 和 3 构成的双色双团。我们断言

$$G_1(u) \cap Y \subseteq N_3(C_X) \cup N_3(D_X). \tag{1}$$

事实上，若 $G_1(u) \cap Y \subseteq N_3(C_X)$，则结论成立。因此，假设存在 $w \in G_1(u) \cap Y$ 使得$w \notin N_3(C_X)$。那么，从 w到 C_X的所有边都属于颜色 2。若 w与通往 D_X的任意颜色 2 的边关联，那么由于 $D_Y = C_Y$、 D 和 C 属于同一个颜色 2 连通分量，且 G 允许一个 3-覆盖。若$G[w, D_X]$ 中的所有边都属于颜色 1，则 $D_X \subseteq G_1(u)$，并且 G 允许覆盖 $\{G_1(u)\ G_2(u)\ C\}$。由此可知，每当 $w \notin N_3(C_X)$时，我们就得到 $w \in N_3(D_X)$，从而证明了 (1)。

对于 $G_2(u)$，同样的结论也可以证明，即 $G_2(u) \cap Y \subseteq N_3(C_X) \cup N_3(D_X)$。与前一种情形一样， $N_3(C_X)$ $N_3($ $D_X) \subseteq G_3(v)$。因此， Y中的每个顶点都属于 $G_3(v)$或 $G_3(u)$。同样，对于每个 $x \in X$，由于 G的生成着色，我们有 $N_3(x) \neq \varnothing$ ，这意味着 G 允许用至多 2 个颜色 3 的连通分量覆盖。因此，cov(2，3) $= 3$。

□

Ack致谢。感谢 Andr´as Gy´arf´as 提供的宝贵意见并参与讨论。 S.

参考文献

[1] A. Abu-Khazneh、J. Bar´at、A. Pokrovskiy 和 T. Szab´o。“关于 Ryser 猜想的一族极值超图”。组合理论杂志*A*辑 161（2019），第 164–177 页。 ISSN：0097-3165。

[2] R. Aharoni。“三部三元图的 Ryser 猜想”。Combinatorica 21.1（2001），第 1–4 页。 ISSN: 1439-6912。[3] G. Chen、S. Fujita、A.Gy´arf´as、J. Lehel 和 A. Toth。围绕双团覆盖猜想。2012。arXiv：1212.6861 [math.CO]。[4] L. DeBiasio、Y. Kamel、G. McCourt 和 H. Sheats。“Ryser 猜想的推广与加强”。Electronic Journal of Combinatorics 28.4（2021），P4.37。[5] A. Gy´arf´as。“超图中的划分覆盖与阻塞集”。候选人论文，Tanulm´anyok 71/1977（匈牙利语）。MR0585392。博士论文。MTA SZTAKI，1977。[6] A. Gy´arf´as 和 Z. Kir´aly。“用单色连通分支覆盖完全多部超图”。Discrete Mathematics 340.12（2017），第 2753–2761 页。[7] P. E. Haxell 和 A. D. Scott。“关于 Ryser 猜想”。Electronic Journal of Combinatorics 19.1（2012），P23。[8] J. R. Henderson。“(0-1) 矩阵的置换分解与分解横截集”。博士论文。加州理工学院，1971。[9] Z. Kir´aly。“边染色完全均匀超图中的单色连通分支”。European Journal of Combinatorics 35（2014）。EuroComb’11 论文选集，第 374–376 页。[10] J. Lehel。“线性超图的 Ryser 猜想”。未发表手稿。1998。[11] Z. Tuza。“Ryser 猜想的特殊情形”。未发表手稿。1979。[12] Z. Tuza。“关于 r部超图横截集的 Ryser 猜想”。Ars Combinatoria 16（1983），第 201–209 页。