arXiv:2603.04706v1 [math.CO] 5 Mar 2026

图中 P_3-凸集的计数

Mitre C. Dourado[1], Luciano N. Grippo[2], Min Chih Lin[3,4], 和 F´abio Protti [5]

[1]里约热内卢联邦大学计算机科学研究所，巴西[2]萨米恩托国立大学科学研究所；阿根廷。国家科学与技术研究委员会、ICI-UNGS，阿根廷布宜诺斯艾利斯[3]国家科学与技术研究委员会，布宜诺斯艾利斯计算研究所，阿根廷[4]布宜诺斯艾利斯大学计算机系，阿根廷布宜诺斯艾利斯[5]弗卢米嫩塞联邦大学计算机科学研究所，巴西尼泰罗伊

2026年3月6日

摘要

我们研究 P_3-凸性，即由所有三顶点路径生成的路径凸性，并聚焦于计算图 G 的 P_3-凸顶点集数量这一问题，记作 $noc(G)$。首先，我们解决相关的极值问题：刻画使 $noc(G)$ 在所有图中达到最大值的 n-顶点图，并确定连通极值图。接下来，我们研究计算复杂性，并证明即使在附加结构限制下，计算 P_3-凸集的数量在分裂图上也已是 #P-完全的。另一方面，我们找到了两个易处理的子类，即树和阈值图，并分别为其设计了线性时间算法。最后，我们为一般图设计了非平凡的精确指数时间算法，将结构分解、刻画 P_3-凸性必然推论的传播规则，以及在辅助图中快速计数独立集的方法结合起来。对于能够保证存在大独立集且可高效找到此类独立集的图类，这一策略尤其有效。

关键词： P_3-凸性； P_3-凸集计数；极值图；#P 完全性；精确指数时间算法。

1 引言

1.1 研究现状

图凸性因其引发的各种具有挑战性的结构与算法问题，日益受到数学和计算机科学界的关注。有限图 G 上的一种凸性 是一个二元组 $(V(G)\ \mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C}$ 是 $V(G)$的子集族，并满足以下条件： $\emptyset \in \mathcal{C}$, $V(G) \in \mathcal{C}$，且 $\mathcal{C}$ 对交集封闭；也就是说，对于每个 V_1， $V_2 \in \mathcal{C}$，都有 $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{C}$。族 $\mathcal{C}$ 中的每个集合称为一个 $\mathcal{C}$-凸集。1986年，

Farber 和 Jamison 从理论和结构的角度发表了一篇关于图中凸性的开创性论文 [22]。这一研究方向的蓬勃发展，催生了编纂重要已发表成果汇编的需求。1993年，van de Vel 出版了一本关于这一主题的著作 [39], ，2013年 Pelayo 也出版了类似著作 [32]。最近，Ara´ujo、Dourado、Protti 和 Sampaio [2]合著的一本书则从算法角度探讨了这一主题。

许多研究最深入的图凸性，都是由图中合适的路径族定义的。设 $\mathcal{P}$ 是 G 中的一个路径集合。设 $\mathcal{C}$ 为所有满足以下条件的顶点子集 $S \subseteq V(G)$ 组成的族：对于端点均在 S 中的每条路径 $P \in \mathcal{P}$ ， P 的所有顶点也都属于 S。容易验证，$(V(G), \mathcal{C})$ 在 G 上定义了一种凸性，而 $\mathcal{C}$ 称为由 $\mathcal{P}$ 生成的路径凸性。文献中研究过若干特殊的路径族 $\mathcal{P}$ ，例如最短路径 [20, 28, 1] （测地凸性）、三角形路径 [19, 13], 诱导路径（单音凸性） [18, 14, 5], 所有路径 [12], 三顶点路径 [4, 11], 以及三顶点诱导路径 [3, 17]。

P_3-凸性是由所有长度为二的路径（即所有三顶点路径）生成的路径凸性。若每个顶点 $v \in V(G) \setminus S$ 在 S 中至多有一个邻点，则子集 $S \subseteq V(G)$ 称为 P_3-凸。这种凸性的雏形可见于 Bollob´as（2006）所著的广受欢迎的数学读物 [7], ；作者在探讨网格上的疾病传播时，研究了网格上的 P_3-凸包。本文着重研究这种凸性。

在研究领域中，对图中给定类型的结构进行计数是一个普遍的问题。1979 年，Valiant 发表了一篇关于枚举问题复杂性理论的开创性论文 [38]。显然，有效列出所有满足特定性质 π 的图（或集合），便可直接得出此类结构的精确数量。形式上，枚举算法 $\mathcal{A}$ 会输出一个序列 G_1，G_2，……，G_k，其中包含所有满足条件π的图，并且 $G_i \neq G_j$ 对于 $1 \leq i < j \leq k$。评估这些算法效率的标准有多种 [29]。要求最低的是多项式总时间，即执行时间受所有输出的总规模的多项式函数所限制 G_1，……，G_k。更严格的要求是多项式延迟，它规定任意两个连续元素生成之间经过的时间，只能是后一个输出规模的多项式。实现多项式延迟的著名算法包括：生成加权图的所有最小生成树 [21], 、所有极大独立集 [31],、所有初等圈 [36], ，以及所有具有 n 个顶点的余图 [27]。此外，Courcelle [15]提出了充分条件，保证在树宽有界的图中枚举某些结构时可实现线性延迟 。计算枚举算法复杂度时，一个关键问题是避免列出重复元素所耗费的计算开销。 [31] 描述的算法很好地展示了如何剔除重复项，同时保持多项式延迟。

据我们所知，计数或枚举凸集的问题鲜少受到关注。在图凸性的背景下，这类问题的先驱研究可见于 [26], ，作者研究了锦标赛中的有向三路径凸性，

并提出了一种能在 $O(n^4)$时间内找出所有凸集的算法。对于#P-完全问题，一种合理的替代方案是设计精确指数时间算法。例如#Stable Sets [24]、$\#2-\text{Sat}$ 和$\#3-\text{Sat}$ [16, 30]，以及# Perfect Matchings [6]。

本文致力于图中 P_3-凸集数量的计数问题。我们讨论以下两个问题：

1. 给定一个具有 n 个顶点的图（无论是否连通），哪些图能使 P_3-凸集的数量达到最大？（见推论 2 和定理 11）。2. 计数一个图的 P_3-凸集的计算复杂性是什么？（见定理 12 和推论 13）。

由于第二个问题的答案被证明是 #P-完全的，因此又产生了两个问题：

1. 找出一个图类，使得该问题可在多项式时间内求解（见定理 3 和定理 14）。2. 设计一个非平凡的精确指数时间算法，以计数一个图的 P_3-凸集（见第 4 节）。

在本文中，我们回答了上述两个问题，并针对由第二个问题的 #P 完全性所引出的两个问题提出了解决方案。

本文结构如下。第 2 节讨论极值问题，并研究哪些具有 n 个顶点的图能使 P_3-凸集的数量达到最大。我们首先为树构建一种动态规划方法，然后比较星图和路径，最后刻画连通极值图。第 3 节转向计算复杂性：我们证明 P_3-凸集计数是 #P-完全的（即使在分裂图上也是如此），并给出阈值图上的一个线性时间可解情形。最后，在第 4 节中，我们为一般图构建精确指数时间算法，通过结构分解、传播规则和快速独立集计数，改进朴素的 $O^*(2^n)$ 算法；此外，我们还讨论了针对具有保证存在大规模独立集的图类的改进方法。

1.2 基本定义与记号

我们考虑有限、简单的无向图。对于图 G，记其顶点集为$V(G)$，边集为 $E(G)$。对于顶点 $v \in V(G)$，v 在 G 中的度 为 $d_G(v) = |N_G(v)|$（当 G的含义由上下文明确时，也简记为 $d(v)$）。G 的最小度 和最大度为

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\} \qquad \text{and} \qquad \Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\},$$

分别。

G 的子图 是满足 $V(H) \subseteq V(G)$ 和 $E(H) \subseteq E(G)$ 的任意图 H。对于 $U \subseteq V(G)$，由 U 在 G 上诱导出的 子图 记为 $G[U]$；其顶点集为 U，边集为 $\{xy \in$

$E(G)$：x，$y \in U\}$。满足 $V(H) \subseteq V(G)$ 和 $E(H) \subseteq E(G)$ 的任意图 H 都是 G 的子图；若 $H = G[V(H)]$，则该子图是诱导子图。G 的生成子图 是指具有 $V(H) = V(G)$ 的子图 H。树 是连通无环图，而 G 的生成树 是 G 的一个作为树的生成子图。

对于顶点 $v \in V(G)$，v 在 G 中的（开）邻域 为 $N_G(v) = \{u \in V(G)$：$uv \in E(G)\}$，其闭邻域 为 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$。如果集合 $I \subseteq V(G)$ 中任意两个顶点都不相邻，则称其为独立集。图 G 中的团 是顶点集合 $C \subseteq V(G)$，其中 C 中的任意两个不同顶点都相邻。

对于图运算，$G - v$ 表示从 G 中删除顶点 v（以及所有与 v关联的边）后得到的图。更一般地，对于 $S \subseteq V(G)$，我们用 $G - S$ 表示删除 S中的所有顶点后得到的图。同样，对于边 $e \in E(G)$，$G - e$ 表示删除 e后得到的图；对于 $F \subseteq E(G)$，我们用 $G - F$ 表示删除 F中的所有边后得到的图。图 G 和 H 的不交并记为 $G + H$。令 $s \cdot G$ 表示 G的 s 个副本的不交并。

我们对一些图族采用标准记号：K_n 表示具有 n个顶点的完全图，C_n 表示具有 n个顶点的环，P_n 表示具有 n 个顶点的路径。两部分大小分别为 a 和 b 的完全二部图记作$K_{a,\,b}$；特别地，具有 n个顶点的星图 记作$K_{1,\,n-1}$。

如果图 G 的顶点集可以划分为 $V(G) = K \cup S$，其中 K诱导一个团，S 诱导一个独立集，则称 G 为分裂图。任何这样的划分（K，S）都称为 G的分裂划分。

2 极值问题

恰好是 P_3-自由图能够达到凸集数量的最大值；在这些图中，每个顶点子集都是凸集。相比之下，若存在一个带有顶点$u - v - w$ 的诱导 P_3，则意味着 $\{u, w\}$ 不是凸集，因为凸性要求包含 v。对于连通图，唯一的 P_3-自由图是完全图，因此完全图是唯一的极值连通图。

We 首先回顾 P_3-凸性的概念，并引入记号 $noc(G)$.

定义 1 (P_3-凸性与函数 $noc(G)$)。设 $G = (V, E)$ 是一个图。若对 G 中的每条路径 x–z–y，只要满足 $x, y \in S$，就有 $z \in S$，则集合 $S \subseteq V$ 是 P_3-凸的。我们用$noc(G)$ 表示 G 的 P_3-凸集的数量，即

$$noc(G) \;=\; \big|\{\, S \subseteq V : S \text{ is } P_3\text{-convex in } G \,\}\big|.$$

我们还采用基本的颜色解释：P_3-凸集中的顶点视为黑色，集合之外的顶点视为白色。这种双色观点之后会针对有根树进一步细化。

我们首先研究顶点数为 n、使P_3-凸集数量达到最大值的连通图。首先，我们注意到一个关键性质：该数量在进行

边删除时不会减少。

引理 1. 设 G 是一个图，且 $uv \in E(G)$ 是一条边。那么

$$noc(G - uv) \geq noc(G).$$

反复应用引理 1 可知，无边图取得可能的 P_3-凸集数的最大值。然而，无边图并非唯一的极值图：任何最大度为 $\Delta(G) \leq 1$ 的图 G 也是极值图。事实上，这类图不含 P_3，且每个连通分量至多有两个顶点；因此，顶点的每个子集都是 P_3-凸的。相比之下，任何最大度至少为 2 的图都包含一个诱导的 P_3 或一个三角形。在这两种情况下，都存在顶点 u 和 w，它们有一个公共邻点 v，这意味着集合 $\{u, w\}$ 不是 P_3-凸的。因此，满足 $\Delta(G) \leq 1$ 的图恰好是极值图。由此得到以下结果

推论 2. 设 G 是一个有 n 个顶点的图。那么 $noc(G) \leq 2^n$。此外，当且仅当 G 与满足 $2t + s = n$ 的 $s \cdot K_1 + t \cdot K_2$ 同构时，等号成立。

现在我们转而关注连通极值图，并在第2.3小节中以本节的主要结果作结。前面各小节引入的概念和建立的结果共同导向了对它们的刻画。

2.1 树

对于树，枚举 P_3-凸集可以用一个简单的递归表述来实现。给定一棵树 T，我们任意选取一个根，并将所有边的方向设为背离该根。每个顶点都确定了由其后代诱导的唯一子树。接下来，我们将白色细分为两种状态，具体取决于白色顶点是否有黑色父节点，如下所示。

B（黑色）, G（有黑色父节点的白色顶点）, W（没有黑色父节点的白色顶点）.

给定一棵有向有根树 T，令 root(T) 表示它的根。

定义2 (辅助函数 $noc(T, \alpha)$). 设 T为一棵有向有根树。对于 $\alpha \in$ {B、G、W}，令 $noc(T, \alpha)$ 表示 T中满足 $\mathrm{root}(T)$ 颜色为 α的 P_3-凸集数量。

由于 T 是树，因此每个 P_3 必然都是诱导的。可以根据以 root(T) 的子节点为根的子树递归计算值 $noc(T, \alpha)$。

算法 1 计算 $noc(T, \alpha)$

函数 NOC(T, α)
  如果 T 是平凡的**则**
    返回 1
  结束如果
  $num \leftarrow 1$
  $numw \leftarrow 1$
  令 $T_1, \ldots, T_k$ 为 $T - \mathsf{root}(T)$ 的子树
  对 $i = 1$ 执行 k
    如果 α =B，**则**
      $num \leftarrow num \cdot (\text{NOC}(T_i, \mathsf{G}) + \text{NOC}(T_i, \mathsf{B}))$
    否则，如果 α =G，**则**
      $num \leftarrow num \cdot \text{NOC}(T_i, \mathsf{W})$
    否则，如果 α =W，**则**
      $nb[i] \leftarrow \text{NOC}(T_i, \mathsf{B})$
      $nw[i] \leftarrow \text{NOC}(T_i, \mathsf{W})$
      $numw \leftarrow numw \cdot nw[i]$
    结束如果
  结束循环
  如果 α =W **则**
    $num \leftarrow numw$
    对于 $i = 1$ 到 k **执行**
      $num \leftarrow num + (numw/nw[i]) \cdot nb[i]$
    结束循环
  结束条件判断
  返回 num
结束函数

我们省略算法 1 计算 $noc(T, \alpha)$ 的正确性证明细节。由于根不能被着色为 G（即，具有黑色父节点的白色顶点），因此 T 的 P_3-凸集总数为

$$noc(T) = noc(T, \mathsf{B}) + noc(T, \mathsf{W}).$$

此外，算法 1 在对 T 进行自底向上遍历时，会对每个子树 T_i 处理一次。因此，我们得到以下复杂度结果。

定理3。 树 $T = (V, E)$ 的 P_3-凸集数量可以在 $O(|V|+|E|)$时间内计算出来。

我们将在第 3 节重新讨论枚举 P_3-凸集的复杂性方面。

2.2 星图K1,n−1和路径 Pn

下面的技术引理给出了使该数量达到最大值的、含有 n 个顶点的候选图的 P_3-凸集数量。其证明显而易见，因此略去。

引理4。 对于 $n \geq 1$，有 $noc(K_{1,\ n-1}) = 2^{n-1} + n$。

下一个结果排除了具有 n 个顶点（顶点数与边数相同的连通图）的单圈图，说明它们不能成为在满足 $n \geq 3$ 的 n 个顶点连通图中使 P_3-凸集数量达到最大的候选图。

引理 5. 设 $G = (V, E)$ 是一个满足 $|V| = |E| = n \geq 3$ 的连通图。那么对于每棵生成树 T，都有 G,

$$noc(G) < noc(T).$$

证明。由于 G 是连通的且 $3 \geq |V| = |E|$，它恰好包含一个环。设 C 为该环，且设 uv 是 C 的任意一条边。那么 $T = G - uv$ 是 G 的一棵生成树。事实上， G 的每棵生成树都可以通过删除其唯一环上的一条边得到。

由引理 1 可得 $noc(G) \leq noc(T)$。为证明严格不等式，考虑

$$S = V(C) \setminus \{u\}.$$

一方面，由于 T 无环，任意顶点 $z \notin S$ 在 S 中至多有一个邻点。因此，端点位于 S 中的任何 P_3，其中间顶点都不在 S 外，因此， S 在 T 中是 P_3-凸的。另一方面，在 G 中，顶点 u 沿着环 C 在 S 中有两个邻点，因此，包含这两个邻点的 G 的任何凸集也必须包含 u。所以， S 在 G 中不是P_3-凸的。

总之， T 有一个 P_3-凸集，而 G 没有，这意味着 $noc(G) < noc(T)$。 □

现在我们可以得出以下结果，它保证任何使 P_3-凸集数量达到最大值的 n-顶点连通图都必须是一棵树。

推论 6。 设 $G = (V, E)$ 是任意一个满足 $|E| \geq |V| \geq 3$的连通图。那么，其每棵生成树 T 都满足 G

$$noc(G) < noc(T).$$

证明。若 $|E| = |V|$，则该命题由引理 5 得出。

现在假设 $|E| > |V|$。设 $T = (V, E_T)$是 G的一棵任意生成树。由于 $E_T \subset E$且 $|E| > |V|$，集合 $E \setminus E_T$非空。取一条边 $e \in E \setminus E_T$，并考虑生成子图

$$G' = (V,\, E_T \cup \{e\}).$$

图 G' 是单环图。因此，结合引理 1 和引理 5，我们得到

$$noc(G) \leq noc(G') < noc(T),$$

因此，结论成立。 □

我们为 $Z_n = noc(P_n)$推导出一个简单的递推关系，其中 P_n 是具有 n 个顶点的路径。以 P_n 的一个端点为根，并设

$$B_n = noc(P_n, \mathsf{B}), \qquad W_n = noc(P_n, \mathsf{W}), \qquad G_n = noc(P_n, \mathsf{G}),$$

其中B、W和G分别表示根为黑色、白色且没有黑色父节点，以及白色且有黑色父节点。由于根没有父节点，它不可能处于状态G，因此

$$Z_n = noc(P_n) = B_n + W_n.$$

递推关系。 由于路径上的每个顶点至多有一个子节点，一般的树递推关系可简化为

$$B_n = B_{n-1} + G_{n-1}, \qquad W_n = W_{n-1} + B_{n-1}, \qquad G_n = W_{n-1},$$

初始值为

$$B_1 = W_1 = G_1 = 1.$$

消去 B_n、 W_n和 G_n 后，得到线性递推关系

$$\boxed{Z_n = 2Z_{n-1} - Z_{n-2} + Z_{n-3}, \qquad n \geq 4,}$$

with

$$Z_1 = 2, \qquad Z_2 = 4, \qquad Z_3 = 7.$$

我们将 Z_n 与星图K_1中 P_3-凸集的数量进行比较. $_{n-1}$。根据引理4,

$$noc(K_{1,n-1}) = 2^{n-1} + n.$$

因此，以下命题成立；其证明可通过对 n 进行归纳法直接得到（对于$n \geq 6$），其余情形见表1

命题7。 对于每个整数 $n \geq 1$,

$$noc(P_n) \ \leq \ noc(K_{1,n-1}) = 2^{n-1} + n,$$

当且仅当 $n \leq 5$ 时，等号成立。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$noc(P_n)$	2	4	7	12	21	37	65	114	200	351
$noc(K_{1,\ n-1})$	2	4	7	12	21	38	71	136	265	522

表1： $noc(P_n)$ 与 $noc(K_{1,\ n-1}) = 2^{n-1} + n$ 的比较。

2.3 具有最大 noc 的连通极值图

只需以下三个要素，我们便可以陈述并证明本节的主要结果。前两个事实可直接由树和 P_3-凸集的定义得出。

命题 8. 设 T 是一棵有 n 个顶点的树。那么 T 至少满足以下条件之一：

1. T 是星图 $K_{1,\ n-1}$；
2. T 是诱导路径 P_n；
3. T 有一个顶点 v 满足 $\deg(v) \geq 3$，并且 T 没有全邻顶点（即不存在度为 $n-1$的顶点）。

注 9。 设 T 是一棵树， U 是 T的任意子树的顶点集。那么， U 是 T的P_3-凸集。特别地， T 的子路径的任意顶点集都是 P_3-凸集。

命题 10。 设 T 是一棵具有 n 个顶点的树，并假设 T 不同构于星图$K_{1,\ n-1}$ 也不同构于路径 P_n。令 r 为 T 的任意叶子，并将 T 视为以 r为根。令 r' 为 r的唯一邻点，并令 $T' = T - r$ 视为以 r'为根。

那么：

1. $noc(T',\ \mathsf{W}) - noc(T',\ \mathsf{G}) \geq n-1$。
2. $noc(T) < 2^{n-1} + n = noc(K_{1,\ n-1})$。

证明。 **（1）部分**。 根 T'位于 r'。对于每个顶点 $v \in V(T') \setminus \{r'\}$，定义 $S(v)$ 为唯一 v–r' 路径上除 r' 以外、包含 v在内的所有顶点的集合。

每个 $S(v)$ 都诱导出一棵子树，因此根据注 9，它是一个 P_3-凸集。此外：

- $S(v)$ 恰好包含根 r' 的一个邻点，因此计入 $noc(T',\ \mathsf{W})$。

由于在状态 G 中，根必须使其所有子节点都处于非白色状态，因此 • $S(v)$不计入 $noc(T',\ \mathsf{G})$。 n
白色，也就是说，不能包含它的任何邻点。

由于 T' 有 $n-1$ 个顶点，且我们排除了 r'，集合 $S(v)$ 恰好对应 $noc(T', \mathsf{W})$ 中计数、但不在 $noc(T', \mathsf{G})$ 中计数的 $n-2$ 个不同的P_3-凸集。

现在我们再构造一个这样的凸集。根据 r' 在 T'中的度，我们分两种情况讨论。

情况 *(a)*：$\deg_{T'}(r') = 1$。此时 T'仍至少有三片叶子（r'是一片特殊叶子），因为 T不是星图，且某个顶点的度至少为 3。考虑集合

$$U = V(T') \setminus \{r'\}.$$

这是 P_3-凸的（它诱导出一个子树），且包含 r' 在 T'中的唯一邻点，因此它会被 $noc(T',\ \mathsf{W})$ 计数，但不会被 $noc(T',\ \mathsf{G})$ 计数。由于每个 $S(v)$ 至多包含一个叶子，而U 包含 T' 的除 r' 之外的所有叶子，因此对于所有 v，都有 $U \neq S(v)$。于是 U 产生了一个新的凸集。

情况（*b*）：$\deg_{T'}(r') \geq 2$。由于 T不是星图，T'有一个叶子 z，它到 r'的距离至少为 2。令x 为 r' 的一个邻点，且不在 r'–z 路径上。于是

$$U = \{z, x\}$$

是一个 P_3-凸集（它不包含两个端点均为 P_3 的情形）。它恰好包含根 r'的一个邻点，因此计入 $noc(T', \mathsf{W})$，但不计入 $noc(T', \mathsf{G})$。由于每个集合 $S(v)$ 都诱导出唯一的 v–r' 路径，它们都不可能由位于不同分支中的两个顶点组成；因此，对所有 $v \in V(T') \setminus \{r'\}$，均有 $U \neq S(v)$。

在这两种情况下，我们都得到一个与所有 $S(v)$ 不同的额外凸集。因此，

$$noc(T', \mathsf{W}) - noc(T', \mathsf{G}) \;\geq\; (n-2) + 1 \;=\; n - 1.$$

第（2）部分。我们对 $n \geq 1$ 进行归纳。

基础情形。对于 $n \leq 4$，不存在既不是星图也不是路径的树。因此，该命题显然成立。

归纳步骤。假设 $n \geq 5$，并设 T 是一棵具有 n 个顶点、既不是星图也不是路径的树。令 T 的任意一个叶子为 r，令其唯一邻点为 r'，并令 $T' = T - r$。那么，T' 是一棵具有 $n-1$ 个顶点的树。

我们根据边 rr' 的颜色，将 T 的 P_3-凸集分类。(r, r') 上的四种可能颜色赋值（W/B）给出：

(r, r')	贡献
(W，W)	$noc(T', \mathsf{W})$
(W，B)	$noc(T', \mathsf{B})$
(B，W)	$noc(T', \mathsf{G})$
(B，B)	$noc(T', \mathsf{B})$

因此

$$noc(T) = noc(T', \mathsf{W}) + noc(T', \mathsf{G}) + 2noc(T', \mathsf{B}).$$

由于 $noc(T') = noc(T', \mathsf{W}) + noc(T', \mathsf{B})$，我们得到

$$noc(T) = 2noc(T') + \big(noc(T', \mathsf{G}) - noc(T', \mathsf{W})\big). \qquad (*)$$

根据归纳法、引理4和命题7，

$$noc(T') \;\leq\; 2^{n-2} + (n-1),$$

根据前面证明的结果，

$$noc(T', \mathsf{W}) - noc(T', \mathsf{G}) \;\geq\; n - 1, \qquad \text{that is,} \qquad noc(T', \mathsf{G}) - noc(T', \mathsf{W}) \;\leq\; -(n-1).$$

将这两个界代入（$*$）可得

$$noc(T) \ \leq \ 2(2^{n-2}+n-1)-(n-1) = 2^{n-1}+n-1.$$

因此

$$noc(T) < 2^{\,n-1}+n = noc(K_{1,n-1}),$$

证明完毕。 □

最后，以下定理是引理4、推论 6 以及命题 7、8 和 10 的直接推论。

定理 11。 设 G 是一个有 n 个顶点的连通图。那么

$$noc(G) \ \leq \ 2^{\,n-1}+n.$$

此外，当且仅当 G 同构于星图 $K_{1,\ n-1}$、路径 P_4 或路径 P_5 时，等号成立。

3 复杂度结果

我们首先证明，在图中计数 P_3-凸集是 #P-完全的。我们的归约依赖于计数独立集（等价地，顶点覆盖） [38]的 #P 完全性。值得注意的是，即使限制在二分图 [33], 平面二分图 [37], 以及对于任意固定 $k \geq 5$ [37] 的 k-正则图中，该问题仍然是 #P-完全的。

设 G 为一个图。令 $noi(G)$ 表示 G中的独立集数量。

3.1 #P 完全性

定理 12。 在分裂图中，根据 P_3-凸性计数凸集的问题是#P-完全的。

证明。 我们首先证明该问题属于 #P，然后通过从计数独立集进行归约来证明其 #P-困难性。

属于 #P。 一个输入实例是图 H （在我们的归约中， H 将是一个分裂图），该函数的值是 P_3-凸顶点集的数量，其中 H。如果存在一个多项式时间可判定关系 R ，使得函数 f属于 #P，则

$$f(a) = \big|\{b : R(a,b) \text{ holds}\}\big|.$$

我们用长度为 $|V(H)|$ 的比特串 b 来编码顶点子集 $C \subseteq V(H)$，并定义 $R(H,\ b)$ 当且仅当由 b 编码的子集 C 是 H 的 P_3- 凸集时成立。

如果对于 H 中满足 x, $y \in C$ 的每条路径 $P_3 = (x, z, y)$，都有 $z \in C$，则集合 C 是 P_3-凸的。通过枚举所有有序三元组 (x, z, y)，可以在 $O(n^3)$ 时间内完成检查，因此 $R(H, b)$ 可在多项式时间内判定。因此，计数 P_3-凸集属于 #P。

#P-困难性通过归约得到。 我们从图中独立集的计数问题归约而来，该问题已知是#P-完全的 [33, 37]。

情形 $E = \emptyset$。 如果 G 没有边，那么 V 的每个子集都是独立集，并且 G 不包含任何P_3。因此，V 的每个子集也都是 P_3-凸的。由于无边图是分裂图（其$K = \emptyset$ 和 $S = V$），我们只需取 $H = G$。在这种情况下，

$$noc(H) = 2^{|V|} = noi(G),$$

因此，该归约是精确的。于是，在证明的剩余部分中，我们可以假设 G 至少有一条边。

至少含有一条边的图的归约

设 $G = (V, E)$ 是一个满足 $|E| \geq 1$的输入图。我们按如下方式构造分裂图 H。 H 的顶点集划分为一个团 K 和一个独立集 S。团 K 包含$|E| + 1$ 个顶点：对于每条边 $e \in E$，我们添加一个顶点 v_e，并添加一个特殊的全邻顶点u^*。集合 S 包含 $|V|$ 个顶点，每个顶点代表 G中的一个顶点。邻接关系定义如下：

- K 是一个团，且 u^* 在 H中是全能顶点。

对于每条边 $e = xy \in E(G)$，顶点 v_e 恰好与 S中分别对应于 x 和 y的两个顶点相邻。

现在，我们通过将 H 的 P_3-凸集划分为三个互不相交的类别来计数。

情形 (i)： P_3-凸集，且包含 K的所有顶点。 令 $S_1 = \{s \in S : \deg_H(s) = 1\}$。当且仅当 S 中的对应顶点的度为 0 时， S 中的顶点在 H 中的度为 1。因此，S_1 恰好对应于

$$V_0 = \{v \in V : \deg_G(v) = 0\}.$$

S_1 中的顶点可以自由地选择是否包含在这样的 P_3-凸集中，而 $S \setminus S_1$ 中的所有顶点都必须包含。因此，共有

$$2^{|S_1|} = 2^{|V_0|}.$$

这样的 P_3-凸集。

情形（ii）： P_3**不包含** K**的顶点的-凸集**。由于 u^* 不包含在这样的 P_3-凸集中，因此它至多包含 S的一个顶点；否则， P_3 会迫使其包含 K的一个顶点。因此，存在

$$|V| + 1.$$

这样的 P_3凸集。

情形（iii）： P_3<style id='4'}-凸集，其中恰好包含 K **的一个顶点**。设 C 是这样的 P_3凸集，并设 $C \cap K = \{v\}$。在这种情况下，我们将计数分为两个子类别。

首先假设 $v \neq u^*$ 和 $v_e = v$。如果 C 包含 S的两个顶点，那么这两个顶点与 u^*构成一个 P_3 ，这将迫使 u^* 包含于 C中，与我们的假设矛盾。因此 $|C \cap S| \leq 1$，且有

$$|E| \cdot |V| + |E|$$

这样的 P_3凸集。

现在假设 $v = u^*$。当且仅当 X 是 G的独立集时，子集 $X \subseteq S$ 与 u^* 一起构成一个 P_3 凸集。因此，这样的 P_3凸集共有 $noi(G)$ 个。

综上，我们得到

$$noc(H) = noi(G) \ + \ 2^{|V_0|} + |V| + 1 + |E| \cdot |V| + |E|.$$

因此，可以在多项式时间内根据 $noc(H)$计算 $noi(G)$，从而证明#P-困难性。由于我们还证明了该问题属于#P，因此该问题是#P-完全的。 □

请注意，在上述归约中，构造出的分裂图 H 不包含两个顶点不相交的$K_{1,4}$诱导副本，因为任何诱导的$K_{1,4}$ 都必须以特殊的全邻顶点 u^* 为中心。因此，我们得到以下加强版的#P 完全性结果。

推论 13. 即使将范围限制为不包含两个顶点不相交的$K_{1,4}$诱导副本的分裂图，计数 P_3-凸集的问题仍是$\#$P-完全的。

3.2 阈值图：线性时间可解情形

在本小节中，我们始终考虑一个输入阈值图 $G = (V, E)$，并假设 G 不同构于星图$K_{1,|V|-1}$。星图已在上文的专门小节中分析，因此这里仅关注非星形阈值图。关于称为阈值图的图类的全面介绍，请参阅 [25]。

阈值图是分裂图中结构良好的一类子图，并有若干等价刻画。图 G 是阈值图，当且仅当它不含诱导子图 P_4、 C_4 或 $2K_2$；等价地， G 可以从单个顶点出发，通过反复添加孤立顶点或全邻顶点构造而成。每个阈值图 G 都有一个规范分裂划分（K， S）——即满足 $|K| = \omega$（G）的分裂划分——其中 K 是团， S 是独立集，而 ω（G）表示最大团的基数。此外，

S 中顶点的闭邻域按包含关系构成全序；类似地，当限制在 S 内时， K 中顶点的邻域也具有嵌套关系。

如果 G 包含孤立顶点，那么每增加一个孤立顶点， P_3-凸集的数量就会翻倍：若 v 是孤立顶点，且 C 是 $G-v$的凸集，那么 C 和 $C\cup\{v\}$ 恰好是 G 中包含 $G-v$的凸集 C。因此，若

$$S_0 = \{\, s \in S : \deg_G(s) = 0 \,\}.$$

then

$$noc(G) = 2^{|S_0|} \cdot noc(G - S_0).$$

因此，不失一般性，我们假设输入阈值图 $G=(V,\ E)$的最小度为 $\delta(G)\ \geq 1$。在阈值图中，这意味着 G 恰好包含 $\delta(G)$个全邻顶点，且它们都位于团部分 K中。若 G 是完全图，则取其规范分裂划分 $(K=V,\ \ S=\emptyset)$。

Let

$$S_1 = \{\, s \in S : \deg(s) = 1 \,\}.$$

显然，当且仅当 $\delta(G)\geq 2$时， $S_1=\emptyset$ 成立。

对于规范分裂划分 $(K,\ S)$，每个 P_3-凸集 C 都满足

$$|C \cap K| \in \{0, 1, |K|\}.$$

我们分别分析这些情况。

情形 (i)： $C\cap K=\emptyset$。若 C 不包含 K中的顶点，则 C 至多包含 S中的一个顶点。事实上，若 $s_i,\ \ s_j\in C$且满足 $i\neq j$，那么任一全邻顶点 $u\in K$都位于路径 s_i-u-s_j上，从而迫使 $u\in C$ 成立，这与 $C\cap K=\emptyset$矛盾。因此，这种情形恰好贡献

$$|S| + 1.$$

情况（ii）： $|C\cap K|=1$。令 $C\cap K=\{u\}$。

令 v 为 G的一个全邻顶点。

如果 v 是其唯一的全邻顶点且 $u=v$，那么 C 中可能包含 S的多个顶点，但它们都不在 $S\setminus S_1$中。因此，此子情况中的凸集数量为

$$2^{|S_1|}.$$

如果 $u\neq v$ 或 G 有多个全邻顶点，那么 C 不包含 S中的任何顶点。对于这样的 u，凸集的数量恰好为 1。

情况 (iii)： $K \subseteq C$。如果 C 包含 K的所有顶点，那么每个度至少为 2 的 $s \in S$ 都必须属于 C，因为它是一个 P_3 的中间顶点，且该路径的两个端点都在 K中。顶点 $s \in S_1$ 可以独立地选择包含或排除，因为没有 P_3 会强制包含它们。因此，此情况贡献

$$2^{|S_1|}.$$

结合以上三种情况，可得以下结果。

定理 14. 设 $G = (V, E)$ 是一个最小度为 $\delta(G) \geq 1$、且不同构于星图的阈值图。G 的 P_3-凸集数量为

$$noc(G) = (|S| + 1) \ + \ |K| \ + \ N_U \ + \ 2^{|S_1|},$$

其中

$$N_U = \begin{cases} 0 & if\ \delta(G) \geq 2, \\ 2^{|S_1|} - 1 & if\ \delta(G) = 1. \end{cases}$$

总数可在 $O(|V| + |E|)$ 时间内计算得出。

证明。公式的正确性可由上述分类讨论得出。

阈值图可以在线性时间内识别，其规范分裂划分也可以在线性时间内构造。所有量 K、S、S_1 和 N_U 均可在 $O(|V|+|E|)$ 时间内计算，而对 $w \in K$ 求和也只需线性时间。因此，整个计算可在 $O(|V| + |E|)$ 时间内完成。

□

4 计算 $noc(G)$的指数时间算法

本节将为任意输入图 $G = (V, E)$ 开发计算 $noc(G)$ 的精确指数时间算法。我们首先介绍一种朴素的 $O^*(2^{|V|})$ 算法，然后给出更精巧的算法，通过结合结构分解、强制着色传播和快速独立集计数，降低指数底数，从而改善时间复杂度。

在本小节中，我们始终采用第 2.1 小节引入的 P_3-凸性的双色解释：直接枚举算法的步骤如下。每个顶点独立地选择两种颜色 B 或 W 中的一种，由此得到 $2^{|V|}$ 种可能的着色。对于每种着色，我们用 $O(|V| + |E|)$ 时间检查每个白色顶点是否至多有一个黑色邻点。有效着色与 G 的 P_3-凸子集一一对应。该过程的运行时间为

$$O\Big(2^{|V|}(|V| + |E|)\Big) = O^*(2^{|V|}),$$

时间，并将作为比较的基准。

4.1 改进精确算法的一般策略

设 I 是 G 的一个独立集。假设我们枚举了 $G-I$ 的所有有效部分着色 π。对于每个 π，我们应用两条传播规则：

(R1) 如果一个白色顶点有黑色邻居，则它所有未着色邻点都变为白色。

(R2) 如果一个未着色顶点有两个黑色邻居，则它变为黑色。

令 I_π 为 I 中根据 (R1)–(R2) 被强制着色的顶点子集。如果传播后的着色无效，则舍弃 π。否则，按如下方式构造辅助图 H_π：

- $V(H_\pi) = I \setminus I_\pi$,
- $xy \in E(H_\pi)$ 当且仅当 G 中对应的顶点在 π下共享一个白色邻居。

当且仅当 $I \setminus I_\pi$ 中的两个顶点在 H_π 中相邻时，它们不能在有效补全中同时为黑色。因此，每个有效补全都对应于 H_π 的一个独立集。

使用 Gaspers 和 Lee 的 $O^*(1.2356^n)$ 算法，对于有 n 个顶点的图 [24]，我们可以高效地计算 H_π 的独立集数量。

因此：

$$noc(G) = \sum_{\pi} noi(H_\pi),$$

其中求和遍历 $G-I$ 的所有有效部分着色 π。

4.2 关于大型独立集的运行时间

下一个精确算法遵循一种基于输入图 $G=(V, E)$ 的一个大型独立集 I 的通用方案。找到这样的集合 I 后，算法按如下方式进行：

- 枚举 $G-I$ 到颜色 {B，W} 的所有有效部分着色；
- 对于每个部分着色 π，应用传播规则 (R1)–(R2)，为 I 的顶点强制赋予更多赋值；
- 令 $I_\pi \subseteq I$ 为 I 中通过传播而着色的顶点集合；若得到的扩展无效，则将其丢弃；
- 若 $I \setminus I_\pi = \emptyset$，则 π 恰好贡献一个 P_3-凸集；
- 否则，构造以 $I \setminus I_\pi$ 为顶点集的辅助图 H_π：当且仅当 G 中对应的顶点在 π 下共享一个白色邻居时，这两个顶点相邻。于是，π 的有效补全与 H_π 的独立集一一对应，可使用 Gaspers 和 Lee [24] 的算法在 $O^*(1.2356^{|I\setminus I_\pi|})$ 时间内计数。

一个通用上界。设 $n = |V|$ 和 $k = |I|$。最坏情况下， $G - I$ 的可能着色数为 $2^{|V \setminus I|} = 2^{n-k}$; 其中只有一部分是有效的，但这个上界足以得到运行时间的上界。对于 $G - I$ 上的每个有效部分着色 π，处理相应的 $(I \setminus I_\pi)$ 所需的工作量至多为 $O^*(1.2356^{|I \setminus I_\pi|}) \leq O^*(1.2356^k)$。因此，总运行时间满足

$$T(G) = O^*\left(2^{n-k} \cdot 1.2356^k\right).$$

等价地，若设定 $\alpha = k/n$ （ I 中顶点所占的比例），则得到

$$T(G) = O^*\left(\left(2^{1-\alpha} \cdot 1.2356^{\alpha}\right)^n\right).$$

因此，我们能够保证的独立集越大 I，指数基数就越小 e.

保证存在较大独立集的图类。这一观察表明，该算法在满足以下条件的图类上尤其有效:

1. 存在一个常数 $\alpha > 0$，使得该图类中的每个 n顶点图都包含一个大小至少为 αn的独立集，且

2. 这样的独立集可以在多项式时间内找到。

在这种情况下，我们有一个统一的上界

$$T(G) = O^*\left(\left(2^{1-\alpha} \cdot 1.2356^{\alpha}\right)^n\right),$$

适用于该类中的所有图 G。

我们简要说明 α 的不同取值所产生的影响:

- 若 $\alpha = 1/2$，则
$$T(G) = O^*\left(\left(2^{1/2} \cdot 1.2356^{1/2}\right)^n\right) \approx O^*(1.57^n).$$
- 若 $\alpha = 1/3$，则
$$T(G) \approx O^*(1.70^n).$$
- 若 $\alpha = 1/4$，则
$$T(G) \approx O^*(1.77^n).$$

对于许多研究充分的图类，这样的 α 以及相应的多项式时间构造大独立集的方法都是已知的；例如:

- 任何具有 n 个顶点且最大度为 Δ 的图，都存在一个大小至少为 $n/(\Delta + 1)$ 的独立集，可以通过简单的贪心算法得到。
- 含有 n 个顶点的每个二分图都包含一个大小至少为 $n/2$ 的独立集，因为它的两个颜色类中至少有一个大小不小于 $n/2$。

- 对于平面图，四色定理保证存在一个大小至少为 $n/4$ [34] 的独立集，并且可以通过一种已知的平面图四着色算法高效地计算出这样一个集合 [35]。

对于每个这样的类，将相应的下界代入 $|I|$ 通用表达式

$$T(G) = O^*\left(2^{\,n-|I|} \cdot 1.2356^{\,|I|}\right)$$

可得到一个严格小于 2 的显式指数底数。这表明，在能够保证存在较大独立集且可在多项式时间内找到它们的图类上，以独立集为基础的、支撑算法 2 的一般策略可以得到显著改进。

4.3 三种更快的指数时间算法

现在，我们基于将 G 仔细分解为三个阶段，逐步进行直到只剩下一个独立集 I，来介绍三种改进算法。对于 $G - I$ 的每一种部分着色，我们都采用第 4.1 小节中的一般策略。阶段 2 有三种不同的方案，由此得到三种不同的时间界。

阶段 1：主要块。 我们寻找一个顶点 v，使其 $G[N(v)]$ 包含一个非平凡连通分量。在所有满足条件的顶点中，我们选择使此类连通分量规模最大的顶点。令 M 为由 v 和该连通分量构成的诱导子图。我们移除M，并将其称为一个主块。令 p表示移除顶点的总数。

每个主块都满足 $|M| \geq 3$。M 的每种有效着色恰好是以下之一:

$$\text{all white,} \qquad \text{exactly one black vertex,} \qquad \text{all black,}$$

因此恰有 $|M| + 2$种有效着色。由于 $|M| \geq 3$，我们有 $|M| + 2 \leq 5^{|M|/3}$，所以:

$$\#\text{valid colorings from Phase 1 is at most } 5^{p/3}.$$

阶段 1 之后的剩余图不含三角形（否则一个三角形会产生更大的块）。

阶段 2：三种星形提取方式。 在无三角形的剩余图中，我们考虑阶段 2 的三种变体。

变体 *A*（爪 $K_{1,\,3}$）。任何最大度至少为 3 的顶点都会诱导出一个爪（$K_{1,\,3}$）。只要存在这样的顶点，我们就移除整个爪。令 q 为移除的顶点总数。每个爪恰有 12 种有效的 P_3-凸着色，因此:

$$\#\text{valid colorings from Phase 2A is at most } 12^{q/4}.$$

经过此阶段后，剩余图无三角形且最大度为 $\Delta \leq 2$，因此它是不交并的路径和圈。

变体 **B**（星 $K_{1,\,4}$）。我们不再移除爪，而是迭代地移除诱导星 $K_{1,\,4}$，也就是说，只要存在一个度至少为 4 的顶点，我们就选取这样一个顶点 v 并将其与它的四个邻点一并移除 v。同样，设 q 为被移除顶点的数量。每个 $K_{1,\,4}$ 恰好有 21 个有效的 P_3-凸着色，因此

$$\#\text{valid colorings from Phase 2B is at most } 21^{q/5}.$$

阶段 2B 后，剩余图是最大度为 $\Delta \leq 3$ 的无三角形图。

变体 **C**（星图 $K_{1,\,5}$）。类似地，我们可以移除诱导星 $K_{1,\,5}$，每个诱导星都由一个中心和五个叶组成。令 q 为移除的顶点总数。每个 $K_{1,\,5}$ 恰有 38 种有效的 P_3-凸着色，因此

$$\#\text{valid colorings from Phase 2C is at most } 38^{q/6}.$$

阶段 2C 后，剩余图是最大度为 $\Delta \leq 4$ 的无三角形图。

阶段 3：独立集提取。我们在剩余的无三角形图中寻找一个独立集。根据剩余图的最大度 Δ，我们区分两种情况。

- 若 $\Delta \leq 2$（变体 A），则剩余图是若干路径和环的不交并。我们从每个连通分量中提取一个最大独立集：对于路径或偶圈，至少一半的顶点属于 I；对于满足 $k \geq 2$ 的奇圈 C_{2k+1}（图中已无三角形），恰有 k 个顶点属于 I。

- 若 $3 \leq \Delta \leq 4$（变体B和C），我们采用标准的贪心过程：反复将一个最小度顶点 v 加入 I，然后删除 v 及其邻点。这保证了

$$|I| \;\geq\; \frac{|V| - p - q}{\Delta + 1}.$$

令 $r = |I|$，并令

$$t = |V| - p - q - r$$

表示阶段 3 中被删除且不属于 I的顶点数。定义 $s = t + r$。这些 t 个顶点各自最多贡献 2 种可能的颜色，因此：

$$\#\text{phase-3 colorings is at most } 2^t.$$

算法。 见算法 2

正确性。

定理15. *通过选择算法 2 中阶段 2 的三种变体之一得到的每种算法都能精确计算 $noc(G)$ 。*

算法 2 计算 $noc(G)$ 的改进的精确算法

函数 SECOND-EXACT-NOC(G)
  执行阶段 1（主要块）
  选择阶段 2 的三种变体之一（爪、$K_{1,\ 4}$ 的，或 $K_{1,\ 5}$ 的）并应用它
  执行阶段 3，得到一个独立集 I
  $count \leftarrow 0$
  对于 阶段 1 块 ($\leq 5^{p/3}$) 的每种有效着色 **执行**
    对于阶段 2 结构的每种有效着色（$\leq 12^{q/4}$ 或 $\leq 21^{q/5}$ 或 $\leq 38^{q/6}$）**执行**
      对于阶段 3 已移除顶点的每种着色（$\leq 2^t$）**执行**
        在 $G - I$上形成部分着色 π
        应用规则 (R1)–(R2) 以传播强制颜色，得到 π' 和 I_π
        如果 π' 无效**则继续**
        结束如果
        $J = I \setminus I_\pi$
        如果 $J = \emptyset$ **那么**
          $count \leftarrow count + 1$
        else
          构建 H_π on J
          $count \leftarrow count + noi(H_\pi)$
        结束如果
      结束循环
    结束循环
  结束循环
  返回 $count$
结束函数

证明。 每个主块和每个提取出的星图（爪 $K_{1,3}$, $K_{1,4}$ 或 $K_{1,5}$）都以所有有效方式着色。结构性删除保留了 $G - I$ 的部分着色与被删除结构的有效着色之间的双射。

规则 (R1)–(R2) 涵盖了 P_3-凸性的所有强制推论，因为：白色顶点不能有两个黑色邻居，而有两个黑色邻居的顶点必须是黑色。

I 的顶点构成一个独立集，因此它们之间的冲突只会在两个顶点共享一个白色邻居时出现，这一点正由 H_π 精确编码。因此，每个有效补全都对应于 H_π 的一个独立集，而 H_π 的独立集则对应于有效补全。每个凸集都恰好生成一次。

□

运行时间分析。由算法2得到的三种算法各自的总开销为：

- **变体 A（爪）**。

$$O^*\left(5^{p/3} \cdot 12^{q/4} \cdot 2^t \cdot 1.2356^{\,r}\right), \qquad p + q + t + r = |V|.$$

  经过阶段 1–2A 后，由 $s = t + r$ 顶点诱导的子图中，每个连通分量都是路径或环。除奇圈外，每个连通分量中至少有一半顶点位于

I中。对于一个含有 $k \geq 2$ 的奇圈 C_{2k+1} （回想一下，该图无三角形），其恰好有 k 个顶点位于 I中。最坏情况是整个剩余图为若干个 C_5的不交并，因此：

$$t = \frac{3s}{5}, \qquad r = \frac{2s}{5}.$$

于是：

$$\begin{aligned} 5^{p/3}\, 12^{q/4}\, 2^t\, 1.2356^r &= 5^{p/3}\, 12^{q/4}\, (8 \cdot 1.2356^2)^{s/5} \\ &\approx 5^{p/3}\, 12^{q/4}\, (1.6496)^s. \end{aligned}$$

最坏情况是当 $q = |V|$时，这会得到

$$\boxed{O^*(1.86121^{\,|V|})}.$$

- **变体 B** （$K_{1,\ 4}$）。

$$O^*\left(5^{p/3} \cdot 21^{q/5} \cdot 2^t \cdot 1.2356^{\,r}\right), \qquad p+q+t+r = |V|,\ r \geq \frac{(t+r)}{3+1}.$$

因此，最坏情况是：

$$t = \frac{3s}{4}, \qquad r = \frac{s}{4}.$$

于是：

$$\begin{aligned} 5^{p/3}\, 21^{q/5}\, 2^t\, 1.2356^r &= 5^{p/3}\, 21^{q/5}\, (8 \cdot 1.2356)^{s/4} \\ &\approx 5^{p/3}\, 21^{q/5}\, (1.77314)^s. \end{aligned}$$

最坏情况是当 $q = |V|$时，这会得到

$$\boxed{O^*(1.83842^{\,|V|})}.$$

- **变体 C** （$K_{1,\ 5}$）。

$$O^*\left(5^{p/3} \cdot 38^{q/6} \cdot 2^t \cdot 1.2356^{\,r}\right), \qquad p+q+t+r = |V|,\ r \geq \frac{(t+r)}{4+1}.$$

因此，最坏情况是：

$$t = \frac{4s}{5}, \qquad r = \frac{s}{5}.$$

那么：

$$5^{p/3}\,38^{q/6}\,2^t\,1.2356^r = 5^{p/3}\,38^{q/6}\,(16\cdot 1.2356)^{s/5}$$
$$\approx 5^{p/3}\,38^{q/6}\,(1.8164)^s.$$

最坏情况是当 $q=|V|$ 时，此时得到

$$\boxed{O^*(1.83357^{|V|})}.$$

如果输入图只包含 $O(1)$ 个互不相交的爪（互不相交的 $K_{1,\ 4}$）（互不相交的 $K_{1,\ 5}$），则有 $q=O(1)$（即相应的阶段 2 具有多项式开销），且运行时间可改进为

$$O^*(1.71^{|V|})\ (O^*(1.77314^{|V|}))\ (O^*(1.8164^{|V|})).$$

评论 1. 即使是只含一个 顶点不相交的诱导 $K_{1,\ 4}$ 的分裂图，也足以使计数 P_3-凸集成为 #P 完全问题（推论 13）。由于具有有界数量的顶点不相交诱导 $K_{1,\ 4}$（或顶点不相交诱导 $K_{1,\ 5}$）的图类是这一受限图族的超类，因此该问题对这些图类仍然是 #P 完全问题。这进一步说明了上述改进的精确算法的合理性。

现在，为了降低阶段 3 的开销，我们考察是否能够保证：对于每个有 n 个顶点且最大度为 $\Delta=3$（分别为 $\Delta=4$）的无三角形图，都存在一个严格大于 $n/$（$\Delta+1$）的独立集。若能作出这样的保证，则界 O^*（分别为 O^*）可相应改进。

改进这一结果的另一种可行思路如下。我们知道：(i) 在任何连通非正则图中，反复选取一个最小度顶点并将其纳入独立集 I，随后将其及其邻点删除的贪心算法，可以保证 $|I|\geq n/\Delta$；(ii) 如果图是二分图，我们就能自动得到 $|I|\geq n/2\geq n/\Delta$。因此，唯一的临界情形是 Δ-正则、非二分、无三角形图。

另一方面，如果我们将贪心算法应用于一个连通的 Δ-正则、非二分、无三角形图 $G=(V,\ E)$，就能得到一个大小至少为

$$\frac{|V|-\Delta-1}{\Delta}+1=\frac{|V|-1}{\Delta}\geq\frac{|V|}{\Delta}-1,$$

因为在第一次迭代之后，剩余图的每个连通分量都是非正则的。这意味着，对于一个有 n 个顶点的 Δ-正则、非二分、无三角形图 H，贪心算法得到的独立集大小与 n/Δ之间的差距至多为k，其中 k 是 H的连通分量数。

这个上界还可以进一步细化：差距至多为未能获得大小至少为 n_i/Δ 的独立集的连通分量 H_i of H 的数量，其中 n_i 是

H_i 的顶点数。如果我们能证明每个未达标的连通分量都至少有 n_Δ 个顶点，那么贪心算法便能在 H 中得到大小至少为 I 的独立集

$$\frac{n}{\Delta} - \frac{n}{n_\Delta} = \frac{n\,(n_\Delta - \Delta)}{\Delta\, n_\Delta}.$$

因此，我们的思路是确定最小的连通 Δ-正则、非二分、无三角形图 $G = (V,\ E)$，使其不存在大小至少为 $|V|/\Delta$ 的独立集，从而使得 $n_\Delta = |V|$；或者通过计算探索推断出 n_Δ 的一个较好的下界。

4.3.1 ($k,\ \ell$)-图的一般方案

现在，我们将说明如何把第 4.1 小节中基于独立集的通用策略专门应用于 ($k,\ \ell$)-图。回顾一下，如果一个图 $G = (V,\ E)$ 的顶点集可以划分为

$$V = A_1 \uplus \cdots \uplus A_k \uplus C_1 \uplus \cdots \uplus C_\ell$$

使得其中每个 A_i 都是独立集，且每个 C_j 都是团。这里，k 和 ℓ 是固定常数。

一般而言，只要 $k \geq 3$ 或 $\ell \geq 3$，识别 ($k,\ \ell$)-图就是 NP完全的（例如，参见 [8]）。相比之下，当 $k \leq 2$ 且 $\ell \leq 2$ 时，识别问题可在多项式时间内解决；此外，也可以在多项式时间内构造相应的划分 [10, 9, 23, 8]。因此，接下来我们假设以下条件之一成立：

- 作为输入的一部分，我们给定 V 的一个(k,ℓ)-划分（对于$k \geq 3$ 或 $\ell \geq 3$的困难识别情形），或者
- 我们研究的是可在多项式时间内识别的某个子类，其中 $k \leq 2$ 和$\ell \leq 2$成立；在这种情况下，可以高效地找到合适的划分。

团侧的着色模式。固定 V的一个(k,ℓ)-划分。考虑其中一个团部分 C_j。根据 P_3-凸性，凸集在 C_j 上的表现受到很大限制：C_j 中的每个顶点都与 C_j中的所有其他顶点相邻，因此，C_j 中的白色顶点在 C_j内部至多有一个黑色邻点。因此，任何 P_3-凸集在 C_j 上的诱导着色只能是以下情形之一：

- C_j 中的所有顶点均为白色；
- C_j 中恰有一个顶点为黑色；
- C_j 中的所有顶点均为黑色。

因此，C_j 至多允许 $|C_j| + 2$ 种与 P_3-凸性兼容的局部着色模式。由于 k 和 ℓ 是固定的，所有团部分的全局选择总数

$$(C_1, \ldots, C_\ell)$$

上界为

$$\prod_{j=1}^{\ell}(|C_j|+2),$$

该时间关于 $n=|V|$ 是多项式的。因此，我们可以在多项式时间内枚举团侧上的所有着色模式，并针对每种模式，将其视为固定不变的，然后继续进行分析。

归约为 A_i上的独立集问题。一旦所有团 C_1、……、C_ℓ 上的颜色都确定下来，我们剩下的就是

$$A := A_1 \uplus \cdots \uplus A_k,$$

这些顶点，它们诱导出 k 个独立集的不交并。在这一侧，主要任务是在满足 P_3-凸性的同时选择额外的黑顶点。特别地，第 4.1 小节中的一般框架告诉我们，运行时间关键取决于我们能够保证并构造出的独立集 I 的大小。

一个自然且简单的选择是将 I 取为 A_1、……、A_k 中最大的部分。设 $n_A=|A|$ 为独立集侧的顶点总数。那么

$$|I| \;\geq\; \frac{n_A}{k}.$$

应用通用的运行时间界（见第 4.2 小节）

$$T(G)=O^*\Big(2^{\,n_A-|I|}\cdot 1.2356^{\,|I|}\Big)$$

显然，最坏情况是$|I|=\frac{n_A}{k}$和 $n_A=n$。

$$T(G)=O^*\Big(2^{\frac{n_A(k-1)}{k}}\cdot 1.2356^{\frac{n_A}{k}}\Big)=O^*\Big(2^{\frac{n(k-1)}{k}}\cdot 1.2356^{\frac{n}{k}}\Big)=O^*\Big(\big(2^{\frac{k-1}{k}}\cdot 1.2356^{\frac{1}{k}}\big)^n\Big).$$

由于团上的着色模式数量仅为多项式级别，因此当 k 和 ℓ 为固定常数时，这个界描述了$(k,\ \ell)$-图上的总体运行时间。

该方案适用的参数范围。底数

$$\beta_k = 2^{(k-1)/k}\cdot 1.2356^{1/k}$$

是 k的非递减函数，并且当 k 较大时，相较于一般界$O^*(1.83357^n)$的改进会消失。利用上述界可以验证，当 $k\leq 5$时，得到的底数严格小于 1。83357。

我们强调，若干重要的图类都是（k，ℓ）-图的特殊实例。例如，分裂图恰好是（1，1）-图，而二分图则对应于（2，0）-图。

致谢

Mitre C. Dourado 部分受到巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）资助，资助编号为 403601/2023-1 和 305141/2024-4。Luciano Grippo 部分受到国家科学与技术研究委员会（PIP 2022-2024 GI - 11220210100392CO）资助。Min Chih Lin 部分受到国家科学与技术研究委员会（PIP 11220200100084CO）、UBACyT（20020220300079BA 和 20020190100126BA）以及国家科学技术促进局（PICT-2021-IA-00755）资助。F´abio Protti 部分受到巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）资助，资助编号为 304643/2025-4 和 409140/2025-2。

参考文献

[1] Bijo S. Anand、Ullas Chandran S. V.、Manoj Changat、Mitre C. Dourado、Ferdoos Hos- sein Nezhad 和 Prasanth G. Narasimha-Shenoi。关于图中测地凸性的 Carath´eodory 数与交换数。理论计算机科学，804：46–57，2020年。[2] J´ulio Ara´ujo、Mitre C. Dourado、F´abio Protti 和 Rudini M. Sampaio。图凸性导论。拉丁美洲数学丛书。施普林格，Cham，2025年。[3] Rafael T. Ara´ujo、Rudini M. Sampaio、Vin´ıcius F. dos Santos 和 Jayme L. Szwarcfiter。三阶诱导路径的凸性及其应用：复杂性方面。离散应用数学，237：33–42，2018年。[4] Rommel M. Barbosa、Erika M. M. Coelho、Mitre C. Dourado、Dieter Rautenbach 和 Jayme L. Szwarcfiter。关于三阶路径凸性的 Carath´eodory 数。*SIAM* 离散数学杂志，26(3)：929–939，2012年。[5] Fabr´ıcio Benevides、Victor Campos、Mitre C. Dourado、Rudini M. Sampaio 和 Ana Silva。测地凸性和单音凸性中的最大感染时间。理论计算机科学，609（第2部分）：287–295，2016年。[6] Andreas Bj¨orklund 和 Thore Husfeldt。精确可满足性和完美匹配计数的精确算法。*Algorithmica*，52(2)：226–249，2008年。[7] B´ela Bollob´as。数学的艺术：孟菲斯的咖啡时光。剑桥大学出版社，剑桥，2006年。[8] Flavia Bonomo-Braberman、Min Chih Lin 和 Ignacio Maqueda。(1,2)- 图、 (2,1)- 图和 (2,2)- 图的高效识别算法，2025 年。arXiv 预印本。[9] Andreas Brandst¨adt。勘误：“将图划分为一个或两个独立集与团”[离散数学**152**（1996年），第1-3期，47–54；MR1388631 (96m:05148)]。离散数学，186(1-3)：295，1998年。[10] Andreas Brandst¨adt、Van Bang Le 和 Thomas Szymczak。与图的三着色性相关的一些问题的复杂性。离散应用数学，89(1-3)：59–73，1998年。

[11] C. C. Centeno、L. D. Penso、D. Rautenbach 和 V. G. Pereira de S´a。 P_3-凸性中的测地数与包络数。*SIAM* 离散数学杂志，27(2)：717–731，2013年。[12] Manoj Changat、Sandi Klavˇzar 和 Henry Martyn Mulder。图的全路径传递函数。捷克斯洛伐克数学杂志，51(126)(2)：439–448，2001年。[13] Manoj Changat 和 Joseph Mathew。图中的三角形路径凸性。第206卷，第91–95页。1999年。组合学与数论（Tiruchirappalli，1996年）。[14] Eurinardo R. Costa、Mitre C. Dourado 和 Rudini M. Sampaio。与单音凸性相关的不可近似性结果。离散应用数学，197：70–74，2015年。[15] Bruno Courcelle。线性延迟枚举与单子二阶逻辑。离散应用数学，157(12)：2675–2700，2009年。[16] Vilhelm Dahll¨of、Peter Jonsson 和 Magnus Wahlstr¨om。2SAT 和 3SAT 公式的模型计数。理论计算机科学，332(1-3)：265–291，2005年。[17] Mitre C. Dourado、Lucia D. Penso 和 Dieter Rautenbach。三阶诱导路径凸性中的包络数。理论计算机科学，906：52–63，2022年。[18] Mitre C. Dourado、F´abio Protti 和 Jayme L. Szwarcfiter。与单音凸性相关的复杂度结果。离散应用数学，158(12)：1268–1274，2010年。[19] Mitre C. Dourado 和 Rudini M. Sampaio。三角形路径凸性的复杂性方面。离散应用数学，206：39–47，2016年。[20] Pierre Duchet。图中的凸集。II. 极小路径凸性。*J. Combin. Theory Ser.B*，44(3)：307–316，1988年。[21] David Eppstein。用表示所有最小生成树的方法及其在计数和生成中的应用。技术报告95-50，加州大学尔湾分校信息与计算机科学系，尔湾，加利福尼亚州92697-3425，美国，1995年。[22] Martin Farber 和 Robert E. Jamison。图与超图中的凸性。*SIAM* 代数离散方法杂志，7(3)：433–444，1986年。[23] Tom´as Feder、Pavol Hell、Sulamita Klein 和 Rajeev Motwani。图划分问题的复杂性。载于 Jeffrey Scott Vitter、Lawrence L. Larmore 和 F. Thomson Leighton 编，第三十一届年度 *ACM*计算理论研讨会论文集（*STOC '99*），第464–472页，纽约，美国，1999年。美国计算机协会。[24] Serge Gaspers 和 Edward J. Lee。多项式空间中的更快速图着色。*Algorithmica*，85(2)：584–609，2023年。[25] Martin Charles Golumbic。算法图论与完美图，第57卷《离散数学年刊》。爱思唯尔（北荷兰），第2版，2004年。

[26] David J. Haglin 和 Marty J. Wolf. 竞赛图中的凸子集. *SIAM* 离散数学杂志, 9(1):63–70, 1996.[27] ´Atila A. Jones, F´abio Protti 和 Renata R. Del-Vecchio. 具有线性延迟的余图生成. 理论计算机科学 , 713:1–10, 2018.[28] Mamadou Moustapha Kant´e, Thiago Marcilon 和 Rudini Sampaio. 测地凸包数的参数化复杂度. 理论计算机科学, 791:10–27, 2019.[29] Benny Kimelfeld 和 Yehoshua Sagiv. 高效枚举关键词搜索结果. 收录于 Gavin M. Bierman 和 Christoph Koch 编，《数据库编程语言：第十届国际研讨会，DBPL 2005，特隆赫姆，挪威，2005年8月28日至29日，修订精选论文》，《计算机科学讲义》第 3774 卷，第 58–73 页。施普林格，2005 年.[30] Konstantin Kutzkov. #3-SAT问题的新上界.《信息处理快报》, 105(1):1–5, 2007.[31] E. L. Lawler、J. K. Lenstra 和 A. H. G. Rinnooy Kan. 生成所有极大独立集：NP困难性与多项式时间算法. *SIAM J. Comput.*, 9(3):558–565, 1980.[32] I. M. Pelayo.《图中的测地凸性》. 施普林格，2013 年.[33] J. Scott Provan 和 Michael O. Ball. 割计数的复杂度以及计算图连通概率的复杂度. *SIAM J. Comput.*, 12(4):777–788, 1983.[34] Neil Robertson、Daniel Sanders、Paul Seymour 和 Robin Thomas. 四色定理. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70(1):2–44, 1997.[35] Neil Robertson、Daniel P. Sanders、Paul Seymour 和 Robin Thomas. 高效地为平面图着四种颜色. 收录于第二十八届 *ACM* 计算理论年度研讨会论文集（宾夕法尼亚州费城，*1996*年），第 571–575 页。美国计算机协会，纽约，1996 年.[36] Jayme L. Szwarcfiter 和 Peter E. Lauer. 有向图初等圈的搜索策略.《北欧信息处理期刊》（*BIT*）, 16(2):192–204, 1976.[37] Salil P. Vadhan. 稀疏图、正则图和平面图中计数的复杂度. *SIAMJ. Comput.*, 31(2):398–427, 2001.[38] Leslie G. Valiant. 枚举与可靠性问题的复杂度. *SIAM J.Comput.*, 8(3):410–421, 1979.[39] Marcel L. J. van de Vel.《凸结构理论》, 第 50 卷。爱思唯尔，1993 年。