arXiv:2603.04749v1 [math.FA] 5 Mar 2026

随机多面体的余型

Han Huang 和 Konstantin Tikhomirov

Abstract. 对于 $N \geq n$，令 $P_{N,\,n}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个随机多面体，其顶点为 $\pm X_i$, $1 \leq i \leq N$，其中 X_1，……，X_N 是 $\mathbb{R}^n$中的独立同分布标准高斯向量。随机多面体 $P_{N,\,n}$及其对偶体，是高维凸几何和局部Banach空间理论中备受关注的经典对象。本文为由 $P_{N,\,n}$生成的相应赋范空间（$\mathbb{R}^n$，$\|\cdot\|_{P_{N,\,n}}$）的余型给出了 *dimension-independent*界。令 $K' \geq K > 1$，并假设 $K' \geq \frac{N}{n} \geq K$。我们证明，以概率 $1 - o(1)$，对任意 $k \geq 1$以及任意由$\mathbb{R}^n$中的向量构成的集合 y_1，……，y_k，

$$\mathbb{E}_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i \Big\|_{P_{N,n}}^q \geq \frac{1}{C_q^q} \sum_{i=1}^k \|y_i\|_{P_{N,n}}^q,$$

其中 $\sigma = (\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_k)$ 是一个由随机符号构成的向量，而 $q \in [2, \infty)$ 和 $C_q \in [1, \infty)$ 可能 *only*依赖于 K，K'。我们将结合无穷维Banach空间的背景讨论这一结果。

1. Introduction

1.1. 主要结果。 设 $N \geq n$，并令 X_1、……、X_N 是 $\mathbb{R}^n$ 中的独立同分布随机向量。定义一个随机对称多面体

$$P_{N,n} := \operatorname{conv}\big\{ \pm X_i,\ 1 \leq i \leq N \big\}. \tag{1}$$

对于 1 型多面体，关于 X_i 的各种随机性模型，已有大量研究成果，并且它们在高维凸几何和几何概率中发挥着基础性作用。特别可参阅专著和综述 [34, 4, 31, 28], [32, 第 8 节。2], 以及研究论文 [29, 9, 3, 25, 1, 5, 18, 12, 26, 27, 21, 36, 37, 6, 2, 11, 15, 16, 14] 和其中的参考文献，以全面了解相关背景。随机多面体自然出现在凸体逼近、线性规划的平均情形分析和平滑分析等问题中，并作为赋范空间渐近理论中的（近似）极值者。

在这里，我们关注由独立同分布的标准高斯随机向量 X_1、……、X_N 生成的多面体（1）。对于这一模型，或与之密切相关的非对称高斯多面体凸包，其整体几何性质及相关参数已得到较为深入的研究；特别是，研究内容包括期望体积、吸收概率以及刻面的数量。另一方面，这类多面体的截面几何仍鲜有探索。在这项工作中，我们通过班纳赫–马祖尔距离和余型的概念，尝试刻画 $_{n}$ 的局部几何。

回顾一下，中心对称凸体 $\mathcal{C}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的闵可夫斯基泛函 定义为

$$\|x\|_{\mathcal{C}} := \inf\{\lambda > 0 :\ \lambda^{-1} x \in \mathcal{C}\}.$$

由于对于 $N \geq n$，多面体 $P_{N,\,n}$ 几乎必然具有非空内部，且随机泛函$\|\cdot\|_{P_{N,\,n}}$ 以概率 1 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有效范数。我们回顾一下，给定一个赋范空间 $\mathbf{X}$（有限维或无限维均可）以及一个数 $q \in [2, \infty)$，若 $\mathbf{X}$ 具有余型，且其

Date：2026年3月6日。

常数 $C_q < \infty$ [23] 若

$$\mathbb{E}_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i \Big\|_{\mathbf{X}}^q \geq \frac{1}{C_q^q} \sum_{i=1}^{k} \|y_i\|_{\mathbf{X}}^q, \quad \text{for every } k \geq 1 \text{ and every } y_1, \ldots, y_k \text{ in } \mathbf{X}, \tag{2}$$

其中，期望是相对于均匀随机符号向量 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ 取的。无限维巴拿赫空间 $\mathbf{X}$ 具有 无限余型 ，如果对于任意有限的 q 和C_q，(2) 均不成立。本文的主要结果是下面的定理，它给出了由$P_{N,n}$生成的随机赋范空间的余型的与维数无关的界：

定理 A (高斯多胞体的余型)。 对于每个 $K' \geq K > 1$ ，都存在数值 $q \in [2, \infty)$和 $C_A, C_q \in [1, \infty)$, 它们仅依赖于 K, K'，并具有以下性质。设 $K' \geq \frac{N}{n} \geq K$，且设 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 是$\mathbb{R}^n$ 中独立同分布的标准高斯随机向量。令多面体 $P_{N,n}$ 按照 (1) 定义。那么，以至少 $1 - \frac{C_A}{n}$ 的概率，赋范空间 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{N,n}})$ 具有余型q ，且其常数至多为 C_q。

备注。 一个标准事实是，任何有限维赋范空间都具有有限余型，且相应常数仅取决于维数。我们强调，在上述定理中， q 和 C_q不取决于 n。

备注。 如果（$\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_{P_{N,n}}$）的典型实现能够一致地同构嵌入到某个已知具有有限余型的巴拿赫空间中，那么上述定理便可直接推出。尽管空间（$\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_{P_{N,n}}$）可以显然地表示为 ℓ_1^N上的秩为 n 的投影，但关于有限余型巴拿赫空间的截面（子空间），似乎尚无相关结果。

给定任意整数 $k \geq 1$以及任意一对 k维赋范空间 E， F， E 与 F 之间的班纳赫–马祖尔距离定义为

$$d_{BM}(E, F) = \inf_T \|T\|_{E \to F} \cdot \|T^{-1}\|_{F \to E},$$

其中，下确界取遍所有可逆线性算子 $T\colon\ E \to F$，而 $\|\cdot\|_{E \to F}$ 和$\|\cdot\|_{F \to E}$ 分别表示相应的诱导算子范数。对于两个赋范空间 E 和$\mathbf{X}$ 以及一个单射 $f\colon\ E \to \mathbf{X}$，我们将 $f(E)$（赋予由$\mathbf{X}$诱导的范数）与 E 之间的班纳赫–马祖尔距离称为该嵌入的畸变。Maurey 和 Pisier 的开创性结果 [23] 给出了通过嵌入畸变刻画无限余型的方法：巴拿赫空间$\mathbf{X}$ 具有无限余型，当且仅当空间 $\{\ell_\infty^m\}_{m=1}^\infty$ 能够以一致有界的畸变嵌入到$\mathbf{X}$ 中。在我们的情形下，Maurey–Pisier 的结果可以由下述陈述推出定理 A；该陈述也是本文的第二个主要结果：

定理 B （高斯多胞体的截面）。 设 $K' \geq K > 1$，并假设 $K' \geq \frac{N}{n} \geq K$。设 X_1， X_2，……，X_N是 $\mathbb{R}^n$ 中的独立同分布标准高斯随机向量，并设 $P_{N,n}$ 由 （1） 定义。则至少以概率 $1 - \frac{C_B}{n}$，对所有 $1 \leq k \leq n$ 以及所有 k 维子空间 E，其取自 （$\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_{P_{N,n}}$），

$$d_{BM}(E, \ell_\infty^k) \geq c\, k^\alpha.$$

其中， C_B、 $c > 0$ 仅可能依赖于 K'、 K，而 $\alpha > 0$ 为一个普适常数。

1.2. **具有最大局部非齐性的巴拿赫空间**。 巴拿赫空间理论中的一个标准事实是普适性对 ℓ_∞的普适性，或者更一般地，对任何一致包含 $\{\ell_\infty^m\}_{m=1}^\infty$的空间的普适性。具体而言，任何一致包含$\mathbf{X}$ 的巴拿赫空间 $\{\ell_\infty^m\}_{m=1}^\infty$ ，都允许将任意有限维赋范空间以及有限度量空间近乎等距地嵌入其中。Maurey 和 Pisier 的上述结果 [23] 通过余型概念，对普适巴拿赫空间给出了概率刻画：$\mathbf{X}$ 当且仅当$\mathbf{X}$具有无限余型时，X 才具有上述意义下的普适性。鉴于以上结论，具有无限余型的巴拿赫空间自然是

与空间的局部（有限维）结构相关的泛函的极值者。在这里，我们考虑一个衡量巴拿赫空间局部非齐次性的泛函。

给定一个赋范空间 $\mathbf{X}$ （有限维或无限维）以及整数 $1 \le k \le \dim \mathbf{X}$，定义

$$D_{\mathbf{X}}(k) := \sup\left\{ d_{BM}(E,F) : \dim E = \dim F = k;\ E,F \subset \mathbf{X} \right\},$$

即， $D_{\mathbf{X}}(k)$ 是$\mathbf{X}$ 的任意两个 k 维子空间之间的最大班纳赫–马祖尔距离。量 $D_{\mathbf{X}}(k)$ 可以视为衡量 $\mathbf{X}$ 的子空间结构非齐次性的指标，并且在文献中曾以不同名称加以研究。

注意，根据 Jordan and von Neuman 的经典结果， [13]， $D_{\mathbf{X}}(2) = 1$ 当且仅当 X 是希尔伯特（欧几里得）空间。此外，德沃雷茨基–米尔曼定理 [8, 24] 表明，对于每个可分的无限维巴拿赫空间 X，$\sup_k D_{\mathbf{X}}(k) < \infty$ 当且仅当 X 同构于希尔伯特空间 [19]。在有限维情形下，量 $D_{\mathbf{X}}(k)$ 曾在 [7, 22] 中得到研究；其中证明了，对于每个 $\alpha \in \in (0,1)$ 以及任意 n 维赋范空间 X，若条件 $D_{\mathbf{X}}(\lfloor \alpha n \rfloor) \le K$ 对某个 $K < \infty$ 成立，则对于某个仅依赖于 K 和 α 的函数 f，有 $d_{BM}(\mathbf{X}, \ell_2^n) \le f(K,\alpha)$。上述结果背后的普遍现象可以概括如下：如果 $D_{\mathbf{X}}(k)$较小，那么相应的巴拿赫空间 X 就是希尔伯特空间或接近希尔伯特空间。

从刻画希尔伯特型空间的问题出发，转而考察相反的极端情形，我们可以问：对于给定空间族中的$\mathbf{X}$ ， $D_{\mathbf{X}}(k)$的最大可能量级是多少？若对$\mathbf{X}$不作任何限制，这个问题等价于估计两个 k维子空间之间可能的最大班纳赫–马祖尔距离。Gluskin [10], 的一项开创性工作解决了后一个问题；结合 John 定理这一经典结果，可得$\Theta(k)$的量级，即 k维空间的班纳赫–马祖尔紧致空间 的直径。结合本小节开头的讨论，可得：对于每个具有无限余型的巴拿赫空间$\mathbf{X}$ ，当 $k \to \infty$ 时， $D_{\mathbf{X}}(k) = \Theta(k)$（本文使用的渐近符号请参见预备知识）。下面我们要探讨的问题是：在渐近情形下，具有无限余型的空间是否是局部非齐次性 $D_{\mathbf{X}}(k)$ 的唯一极值者 $k \to \infty$?

Gluskin 定理在 [10] 中的证明基于一种与（1）所给构造不同的随机构造，但在随机高斯多面体 [20]的情形下也能得到相同的结果。具体而言，可以证明，对于 $N = \lfloor Cn \rfloor$ ，取适当的普适常数$C > 1$，两个赋范空间 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{N,\,n}})$ 的独立副本以高概率具有阶为 $\Theta(n)$ 的班纳赫–马祖尔距离。我们在本文中得到的余型界，结合标准的巴拿赫空间构造，推出：

定理 C （具有最大局部非齐性的一种巴拿赫空间）。存在一个有限余型的可分巴拿赫空间$\mathbf{X}$ ，其 $D_{\mathbf{X}}(k) = \Theta(k)$ 为 $k \to \infty$。

1.3. **论证概要**。本文主要结果——定理 B（见定理 3.13）——的证明颇为技术性，包含多个归约步骤，并需处理各种子情况，涉及 ℓ_∞的不同类型潜在低畸变嵌入。为梳理证明思路，我们将从若干关键定义和几个“全局”对象开始讨论。

我们用 $X_1, \dots, X_N$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中独立同分布的标准高斯向量，并令 A 为以 $n \times N$ 为列的随机矩阵 $X_1, \dots, X_N$。我们通常会考虑 A 的典型实现，此时 A 本身及其子矩阵的奇异值均有现成的标准界（见引理 2.13）。此外，这些界结合 Blaschke–Santal´ 不等式和体积论证，可得出关于 P_N 内半径的估计，n以及向量 $X_1, \dots, X_N$ 的子集的凸包的（相对）内半径估计（引理 3.3）。

给定 $k \le n$，我们的目标是证明，对于随机多面体 $P_{N,\,n}$ 的典型实现，任意由 y_1、……、y_k（属于 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{N,\,n}})$ 中的向量组成的 k 元组，都不会张成一个接近 ℓ_∞^k 的子空间。我们将检验

映射 $e_i \to y_i$ 下的嵌入畸变，其中 e_i 表示 ℓ_∞^k 中的第 i 个标准基向量。在论证过程中，我们将对原始的 k 元组进行变换，得到其他向量，记作 y_i'，$\tilde{y}_i$ 等；我们还会取向量的子集，并将新的指标集记作 L，U 等。

在研究映射 $e_i \to y_i, i \le k$下的畸变时，相关平行多面体的顶点发挥着关键作用，其表示为 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$，其中 σ 表示固定的或随机的符号向量。预备知识部分相当大篇幅用于研究这类向量的基本性质，尤其是将分布 $\langle Z, \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle$ (对于给定的非随机向量 Z) 的尾部估计与随机向量 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$在符号均匀分布下的协方差矩阵结构联系起来（见引理 2.12），并研究内积 $\langle X_j, \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle$ 的统计性质（引理 2.15）。

为便于处理向量的$\|\cdot\|_{P_N,n}$–范数，我们引入系数向量这一概念。给定任意 $y \in \mathbb{R}^n$，令 $\beta(y)$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中满足 $y = \sum_{j=1}^N \beta_j(y) X_j$ 且 $\|\beta(y)\|_1 = \|y\|_{P_N,n}$ 的向量。根据凸包的定义，对于每个 y，都存在具有上述性质的向量 $\beta(y)$。处理符号组合 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$时，如果 y_1、.....、y_k可由上下文确定，我们就用简写 β^σ 代替 $\beta\big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\big)$（见定义 3.1 和 3.5）。注意，$\sum_{i\le k} \sigma_i y_i = A\beta^\sigma$。一个揭示证明主要结果所面临挑战的简单观察是，映射 $y \to \beta(y)$ 通常是非线性的（当 $N > n$ 时）；特别地，β^σ 与 $\sum_{i=1}^k \sigma_i \beta(y_i)$ 是不同的向量。差向量 $\beta^\sigma - \sum_{i=1}^k \sigma_i \beta(y_i)$，以及更一般地，任何满足 $\sum_{j\le N} \beta_j X_j = 0$ 的 N–元组 β，具有一项关键性质：对于 X_j 的典型实现，这类向量都是不可压缩的，也就是说，归一化后，它们与 $\mathbb{R}^N$ 中稀疏向量集合的欧几里得距离为常数（见定义 2.5 和引理 3.4）。

1.3.1. 正交 k元组的线性张成空间。 为了说明证明的核心思想，假设我们已经成功找到了一个由 k 个正交 向量 $y_1, \dots, y_k$ 组成的元组，它们属于 $\mathbb{R}^n$，且满足

$$\|y_i\|_{P_{N,n}} = \Theta(1), \quad i \le k; \qquad \Big\|\sum_{i\le k} \sigma_i y_i\Big\|_{P_{N,n}} = \Theta(1), \quad \sigma \in \{-1,1\}^k,$$

因此，映射 $e_i \longrightarrow y_i, i \le k$ 诱导出一个从 ℓ_∞^k 到 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{N,n}})$ 的利普希茨嵌入。我们想要证明，这一假设最终与 $P_{N,n}$ 的典型结构相矛盾。

对 $P_{N,n}$ 的标准体积估计表明，若我们选取一个均匀随机方向 $\theta \in S^{n-1}$，则以高概率有 $\|\theta\|_{P_N,n} = \Theta(1)$。如果向量 $\sum_{i\le k} \sigma_i y_i$ 的方向“类似随机”，那么 $\|\sum_{i\le k} \sigma_i y_i\|_{P_N,n}$ 的量级应为 $\Theta(\sqrt{k})$，因为 $\sum_{i\le k} \sigma_i y_i$ 的欧几里得长度为 $\sqrt{k}$。因此，假设对每个 σ 都有 $\|\sum_{i\le k} \sigma_i y_i\|_{P_N,n} = \Theta(1)$，我们便得到所有向量 $\sum_{i\le k} \sigma_i y_i$ 都是 $\sqrt{k}\, S^{n-1}$的非典型代表元。事实上，我们可以证明，在这种情况下，β^σ 的 ℓ_2 范数的量级为 $\sqrt{k/N}$，而 $\|\beta^\sigma\|_1 = \|\sum_{i\le k} \sigma_i y_i\|_{P_N,n} = \Theta(1)$，这意味着 $\beta^\sigma/\|\beta^\sigma\|_2$ 是可压缩的，即接近稀疏（见定义 2.5）。

β^σ 的上述结构性质 $j \le N$使得对于所有满足 β_j^σ“足够”大的，都可以得到以下近似公式：

$$\begin{aligned}\langle X_j, \sum_{i\le k} \sigma_i y_i\rangle &= \langle X_j, \sum_{\ell\le N} \beta_\ell^\sigma X_\ell\rangle = \langle X_j, A\beta^\sigma\rangle \\ &= \big(A^\top A\beta^\sigma\big)_j = (1+o(1))\beta_j^\sigma \|X_j\|_2^2 = (1+o(1))\beta_j^\sigma\, n\end{aligned}$$

（见引理3.9）。暂且假设我们能够利用最后一个公式，方法是找到一个大小为 $J \subset [N]$ 的子集，$n/k^{\Omega(1)}$ 并且该子集具有如下性质：对于每个 $\sigma \in \{-1,1\}^k$，

$$A_J^\top A_J \beta_J^\sigma = (1+o(1))(\beta_j^\sigma n)_{j\in J},$$

以及 $\|A_{J^c}\beta_{J^c}^\sigma\|_2 = o(\sqrt{k})$，其中我们用记号 $\cdot_J$ 和 $\cdot_{J^c}$ 表示将向量或矩阵的列限制在指标集 J或 J^c上（见定义 2.2）。记 H =张成空间$\{X_j\colon\ j \in J\}$。关于 J 的假设意味着，对于所有 σ，将 $\sum_{i\le k}\sigma_i y_i$ 正交投影到 $H^\perp$ 上（等价地，可表示为将向量 $A_{J^c}\beta_{J^c}^\sigma$ 正交投影到 $H^\perp$上）所得的向量具有较小的欧几里得范数；这又意味着，对于某些指标 i，向量 $P_{H^\perp}y_i$ 具有较小的欧几里得范数。由于$P_{N,n}$ 的内半径为常数量级（引理 3.3），因此得到

$$\|P_{H^\perp}y_i\|_{P_{N,n}} \lesssim \|P_{H^\perp}y_i\|_2 = o(1).$$

另一方面，截面 $P_{N,n}\cap H$ 包含 $\pm X_j, j\in J$的凸包，它本质上是一个$|J|$维的 ℓ_1球，经 $\sqrt{n}$缩放。因此，其相对内半径至少为 $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{|J|}} = k^{\Omega(1)}$的数量级（引理3.3），故

$$\|P_H y_i\|_{P_{N,n}} \lesssim k^{-\Omega(1)}\|P_H y_i\|_2 = o(1).$$

$\|P_{H^\perp}y_i\|_{P_{N,\ n}}$ 和 $\|P_H y_i\|_{P_{N,\ n}}$ 的界与假设 $\|y_i\|_{P_{N,\ n}} = \Theta(1)$ 相矛盾，从而完成论证。

我们在证明中构造的实际集合 J，其性质不如上文简化讨论中的强：我们不再要求对所有 σ，都有 $A_J^\top A_J\beta_J^\sigma = (1+o(1))(\beta_j^\sigma n)_{j\in J}$ 和 $\|A_{J^c}\beta_{J^c}^\sigma\|_2 = o(\sqrt{k})$，而是要求这些性质对足够多的符号向量成立。集合 J 定义为所有满足以下条件之一的指标 j 的并集：有一定比例的符号向量σ 满足

$$|\langle X_j, \sum_{i\le k}\sigma_i y_i\rangle| \ge k^{1/2+\Omega(1)},$$

或者 $|\langle X_j, \sum_{i\le k}\sigma_i y_i\rangle| \ge k^C$ 对某个 σ 的取值和一个较大的常数 $C>0$ 成立（见定义 3.7）。任一条件都意味着，将 X_j 投影到 y_i 的线性张成空间上时，$i\le k$ 携带了异常大的权重。根据 X_j 的正交投影的统计性质（引理 2.15 和注 3.8），这意味着 $|J| = n/k^{\Omega(1)}$。证明这部分的技术难点在于论证按上述方式定义的集合 J 确实满足关于 $A_J^\top A_J\beta_J^\sigma$ 和$A_{J^c}\beta_{J^c}^\sigma$ 的必要条件（见引理 3.11）。为获得所需估计，我们将集合 J 与其“σ–特定”的对应集合联系起来，也就是集合 T_σ；这些集合是由满足 β_j^σ 超过特别选定阈值的指标 $j\le N$ 构成的（见定义 3.6 和推论 3.10）。

1.3.2. 不具正交归一性的 k元组的线性张成。 在实际证明中，我们并未使用向量 y_i构成正交归一序列这一假设；此前采用该假设只是为了说明几个关键思想。因此，在实际情形下，除了关于 $\|\sum_{i\le k}\sigma_i y_i\|_2$的范数关于 σ的随机性的二阶矩为 k量级这一显然观察外，我们不再能够依赖精确估计。为了处理由任意配置的单位欧氏长度向量 y_1，……，y_k 组成、且其 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_{P_N}$范数具有可比性的情形，我们依赖于对 $\sum_{i\le k}\sigma_i y_i$ 的协方差矩阵的特征子空间进行某种分解（见引理 2.12）。事实证明，前面给出的论证可以适用于各向异性情形，但需要付出一定代价，进行更为技术性的计算。

1.3.3. 对 k元组应用联合界。 上述论证可以排除任意给定的k元组单位向量 y_1，……， y_k 其中满足 $\|y_i\|_{P_{N,\,n}} = \Theta$ （1）， $i \le k$ 作为通过 $e_i \to y_i$ 将 ℓ_∞^k 低失真嵌入的候选。然而，为了保证不存在小畸变嵌入，我们需要同时考虑所有可能的 k元组。在高维概率和凸几何中，离散化论证是一种标准技术，我们在此阶段采用该方法。离散化的核心部分是引理 2.11 ，它处理 ε网上的格拉斯曼流形，其中包含 d维子空间。Szarek 的经典结果 [33] 表明，存在一个 ε–网 $\mathcal{N}$，其位于$G_{n上,\,d}$ 大小至多为 $\binom{C}{\varepsilon}^{d(n-d)}$。事实证明，此外，对于任意 d维子空间$F \subset \mathbb{R}^n$，我们可以将到 F 的正交投影表示为无穷和 $-$

$$\mathrm{Proj}_F = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \mathrm{Proj}_{E_j}, \quad \text{where } D_j \text{ is matrix with } \|D_j\| \le 2\varepsilon^{j-1} \text{ and } E_j \in \mathcal{N}. \tag{3}$$

显然，上述公式是标准向量 ε在球面上的网展开 S^{n-1}的算子类比，它表明任意 $x \in S^{n-1}$ 都可以表示为一个收敛级数$x = \sum_{i\ge 0} \lambda_i x_i$ ，其 $|\lambda_i| \le \varepsilon^i$，且 x_i 属于 ε上的–网 S^{n-1} (例如，参见 [35, 练习 4。34])。我们不知道公式(3)此前是否曾在文献中出现。在我们看来，这个恒等式本身就很有意义。 ε论证对 X_j在 $\mathbb{R}^n$的线性子空间上的投影幅度统计量提供了统一控制。不过，这种方法有一个限制： ε 的可取值隐式地取决于向量 y_i的$\|\cdot\|_{P_{N,\,n}}$ 范数与 $\|\cdot\|_2$ 范数之比；当$\|y_i\|_{P_{N,\,n}}$ 与 $\|y_i\|_2$ 之间的差距较大时，网论证便会失效。总结目前为止的论证，我们得到（其中 k的幂次是明确的）：

命题（非正式表述；参见命题 3.12）。固定$P_{N,\,n}$的一个典型实现。设 $1 \le k \le n/2$，且 $y_1, \ldots, y_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位欧几里得长度向量，满足$\|y_i\|_{P_{N,\,n}} \ge C\,k^{-1/9}$ 对每个 $i \le k$都成立。那么，

$$\mathbb{E}_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i \Big\|_{P_{N,n}} \ge k^{1/8},$$

特别是，由 $e_i \longrightarrow y_i$, $i \le k$给出的 ℓ_∞^k 的嵌入会产生关于 k的多项式畸变。

1.3.4. 定理 B 的证明。上述命题实际上排除了ℓ_∞^k 的低畸变嵌入，前提是 ℓ_∞^k 的标准基被映射到具有彼此不太不同的$\|\cdot\|_{P_{N,\,n}}$ 和 $\|\cdot\|_2$–范数的向量中。要从这一结论推广到完整一般性的定理 B，我们必须考虑单位向量 $y_1, \ldots, y_k$ 的$\|\cdot\|_{P_{N,\,n}}$–范数非常小的情形。推动证明这一部分的核心结论是前述引理 3.4 ，它断言，对于 $P_{N,\,n}$的一个典型实现，任何满足 N–元系数 β 的单位 $\sum_{i\le N} \beta_i X_i = 0$， β 组 $\sum_{i\le N} \beta_i X_i = 0$条件的 β 系数 $\sum_{i\le N} \beta_i X_i = 0$单位 β 向量 $\sum_{i\le N} \beta_i X_i = 0$必须是不可压缩的。作为引理 3.4的一个技术性推论，我们得到以下结果：

引理 （非正式陈述；见引理 3.14）。 在$P_{N,\,n}$的一个典型实现的条件下。假设 $J \subset [N]$ 是满足 $|J| \le c\,n$的指标的一个非空子集。设 y_i、 $i \in L$为 $\mathbb{R}^n$中非零向量的一个有限集合，设 σ 为以 L 为指标的均匀随机符号向量，并设 β^σ 为和$\sum_{i\in L} \sigma_i\, y_i$的系数向量。假设

$$\sum_{h\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2} = \Omega\Big(\mathbb{E}_\sigma \|\beta^\sigma\|_1\Big). \tag{4}$$

于是存在$\Omega(n)$ 个指标 $j \in J^c$ 满足

$$\sqrt{\sum_{i\in L} \beta_j(y_i)^2} = \Omega\Big(\frac{1}{\sqrt{|J|\,n}} \sum_{h\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2}\Big).$$

注意，表达式 $\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2},\ h\in[N]$可视为随机线性组合 $\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta(y_i)$的第 h个分量的典型数量级。因此，上述陈述大致断言：每当 $\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta(y_i)$在一个小集合 J 上所标出的那些分量的典型量级较大时，就必定存在$\Omega(n)$个指标 $j\in J^c$，使得 $\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta_j(y_i)$在平均意义下较大（估计中允许一定损失）。我们要强调的是，倘若（规范化后的）向量 $\big(\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}\big)_{h\in[N]}$ 确实是不可压缩的，那么即使对 $\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}$没有任何下界，上述陈述也是平凡的。事实上，给定任意不可压缩向量$v\in S^{N-1}$以及任意小子集 $J\subset[N]$，对 v 的$\Omega(N)$个分量，我们有

$$|v_j| = \Omega\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\Big) = \Omega\Big(\frac{1}{\sqrt{|J|\,N}}\sum_{h\in J}|v_h|\Big).$$

问题在于，向量$\big(\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}\big)_{h\in[N]}$不一定是不可压缩的（事实上，只要 不可压缩；当 $y_1,\dots,y_k$的$\|\cdot\|_{P_{N,n}}$-范数非常小，就不可压缩），因此上述显然的论证并不适用。不过，根据引理 3.4，归一化差 $\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta(y_i)-\beta^\sigma$必定是不可压缩的，因此在额外假设（4）下，上述论证的一个更具技术性的变体便可以成立。

如上所述，向量 $\big(\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}\big)_{h\in[N]}$ 的“伪不可压缩性”具有深远影响，因为它使我们能够追踪系数向量 $\beta(y_i)$ 的某些结构性质。尽管这些性质无法用简单的术语（如可压缩/不可压缩）来表达，但它们仍会影响分量 $\beta_j(y_i)$ 的幅值统计特性。

令 y 为 $\mathbb{R}^n$中的一个向量，并令 $\delta\in(0,1]$ 为一个参数。定义

$$m_\delta(y,r) := \Big|\Big\{j\le N:\ |\beta_j(y)|\in\frac{\delta}{n}\big(2^{r-1},2^r\big]\Big\}\Big|,\quad r\ge 1$$

（参见定义 3.2）。

暂且假设，对于每个向量 $y_i,\ i\in L$，都有$\|y_i\|_{P_{N,\,n}}\in[\delta,2\delta]$，并且对于一个较小的参数 $\alpha>0$，

$$m_\delta(y_i,r)\le |L|^\alpha\,2^{-2r}\,n,\quad 0\le r\le\log_2\sqrt{|L|}, \tag{5}$$

and

$$\Big\|\sum_{i\in L}v_i\,y_i\Big\|_{P_{N,n}}\le\delta\,\|v\|_\infty\,|L|^\alpha,\quad v=(v_i)_{i\in L}$$

（注意，最后一个条件只是由 $e_i\to y_i,\ i\in L$ 给出的、从 $\ell_\infty^{|L|}$到 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_{P_{N,n}})$ 的线性映射的 Lipschitz 畸变上界。）我们证明，如果相当大比例的向量 y_i 满足

$$\sum_{j=1}^N|\beta_j(y_i)|\,\mathbf{1}_{\{|\beta_j(y_i)|>\delta\sqrt{|L|}/n\}}>|L|^{-1/16}\,\delta,$$

那么最终就会与 $\big(\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h^{j=1}(y_i)^2}\big)_{h\in[N]}$ 的伪不可压缩性相矛盾（参见引理 3.15证明的第二部分），因此，大比例的向量 $\beta(y_i)$ 必定不会“过于尖峰”，也就是说

$$\sum_{j=1}^N|\beta_j(y_i)|\,\mathbf{1}_{\{|\beta_j(y_i)|>\delta\sqrt{|L|}/n\}}\le|L|^{-1/16}\,\delta\quad\text{for many indices } i\in L.$$

最后一个条件进而使我们得以定义截断

$$y_i' := \sum_{j=1}^N\beta_j(y_i)\,\mathbf{1}_{\{|\beta_j(y_i)|\le\delta\sqrt{|L|}/n\}}\,X_j,$$

从而$\|y_i - y_i'\|_{P_{N,\,n}} \le |L|^{-1/16}\,\delta$，以及$\|y_i'\|_{P_{N,\,n}} = \Theta(\delta)$，$\|y_i'\|_2 = \tilde{O}\big(|L|^{\alpha/2}\,\delta\big)$。可以证明，这些向量在重新归一化 $y_i' \longrightarrow \frac{y_i'}{\|y_i'\|_2}$之后，将分析还原到命题3.12 的设定（见引理3.15），其中我们已经证明低畸变嵌入 ℓ_∞是不可能的。

上述讨论表明，对于向量集合 $y_i,\ i \in L$，若要生成 $\ell_\infty^{|L|}$ 的低畸变嵌入，上述不等式（5）必须不成立，即

$$\max_{0\le r\le \log_2\sqrt{|L|}} \frac{m_\delta(y_i, r)}{2^{-2r}\,n} > |L|^{\alpha}.$$

然而，事实证明，最后这个条件本身会导致较高的（多项式级）嵌入畸变（见引理 3.17），从而完成定理 B 的证明。

1.4. 未解决问题。 本文对生成向量数量的假设排除了渐近情形 $\frac{N}{n} \to 1$ 和 $\frac{N}{n} \to \infty$。特别是，我们的论证中条件 $\frac{N}{n} = 1 + \Omega(1)$ 用于获得内半径界，而这又为 $\|\cdot\|_{P_{N,n}}$ 与标准欧几里得范数之间的相对大小提供单侧控制。若能去除余型估计中对 N 和 n 相对大小的限制，将会很有意义。此外，还可以探讨我们所采用的随机性模型下最优的余型常数，以及高维交叉多胞体随机投影的余型估计。

问题 （具有任意多个顶点的高斯凸包）。是否存在 $q, C_q < \infty$，使得对每个 $N \ge n$，空间 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{N,n}})$ 以高概率具有余型 q，且常数至多为 C_q?

问题 （高斯凸包的最优余型）。对于每个常数 $\varepsilon > 0$，是否都存在 $C_\varepsilon < \infty$，使得空间 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{N,n}})$ 以高概率具有余型 $2+\varepsilon$，且常数至多为 C_ε?

˜问题 （交叉多胞体的随机投影）。设 $N \ge n$，并记 $P_{N,n}$ 为标准交叉多胞体在 $\mathbb{R}^N$ 上的正交投影，其中投影到的是一个均匀随机的 n 维子空间。˜是否 $P_{N,n}$ 以概率 $1 - o(1)$具有有限的（与维数无关的）余型?

致谢。K.T. 获得美国国家科学基金会 DMS 2331037 号资助的部分支持。

2. Preliminaries

2.1. 记号与定义。 我们回顾凸几何和高维概率中的标准定义，并介绍全文将使用的一些记号。

定义 2.1 (单位向量**)。** 本文中，“单位向量”一词均指欧几里得长度为 *1* 的向量。

定义 2.2. 给定一个 N 维向量 v 和一个非空子集 $J \subset [N]$，将 v 中由 J 索引的坐标所组成的子向量记为 v_J。类似地，给定一个有 N 列的矩阵 M 以及任意非空子集 $J \subset [N]$，将删除由 $[N] \setminus J$ 索引的列后得到的 M 的子矩阵记为 M_J。

定义 2.3 (欧几里得球**)。** 给定 $r \ge 0$，将以原点为中心、半径为 r 的 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得球记为 $B_2^n(r)$。

定义 2.4 （多胞体内半径）。给定 $\mathbb{R}^n$ 中一个闭的中心对称多胞体 P，其内半径 $r(P)$ 是满足 $B_2^n(r) \subset P$ 的最大数 $r \ge 0$。

定义 2.5（可压缩向量与不可压缩向量）。 设 $\delta, \rho \in (0,1)$ 为参数。若单位向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中所有 δn 稀疏向量组成的集合的欧几里得距离不超过 ρ，则称其为（δ, ρ）可压缩向量。任何不是（δ, ρ）可压缩的单位向量，称为（δ, ρ）不可压缩向量。

定义 2.6（次高斯变量）。 如果存在某个 $C > 0$，使得 ξ 是 C–次高斯随机变量，则称其为 C–次高斯，即 $\mathbb{E} \exp(\xi^2/C^2) \le 2$。

定义 2.7（投影）。 给定欧几里得空间中的一个线性子空间 E，记Proj_E为到 E上的正交投影。

定义 2.8（格拉斯曼流形）。 给定参数 $1 \le d \le n$，记 $G_{n,\,d}$ 为 $\mathbb{R}^n$中所有 d–维子空间的集合，其度量为

$$\mathrm{dist}_{G_{n,d}}(E,F) = \|\mathrm{Proj}_E - \mathrm{Proj}_F\|, \quad E, F \in G_{n,d},$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示谱范数。

定义 *2.9*（渐近符号）。对于隐式依赖于参数 $n \to \infty$的两个量 f、g，如果存在一个与 n 无关的常数 $C > 0$，使得对所有 n都有 $|f| \le C|g|$，则记作 $f = O(g)$。此外，如果 $\lim_{n\to\infty}(f/g) = 0$，则记作 $f = o(g)$。如果 $g = O(f)$ 且当 $g = o(f)$时有 $f = \omega(g)$，则记作 $f = \Omega(g)$。最后，如果 $f = O(g)$ 且 $g = O(f)$，则记作 $f = \Theta(g)$。

2.2. **全局对象**。 在这里，我们列出参与主要结果——定理 A 和定理 B——的全局对象：

- **向量** X_i。 我们假设 $X_1, \dots, X_N$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中独立同分布的标准高斯向量（其维数 n 始终可从上下文中明确）。
- **矩阵** A。 令 A 为以 $X_1, \dots, X_N$ 为列的 $n \times N$ 矩阵（矩阵的维数始终可从上下文中明确）。
- **多面体** $P_{N,n}$。 我们定义

$$P_{N,n} := \mathrm{conv}\left\{ \pm X_i, \quad i \in [N] \right\}.$$

2.3. **近似ℓ_∞ 子空间的充分条件**。 借助以下引理，我们对 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{N,n}})$ 中 ℓ_∞–子空间的研究将大大简化：

引理 *2.10.* 存在通用常数 $c_{2.10}, C_{2.10} > 0$，使得以下性质成立。设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上任意一个范数，设 $2 \le k \le n/2$，设 E 是 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 中一个 k 维线性子空间，并设 ρ 是从 E（赋予诱导范数）到 ℓ_∞^k 的班纳赫–马祖尔距离。那么存在至少 $\tilde{k} := \lfloor c_{2.10}\, k / \log k \rfloor$ 个向量 $y_1, y_2, \dots, y_{\tilde{k}}$ 属于 E，以及一个数 $\delta > 0$，使得以下性质成立：

- $\|y_i\| \in [\delta, 2\delta]$ 对于每个 $i \le \tilde{k}$；
- 每个 y_i 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位（欧几里得）向量；
- 对于 $v = (v_i)_{i \le \tilde{k}}$的每一种数值选择，

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\tilde{k}} v_i\, y_i \Big\| \le C_{2.10}\, \delta\, \rho\, \|v\|_\infty.$$

证明。令 K_E 为关于诱导范数的 E 中的单位球。根据班纳赫–马祖尔距离的定义，存在一个中心对称平行六面体 $P \subset E$，使得

$$\frac{1}{\rho} P \subset K_E \subset P.$$

特别地，存在线性无关的单位向量 $u_1, \dots, u_k \in E$ 和 $r_1, \dots, r_k > 0$，使得

$$P = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} a_i u_i : \ |a_i| \le r_i \Big\}.$$

令 d 为满足 $2d \le k$ 的最大整数，并且不失一般性，假设

$$r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_{2d}.$$

取数列的一个中位数 r，即

$$r_d \ \le \ r \ \le \ r_{d+1}.$$

对于每个 $\alpha \in [d]$，都存在一个单位向量 x_α，可表示为 $x_\alpha = a_\alpha u_\alpha + b_\alpha u_{d+\alpha}$，其中 a_α 和 b_α 为某些数，使得

$$\min \left\{ \frac{r_\alpha}{|a_\alpha|}, \frac{r_{d+\alpha}}{|b_\alpha|} \right\} = r.$$

为此，考虑任意满足 $a_\alpha(0) = b_\alpha(1) = 1$ 且 $a_\alpha(1) = b_\alpha(0) = 0$ 的连续映射 $\theta \in [0,1] \to a_\alpha(\theta) u_\alpha + b_\alpha(\theta) u_{d+\alpha} \in S^{n-1}$。那么，$\min \left\{ \frac{r_\alpha}{|a_\alpha(\theta)|}, \frac{r_{d+\alpha}}{|b_\alpha(\theta)|} \right\}$ 是 θ 的连续函数，其在 $\theta = 0$ 处的值为 r_α，而当 $\theta = 1$ 时，其值为 $r_{d+\alpha}$。连续性保证了所需向量 x_α 的存在。

记 H 为 x_α、$\alpha \le d$的线性张成。根据构造，

$$\Big\{ \sum_{\alpha=1}^{d} v_\alpha x_\alpha : v_\alpha \in [-r, r], \ \alpha \le d \Big\} \ = \ \Big\{ \sum_{\alpha=1}^{d} v_\alpha \big(a_\alpha \, u_\alpha + b_\alpha \, u_{d+\alpha} \big) : v_\alpha \in [-r, r], \ \alpha \le d \Big\} \ = \ P \cap H,$$

特别地，对每个 $v \in \mathbb{R}^d$，

$$\Big\| \sum_{\alpha=1}^{d} v_\alpha x_\alpha \Big\|_P = \frac{\|v\|_\infty}{r}.$$

鉴于包含关系 $(1/\rho)P \subset K_E \subset P$，我们得到

$$\tfrac{1}{r} \|v\|_\infty \le \Big\| \sum_{\alpha=1}^{d} v_\alpha x_\alpha \Big\| \le \tfrac{1}{r} \rho \, \|v\|_\infty \quad \text{for all } v \in \mathbb{R}^d,$$

并且对所有 $i \le d$，$\|x_i\| \in [1/r, \rho/r]$。

由于任意两个 k 维对称凸体之间的班纳赫–马祖尔距离至多为 k，因此有 $\rho \le k$。考虑 $\mathbb{R}_+$ 的二进划分，并利用抽屉原理，存在一个整数 $j_0 \ge 1$ 和一个集合 $I \subset [d]$，使得

$$|I| \ge \frac{d}{\lceil 1 + \log_2 k \rceil}, \qquad \|x_i\| \in [2^{j_0 - 1}/r, 2^{j_0}/r] \text{ for all } i \in I.$$

通过选择 $c_{2.10}$ s 足够小，我们保证存在互不相同的指标 $i_1, \dots, i_{\tilde{k}} \in I$，其中

$$\tilde{k} = \Big\lfloor c_{2.10} \, \frac{k}{\log k} \Big\rfloor.$$

Set

$$y_m := x_{i_m}, \quad m = 1, \dots, \tilde{k}, \qquad \delta := \frac{2^{j_0 - 1}}{r}.$$

那么，每个 y_m 都是一个单位欧几里得长度的向量，并且

$$\|y_m\| \in [\delta, 2\delta].$$

最后，对于每个 $v=(v_m)_{m\le\tilde{k}}$，

$$\Big\|\sum_{m=1}^{\tilde{k}} v_m y_m\Big\| = \Big\|\sum_{m=1}^{\tilde{k}} v_m x_{i_m}\Big\| \le \frac{\rho}{r}\,\|v\|_\infty \le \rho\,\delta\,\|v\|_\infty,$$

因为 $\delta = 2^{j_0-1}/r \ge 1/r$。 □

2.4. **格拉斯曼流形上的网**。 作为论证中的一个技术环节，我们考虑由 $\mathbb{R}^n$构成的线性子空间的格拉斯曼流形的离散化。下一个引理是 Szarek 的一项经典结果 [33] 的推论。该引理的一个有趣特点是，它给出了一个表示公式（6），用离散化中各子空间上的投影来表示到 $\mathbb{R}^n$ 中任意子空间上的正交投影。

引理 2.11 (格拉斯曼流形上的网)。 对于每个 $1\le d\le n/2$，以及每个 $\varepsilon\in(0,\ 1/4]$，存在一个至多包含

$$M \le \left(\frac{C_{2.11}}{\varepsilon}\right)^{d(n-d)}$$

子空间 $\{E_1,\dots,E_M\}\subset G_{n,\,d}$ 使得

$$\forall F\in G_{n,d}\ \ \exists\, i\le M\ \ \textit{satisfying}\ \|\mathrm{Proj}_F-\mathrm{Proj}_{E_i}\|\le\varepsilon,$$

并且，此外，对于每个 $F\in G_{n,\,d}$，存在一列指标 i_1、i_2、……，属于 $[M]$，以及算子D_1、D_2、$\cdots$：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，使得 $\|D_j\|\le 2\,\varepsilon^{j-1}$、$j\ge 1$，并且

$$\mathrm{Proj}_F=\sum_{j=1}^{\infty} D_j\mathrm{Proj}_{E_{i_j}}. \tag{6}$$

这里，$C_{2.11}\ge 1$ 是一个普适常数，$\|\cdot\|$ 表示标准谱范数。

证明。 关于 ε-网大小的引理第一部分已在 [33]（事实上是在更一般的形式下）得到证明，下面我们转而验证第二部分。为简便起见，下文将用 Proj_i代替 Proj_{E_i}。

暂时固定任意一对子空间 E、$F\in G_{n、\,d}$，使得

$$\|\mathrm{Proj}_F-\mathrm{Proj}_E\|\le\varepsilon.$$

注意，对于任意向量 $v\in(E+F)^\perp$，$\mathrm{Proj}_F(v)-\mathrm{Proj}_E(v)=0$，因此

$$(\mathrm{Proj}_F-\mathrm{Proj}_E)=(\mathrm{Proj}_F-\mathrm{Proj}_E)\mathrm{Proj}_{E+F}.$$

˜ ˜将 $E+F$视为两个正交子空间 E和 F之和会很有用，其中 $F\perp E$且 $\dim F\le d$。于是，

$$\mathrm{Proj}_{E+F}=\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_E+\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_{E^\perp\cap(E+\tilde{F})}+\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_H,$$

其中，H是 E的正交补，且 $E^\perp\cap(E+F)=\tilde{F}$，因此 $H\subset E^\perp$，$\tilde{F}^\perp$，从而 $\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_H=0$。于是，

$$\mathrm{Proj}_{E+F}=\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_E+\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_{E^\perp\cap(E+F)}.$$

如果 $\tilde{F}=E^\perp\cap(E+F)$ 的维数严格小于 d，我们任意定义一个维数恰为 d 的线性子空间$\tilde{F}\subset F^*\subset E^\perp$；否则就令 $F^*:=\tilde{F}$。此外，令 F' 为 F 在 F^* 中的˜ ˜正交补。于是，根据定义，$F'\perp F$ 和 $F'\perp E$，从而 $\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_{F'}=0$。我们得出

$$\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_{E^\perp\cap(E+F)}=\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_{F^*},$$

因此

(7) 专业版 $\mathrm{Proj}_E = (\mathrm{Proj}_F - \mathrm{Proj}_E)\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_E + (\mathrm{Proj}_F - \mathrm{Proj}_E)\mathrm{Proj}_{E+F}\mathrm{Proj}_F$

现在，固定任意一个 $F \in G_{n,\,d}$ 并设 $F_0 = F$。选取一个指标 $i_1 \le M$ 使得

$$\|\mathrm{Proj}_{F_0} - \mathrm{Proj}_{i_1}\| \le \varepsilon.$$

利用（7），我们可以写成:

$$\mathrm{Proj}_{F_0} - \mathrm{Proj}_{i_1} = A_1\mathrm{Proj}_{i_1} + B_1\mathrm{Proj}_{F_1},$$

其中 F_1 是某个 d 维子空间，并且

$$E_{i_1}^{\perp} \cap (E + F_0) \subset F_1 \subset E_{i_1}^{\perp}, \quad \text{and} \quad \|A_1\|, \|B_1\| \le \varepsilon.$$

等价地，我们可以写成

$$\mathrm{Proj}_{F_0} = \tilde{A}_1\mathrm{Proj}_{i_1} + B_1\mathrm{Proj}_{F_1},$$

˜其中 $\|A_1\| \le 1 + \varepsilon \le 2$ 且 $\|B_1\| \le \varepsilon$。将上述构造应用于子空间 F_1，我们得到

$$\mathrm{Proj}_{F_1} = \tilde{A}_2\mathrm{Proj}_{i_2} + B_2\mathrm{Proj}_{F_2},$$

˜其中 $i_2 \le M$ 且 $\|A_2\| \le 1 + \varepsilon \le 2$、$\|B_2\| \le \varepsilon$ 和 F_2 是某个 d维子空间。重新排列后，我们得到

$$\mathrm{Proj}_{F_0} = \tilde{A}_1\mathrm{Proj}_{i_1} + B_1\tilde{A}_2\mathrm{Proj}_{i_2} + B_1B_2\mathrm{Proj}_{F_2}.$$

递归地重复这一构造，可得

$$\mathrm{Proj}_F = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{\ell=1}^{j-1} B_\ell\right)\tilde{A}_j\mathrm{Proj}_{i_j}.$$

还需为每个 j 定义,

$$D_j := \left(\prod_{\ell=1}^{j-1} B_\ell\right)\tilde{A}_j,$$

s因此，我们对 B_ℓ 的谱范数和 $\tilde{A}_j$ 的谱范数所作的估计意味着 $\|D_j\| \le 2\,\varepsilon^{j\quad -1}$. □

2.5. 随机符号组合。本节讨论形如 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$ 的随机向量的某些性质，其中 $(y_1, \ldots, y_k)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中由固定单位向量组成的一个 k元组，而 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ 是独立同分布的随机符号。直接可见，对于任意选取的单位向量 $y_1, \ldots, y_k$,

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big\|_2^2 = k.$$

向量 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$ 的协方差矩阵 Σ 为

$$\Sigma = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)^{\top} = \sum_{i=1}^k y_i\, y_i^{\top};$$

特别地，$\mathrm{tr}(\Sigma) = k$，由此得到前面的观察。本小节研究的问题是确定关于 $y_1, \ldots, y_k$、向量 $Z \in \mathbb{R}^n$ 和参数 $t \ge 1$的必要条件，使得概率

$$\mathbb{P}_\sigma\Big\{\big|\langle Z, \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle\big| \ge t\sqrt{k}\Big\}$$

其阶为 $k^{-O(1)}$。所得估计将用于离散化/联合界论证，以揭示 $(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|_{P_{N,\ n}})$ 的子空间的某些结构性质。

引理 2.12。 设 $2 \le k \le n$，令 $y_1, y_2, \ldots, y_k$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位欧几里得长度的向量，并令 Z 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个固定向量。此外，令 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ 为具有 ± 1 个分量的均匀随机向量，并假设对于某个 $t \ge 1$

$$\mathbb{P}_\sigma\Big\{\big|\langle Z, \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle\big| \ge t\sqrt{k}\Big\} \ge \frac{1}{k^{100}}.$$

记 Σ 为 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$的协方差矩阵。对每个整数 $-\infty < p < \infty$，令 E_p 为由 Σ 中对应于取值范围 $(2^p, 2^{p+1}]$内的特征值的特征向量所线性张成的空间。那么

(a) </style} Z 在 $\{y_1, \ldots, y_k\}$ 的线性张成空间上的正交投影的长度至少为

$$\frac{c_{2.12}\, t\sqrt{k}}{\log^{0.5} k},$$

(b) 或者，存在 $1 \le p \le \log_2 k$，使得 $E_p \ne \{0\}$，且 Z 在 E_p上的正交投影的欧几里得长度至少为

$$\frac{c_{2.12}\, t\sqrt{\dim E_p}}{\log^{1.5} k}.$$

这里， $c_{2.12} > 0$ 是一个普适常数。

证明。 记 Proj 为到 $\{y_1, \ldots, y_k\}$的线性张成空间上的正交投影；对所有$-\infty < p < \infty$，令 Proj $_p$ 为到 E_p上的正交投影。注意，_只要内积 $\big|\langle Z, \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle\big| \ge t\sqrt{k}$ 以正概率出现，就必然有 $\|\mathrm{Proj}(Z)\|_2 \ge t/\sqrt{k}$ （因为 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$ 的欧几里得长度永远不会超过 k）。因此，通过选取适当的常数 $c_{2.12} > 0$，即可知上述断言 (a) 对较小的 k显然成立。下文中，我们假设参数 k 较大。令 Σ 为随机向量 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$的协方差矩阵。

对于每个 $-\infty < p < \infty$，$\mathrm{Proj}_p\big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\big)$ 是 E_p 中的一个中心化随机向量，其协方差矩阵

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Proj}_p\big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\big)\,\mathrm{Proj}_p\big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\big)^\top = \mathrm{Proj}_p\,\Sigma\,\mathrm{Proj}_p^\top,$$

其中所有非零特征值均位于区间$(2^p, 2^{p+1}]$。因此，我们有

$$\mathbb{E}\,\big\langle Z, \mathrm{Proj}_p\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)\big\rangle^2 \in (\|\mathrm{Proj}_p(Z)\|_2^2\, 2^p, \|\mathrm{Proj}_p(Z)\|_2^2\, 2^{p+1}].$$

另一方面，根据Khintchine不等式（例如，参见 [35, 第2节。6]），该随机变量

$$\frac{\big\langle Z, \mathrm{Proj}_p\big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\big)\big\rangle}{\sqrt{\mathbb{E}\,\big\langle Z, \mathrm{Proj}_p\big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\big)\big\rangle^2}}$$

是 C–次高斯的，其中 $C > 0$为普适常数。结合上述两个观察，我们得到

$$\mathbb{P}\Big\{\big|\big\langle Z, \mathrm{Proj}_p\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)\big\rangle\big| \ge s\,\|\mathrm{Proj}_p(Z)\|_2\, 2^{p/2}\Big\} \le 2\exp(-cs^2), \quad s > 0, \tag{8}$$

其中 $c > 0$为普适常数。

写

$$\big\langle Z, \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\big\rangle = \sum_{-\infty < p < \infty} \big\langle Z, \mathrm{Proj}_p\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)\big\rangle.$$

如前所述， Σ 的迹等于 k，这尤其意味着 Σ 没有超过 k的特征值。因此，对所有 $p > \log_2 k$, $\mathrm{Proj}_p = \mathbf{0}$ ，并且，对于一个充分小的普适常数 $\tilde{c} > 0$，我们可以写成：

$$\mathbb{P}\Big\{\big|\langle Z, \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle\big| \geq t\sqrt{k}\Big\} \leq \mathbb{P}\Big\{\big|\langle Z, \mathrm{Proj}_p\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)\rangle\big| \geq \frac{t\sqrt{k}}{2\log_2 k} \text{ for some } 1 \leq p \leq \log_2 k\Big\}$$
$$+ \sum_{p \leq 0} \mathbb{P}\Big\{\big|\langle Z, \mathrm{Proj}_p\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)\rangle\big| \geq \tilde{c}\, t\sqrt{k}\, 2^{p/4}\Big\}.$$

根据引理的假设，最后一个不等式的左端至少为 k^{-100}。因此，以下两种情况之一成立：

$$\mathbb{P}\Big\{\big|\langle Z, \mathrm{Proj}_p\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)\rangle\big| \geq \frac{t\sqrt{k}}{2\log_2 k}\Big\} \geq \frac{1}{2k^{100}\log_2 k} \quad \text{for some } 1 \leq p \leq \log_2 k,$$

或者存在 $p \leq 0$ ，使得

$$\mathbb{P}\Big\{\big|\langle Z, \mathrm{Proj}_p\Big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big)\rangle\big| \geq \tilde{c}\, t\sqrt{k}\, 2^{p/4}\Big\} \geq \frac{c'\, 2^{p/4}}{k^{100}},$$

其中，普适常数 $c' > 0$。根据（8），我们可以得到，对于某个$1 \leq p \leq \log_2 k$ ，有

$$\tilde{C}\sqrt{\log k}\, \|\mathrm{Proj}_p(Z)\|_2\, 2^{p/2} \geq \frac{t\sqrt{k}}{2\log_2 k}, \tag{9}$$

或者存在 $p \leq 0$ ，使得

$$\tilde{C}\sqrt{-p+\log k}\, \|\mathrm{Proj}(Z)\|_2\, 2^{p/2} \geq \tilde{C}\sqrt{-p+\log k}\, \|\mathrm{Proj}_p(Z)\|_2\, 2^{p/2} \geq \tilde{c}\, t\sqrt{k}\, 2^{p/4}, \tag{10}$$

其中，常数 $C > 0$。还需指出，对于每个 $1 \leq p \leq \log_2 k$，$\dim E_p \leq k\, 2^{-p}$ （根据关系 $\mathrm{tr}\,(\Sigma) \leq k$），因此（9）推出

$$\|\mathrm{Proj}_p(Z)\|_2 \geq \frac{t\sqrt{\dim E_p}}{2\tilde{C}\log_2 k\sqrt{\log k}}.$$

另一方面，$\sqrt{-p+}^{2^{-p/4}}\log k \geq \sqrt{}^{c''}\log k$ 对所有 $p \leq 0$ 以及普适常数 $c'' > 0$，因此只要（10）成立，就有

$$\|\mathrm{Proj}(Z)\|_2 \geq \frac{c''\,\tilde{c}\, t\sqrt{k}}{\tilde{C}\sqrt{\log k}}.$$

结论由此得出。 □

2.6. **高斯向量组**。 在本小节中，我们研究高斯向量组 $X_1, \ldots, X_N$的集中性质。回顾一下，我们用 A 表示以 $n \times N$ 为列的随机矩阵 $X_1, \ldots, X_N$。我们从次高斯条目随机矩阵的标准集中结果的一个直接推论开始（例如，参见 [35,第 4 节。6]）。

引理 2.13 （稀疏列子集的奇异值稳定性）。 对于每一组参数$K' \geq K > 1$ ，都存在 $c_{2.13} \in (0, 1/100]$ ，且仅取决于 K', K 使得以下结论成立。

假设 $n \geq c_{2.13}^{-1}$ 且 $K' \geq \frac{N}{n} \geq K$。定义事件

$$\Omega_{2.13} := \Big\{\|A\| \leq 4\sqrt{N}\Big\} \cap \Big\{s_{\min}(A^\top) \geq \tfrac{1}{2}(\sqrt{N} - \sqrt{n})\Big\} \cap$$
$$\Big\{\textit{For every non-empty } J \subset [N] \textit{ with } |J| \leq c_{2.13}\, n,$$
$$\sqrt{n}\Big(1 - \sqrt{|J|/n}\,\log\frac{n}{|J|}\Big) \leq s_{\min}(A_J) \leq s_{\max}(A_J) \leq \sqrt{n}\Big(1 + \sqrt{|J|/n}\,\log\frac{n}{|J|}\Big)\Big\}.$$

Then

$$\mathbb{P}(\Omega_{2.13}) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

下一个引理讨论随机向量 X_1、……、X_N的投影的统计性质，其依据是引理2.11所提供的格拉斯曼流形离散化。

引理 2.14。存在一个普适常数 $C_{2.14} \geq 1$，具有以下性质。设 $1 \leq d \leq n/2$且 $N \geq n$。则以至少 $1 - \exp(-C_{2.14}\, dn)$ 的概率，对于每个 $s \geq C_{2.14}$ 以及 $\mathbb{R}^n$的每个 d 维子空间 F，满足该条件的指标 $1 \leq j \leq N$ 的数量

$$\|\mathrm{Proj}_F X_j\|_2 > 8s\sqrt{d},$$

至多为 $2C_{2.14}^2 N \log_{s^2} 2^{s}$。这里，$\mathrm{Proj}_F$表示到 F上的正交投影。

证明。我们假设常数 $C_{2.14}$ 足够大。首先应用引理 2.11，取$\varepsilon := \frac{1}{4}$，得到一个至多包含

$$M \leq \left(\frac{C_{2.11}}{\varepsilon}\right)^{d(n-d)} \tag{11}$$

子空间 $\{E_1, \ldots, E_M\} \subset G_{n,d}$，使得

$$\forall F \in G_{n,d}\ \ \exists\, i \leq M \text{ satisfying } \|\mathrm{Proj}_F - \mathrm{Proj}_{E_i}\| \leq \varepsilon,$$

而且，对于每个 $F \in G_{n,d}$，在 $[M]$ 中存在一列指标 i_1，i_2、……以及算子D_1，D_2，$\cdots$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得 $\|D_j\| \leq 2\,\varepsilon^{j-1}$、$j \geq 1$，并且

$$\mathrm{Proj}_F = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \mathrm{Proj}_{E_{i_j}}.$$

下文中，对所有 $i \leq M$，我们将 Proj_{E_i} 记作 Proj_i。

定义 事件 Ω：对于每个正整数 r 以及每个 E_i（$1 \leq i \leq M$），集合

$$J_{i,r} := \Big\{j \in [N] : \|\mathrm{Proj}_i X_j\|_2 \geq C_{2.14}\, 2^r \sqrt{d}\Big\}$$

的大小为

$$|J_{i,r}| \leq \frac{N\, r}{4^r}.$$

由于每个 $\mathrm{Proj}_i X_j$ 都是一个 d维子空间中的标准高斯向量，其期望欧几里得范数的数量级为 $(1 + o_d(1))\sqrt{d}$。根据标准集中不等式（例如，参见[35]），并假设 $C_{2.14}\, 2^r \sqrt{d} \geq 2\,\mathbb{E}\,\|\mathrm{Proj}_i X_j\|_2$，我们得到

$$\mathbb{P}\big\{\|\mathrm{Proj}_i X_j\|_2 \geq C_{2.14}\, 2^r \sqrt{d}\big\} \leq \underbrace{\exp\big(-c\, C_{2.14}^2 4^r d\big)}_{:=\Delta_r},$$

对某个普适常数 $c > 0$。因此，$|J_{i,r}|$ 是一个参数为 N，p 的二项随机变量，其 $p \leq \Delta_r$，这意味着

$$\mathbb{E}|J_{i,r}| \leq N\Delta_r.$$

此外，根据 Chernoff不等式（参见 [35, 第 2 节。3]），对于均值为 Z 的二项随机变量 μ，对每个 $t > \mu$:

$$\mathbb{P}\{Z \geq t\} \leq \Big(\frac{e\mu}{t}\Big)^t.$$

将此结果应用于 $\mu \leq N\Delta_r$，我们得到，对任意 $i \leq M, r \geq 1$,

$$\mathbb{P}\Big\{|J_{i,r}| \geq \frac{r\,N}{4^r}\Big\} \leq \Big(\frac{e\,4^r\Delta_r}{r}\Big)^{N\,r/4^r} \leq \exp\big(-c'\,C_{2.14}^2 Nrd\big),$$

对于某个普适常数 $c' > 0$，只要 $C_{2.14}$ 足够大。对所有 $i \leq M$ 和 $r \geq 1$应用联合界，并利用（11），可得

$$\mathbb{P}(\Omega^c) \leq \sum_{r=1}^{\infty} M \exp\big(-c' C_{2.14}^2 Nrd\big) \leq \exp(-C_{2.14}\,Nd),$$

对于足够大的 $C_{2.14}$。

现在，给定 Ω 中 $X_1, \ldots, X_N$ 的任意一个实现。固定任意 $s \geq C_{2.14}$，并令 r_0 为满足以下条件的整数

$$C_{2.14}\,2^{r_0} \leq s < C_{2.14}\,2^{r_0+1}.$$

此外，固定任意一个 d 维子空间 F。考虑如下分解

$$\mathrm{Proj}_F = \sum_{\alpha=1}^{\infty} D_\alpha \mathrm{Proj}_{i_\alpha},$$

如已证明　　如上所述，使得 $\|D_\alpha\| \leq 2\,\big(\frac{1}{4}\big)^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$。注意，根据 Ω 的定义，

$$\Big|\bigcup_{\alpha\geq 1} J_{i_\alpha, r_0+\alpha}\Big| \leq \sum_{\alpha=1}^{\infty} |J_{i_\alpha, r_0+\alpha}| \leq \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{N(r_0+\alpha)}{4^{r_0+\alpha}} \leq \frac{2N(r_0+1)}{4^{r_0+1}} \leq \frac{2C_{2.14}^2\,N\,\log_2 s}{s^2}.$$

最后，对于任意指标 $j \notin \bigcup_{\alpha\geq 1} J_{i_\ell,\ r_0+\alpha}$，我们有

$$\|\mathrm{Proj}_{i_\alpha} X_j\|_2 \leq C_{2.14}\,2^{r_0+\alpha}\sqrt{d}, \quad \forall\, \alpha \geq 1.$$

因此，对于这样的 j,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Proj}_F X_j\|_2 &\leq \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|D_\alpha\|\,\|\mathrm{Proj}_{i_\alpha} X_j\|_2 \\ &\leq 2\sum_{\alpha=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\alpha-1} C_{2.14} 2^{r_0+\alpha}\sqrt{d} \\ &= 8\,C_{2.14}\,2^{r_0}\sqrt{d}.\end{aligned}$$

因此，

$$\|\mathrm{Proj}_F X_j\|_2 \leq 8s\sqrt{d}$$

除至多 $2C_{2.14}^2\,N\log_{s^2}{}^{2^s}$ 个指标 $j \in [N]$ 外均成立。证明至此完成。 □

2.7. **随机符号组合与高斯向量组**。 作为预备知识部分的最后内容，我们来考察引理 2.12 和引理 2.14的一个推论：

引理 2.15。 对每个 $K' \geq K > 1$，存在一个常数 $\tilde{C}_{2.15} > 2\, c_{2.13}^{-1}$，它依赖于 K'、K，并满足以下性质。假设 $K' \geq \frac{N}{n} \geq K$。定义事件 $\Omega_{2.15}$，即 X_j 的 $(1 \leq j \leq N)$ 满足以下所有条件：

(1) 对于每个 $2 \leq k \leq n/2$、每个 $t \geq \tilde{C}_{2.15} \log^2 k$，以及 $\mathbb{R}^n$ 中由 k 个单位欧几里得长度向量组成的每个元组 y_1、y_2、…、y_k，满足下式的 X_j 的数量

$$\mathbb{P}_{\sigma \in \{-1,1\}^k} \left\{ \left| \langle X_j, \sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i \rangle \right| \geq t\sqrt{k} \right\} \geq \frac{1}{k^{100}},$$

有上界

$$n \frac{\tilde{C}_{2.15} \log t \ \log^4 k}{t^2}.$$

(2) 对于每个 $2 \leq k \leq n/2$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中由 k 个单位向量组成的每个元组 y_1、y_2、…、y_k，其正交投影到 y_i 的线性张成空间上的长度大于 $\tilde{C}_{2.15} k^{10}$ 的 X_j 的数量有上界

$$n\, k^{-10}.$$

那么，$\Omega_{2.15}$ 的概率为 $1 - \exp(-\Omega(n))$。

证明。 下文中，我们假设常数 $C_{2.15}$ 和 $C_{2.15}$ 都足够大。我们将 $\Omega_{2.15}$ 定义为如下事件：引理 2.14 的断言对所有 $1 \leq d \leq n/2$均同时成立；也就是说，对每个 $s \geq C_{2.14}$ 以及每个 d维子空间 F，其中 $\mathbb{R}^n$满足以下条件的指标个数 $1 \leq j \leq N$：

$$\|\mathrm{Proj}_F X_j\|_2 > 8s\sqrt{d},$$

其上界为 $2\, C_{2.14}^2\, N \log_{s^2} 2^{s}$。注意，$\mathbb{P}(\Omega_{2.15}) = 1 - \exp(-\Omega(n))$。下文中，我们将任意一个来自 $\Omega_{2.15}$ 的实现 $X_1, \ldots, X_N$ 作为条件。

任取 k 个单位向量组成的元组 $(y_1, \ldots, y_k)$，其中向量属于 $\mathbb{R}^n$，并令

$$t \geq \tilde{C}_{2.15} \log^2 k.$$

定义集合

$$J := \left\{ j \in [N] : \mathbb{P}_{\sigma \in \{-1,1\}^k} \left(\left| \langle X_j, \sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i \rangle \right| \geq t\sqrt{k} \right) \geq \frac{1}{k^{100}} \right\}.$$

根据引理 2.12，对每个 $j \in J$，以下两种情况之一成立：

(i) $\|\mathrm{Proj}_E(X_j)\|_2 \geq c_{2.12}\, t \sqrt{\text{维数}}$，其中 $E =$ 张成空间$\{y_1, \ldots, y_k\}$；或

(ii) 存在 $1 \leq p \leq \log_2 k$ 使得 $\|\mathrm{Proj}_{E_p}(X_j)\|_2 \geq c_{2.12}\, t \sqrt{\text{维数}\, E_p}$，其中 E_p 是一个维数至多为 $k \leq n/2$的子空间，定义如引理2.12。

鉴于关于 t，$c_{2.12}\, t\, (\log k)^{3/2} \geq 8\, C_{2.14}$。应用引理 2.14，我们得到，对于每个 $1 \leq p \leq \log_2 k$，集合的大小

$$\left\{ j \in [N] : \|\mathrm{Proj}_{E_p}(X_j)\|_2 \geq \frac{c_{2.12}\, t \sqrt{\dim E_p}}{(\log k)^{3/2}} \right\}$$

有上界

$$\frac{2\,C_{2.14}^2 \log_2\!\left(\frac{c_{2.12}\,t}{8\,(\log k)^{3/2}}\right)}{\left(\frac{c_{2.12}\,t}{8\,(\log k)^{3/2}}\right)^2} N \;\le\; \frac{128\,C_{2.14}^2}{c_{2.12}^2}\,\frac{\log_2(t)\,(\log k)^3}{t^2}\,N. \tag{12}$$

同样，集合的大小

$$\left\{ j \in [N] : \|\mathrm{Proj}_E(X_j)\|_2 \ge \frac{c_{2.12}\,t\,\sqrt{\dim E}}{\sqrt{\log k}} \right\}$$

至多为（12）。因此，

$$|J| \le (\log_2 k + 1)\frac{128\,C_{2.14}^2}{c_{2.12}^2}\,\frac{\log_2(t)\,(\log k)^3}{t^2}\,N,$$

这就证明了引理的第一部分。最后，第二部分由引理 2.14 直接推出，只需˜选取 $C_{2.15}$ 足够大。□

3. Polytopes $P_{N,n}$

在预备知识中讨论了有关高斯向量组和随机符号组合的统计性质的预备陈述之后，我们现在深入研究随机多面体 $P_{N,\,n}$；本节的主要结果是证明引言中的定理 B。

定义 3.1。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个向量 y，令 $\beta(y)$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中满足以下条件的向量：

$$y = \sum_{j=1}^{N} \beta_j(y)\,X_j,$$

and

$$\|\beta(y)\|_1 = \|y\|_{P_{N,n}}.$$

向量 $\beta(y)$ 未必唯一确定；在这种情况下，我们固定 $\beta(y)$ 的一个实现，使其满足上述条件，并使映射 $y \to \beta(y)$ 为博雷尔可测。

下一个定义为应用于系数向量 $\beta(y)$ 的多尺度论证提供记号基础：

定义 3.2. 设 y 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量，并设 $\delta \in (0,1]$ 为一个参数。我们定义

$$m_\delta(y,r) := \left|\left\{ j \le N :\ |\beta_j(y)| \in \frac{\delta}{n}\big(2^{r-1}, 2^r\big] \right\}\right|, \quad r \ge 1,$$

and

$$m_\delta(y,0) := \left|\left\{ j \le N :\ |\beta_j(y)| \le \frac{\delta}{n} \right\}\right|.$$

3.1. $A^\top$的核的内半径与结构。

引理 3.3（内半径估计）。对每一个 $K' \ge K > 1$ 存在常数 $C_{3.3}$，$c_{3.3} > 0$仅依赖于 K，K' 并具有如下性质。假设 $n \ge c_{2.13}^{-1}$ 且 $K' \ge N/n \ge K$。在其任意实现的条件下，即 X_1，……，X_N来自事件 $\Omega_{2.13}$（定义于引理 2.13）。则

- 内半径 $r\,(P_{N,\,n})$ 满足 $c_{3.3} \le r\,(P_{N,\,n}) \le C_{3.3}$；
- 对于每一个具有 $|I| \le c_{2.13}\,n$的非空 $I \subset [N]$，凸包 $\{\pm X_j,\quad j \in I\}$（视为张成空间 $\{X_j :\ j \in I\}$中的非退化多胞形）的内半径满足

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{|I|}} \le r\big(\mathrm{conv}\,\{\pm X_j,\quad j \in I\}\big) \le 2\sqrt{\frac{n}{|I|}}.$$

证明。 对于对称凸体 $L \subset \mathbb{R}^n$，其内半径可以表示为

$$r(L) = \sup\{r > 0 : rB_2^n \subset L\} = \min_{y \in S^{n-1}} h_L(y),$$

其中 $h_L(y) = \sup_{x \in L} \langle x, y \rangle$ 是支撑函数。对于 $P_{N,n} =$ 凸包$\{\pm X_j,\ 1 \le j \le N\}$，因此有

$$r(P_{N,n}) = \min_{y \in S^{n-1}} \max_{j \le N} |\langle X_j, y \rangle|.$$

内半径下界。对于任意 $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\max_{j \le N} |\langle X_j, y \rangle| = \|A^\top y\|_\infty \ge \frac{1}{\sqrt{N}} \|A^\top y\|_2 \ge \frac{s_{\min}(A^\top)}{\sqrt{N}} \|y\|_2,$$

其中，根据我们对 Ω 的条件化2.13,

$$s_{\min}(A^\top) \ge \tfrac{1}{2}(\sqrt{N} - \sqrt{n}) \ge \tfrac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{K})\sqrt{N} =: c_*(K)\sqrt{N}.$$

对 $y \in S^{n-1}$ 取最小值得

$$r(P_{N,n}) \ge c_*(K) =: c_{3.3}.$$

内半径上界。 根据对称凸体的布拉施克–桑塔洛不等式,

$$|P_{N,n}|\,|P_{N,n}^\circ| \le |B_2^n|^2,$$

其中 $P_{N,n}^\circ$ 是多面体 $P_{N,n}$的极体，并且我们用竖线表示标准的勒贝格体积。由于 $r(P_{N,n})^n |B_2^n| \le |P_{N,n}|$，我们得到

$$r(P_{N,n}) \le \frac{|B_2^n|^{1/n}}{|P_{N,n}^\circ|^{1/n}} \le \frac{C}{|\sqrt{n}\, P_{N,n}^\circ|^{1/n}}, \tag{13}$$

对于某个普适常数 $C > 0$，这是因为 $|B_2^n|^{1/n} \asymp n^{-1/2}$。现在，根据定义 ,

$$P_{N,n}^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle X_j, y \rangle| \le 1,\ j \in [N]\}.$$

令 γ 表示 $\mathbb{R}^n$中的标准高斯测度。由于相应的高斯密度在 $\mathbb{R}^n$中处处都可以（粗略地）以上界 1 控制,

$$|\sqrt{n}\, P_{N,n}^\circ| \ge \gamma(\sqrt{n}\, P_{N,n}^\circ) = \gamma\left(\bigcap_{j=1}^N \left\{y : \left|\left\langle \frac{X_j}{\sqrt{n}}, y \right\rangle\right| \le 1\right\}\right).$$

应用西达克–卡特里引理 [17, 30],

$$\gamma\left(\bigcap_{j=1}^N \left\{y : \left|\left\langle \frac{X_j}{\sqrt{n}}, y \right\rangle\right| \le 1\right\}\right) \ge \prod_{j=1}^N \gamma\left(\left\{y : \left|\left\langle \frac{X_j}{\sqrt{n}}, y \right\rangle\right| \le 1\right\}\right).$$

注意，对 Ω2.13进行条件化后，我们有 $\max_j \|X_j\|_2 \le 2\sqrt{n}$。因此，每个薄层的高斯测度

$$\left\{y : \left|\left\langle \frac{X_j}{\sqrt{n}}, y \right\rangle\right| \le 1\right\}$$

下界为一个普适常数 $c_0 > 0$。因此，$|\sqrt{n} P_{N,n}^\circ| \ge c_0^N$，并结合（13）可得

$$r(P_{N,n}) \le \frac{C}{c_0^{N/n}} \le \frac{C}{c_0^{K'}} =: C_{3.3}.$$

凸包的内半径 $\{\pm X_j,\quad j\in I\}$。假设 $I\subset[N]$ 是一个非空子集，且 $|I|=:\ m\le c_{2.13}\,n$。对 $\Omega_{2.13}$进行条件化后，$n\times I$ 矩阵 A_I 的子矩阵 A 满足

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}\|z\|_2\le\|A_Iz\|_2\le 2\sqrt{n}\|z\|_2,\quad z\in\mathbb{R}^I. \tag{14}$$

记 $P_I:=$凸包 $\{\pm X_j,\quad j\in I\}$。由于 $A_I(B_1^m)=P_I$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{m}}A_I(B_2^m)\subset A_I(B_1^m)=P_I,$$

特别地，这意味着 P_I的内半径不小于 $\frac{1}{\sqrt{m}}A_I(B_2^m)$ 的内半径。后者又可利用 (14) 得到一个下界：

$$r\Big(\frac{1}{\sqrt{m}}A_I(B_2^m)\Big)=\min_{z\in S^{m-1}}\|A_Iz\|_2\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

要给出内半径的上界，取 $z=(\pm\frac{1}{m},\dots,\pm\frac{1}{m})\in B_2^m$，因此 $\|z\|_1=1$且 $\|A_Iz\|_{P_I}=1$。于是由 (14)，

$$\Big\|\frac{1}{\sqrt{m}}A_Iz\Big\|_2\le 2\sqrt{\frac{n}{m}},$$

因此，P_I 的某个边界点的欧几里得范数至多为 $2\sqrt{\frac{n}{m}}$。□

引理 3.4 (X_i的零组合是不可压缩的)。对于每个 $K'\ge K>1$，存在常数 $\delta_{3.4},\rho_{3.4}\in(0,1)$，仅依赖于 K,K'，具有如下性质。假设 $n\ge c_{2.13}^{-1}$且 $K'\ge N/n\ge K$。那么，在以引理 $\Omega_{2.13}$ 中的事件为条件时，对于引理 2.13中的任意单位向量 $\beta=(\beta_i)^{i\in[N]}$，满足

$$\sum_{i\in[N]}\beta_i\,X_i=0,$$

向量 β 是$(\delta_{3.4},\rho_{3.4})$–不可压缩的。

证明。通过令 $\delta_{3.4}$ 充分小，我们可以假设

$$\delta_{3.4}N\le c_{2.13}n,$$

并且

$$\sqrt{\delta_{3.4}N/n}\,\log\frac{n}{\delta_{3.4}N}\le\frac{1}{4}.$$

此外，设 $\rho_{3.4}:=\frac{1}{9\sqrt{K'}}$令 $J\subset[N]$为对应于 β 中（绝对值）最大的 $\lfloor\delta_{3.4}N\rfloor$ 个坐标的指标子集，并记 β_J 为将 β 投影到 $\mathbb{R}^J$上的坐标投影。若$\|\beta_{J^c}\|_2:=\|\beta-\beta_J\|_2>\rho_{3.4}$，则无需证明。否则，根据 $\Omega_{2.13}$ 的定义，我们有

$$\|A_J\beta_J\|_2\ge\frac{3}{4}\sqrt{n}\,\|\beta_J\|_2\ge\frac{3}{4}\sqrt{n}\,(1-\rho_{3.4})\ge\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

另一方面，

$$\|A_{J^c}\beta_{J^c}\|_2\le\|A\|\,\|\beta_{J^c}\|_2\le 4\sqrt{N}\,\|\beta_{J^c}\|_2.$$

由于 $A_J\beta_J+A_{J^c}\beta_{J^c}=0$，可得

$$\|A_J\beta_J\|_2=\|A_{J^c}\beta_{J^c}\|_2.$$

结合上述不等式可得

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}\le 4\sqrt{N}\,\|\beta_{J^c}\|_2\le 4\sqrt{N}\,\rho_{3.4}=4\sqrt{N}\,\frac{1}{9\sqrt{K'}}<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{K'}},$$

由于 $N\le K'n$，因此导致矛盾。结论得证。□

3.2. **具有可比$\|\cdot\|_{P_N,\,n}$和 $\|\cdot\|_2$范数的向量张成空间**。本小节旨在研究单位欧几里得范数且 $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i$ 范数几乎为常数的向量 y_1、y_2..... y_k 的符号组合 $\|\cdot\|_{P_N,\,n}$范数的性质。本小节的主要结论——命题 3.12——断言，以高概率，任何此类 y_i 的构型都不能生成 $(\mathbb{R}^n$、$\|\cdot\|_{P_N,\,n})$ 中的近似 ℓ_∞ 子空间。

定义 3.5 (β^σ)。设 $\mathbf{F}=(y_i)^{i\in[k]}$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量组成的集合。对于每个 σ 属于$\{-1,1\}^k$ 的 $\beta^\sigma(\mathbf{F})$：$=\beta\big(\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\big)$（参见定义 *3.1*），取一个向量使得

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i = \sum_{j\in[N]} \beta_j^\sigma X_j,$$

and

$$\Big\|\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big\|_{P_{N,n}} = \|\beta^\sigma(\mathbf{F})\|_1.$$

只要上下文中能明确集合 $\mathbf{F}$，我们就用 β^σ 代替 $\beta^\sigma(\mathbf{F})$。

定义 3.6 $(T^\sigma(\tau))$。设 $\mathbf{F}=(y_i)^{i\in[k]}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量组成的集合。对于每个 $\tau>0$ 和 σ 属于 $\{-1,1\}^k$ 的情形，定义

$$T^\sigma(\tau,\mathbf{F}) := \big\{j\le N:\ |\beta_j^\sigma(\mathbf{F})|\ge\tau\big\}.$$

只要上下文中能明确 y_1、.....、y_k，我们就记作 $T^\sigma(\tau)$。集合 $T^\sigma(\tau$、$\mathbf{F})$ 用于追踪系数向量 β^σ $(\mathbf{F})$各分量的大小。

定义 3.7. 设 $2\le k\le n/2$，设 $t\ge \tilde{C}_{2.15}\log^2 k$，并设 $\mathbf{F}=(y_i)^{i\in[k]}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单位向量元组。将 $J(t,\mathbf{F})\subseteq[N]$ 定义为满足以下两个条件中**至少一个**的指标 $j\in[N]$ 的集合：

(1) 至少存在 k^{2k}_{100} 个指标 $\sigma\in\{\pm1\}^k$，使得$\big|\langle X_j,\ \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle\big|\ge t\sqrt{k}$；(2) 存在一个指标 $\sigma\in\{\pm1\}^k$，使得 $\big|\langle X_j,\ \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle\big|\ge \tilde{C}_{2.15}\,k^{11}$。

当上下文中明确 t 时，我们将写作 $J(t)$。

注 3.8. 集合 $J(t,$ **F)** 应视为与 的“非规则”（罕见）实现相对应的指标集。事实上，根据引理 2.15中事件 $\Omega_{2.15}$ 的定义，在 $\Omega_{2.15}$ 上处处有

$$|J(t,\mathbf{F})|\le n\,\frac{\tilde{C}_{2.15}\log t\ \log^4 k}{t^2}+n\,k^{-10}$$

对 k元组中的每一个单位向量，均有$\mathbf{F}$，且这些向量属于 $\mathbb{R}^n$。

引理 3.9 (一个近似引理)。假设 $n\ge c_{2.13}^{-1}$ 且 $K'\ge N/n\ge K>1$。令 $\beta=(\beta_j)^{j\in[N]}$ 为一个非随机向量，并令

$$Z:=\sum_{j\in[N]}\beta_j\,X_j.$$

那么，在引理 *2.13*中的事件 $\Omega_{2.13}$ 上处处，对于每个满足$|T|\le c_{2.13}\,n$的非空子集 $T\subset[N]$，

$$\big\|\big(\langle X_\ell,Z\rangle\big)_{\ell\in T}-n\,\beta_T\big\|_2\le O\bigg(n\,\|\beta_T\|_2\,\log\Big(\frac{n}{|T|}\Big)\sqrt{\frac{|T|}{n}}\bigg)+16N\|\beta_{T^c}\|_2,$$

其中 $O(\ldots)$ 中的隐含常数只依赖于 K',K。

证明。 考虑

$$(A_T)^\top Z = \big(\langle X_\ell, Z\rangle\big)_{\ell\in T}.$$

我们将向量 Z 表示为以下和式:

$$Z = A\beta = A_T\beta_T + A_{T^c}\beta_{T^c}.$$

半正定矩阵（A_T）$^\top A_T$ 的特征值是A_T的奇异值的平方。因此，根据事件 $\Omega_{2.13}$ 的定义，我们得到，在该事件内,

$$\|(A_T)^\top A_T - n\,\mathrm{Id}\| = O\bigg(n\,\log\Big(\frac{n}{|T|}\Big)\sqrt{\frac{|T|}{n}}\bigg),$$

因此

$$\Big\|(A_T)^\top A_T\beta_T - n\beta_T\Big\|_2 = O\bigg(n\,\|\beta_T\|_2\,\log\Big(\frac{n}{|T|}\Big)\sqrt{\frac{|T|}{n}}\bigg).$$

另一方面,

$$\Big\|(A_T)^\top A_{T^c}\beta_{T^c}\Big\| \le \|A\|^2\|\beta_{T^c}\|_2 \le 16N\|\beta_{T^c}\|_2.$$

因此，在 $\Omega_{2.13}$ 上处处有,

$$\big\|(A_T)^\top Z - n\,\beta_T\big\|_2 \le O\bigg(n\,\|\beta_T\|_2\,\log\Big(\frac{n}{|T|}\Big)\sqrt{\frac{|T|}{n}}\bigg) + 16N\|\beta_{T^c}\|_2.$$

□

推论 3.10. 假设 $n \ge c_{2.13}^{-1}$ 和 $K' \ge N/n \ge K > 1$。在事件 $\Omega_{2.13}$ 上处处成立如下结论。设 $1 \le k \le n/2$，且令 $y_1, y_2, \ldots, y_k$ 为 $\mathbb{R}^n$中的一个 k元组单位向量。那么，除 $\binom{2k}{k/100}$ 种符号 $\sigma \in \{-1,1\}^k$的选择外，对于任意 $\tau \ge \frac{1}{c_{2.13}\,n}\|\beta^\sigma\|_1$,

$$\Big\|(A_{T^\sigma(\tau)})^\top\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i - n\,\beta^\sigma_{T^\sigma(\tau)}\Big\|_2 = O\bigg(\sqrt{k\log k}\,\log\Big(\frac{\tau\,n}{\|\beta^\sigma\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^\sigma\|_1}{\tau}} + n\sqrt{\tau\,\|\beta^\sigma\|_1}\bigg),$$

其中， $O(\ldots)$ 中的隐含常数只依赖于 K', K。

证明。 注意，对于每一种 $\sigma \in \{-1,1\}^k$ 的取法，以及每个 $\tau \ge \frac{1}{c_{2.13}\,n}\|\beta^\sigma\|_1$，$T^\sigma(\tau)$ 的大小都可以估计为

$$|T^\sigma(\tau)| \le c_{2.13}\,n.$$

应用引理 3.9，我们得到

$$\Big\|(A_{T^\sigma(\tau)})^\top\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i - n\,\beta^\sigma_{T^\sigma(\tau)}\Big\|_2 \le O\bigg(n\,\|\beta^\sigma_{T^\sigma(\tau)}\|_2\,\log\Big(\frac{n}{|T^\sigma(\tau)|}\Big)\sqrt{\frac{|T^\sigma(\tau)|}{n}}\bigg) + 16N\|\beta^\sigma_{(T^\sigma(\tau))^c}\|_2.$$

由霍尔德不等式,

$$\|\beta^\sigma_{(T^\sigma(\tau))^c}\|_2 \le \sqrt{\tau\,\|\beta^\sigma\|_1}. \tag{15}$$

此外，根据 $\Omega_{2.13}$ 的定义，矩阵 $A_{T^\sigma(\tau)}$ 是近似等距的，因此我们有

$$\|\beta^\sigma_{T^\sigma(\tau)}\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{n}}\,O\big(\|A_{T^\sigma(\tau)}\,\beta^\sigma_{T^\sigma(\tau)}\|_2\big).$$

我们可以写成

$$A_{T^\sigma(\tau)}\,\beta^\sigma_{T^\sigma(\tau)} = A\beta^\sigma - A_{(T^\sigma(\tau))^c}\,\beta^\sigma_{(T^\sigma(\tau))^c},$$

其中，根据（15），

$$\big\|A_{(T^\sigma(\tau))^c}\,\beta^\sigma_{(T^\sigma(\tau))^c}\big\|_2 = O(\sqrt{\tau\,n\,\|\beta^\sigma\|_1}).$$

此外，关系

$$A\beta^{\sigma} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i,$$

根据关于 y_i 的欧几里得范数的假设以及 Khintchine不等式，对于除 $\frac{2^k}{k^{100}}$ 种符号 σ 选择外的所有情况，欧几里得范数 $\|A\beta^{\sigma}\|_2 = O(\sqrt{k \log k})$。由此可得，对于所有这类符号选择，

$$\|\beta^{\sigma}_{T^{\sigma}(\tau)}\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{n}}\, O\big(\|A\beta^{\sigma}\|_2 + \|A_{(T^{\sigma}(\tau))^c}\, \beta^{\sigma}_{(T^{\sigma}(\tau))^c}\|_2\big) \le O(\sqrt{\tau\, \|\beta^{\sigma}\|_1}) + O\Big(\sqrt{\frac{k \log k}{n}}\Big).$$

结合估计式

$$|T^{\sigma}(\tau)| \le \frac{\|\beta^{\sigma}\|_1}{\tau},$$

可得

$$\begin{aligned} n\, \|\beta^{\sigma}_{T^{\sigma}(\tau)}\|_2\, \log\Big(\frac{n}{|T^{\sigma}(\tau)|}\Big)\sqrt{\frac{|T^{\sigma}(\tau)|}{n}} &= O\bigg(n\, \|\beta^{\sigma}_{T^{\sigma}(\tau)}\|_2\, \log\Big(\frac{\tau\, n}{\|\beta^{\sigma}\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^{\sigma}\|_1}{\tau\, n}}\bigg) \\ &= O\bigg(\sqrt{k \log k}\, \log\Big(\frac{\tau\, n}{\|\beta^{\sigma}\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^{\sigma}\|_1}{\tau}}\bigg) \\ &\quad + O\bigg(\sqrt{n}\, \|\beta^{\sigma}\|_1 \log\Big(\frac{\tau\, n}{\|\beta^{\sigma}\|_1}\Big)\bigg). \end{aligned}$$

利用 $\|\beta^{\sigma}\|_1 \le c_{2.13}\, n\, \tau$，我们可以将第二项估计为

$$O\big(n\, \sqrt{\tau\, \|\beta^{\sigma}\|_1}\big).$$

最后，

$$16N \|\beta^{\sigma}_{(T^{\sigma}(\tau))^c}\|_2 = O\big(n\, \sqrt{\tau\, \|\beta^{\sigma}\|_1}\big),$$

因此

$$\Big\|(A_{T^{\sigma}(\tau)})^{\top} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i - n\, \beta^{\sigma}_{T^{\sigma}(\tau)}\Big\|_2 \le O\bigg(\sqrt{k \log k}\, \log\Big(\frac{\tau\, n}{\|\beta^{\sigma}\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^{\sigma}\|_1}{\tau}}\bigg) + O\big(n\, \sqrt{\tau\, \|\beta^{\sigma}\|_1}\big).$$

□

引理3.11. 假设 $n \ge c_{2.13}^{-1}$ 与 $K' \ge N/n \ge K > 1$。在事件$\Omega_{2.13}$内，对每一个$2 \le k \le n/2$ 以及对单位欧几里得长度的向量 $y_1, \ldots\ldots, y_k$ 的每一个 k元组选择，存在一个满足$|R| \ge 2^k - \frac{C_{3.11}}{k^{78}} 2^k$ 的子集 $R \subset \{\pm 1\}^k$，使得对每一个 $\sigma \in R$以及对每一个 $t \ge \tilde{C}_{2.15} \log^2 k$，我们有

$$\Big\|A_{J^c(t)} \beta^{\sigma}_{J^c(t)}\Big\|_2 = O\bigg(1 + \frac{1}{t}\sqrt{k} + t^2\, \|\beta^{\sigma}\|_1\bigg),$$

其中隐含常数仅依赖于 K、K'。

证明。 令 W 为符号 $\sigma \in \{-1, 1\}^k$ 的集合，这些符号满足推论3.10的断言，从而 $|W| \ge 2^k - \frac{2^k}{k^{100}}$。

矩阵 M 并令 R。 现在，我们定义一个 $2^k \times N$ 矩阵 M，其行由 $\sigma \in \{\pm 1\}^k$索引，其列由 $j \in [N]$ 索引。该元素

$$M_{\sigma, j} := \Big\langle X_j, \sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i \Big\rangle \cdot \mathbf{1}_{\{|\langle X_j, \sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i \rangle| \ge t\sqrt{k}\}},$$

这是向量 $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i y_i$ 与随机向量 X_j的内积的一个“尾部”。

我们指出，我们对内积进行截断的方式确保对于每个 $j \notin J(t)$ （其中$J(t)$按定义 3.7定义），列 M_j 的非零项严格少于 $2^k/k^{100}$ 个，且 M_j 的每个非零项均以 $\tilde{C}_{2.15}\, k^{11}$为上界。这使得我们可以界定$M_{J^c(t)}$的希尔伯特–施密特范数，其中 $J^c(t) = [N] \setminus J(t)$:

$$\|M_{J^c(t)}\|_{\mathrm{HS}}^2 \le \left(\tilde{C}_{2.15}\, k^{11}\right)^2 \frac{2^k}{k^{100}} N\,.$$

现在，我们定义

$$R := \Big\{\sigma \in W :\ \|M_{\sigma,J^c}\|_2 \le \sqrt{n}\Big\}.$$

根据上述 希尔伯特–施密特范数界，我们有 $|R| \ge 2^k - \frac{C'}{k^{78}} 2^k$，其中 $C' > 0$ 是一个常数 .

对 $J^c(t)$ 的分解。对于每个 $\sigma \in W$，以及对于 $\tau_\sigma := \frac{t^4}{n} \|\beta^\sigma\|_1$，令

$$S_\sigma = \Big\{ j \in T^\sigma(\tau_\sigma) \,:\, \big|\langle X_j, \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle\big| < t\sqrt{k} \Big\}.$$

对于每个 $\sigma \in R$，我们将集合 $J^c(t)$ 分解为三部分:

$$J^c(t) = \big(\underbrace{(T^\sigma(\tau_\sigma) \setminus S_\sigma) \cap J^c(t)}_{:=L_\sigma} \big) \sqcup \big(S_\sigma \cap J^c(t)\big) \sqcup \big((T^\sigma(\tau_\sigma))^c \cap J^c(t)\big)\,.$$

对 L_σ 的处理: $=(T^\sigma(\tau_\sigma) \setminus S_\sigma) \cap J^c(t)$。集合 $T^\sigma(\tau_\sigma) \setminus S_\sigma$是指标的集合 j满足 $M_{\sigma,\ j} = \langle X_j,\ \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle$，且同时 $|\beta_j^\sigma| \ge \tau_\sigma$。根据事件 Ω 的定义2.13和推论 3.10,

$$\begin{aligned}
\big\|A_{L_\sigma}\beta^\sigma_{L_\sigma}\big\|_2 &\le \frac{4\sqrt{N}}{n}\,\|n\beta^\sigma_{L_\sigma}\|_2 \le \frac{4\sqrt{N}}{n}\,\Big\|(A_{L_\sigma})^\top \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big\|_2 + \frac{4\sqrt{N}}{n}\,\Big\|(A_{L_\sigma})^\top \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i - n\beta^\sigma_{L_\sigma}\Big\|_2 \\
&\le \frac{4\sqrt{N}}{n}\,\Big\|(A_{L_\sigma})^\top \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\Big\|_2 + O\bigg(\sqrt{\frac{k\log k}{n}}\,\log\Big(\frac{\tau_\sigma\, n}{\|\beta^\sigma\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^\sigma\|_1}{\tau_\sigma}} + \sqrt{\tau_\sigma\, n\,\|\beta^\sigma\|_1}\bigg),
\end{aligned}$$

其中我们强调，$(A_{L_\sigma})^\top \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i = M_{\sigma,\ L_\sigma}$。

对 $S_\sigma \cap J^c$（t） 和 （T^σ（τ））$^c \cap J^c$（t）。对于任意子集 $S \subset S_\sigma$，由推论 3.10以及条件 $S \subset T^\sigma$（τ），

$$\begin{aligned}
\Big\|(A_S)^\top \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i - n\,\beta^\sigma_S\Big\|_2 &\le \Big\|(A_{T^\sigma(\tau_\sigma)})^\top \sum_{i=1}^k \sigma_i y_i - n\,\beta^\sigma_{T^\sigma(\tau_\sigma)}\Big\|_2 \\
&\le O\bigg(\sqrt{k\log k}\,\log\Big(\frac{\tau_\sigma\, n}{\|\beta^\sigma\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^\sigma\|_1}{\tau_\sigma}} + n\sqrt{\tau_\sigma\,\|\beta^\sigma\|_1}\bigg).
\end{aligned}$$

利用这一点，$\big|\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\rangle\big| < t\sqrt{k}$对于 $j \in S_\sigma$，我们得到

$$\|n\,\beta^\sigma_S\|_2 \le t\,\sqrt{k\,|S|} + O\bigg(\sqrt{k\log k}\,\log\Big(\frac{\tau_\sigma\, n}{\|\beta^\sigma\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^\sigma\|_1}{\tau_\sigma}} + n\sqrt{\tau_\sigma\,\|\beta^\sigma\|_1}\bigg). \tag{16}$$

我们应用（16），并结合 $S = S_\sigma \cap J^c\ (t)$ 得到

$$\begin{aligned}\left\|A_{S_\sigma\cap J^c(t)}\beta^\sigma_{S_\sigma\cap J^c(t)}\right\|_2 &= \sqrt{n}\, O\big(\|\beta^\sigma_{S_\sigma\cap J^c(t)}\|_2\big)\\ &\le O\bigg(t\sqrt{\frac{k\,|S_\sigma\cap J^c(t)|}{n}} + \sqrt{\frac{k\log k}{n}}\,\log\Big(\frac{\tau_\sigma\, n}{\|\beta^\sigma\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^\sigma\|_1}{\tau_\sigma}} + \sqrt{\tau_\sigma\, n\,\|\beta^\sigma\|_1}\bigg).\end{aligned}$$

此外，由霍尔德不等式及 Ω 的定义2.13，

$$\left\|A_{(T^\sigma(\tau_\sigma))^c\cap J^c(t)}\beta^\sigma_{(T^\sigma(\tau_\sigma))^c\cap J^c(t)}\right\|_2 = O(\sqrt{n}\,\|\beta^\sigma_{(T^\sigma(\tau_\sigma))^c}\|_2) = O(\sqrt{\tau_\sigma\, n\,\|\beta^\sigma\|_1}).$$

结合三个部分的估计，我们可以通过三角不等式得出，对于每个 $\sigma \in R$,

$$\begin{aligned}\left\|A_{J^c(t)}\,\beta^\sigma_{J^c(t)}\right\|_2 &\le \|A_{L_\sigma}\beta^\sigma_{L_\sigma}\|_2 + \|A_{S_\sigma\cap J^c(t)}\beta^\sigma_{S_\sigma\cap J^c(t)}\|_2 + \|A_{(T^\sigma(\tau_\sigma))^c\cap J^c(t)}\beta^\sigma_{(T^\sigma(\tau_\sigma))^c\cap J^c(t)}\|_2\\ &\le O\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\|M_{\sigma,L_\sigma}\|_2 + t\sqrt{\frac{k\,|S_\sigma\cap J^c(t)|}{n}} + \sqrt{\frac{k\log k}{n}}\,\log\Big(\frac{\tau_\sigma\, n}{\|\beta^\sigma\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^\sigma\|_1}{\tau_\sigma}} + \sqrt{\tau_\sigma\, n\,\|\beta^\sigma\|_1}\bigg)\\ &\le O\bigg(1 + t\sqrt{\frac{k\,\|\beta^\sigma\|_1}{\tau_\sigma\, n}} + \sqrt{\frac{k\log k}{n}}\,\log\Big(\frac{\tau_\sigma\, n}{\|\beta^\sigma\|_1}\Big)\sqrt{\frac{\|\beta^\sigma\|_1}{\tau_\sigma}} + \sqrt{\tau_\sigma\, n\,\|\beta^\sigma\|_1}\bigg).\end{aligned}$$

应用 τ_σ 的定义，

$$\left\|A_{J^c(t)}\,\beta^\sigma_{J^c(t)}\right\|_2 \le O\bigg(1 + \frac{1}{t}\sqrt{k} + \frac{1}{t^2}\sqrt{k\log k}\,\log t + t^2\,\|\beta^\sigma\|_1\bigg).$$

结论随即得出。 □

下一个命题是本小节的主要结果，它表明，对于 $P_{N,\ n}$ 的一个典型实现，不存在由 y_1、……、y_k 组成的 k 元组单位向量，使得它们的 $\|\cdot\|_{P_{N,\ n}}$ 范数均为常数量级，且其随机符号组合 $\|\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\|_{P_{N,\ n}}$ 的平均值很小。

命题 *3.12.* 设 $K' \ge K > 1$。存在一个仅依赖于 K、K' 的常数 $C_{3.12} \ge 1$，使得以下性质成立。假设 $n \ge c_{2.13}^{-1}$ 且 $K' \ge N/n \ge K$。给定 $\Omega_{2.13}\cap\Omega_{2.15}$ 交集中的 X_1、……、X_N 的任意一个实现。令 $1 \le k \le n/2$，并设 y_1、……、y_k 是 $\mathbb{R}^n$ 中欧几里得长度为单位长度的向量，满足对每个 $i \le k$, $\|\beta(y_i)\|_1 = \|y_i\|_{P_N,\ n} \ge C_{3.12}\, k^{-1/9}$，其中 $\beta(y_i)$ 由定义 *3.1* 给出。那么，取定义 *3.5* 中的 β^σ，

$$\mathbb{E}_\sigma\,\|\beta^\sigma\|_1 = \mathbb{E}_\sigma\left\|\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i\right\|_{P_{N,n}} \ge k^{1/8}.$$

证明。 我们将假设 $C_{3.12}$ 充分大。注意到，鉴于引理3.3中的内半径估计 $c_{3.3} \le r(P_{N,n})$，每个单位向量 y_i 都必须满足 $\|y_i\|_{P_{N,n}} \le c_{3.3}^{-1}$。因此，利用条件 $\|y_i\|_{P_{N,n}} \ge C_{3.12}\, k^{-1/9}$，我们可以（并且将会）假设

$$k \ge \big(c_{3.3}\, C_{3.12}\big)^9.$$

特别地，k 可以取得大于任意普适常数。

我们从t开始 以下标准观察表明：对于任意一组向量 z_1, z_2, ……, z_k,

$$\mathbb{E}_\sigma\left\|\sum_{i=1}^k \sigma_i z_i\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \|z_i\|_2^2,$$

and

$$\mathbb{E}_\sigma\left\|\sum_{i=1}^k \sigma_i z_i\right\|_2^4 = O\bigg(\sum_{i=1}^k \|z_i\|_2^2\bigg)^2,$$

其中隐含常数是普适常数。因此，应用 Paley–Zygmund不等式，存在一个普适常数 $c \in (0,\ 1)$，使得对于任意满足 $s > 0$ 的

$$\mathbb{P}\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{k} \sigma_i z_i \right\|_2 \le c\, s \right\} \ge 1 - c,$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{k} \|z_i\|_2^2 \le s^2,$$

因此存在一个指标 $i \le k$，使得 $\|z_i\|_2 \le s/\sqrt{k}$。

为证明该命题，我们将用反证法。假设 $\mathbb{E}_\sigma \|\beta^\sigma\|_1 \le k^{1/8}$。应用引理 3.11，我们得到一个子集 $R \subset \{\pm 1\}^k$，使得 $|R| \ge 2^k - C_{3.11}\, k^{-78}\, 2^k$ 满足：对每个 $\sigma \in R$ 以及每个 $t \ge \tilde{C}_{2.15} \log^2 k$，

$$\left\| A_{J^c(t)} \beta^\sigma_{J^c(t)} \right\|_2 \le C\left(1 + \frac{1}{t}\sqrt{k} + t^2 \|\beta^\sigma\|_1\right),$$

其中 C 仅取决于 K，K'，且集合 $J(t$由定义 3.7给出。取 $t := k^{1/8}$（注意，我们可以假设 $k^{1/8} \ge \tilde{C}_{2.15} \log^2 k$）。此外，注意到根据界 $\mathbb{E}_\sigma \|\beta^\sigma\|_1 \le k^{1/8}$，至少有 $\|\beta^\sigma\|_1 \le 2\, c^{-1}\, k^{1/8}$ 个 $2^k - \frac{c}{2}\, 2^k$ 符号 σ，其中常数 c 取自证明开头的断言。于是，由上可得，

$$\left\| A_{J^c(t)} \beta^\sigma_{J^c(t)} \right\|_2 \le 4\, C\, c^{-1}\, k^{3/8} \quad \text{for at least } 2^k - \tfrac{c}{2}\, 2^k - \tfrac{C_{3.11}}{k^{78}} 2^k \text{ signs } \sigma.$$

记 Proj 为到向量 $X_j,\ j \in J(t)$ 的线性张成空间上的正交投影，并令 $\mathrm{Proj}_\perp$ 为到其补空间上的正交投影。容易看出，对每个 σ，

$$\|A_{J^c(t)} \beta^\sigma_{J^c(t)}\|_2 \ge \left\| \mathrm{Proj}_\perp\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\, y_i \right) \right\|_2.$$

因此，

$$\mathbb{P}_\sigma\left\{ \left\| \mathrm{Proj}_\perp\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\, y_i \right) \right\|_2 \le 4\, C\, c^{-1}\, k^{3/8} \right\} \ge 1 - \frac{c}{2} - \frac{C_{3.11}}{k^{78}} > 1 - c,$$

其中我们用到了 $k \ge \left(c_{3.3}\, C_{3.12}\right)^9$ 且 $C_{3.12}$ 足够大的假设。应用论证开头的断言可知，存在一个指标 $i_0 \le k$ 满足 $\|\mathrm{Proj}_\perp(y_{i_0})\|_2 \le 4\, C\, c^{-2}\, k^{-1/8}$；并根据内半径估计，$\|\mathrm{Proj}_\perp(y_{i_0})\|_{P_{N,n}} \le 4\, C\, c^{-2}\, c_3^{-1}\, k^{-1/8}$。此外，根据备注3.8 以及我们对 t的选择，

$$|J(t)| \le n\, \frac{\tilde{C}_{2.15} \log t\ \log^4 k}{t^2} + n\, k^{-10} \le \tilde{C}_{2.15}\, n\, k^{-1/4}\ \log^5 k + n\, k^{-10} \le c_{2.13}\, n,$$

其中，在最后一个不等式中，我们再次用到了 k 很大这一事实。应用引理 3.3，可得 conv $\{\pm X_j,\quad j \in J(t)\}$ 的（相对）内半径满足

$$r\left(\mathrm{conv}\left\{\pm X_j,\quad j \in J(t)\right\}\right) \ge \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{|J(t)|}},$$

因此

$$\|\mathrm{Proj}(y_{i_0})\|_{P_{N,n}} \le 2\sqrt{|J(t)|/n} < \frac{1}{2} k^{-1/9}.$$

结合 $\|\mathrm{Proj}_\perp(y_{i_0})\|_{P_N}$ 和 n 以及 $\|\mathrm{Proj}(y_{i_0})\|_{P_N}$ 的 n上界，可得

$$\|y_{i_0}\|_{P_{N,n}} < k^{-1/9},$$

从而导致矛盾。 □

3.3. 嵌　　dding ℓ_∞^k 到 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{N,\,n}})$。本节的主要结果如下　　g

定理 3.13. 存在一个普适常数 $\alpha > 0$，以及常数 $c_{3.13} > 0$ 与 $C_{3.13} \geq c_{2.13}^{-1}$，它们仅依赖于 K、$K' > 1$，并具有如下性质。设整数 N、n 满足 $K \leq \frac{N}{n} \leq K'$ 与 $n \geq C_{3.13}$。对 X_1，.....，$-X_N$ 来自交集 $\Omega_{2.13} \cap \Omega_{2.15}$ 的任一实现取条件，其中这些事件在相应的引理中定义。则多面体 $P_{N,\,n}$ 具有如下性质：对每一个 $1 \leq k \leq n/2$ 以及每一个 k 维子空间 E，其属于（$\mathbb{R}^n$、$\|\cdot\|_{P_{N,\,n}}$），

$$d_{BM}(\ell_\infty^k, E) \geq c_{3.13}\, k^\alpha.$$

鉴于事件 Ω 的概率估计 $_{2.13}$ 与 $\Omega_{2.15}$（来自引理 2.13 与 2.15），上述定理立即蕴含引言中的定理 B，而该定理又通过前述 Maurey 和 Pisier [23],的结果得到定理 A。

上一小节证明的命题 3.12 可以视为上述定理的一个高度特化版本。证明该结果的策略是将一般情形归约到命题 3.12 所处理的情形。假设向量 $y_1, \ldots, y_k$ 张成了 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_N,n})$ 的一个子空间，且该子空间与 ℓ_∞^k 的班纳赫–马祖尔距离较小。下面对向量组 $(y_1, \ldots, y_k)$ 的分析分为两种主要情形：要么存在许多指标对 i 和 r，使得比值 $m_\delta(y_i,r)\, 2^{-2r}\, n$ 取值较大（见定义 3.2）；要么这些表达式关于 i 和 r 一致地有上界。在前一种情形中，系数向量 $\beta(y_i)$ 是“尖峰”的。我们将证明，这一性质最终会与引理 3.4 相矛盾；该引理讨论的是产生 X_i 零和的系数向量的不可压缩性，也就是说，这种情形以不可忽略的概率不会发生（见引理 3.17）。另一方面，在后一种情形中——对应于“表现良好”的 $\beta(y_i)$——我们能够“截断”系数，从而得到一组新的向量 $\tilde{y}_i$，其 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_{P_N,n}$–范数大致相当（引理 3.15）。我们强调，定理 3.13 的证明在条件化之后本质上是确定性的。

第一步是　　证明是引理 3.4 应用于系数向量 $\beta(\cdot)$　　：

引理 3.14 (（$\sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2}$）$_{h\in[N]}$ 的伪不可压缩性）。~~对于每~~个 $K' \geq K > 1$，存在一个常数 $c_{3.14} \in (0,1]$，仅依赖于 K, K'，并具有以下性质。设 $n \geq c_{2.13}^{-1}$ 且 $K' \geq \frac{N}{n} \geq K$。给定 $X_1, \ldots, X_N$ 在 $\Omega_{2.13}$ 中的任意一个实现。设 $J \subset [N]$ 是指标的一个非空子集，且 $|J| \leq c_{3.14}\, n$。此外，设 y_i，$i \in L$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非零向量有限集合，令 σ 为以 L 为指标集的均匀随机符号向量，并令 β^σ 为对应于 $\sum_{i\in L} \sigma_i\, y_i$ 的系数向量。进一步假设

$$c_{3.14} \sum_{h\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2} \geq \mathbb{E}_\sigma \|\beta^\sigma\|_1. \tag{17}$$

那么至少有 $c_{3.14}\, n$ 个指标 $j \in J^c$ 满足

$$\sqrt{\sum_{i\in L} \beta_j(y_i)^2} \geq \frac{c_{3.14}}{\sqrt{|J|\, n}} \sum_{h\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2}.$$

正如引言中的证明概述所述，上述陈述被视为向量（$\sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2}$）$_{h\in[N]}$ 的一种性质，类似于不可压缩性，但稍弱一些。下面的证明的核心依赖于差值（$\sum_{i\in L} \sigma_i\, \beta(y_i) - \beta^\sigma$ 的（适当意义下的）不可压缩性，而这由引理 3.4 保证。

证明引理 *3.14*。我们将假设 $c_{3.14} = c_{3.14}(K,\ K')$ 是一个充分小的正常数。在证明的其余部分，我们以 X_1，.....，X_N 来自 $\Omega_{2.13}$ 的任意实现为条件。记

J'为所有 $j \in J^c = [N] \setminus J$的（非随机）集合，使得

$$\sqrt{\sum_{i\in L} \beta_j(y_i)^2} \geq \frac{c_{3.14}}{\sqrt{|J|\, n}} \sum_{h\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2}$$

我们的其余论证采用反证法：假设 $|J'| < c_{3.14}\, n$。对于每个 $i \in L$，记

$$y_i = y_i' + y_i'',$$

其中 $y_i' := \sum_{j=1}^N \beta_j(y_i)\ \mathbf{1}_{\{j\notin J\}}\, X_j$ 且 $y_i'' := \sum_{j=1}^N \beta_j(y_i)\ \mathbf{1}_{\{j\in J\}}\, X_j$。我们有

$$\Big\| \Big(\sum_{i\in L} \sigma_i\, \beta_j(y_i) - \beta_j^\sigma \Big)_{j\in J} \Big\|_1 \geq \sum_{j\in J} \Big| \sum_{i\in L} \sigma_i\, \beta_j(y_i) \Big| - \sum_{j\in J} |\beta_j^\sigma| \geq \sum_{j\in J} \Big| \sum_{i\in L} \sigma_i\, \beta_j(y_i) \Big| - \|\beta^\sigma\|_1.$$

标准的反集中估计（例如 Paley–Zygmund不等式）表明，存在普适常数 $\tilde{c} \in (0,1)$，使得

$$\mathbb{P}_\sigma \Big\{ \sum_{j\in J} \Big| \sum_{i\in L} \sigma_i\, \beta_j(y_i) \Big| \geq \tilde{c} \sum_{j\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_j(y_i)^2} \Big\} \geq \tilde{c}.$$

另一方面，根据关于 $\mathbb{E}_\sigma \|\beta^\sigma\|_1$ 的假设以及马尔可夫不等式，

$$\mathbb{P}_\sigma \Big\{ \|\beta^\sigma\|_1 \leq 2(\tilde{c})^{-1}\, c_{3.14} \sum_{j\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_j(y_i)^2} \Big\} \geq 1 - \frac{\tilde{c}}{2}.$$

我们可以（并且将会）假设 $2(\tilde{c})^{-1}\, c_{3.14} \leq \frac{\tilde{c}}{2}$。于是由上式可得

$$\mathbb{P}_\sigma \Big\{ \Big\| \Big(\sum_{i\in L} \sigma_i\, \beta_j(y_i) - \beta_j^\sigma \Big)_{j\in J} \Big\|_1 \geq \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{j\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_j(y_i)^2} \Big\} \geq \frac{\tilde{c}}{2},$$

这意味着

$$\mathbb{P}_\sigma \Big\{ \Big\| \Big(\sum_{i\in L} \sigma_i\, \beta_j(y_i) - \beta_j^\sigma \Big)_{j\in J} \Big\|_2 \geq \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{|J|}} \sum_{j\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_j(y_i)^2} \Big\} \geq \frac{\tilde{c}}{2}.$$

此外，我们注意到，对于参数 $\tau > 0$ 的任意取值，

$$\tau\, \mathbb{E}_\sigma \big| \{ j \leq N :\ |\beta_j^\sigma| \geq \tau \} \big| \leq \mathbb{E}_\sigma \|\beta^\sigma\|_1 \leq c_{3.14} \sum_{j\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_j(y_i)^2}$$

˜因此，将满足以下条件的所有指标 $j \in [N] \setminus J$ 的（随机）集合记为 $\tilde{J}$

$$|\beta_j^\sigma| \geq \frac{1}{n} \sum_{h\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2},$$

我们得到

$$\mathbb{E}_\sigma\, |\tilde{J}| \leq c_{3.14}\, n,$$

同时，对于 σ 的所有实现，

$$\Big\| (\beta_j^\sigma)_{j\in[N]\setminus(\tilde{J}\cup J)} \Big\|_2 \leq \frac{\sqrt{N}}{n} \sum_{h\in J} \sqrt{\sum_{i\in L} \beta_h(y_i)^2}.$$

˜定义 $J_0 := J \cup J \cup J'$。于是，根据上述结论，

$$\mathbb{E}_\sigma\, |J_0| \leq 3 c_{3.14}\, n, \tag{18}$$

而

$$\mathbb{P}_\sigma\left\{\left\|\Big(\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta_j(y_i)-\beta_j^\sigma\Big)_{j\in J_0}\right\|_2\geq\frac{\tilde{c}}{2\sqrt{|J|}}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}\right\}\geq\frac{\tilde{c}}{2},\tag{19}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\sigma\left\|\Big(\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta_j(y_i)-\beta_j^\sigma\Big)_{j\in J_0^c}\right\|_2&\leq\mathbb{E}_\sigma\left\|\Big(\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta_j(y_i)\Big)_{j\in J_0^c}\right\|_2+\mathbb{E}_\sigma\left\|\big(\beta_j^\sigma\big)_{j\in J_0^c}\right\|_2\\&\leq\sqrt{\mathbb{E}_\sigma\left\|\Big(\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta_j(y_i)\Big)_{j\in J_0^c}\right\|_2^2}+\frac{\sqrt{N}}{n}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}\\&\leq\sqrt{\sum_{j\in[N]\setminus(J\cup J')}\sum_{i\in L}\beta_j(y_i)^2}+\frac{\sqrt{N}}{n}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}\\&\leq\frac{c_{3.14}\sqrt{N}}{\sqrt{|J|\,n}}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}+\frac{\sqrt{N}}{n}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}\\&\leq\frac{2\sqrt{c_{3.14}\,N}}{\sqrt{|J|\,n}}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2},\end{aligned}\tag{20}$$

这里我们用到了 $|J|\leq c_{3.14}\,n$。

结合 (18)，（19）以及（20），再应用马尔可夫不等式，可知存在 σ的某个实现，使得 ，

$$\left\|\Big(\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta_j(y_i)-\beta_j^\sigma\Big)_{j\in J_0}\right\|_2\geq\frac{\tilde{c}}{2\sqrt{|J|}}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}>0;$$

$$|J_0|\leq\frac{24c_{3.14}\,n}{\tilde{c}};$$

$$\left\|\Big(\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta_j(y_i)-\beta_j^\sigma\Big)_{j\in J_0^c}\right\|_2\leq\frac{16\sqrt{c_{3.14}\,N}}{\tilde{c}\,\sqrt{|J|\,n}}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in L}\beta_h(y_i)^2}.$$

作为证明的最后一步，我们应用引理3.4。注意，只要 $c_{3.14}$ 足够小，我们就有

$$\frac{24c_{3.14}}{\tilde{c}}<\delta_{3.4},$$

而

$$\rho_{3.4}\cdot\frac{\tilde{c}}{2}>\frac{16\sqrt{c_{3.14}\,N}}{\tilde{c}\sqrt{n}}.$$

因此，向量$\big(\sum_{i\in L}\sigma_i\,\beta_j(y_i)-\beta_j^\sigma\big)_{j\in[N]}$是（$\delta_{3.4}$，$\rho_{3.4}$）-可压缩的；根据引理3.4，这便导致矛盾。结论得证。□

作为上述引理的第一个应用，我们考虑如下情形：向量 y_i、$i\in L$ 属于 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_{P_N,n})$，并且对所有 $0\leq r\leq\log_2\sqrt{|L|}$ 以及一个较小的参数 $\alpha>0$，满足 $m_\delta(y_i,r)\leq|L|^\alpha\,2^{-2r}\,n$；同时，$y_i$ 诱导出从 $\ell_\infty^{|L|}$ 到 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_{P_N,n})$ 的低失真嵌入。最终，我们的目标是证明，对于 $P_{N,n}$ 的一个典型实现，这样的向量并不存在。为验证这一断言，下一条引理中的关键步骤是证明：对于这些向量中相当大的一部分，可以定义“截断” $\tilde{y}_i$，使其 $\|\cdot\|_{P_N,\,n}$ 和 $\|\cdot\|_2$-范数大致相当，并且还能产生 ℓ_∞ 的低失真嵌入。这样，我们便将问题转回命题 3.12 所处的情形，并在本节末完成定理 3.13 的证明时最终导出矛盾。

引理 3.15。 对于 的每一个容许选择 K， K' 存在一个 $C_{3.15} \geq 2$ ，其仅取决于 K、K'，以及一个具有如下性质的普适常数 $c_{3.15} > 0$ 。假设 $n \geq c_{2.13}^{-1}$ 且 $K' \geq \frac{N}{n} \geq K$。在事件 $\Omega_{2.13}$ 的条件下，令 L 为一个满足$\frac{1}{2}|L| \geq C_{3.15}$ 的有限指标集，令$\delta \in (0,1]$ 为一个参数，并令 y_i、 $i \in L$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $\|y_i\|_{P_N,\, n} \in [\delta, 2\delta]$ 的单位向量。假设对于每个 y_i、 $i \in L$ 以及每个满足 $0 \leq r \leq \log_2 \sqrt{|L|}$ 的整数，

$$m_\delta(y_i, r) \leq |L|^\alpha \, 2^{-2r} \, n,$$

其中 $\alpha \in (0,\ c_{3.\,15}]$ 是一个参数。进一步假设，对于每一种数值选择 $v = (v_i)_{i \in L}$，

$$\Big\| \sum_{i \in L} v_i \, y_i \Big\|_{P_{N,n}} \leq \delta \, \|v\|_\infty \, |L|^\alpha.$$

那么存在一个由单位欧几里得长度向量组成的集合 $\tilde{y}_i$, $i \in U$，满足 $|U| = \big\lfloor |L|^{1/16} \big\rfloor$，使得对于每个 $\tilde{y}_i$,

- $\|\tilde{y}_i\|_{P_{N,n}} \geq C_{3.15}^{-1} \, |L|^{-\alpha/2} \, (\log |L|)^{-1}$;
- *For every choice of signs* σ_i, $i \in U$, $\big\| \sum_{i \in U} \sigma_i \, \tilde{y}_i \big\|_{P_{N,n}} \leq C_{3.15} \, |L|^\alpha$.

证明。 我们假设 $C_{3.15} \geq 2$ 足够大。我们不试图优化 $c_{3.15}$ 的取值，可以在下文的论证中取 $c_{3.15} := 0.01$ 。记 $\tilde{r} := \lfloor \log_2 \sqrt{|L|} \rfloor$，并取 $\varepsilon := |L|^{-1/16}$。考虑两种子情况。

1. 对于至少 $|L|/2$ 个向量 y_i,

$$\sum_{j=1}^N |\beta_j(y_i)| \, \mathbf{1}_{\{|\beta_j(y_i)| > \delta \, 2^{\tilde{r}}/n\}} \leq \varepsilon \, \delta.$$

将相应的指标集记为 $L_1 \subset L$。对于每个 $i \in L_1$，定义

$$y_i' := \sum_{j=1}^N \beta_j(y_i) \, \mathbf{1}_{\{|\beta_j(y_i)| \leq \delta \, 2^{\tilde{r}}/n\}} \, X_j.$$

注意到

$$\|y_i - y_i'\|_{P_{N,n}} \leq \varepsilon \, \delta, \tag{21}$$

这意味着

$$\|y_i'\|_{P_{N,n}} = \Omega(\delta), \quad \|y_i'\|_2 = \Omega(\delta), \tag{22}$$

其中，后一个关系由前一个关系通过应用 Ω 的定义3.3 以及“内半径”引理3.3得出，且隐含常数仅取决于 K、K'。此外，鉴于对 $\Omega_{2.13}$进行条件化，我们有：

$$\begin{aligned}
\|y_i'\|_2 &= O\Big(\sqrt{n} \, \Big\| \Big(\beta_j(y_i) \, \mathbf{1}_{\{|\beta_j(y_i)| \leq \delta \, 2^{\tilde{r}}/n\}} \Big)_{j \in [N]} \Big\|_2 \Big) \\
&= O\Big(\sqrt{n} \, \sum_{r=0}^{\tilde{r}} \sqrt{m_\delta(y_i, r)} \, \frac{\delta}{n} \, 2^r \Big) \\
&= O\Big(\sum_{r=0}^{\tilde{r}} \sqrt{|L|^\alpha \, 2^{-2r} \, n} \, \frac{\delta}{n} \, 2^r \, \sqrt{n} \Big) \\
&= O\big(|L|^{\alpha/2} \, \delta \, \tilde{r} \big),
\end{aligned}$$

其中，隐含常数仅取决于 K、K'。重新归一化后，我们得到一组单位向量 $\tilde{y}_i = \frac{y'_i}{\|y'_i\|_2}$，$i \in L_1$，使得

$$\|\tilde{y}_i\|_{P_{N,n}} = \Omega\big(|L|^{-\alpha/2}\,\tilde{r}^{-1}\big).$$

进一步，利用（21）和（22），以及引理的假设，对于每个非空子集 $U_1 \subset L_1$ 和每种符号赋值 $\sigma_i,\ \ i \in U_1$，

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i\in U_1}\sigma_i\,\tilde{y}_i\Big\|_{P_{N,n}} &\le \Big\|\sum_{i\in U_1}\sigma_i\Big(\frac{y'_i}{\|y'_i\|_2}-\frac{y_i}{\|y'_i\|_2}\Big)\Big\|_{P_{N,n}} + \Big\|\sum_{i\in U_1}\sigma_i\,\frac{y_i}{\|y'_i\|_2}\Big\|_{P_{N,n}}\\ &\le \sum_{i\in U_1}\frac{1}{\|y'_i\|_2}\,\|y'_i - y_i\|_{P_{N,n}} + \delta\,|L|^{\alpha}\,\Big\|\Big(\frac{\sigma_i}{\|y'_i\|_2}\Big)_{i\in U_1}\Big\|_{\infty}\\ &\le O\big(\varepsilon\,|U_1|\big) + O\big(|L|^{\alpha}\big).\end{aligned}$$

令 U_1 为 L_1 中任意一个大小为 $\lfloor |L|^{1/16} \rfloor$的子集，即得所需结果。

2. 对于至少 $|L|/2$ 个向量 y_i，

$$\sum_{j=1}^{N}|\beta_j(y_i)|\,\mathbf{1}_{\{|\beta_j(y_i)|>\delta\,2^{\tilde{r}}/n\}} > \varepsilon\,\delta.$$

将相应的指标集记为 L_2。令 $U_2 \subset L_2$ 为 L_2 中一个大小为$|U_2| = \lfloor |L|^{1/8+3\,c_{3.15}} \rfloor$的子集。回忆一下，根据引理的假设，对于符号 σ_i、$i \in U_2$的每种取值，

$$\Big\|\sum_{i\in U_2}\sigma_i\,y_i\Big\|_{P_{N,n}} \le \delta\,|L|^{\alpha}. \tag{23}$$

定义 J为所有满足以下条件的指标 $j \in [N]$ 的集合：对于某个$i \in U_2$，有 $|\beta_j(y_i)| > \delta\,2^{\tilde{r}}/n$。注意，鉴于上界$\|y_i\|_{P_{N,\,n}} \le 2\delta$、常数 $C_{3.15}$ 足够大的假设以及 U_2的定义，

$$|J| \le |U_2|\cdot\frac{2n}{2^{\tilde{r}}} \le 4n\,\frac{|U_2|}{\sqrt{|L|}} \le c_{3.14}\,n. \tag{24}$$

此外，根据我们的假设，L很大，

$$\begin{aligned}c_{3.14}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in U_2}\beta_h(y_i)^2} &\ge \frac{c_{3.14}}{\sqrt{|U_2|}}\sum_{i\in U_2}\sum_{j\in J}|\beta_j(y_i)|\\ &\ge c_{3.14}\,\varepsilon\,\delta\,\sqrt{|U_2|}\\ &= c_{3.14}\,|L|^{-1/16}\,\delta\,\sqrt{|U_2|} \ge \delta\,|L|^{\alpha},\end{aligned}$$

因此，鉴于上界（23），引理 3.14 （其中 L 替换为 U_2）中的假设（17）成立。应用引理 3.14，可知至少存在 $c_{3.14}\,n$ 个指标

$j \in J^c$ 满足

$$\begin{aligned}\sum_{i\in U_2}|\beta_j(y_i)| &\geq \sqrt{\sum_{i\in U_2}\beta_j(y_i)^2} \geq \frac{c_{3.14}}{\sqrt{|J|\,n}}\sum_{h\in J}\sqrt{\sum_{i\in U_2}\beta_h(y_i)^2}\\ &\geq \frac{c_{3.14}}{\sqrt{|U_2|\,|J|\,n}}\sum_{i\in U_2}\sum_{h\in J}|\beta_h(y_i)|\\ &\geq \frac{c_{3.14}\,\varepsilon\,\delta\sqrt{|U_2|}}{\sqrt{|J|\,n}}\\ &\geq \frac{c_{3.14}\,\varepsilon\,\delta\,|L|^{1/4}}{2n},\end{aligned} \tag{25}$$

这里我们应用（24）中的第一个不等式来界定 $|J|$。同时，根据引理的假设，对于每个 $i \in U_2$,

$$\sum_{j\in[N]\setminus J}|\beta_j(y_i)| \leq \sum_{r=0}^{\tilde{r}}|L|^{\alpha}\,2^{-2r}\,n\,\frac{\delta}{n}\,2^r \leq 2\,|L|^{\alpha}\,\delta,$$

这意味着

$$\sum_{j\in[N]\setminus J}\sum_{i\in U_2}|\beta_j(y_i)| \leq 2\,|U_2|\,|L|^{\alpha}\,\delta.$$

结合最后一个关系式与（25），得到

$$2\,|U_2|\,|L|^{\alpha}\,\delta \geq c_{3.14}\,n\cdot\frac{c_{3.14}\,\varepsilon\,\delta\,|L|^{1/4}}{2n},$$

从而导致矛盾。因此，第二种子情况不可行，结论得证。

□

在考察了参数 $m_\delta(y_i,\ r)$ 的“受控衰减”情形后，接下来的两个引理将讨论系数 $\beta(y_i)$ 的“尖峰”情形。我们的目标是证明，满足此类条件的向量无法诱导出 ℓ_∞的低畸变嵌入。

引理3.16（预处理引理）。设 $X_1,\ldots,X_N$ 的任意一个非退化实现。令 $|L| \geq 2$，设 $\alpha,\delta \in (0,1]$ 和 $\varepsilon \in (0,\ 1/2]$ 为参数，并设 $y_i,\ i \in L$为 $\mathbb{R}^n$中的单位向量，满足$\|y_i\|_{P_N,\ n} \in [\delta, 2\delta]$。假设对于每个 $y_i,\ i \in L$,

$$\max_{0\leq r\leq\log_2\sqrt{|L|}}\frac{m_\delta(y_i,r)}{2^{-2r}\,n} > |L|^{\alpha}.$$

那么存在一个大小至少为 $c_{3.16}\,(\log|L|)^{-2}|L|$ 的集合 $\tilde{L}\subset L$（其中某个常数 $c_{3.16}>0$ 仅依赖于 K'），使得对于某个整数 $0\leq r\leq 3\log_2|L|+4$，一个实数

$$p \geq |L|^{\alpha-\varepsilon}\,2^{-2r}\,2^{\max(0,r-\log_2\sqrt{|L|})}\,n,$$

˜和每个 $i \in L$,

$$m_\delta(y_i,r) \in [p,2p],$$

and

$$\begin{aligned}&m_\delta(y_i,h) < 2^{(-2+\varepsilon)(h-r)}\,m_\delta(y_i,r), && 0\leq h<r;\\ &m_\delta(y_i,h) < 2^{-(h-r)/2}\,m_\delta(y_i,r), && h>r.\end{aligned}$$

证明。 暂且固定任意一个 $i \in L$。考虑如下构造数列$r_0(i)\ r_1(i)\ldots$的算法。令 $r_0(i)$ 为任意满足 $m_\delta(y_i, r) \ > |L|^\alpha\, 2^{-2r}\, n$ 的 $0 \le r \le \log_2 \sqrt{|L|}$（根据引理的假设，这样的数存在）。此外，给定算法第 ℓ 步得到的数 $r_\ell(i)$，我们令 $r_{\ell+1}(i)$ 为任意满足以下任一条件的非负整数 r

$$\frac{m_\delta(y_i, r)}{2^{(-2+\varepsilon)\, r}} \ge \frac{m_\delta(y_i, r_\ell(i))}{2^{(-2+\varepsilon)\, r_\ell(i)}} \quad \text{and} \quad 0 \le r < r_\ell(i), \tag{26}$$

or

$$\frac{m_\delta(y_i, r)}{2^{-r/2}} \ge \frac{m_\delta(y_i, r_\ell(i))}{2^{-r_\ell(i)/2}} \quad \text{and} \quad r > r_\ell(i). \tag{27}$$

如果找不到这样的数 $r_{\ell+1}(i)$，我们就停止该过程，并将 $\tilde{r}(i)$ 定义为所构造数列的最后一个元素。

我们声称，上述算法会终止，并且得到的指标 $\tilde{r}(i)$ 满足

$$\begin{aligned} m_\delta(y_i, \tilde{r}(i)) &> |L|^\alpha\, 2^{-2\tilde{r}(i) - \varepsilon \log_2 \sqrt{|L|}}\, 2^{(3/2-\varepsilon)\max(0, \tilde{r}(i) - \log_2 \sqrt{|L|})}\, n \\ &\ge |L|^{\alpha-\varepsilon}\, 2^{-2\tilde{r}(i)}\, 2^{\max(0, \tilde{r}(i) - \log_2 \sqrt{|L|})}\, n \end{aligned} \tag{28}$$

and

$$2^{\tilde{r}(i)} \le 16\, |L|^{3-2\alpha}. \tag{29}$$

事实上，注意到，根据（26）和（27），这些比值

$$\frac{m_\delta(y_i, r_\ell(i))}{2^{-2r_\ell(i) + \varepsilon\, r_\ell(i)}}, \quad \ell = 0, 1, \ldots,$$

构成一个单调不减数列，而且，

$$\frac{m_\delta(y_i, r_{\ell+1}(i))}{2^{-2r_{\ell+1}(i) + \varepsilon\, r_{\ell+1}(i)}} \ge 2^{(3/2-\varepsilon)(r_{\ell+1}(i) - r_\ell(i))}\, \frac{m_\delta(y_i, r_\ell(i))}{2^{-2r_\ell(i) + \varepsilon\, r_\ell(i)}}, \quad \text{whenever } r_{\ell+1}(i) > r_\ell(i). \tag{30}$$

由于

$$\sup_{r \ge 0} \frac{m_\delta(y_i, r)}{2^{-2r + \varepsilon\, r}} < \infty,$$

上述观察表明该算法必定终止。此外，根据（30），我们有

$$\frac{m_\delta(y_i, \tilde{r}(i))}{2^{-2\tilde{r}(i) + \varepsilon\, \tilde{r}(i)}} > 2^{(3/2-\varepsilon)\max(0, \tilde{r}(i) - r_0(i))}\, \frac{m_\delta(y_i, r_0(i))}{2^{-2r_0(i) + \varepsilon\, r_0(i)}},$$

并且，特别地，

$$\begin{aligned} m_\delta(y_i, \tilde{r}(i)) &> |L|^\alpha\, 2^{-2r_0(i)}\, n\, \frac{2^{(3/2-\varepsilon)\max(0, \tilde{r}(i) - r_0(i))}\, 2^{-2\tilde{r}(i) + \varepsilon\, \tilde{r}(i)}}{2^{-2r_0(i) + \varepsilon\, r_0(i)}} \\ &= |L|^\alpha\, 2^{-2\tilde{r}(i)}\, n\, 2^{(3/2-\varepsilon)\max(0, \tilde{r}(i) - r_0(i))}\, 2^{\varepsilon\, \tilde{r}(i) - \varepsilon\, r_0(i)} \\ &\ge |L|^\alpha\, 2^{-2\tilde{r}(i) - \varepsilon \log_2 \sqrt{|L|}}\, 2^{(3/2-\varepsilon)\max(0, \tilde{r}(i) - \log_2 \sqrt{|L|})}\, n, \end{aligned} \tag{31}$$

从而推出（28）。最后，每当 $\tilde{r}(i) > r_0(i)$，鉴于界 $\|y_i\|_{P_N,\ \text{必然有}\ n} \le 2\delta$ 以及（31），

$$4n\, 2^{-\tilde{r}(i)} = 2\delta \left(\frac{\delta}{n}\, 2^{\tilde{r}(i)-1} \right)^{-1} \ge m_\delta(y_i, \tilde{r}(i)) \ge |L|^\alpha\, 2^{-2\tilde{r}(i)}\, n\, 2^{1.5(\tilde{r}(i) - r_0(i))} = |L|^\alpha\, 2^{-\tilde{r}(i)/2}\, n\, 2^{-1.5 r_0(i)}.$$

两边取平方并整理后，我们得到

$$2^{\tilde{r}(i)} \le 16\, |L|^{-2\alpha}\, 2^{3 r_0(i)},$$

从而得到（29），命题得证。

关系式（29）表明，对于每个$i \in L$， $O(\log |L|$是 $\tilde{r}(i)$的容许值个数上限。此外，由（28），对于所有 $i \in L$，有 $N \geq m_\delta(y_i,\ \tilde{r}(i)) \geq |L|^{-O(1)}\, n$，对范围 $|L|^{-O(1)}\, n \ldots N$进行二进划分，再结合抽屉原理，即可推出结论。□

引理 3.17. 对于每个关于 K, K' 的容许选择以及每个 $\alpha \in (0,1]$，都存在一个常数$C_{3.17} \geq 2$，它仅依赖于 K, K', α，并具有以下性质。假设 $n \geq c_{2.13}^{-1}$。在 $\Omega_{2.13}$ 中，给定 $X_1, \ldots, X_N$ 的任意实现。设 L 是一个满足 $|L| \geq C_{3.17}$ 的有限指标集，设 $\delta \in (0,1]$ 是一个参数，并设 $y_i,\ i \in L$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中满足$\|y_i\|_{P_{N,n}} \in [\delta, 2\delta]$的单位向量。假设对于每个 $y_i,\ i \in L$,

$$\max_{0 \leq r \leq \log_2 \sqrt{|L|}} \frac{m_\delta(y_i, r)}{2^{-2r}\, n} > |L|^\alpha.$$

那么存在一个元组 $v = (v_i)_{i \in L}$，满足 $\|v\|_\infty = 1$，使得

$$\Big\| \sum_{i \in L} v_i\, y_i \Big\|_{P_{N,n}} \geq \delta\, |L|^{\alpha/5}.$$

证明。定义 $\varepsilon := \alpha/2$。我们假设常数 $C_{3.17}$ 足够大，特别是$|L|^{\alpha-\varepsilon}\, n > N$。应用引理 3.16，得到一个大小至少为 $\tilde{L} \subset L$ 的集合 $c_{3.16}\, (\log |L|)^{-2} |L|$，使得对于某个 $0 \leq r \leq 3\log_2 |L| + 4$，某个

$$p \geq |L|^{\alpha-\varepsilon}\, 2^{-2r}\, 2^{\max(0, r - \log_2 \sqrt{|L|})}\, n \geq |L|^{\alpha-\varepsilon}\, 2^{-2r}\, n, \tag{32}$$

˜以及每个 $i \in L$,

$$m_\delta(y_i, r) \in [p, 2p],$$

and

$$m_\delta(y_i, h) < 2^{-2(h-r)-\varepsilon(r-h)}\, m_\delta(y_i, r), \qquad 0 \leq h < r;$$

$$m_\delta(y_i, h) < 2^{-(h-r)/2}\, m_\delta(y_i, r), \qquad h > r.$$

注意到，根据平凡界 $p \leq N$ 和（32），我们有

$$r \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{|L|^{\alpha-\varepsilon}\, n}{N} = \Omega(\log |L|) > 0. \tag{33}$$

令 r' 为区间 $[1, r-1]$ 中满足以下条件的最大整数:

$$\frac{1}{\varepsilon}\, 2^{\varepsilon(r'-r)} < \frac{c_{3.14}^3}{64}\, \frac{1}{\log_2 |L| + 2} \tag{34}$$

˜（注意，只要 $C_{3.17}$ 足够大， r' 就定义良好）。此外，令 $U \subset L$ 为 ⊿L 的一个子集，其大小为

$$|U| = \min\left(\left\lfloor \frac{c_{3.14}\, n}{8\, p \cdot 2^{(-2+\varepsilon)(r'-r)}} \right\rfloor, |\tilde{L}| \right).$$

˜界$\|y_i\|_{P_{N,\ n}} \leq 2\delta$， $i \in L$连同（33）可推出

$$p \leq \left(\frac{\delta\, 2^{r-1}}{n} \right)^{-1} 2\delta = \frac{4n}{2^r} \leq \frac{4n}{\sqrt{\frac{|L|^{\alpha-\varepsilon}\, n}{N}}} \leq \frac{4\sqrt{K'}\, n}{|L|^{(\alpha-\varepsilon)/2}}.$$

最后一个不等式，结合（34）以及 U 的定义，可推出

$$|U| \geq \frac{|L|^{(\alpha-\varepsilon)/2}}{(\log |L|)^{C_\alpha}} > 0,$$

对于某个仅依赖于 α的 $C_\alpha \geq 1$， K'， K。

我们将应用引理3.14 以得到所需结果。我们将通过矛盾进行论证。假设对于符号的每一种选择 σ_i, $i \in U$,

$$\Big\| \sum_{i \in U} \sigma_i \, y_i \Big\|_{P_{N,n}} \leq \delta \, |L|^{0.49(\alpha-\varepsilon)}. \tag{35}$$

将满足存在某个 $i \in U$ 使得 $|\beta_j(y_i)| > \delta \, 2^{r'-1}/n$ 的所有指标 $j \in [N]$ 的集合记为 J'；类似地，将满足存在某个 $i \in U$ 使得 $|\beta_j(y_i)| > \delta \, 2^{r-1}/n$ 的所有指标 $j \in [N]$ 的集合记为 J。根据 J' 和 U 的上述定义以及关于 $m_\delta(y_i, \ h)$ 的界，可得

$$\begin{aligned} |J| \leq |J'| &\leq \sum_{i \in U} \sum_{h \geq r'} m_\delta(y_i, h) \\ &\leq 2p \, |U| \sum_{h=r'}^{r-1} 2^{(-2+\varepsilon)(h-r)} + 2p \, |U| + 2p \, |U| \sum_{h>r} 2^{-(h-r)/2} \\ &< 4p \, |U| \cdot 2^{(-2+\varepsilon)(r'-r)} \leq \frac{c_{3.14}}{2} \, n. \end{aligned} \tag{36}$$

我们进一步将 J 划分为

$$J = \bigcup_{w=1}^{\lceil \log_2 |U| \rceil + 1} J_w,$$

其中

$$J_w := \big\{ j \in J : \ |\{ i \in U : \ |\beta_j(y_i)| > \delta \, 2^{r-1}/n \}| \in [2^{w-1}, 2^w) \big\}.$$

注意到

$$\sum_{w=1}^{\lceil \log_2 |U| \rceil + 1} |J_w| \, 2^{w-1} \leq \sum_{j \in [N]} \sum_{i \in U} \mathbf{1}_{\{|\beta_j(y_i)| > \delta \, 2^{r-1}/n\}} = \sum_{i \in U} \sum_{h \geq r} m_\delta(y_i, h) \leq \sum_{w=1}^{\lceil \log_2 |U| \rceil + 1} |J_w| \, 2^w,$$

其中，根据关于 $m_\delta(y_i, \ r)$ 的条件，

$$p \, |U| \leq \sum_{i \in U} m_\delta(y_i, r) \leq \sum_{i \in U} \sum_{h \geq r} m_\delta(y_i, h) < 4 \sum_{i \in U} m_\delta(y_i, r) \leq 8p \, |U|.$$

将 $1 \ldots \lceil \log_2 |U| \rceil + 1$ 中对应于乘积 $|J_w| \, 2^w$ 取最大值的整数记为 w_0（若有多个最大值，则任意选取一个），于是

$$|J_{w_0}| \, 2^{w_0} \geq \frac{1}{\lceil \log_2 |U| \rceil + 1} \sum_{w=1}^{\lceil \log_2 |U| \rceil + 1} |J_w| \, 2^w \geq \frac{p \, |U|}{\lceil \log_2 |U| \rceil + 1}.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} c_{3.14} \sum_{h \in J_{w_0}} \sqrt{\sum_{i \in U} \beta_h(y_i)^2} &\geq c_{3.14} \, \delta \, 2^{r-1} \, 2^{(w_0-1)/2} \, \frac{|J_{w_0}|}{n} \\ &\geq \frac{c_{3.14} \, \delta \, 2^{r-1}}{2^{(w_0+1)/2} \, n} \, \frac{p \, |U|}{\lceil \log_2 |U| \rceil + 1} \\ &\geq \frac{c_{3.14} \, \delta \, 2^r}{24 \, n} \, \frac{p \sqrt{|U|}}{\log_2 |L|}, \end{aligned} \tag{37}$$

其中我们用到了 $w_0 \leq \lceil \log_2 |U| \rceil + 1$。考虑两种情况。

- $\left\lfloor \frac{c_{3.14}\, n}{8\, p \cdot 2^{(-2+\varepsilon)(r'-r)}} \right\rfloor \le |\tilde{L}|$。在这种情况下，根据 U的定义，我们有

$$|U| = \left\lfloor \frac{c_{3.14}\, n}{8\, p \cdot 2^{(-2+\varepsilon)(r'-r)}} \right\rfloor,$$

and

$$\begin{aligned} 2^r\, p\, \sqrt{|U|} &\ge 2^{r-1} \frac{c_{3.14}^{1/2} \sqrt{n\, p}}{2\sqrt{2} \cdot 2^{(-1+\varepsilon/2)(r'-r)}} \\ &> \frac{c_{3.14}^{1/2}}{8}\, 2^{(1-\varepsilon/2)(r'-r)}\, |L|^{(\alpha-\varepsilon)/2}\, 2^{\max(0,r-\log_2\sqrt{|L|})/2}\, n, \end{aligned}$$

其中用到了关于参数 p的假设。将最后一个关系与 (37) 和 (35) 以及 r'的定义结合起来，并考虑到 L很大，我们得到

$$c_{3.14} \sum_{h\in J_{w_0}} \sqrt{\sum_{i\in U} \beta_h(y_i)^2} \ge \frac{c_{3.14}^{3/2}\, \delta}{200}\, \frac{|L|^{(\alpha-\varepsilon)/2}}{\log_2 |L|}\, 2^{(1-\varepsilon/2)(r'-r)} \ge \mathbb{E}_\sigma \|\beta(y^\sigma)\|_1. \tag{38}$$

- $\left\lfloor \frac{c_{3.14}\, n}{8\, p \cdot 2^{(-2+\varepsilon)(r'-r)}} \right\rfloor > |\tilde{L}|$。于是 $|U| = |\tilde{L}|$，并且

$$2^r\, p\, \sqrt{|U|} \ge |L|^{\alpha-\varepsilon}\, 2^{-r}\, 2^{\max(0,r-\log_2\sqrt{|L|})}\, n \sqrt{|\tilde{L}|} \ge |L|^{\alpha-\varepsilon}\, n,$$

因此，再次应用 (37) 和 (35)，

$$c_{3.14} \sum_{h\in J_{w_0}} \sqrt{\sum_{i\in U} \beta_h(y_i)^2} \ge \frac{c_{3.14}\, \delta}{24}\, \frac{|L|^{\alpha-\varepsilon}}{\log_2 |L|} \ge \mathbb{E}_\sigma \|\beta(y^\sigma)\|_1. \tag{39}$$

无论哪种情况，由 (36)、(38) 和 (39) 可应用引理 3.14，我们得到至少存在 $c_{3.14}\, n$ 个指标 $j \in J_{w_0}^c$ 满足

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i\in U} \beta_j(y_i)^2} &\ge \frac{c_{3.14}}{\sqrt{|J_{w_0}|\, n}} \sum_{h\in J_{w_0}} \sqrt{\sum_{i\in U} \beta_h(y_i)^2} \\ &\ge \frac{c_{3.14}\, \sqrt{|J_{w_0}|}}{\sqrt{n}}\, \frac{\delta\, 2^{r-1}}{n}\, 2^{(w_0-1)/2}, \end{aligned}$$

这意味着（考虑到界 $|[N]\setminus J'| \ge N - c_{3.14}\, n$在~~(36)~~ 中）

$$\sum_{j\in[N]\setminus J'} \sum_{i\in U} \beta_j(y_i)^2 \ge \frac{c_{3.14}^3 \delta^2\, 2^{2r}\, 2^{w_0} |J_{w_0}|}{16\, n^2}. \tag{40}$$

同时，根据 J'的定义以及 $m_\delta(y_i, h)$ 的界，对每个 $i \in U$，

$$\sum_{j\in[N]\setminus J'} \beta_j(y_i)^2 \le 2p \sum_{h=0}^{r'-1} 2^{(-2+\varepsilon)(h-r)}\, 2^{2h}\, \frac{\delta^2}{n^2} < \frac{4\, p\, \delta^2\, 2^{(-2+\varepsilon)(r'-r)}\, 2^{2r'}}{\varepsilon\, n^2},$$

这意味着

$$\sum_{j\in[N]\setminus J'} \sum_{i\in U} \beta_j(y_i)^2 \le \frac{4\, p\, \delta^2\, 2^{(-2+\varepsilon)(r'-r)}\, 2^{2r'}\, |U|}{\varepsilon\, n^2}.$$

将最后一个关系与（40）结合，得到

$$\frac{1}{\varepsilon}\, p\, 2^{\varepsilon(r'-r)}\, |U| \ge \frac{1}{64}\, c_{3.14}^3\, 2^{w_0} |J_{w_0}| \ge \frac{c_{3.14}^3}{64}\, \frac{p\, |U|}{\lceil \log_2 |U| \rceil + 1}.$$

根据 r' 的定义，这会导致矛盾。 □

在分别处理了向量 $\beta(y_i)$ 为“平坦”（引理3.15）或“尖峰”（引理3.17）这两种情形后，定理3.13的证明基本完成。剩下的只是一些简单的归约步骤，以及在引理 3.15与命题3.12之间建立正式联系。

定理 *3.13* 的证明。我们假设常数 $\alpha \in (0,\ 0.01]$ 和 $c_{3.13}$ 较小，而$C_{3.13} > 0$ 较大。因此，不失一般性，我们可以假设 k 较大。我们将用反证法进行论证。设 E 是 $(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|_{P_{N,\,n}})$ 的一个 k 维线性子空间，其中

$$d_{BM}(\ell_\infty^k, E) \le c_{3.13}\, k^\alpha.$$

˜应用引理 2.10，我们得到 $k := \lfloor c_{2.10}\, k/$ 对数个 $k\rfloor$ 单位向量 $y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_{\tilde{k}}$ 以及一个数 $\delta > 0$˜，使得 $\|y_i\| \in [\delta, 2\delta]$ 对每个 $i \le k$以及每组选取的数 $v = (v_i)_{i\le\tilde{k}}$,

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\tilde{k}} v_i\, y_i\Big\|_{P_{N,n}} \le C_{2.10}\, c_{3.13}\, \delta\, k^\alpha\, \|v\|_\infty < \delta\,(\tilde{k}/2)^{2\alpha}\, \|v\|_\infty. \tag{41}$$

˜我们可以（并且将会）假设 $k = \lfloor c_{2.10}\, k/\log\ k\rfloor \ge 2\max(C_{3.17}, C_{3.15})$。首先假设对于$\lceil k/2\rceil$ 指标 i,

$$\max_{0\le r\le \log_2\sqrt{\lceil\tilde{k}/2\rceil}} \frac{m_\delta(y_i, r)}{2^{-2r}\, n} > \lceil\tilde{k}/2\rceil^{20\alpha}.$$

将相应的集合记为 L。应用引理 3.17 ，以 20α 代替 α，我们得到一个元组 $v =(v_i)_{i\in L}$ ，其中 $\|v\|_\infty = 1$ 使得

$$\Big\|\sum_{i\in L} v_i\, y_i\Big\|_{P_{N,n}} \ge \delta\,|L|^{4\alpha} = \delta\,\lceil\tilde{k}/2\rceil^{4\alpha},$$

˜这与（41）矛盾。我们得出结论：存在一个指标集合 L' ，其大小为 $\lceil k/2\rceil \ge C_{3.15}$，使得

$$\max_{0\le r\le \log_2\sqrt{\lceil\tilde{k}/2\rceil}} \frac{m_\delta(y_i, r)}{2^{-2r}\, n} \le \lceil\tilde{k}/2\rceil^{20\alpha}, \quad i \in L'.$$

注意，我们假设 $20\alpha \le c_{3.15}$。应用引理 3.15 ，以 20α 代替 α，我们得到一个集合 $\tilde{y}_i,\, i \in U$，由具有单位欧几里得长度的向量组成，且 $|U| = \lfloor |L'|^{1/16}\rfloor$ 使得对每一个 $\tilde{y}_i$,

- $\|\tilde{y}_i\|_{P_{N,n}} \ge C_{3.15}^{-1}\,|L'|^{-10\alpha}\,(\log|L'|)^{-1}$;
- For every choice of signs $\sigma_i,\, i \in U,\ \big\|\sum_{i\in U}\sigma_i\,\tilde{y}_i\big\|_{P_{N,n}} \le C_{3.15}\,|L'|^{20\alpha}$.

还需指出，只要 α 足够小，这类集合 $\tilde{y}_i,\ \ i \in U$就与命题 3.12矛盾。结论得证。 □

3.4. **定理 B 和定理 A**。 引言中的定理 B 可由定理 3.13直接推出，只需注意到事件 $\Omega_{2.13}\cap\Omega_{2.15}$ 的概率为 $1-\frac{O(1)}{n}$，这是由引理 2.13和 2.15得出的。此外，将以下 Maurey–Pisier 定理的“非渐近”版本应用于定理 B，即可推出定理 A [23]:

定理 3.18 （Maurey–Pisier 定理的非渐近重述 [23]）。对于每个$k_0 \ge 2$ ，都存在有限常数 $q \ge 2$ 和 $C_q > 0$ ，它们仅依赖于 k_0，并具有以下性质。设$\mathbf{X}$ 是一个巴拿赫空间，且维数$\mathbf{X} > k_0$；假设对于X的每个 k_0维子空间 E ， E 到 $\ell_\infty^{k_0}$ 的班纳赫–马祖尔距离大于100。那么$\mathbf{X}$ 必然具有余型 q ，其常数为 C_q。

4. Proof of Theorem C

本节将根据定理 C 构造一个有限余型巴拿赫空间。根据 [10, 20], 的结果，存在一个普适常数 $C > 1$ ，使得对于每个 $n \geq 1$ 和 $N := \lceil Cn \rceil$，高斯多胞体的两个独立副本 $P_{N,\,n}$ 以及 $P_{N,\,n}$ 在 1中的 $\mathbb{R}^n$ 满足

$$d_{BM}(P_{N,n}, \tilde{P}_{N,n}) \geq cn$$

其概率至少为 1 2。将该估计与定理 A 相结合，我们得到：对于某些通用常数 n_0、 $q, C_q < \infty$，以及所有 $n \geq n_0$，事件

$$\mathcal{E}_n := \Big\{ d_{BM}(P_{\lceil Cn \rceil,n}, \tilde{P}_{\lceil Cn \rceil,n}) \geq cn \text{ and both } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_{\lceil Cn \rceil,n}}) \text{ and } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\tilde{P}_{\lceil Cn \rceil,n}}) \\ \text{are of cotype } q \text{ with constant at most } C_q \Big\},$$

具有正概率。

˜在下文中，对每一个 $n \geq n_0$ ，我们用 P_n 和 P_n 表示随机˜多面体 $P_{\lceil Cn \rceil,n}$ 与 $P_{\lceil Cn \rceil,n}$ 的任一实现，使得 $\mathcal{E}_n$ 成立。将巴拿赫空间 $\mathbf{X}$ 定义为 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{P_n})$ 与 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\tilde{P}_n})$ 的 ℓ_q 直和，$n \geq n_0$，即 $\mathbf{X}$ 由向量对的序列 $(x_n, \tilde{x}_n)_{n \geq n_0}$、 $x_n, \tilde{x}_n \in \mathbb{R}^n$ 组成，其范数由下式给出

$$\big\|(x_n, \tilde{x}_n)_{n \geq n_0}\big\|_{\mathbf{X}}^q := \sum_{n \geq n_0} \big(\|x_n\|_{P_n}^q + \|\tilde{x}_n\|_{\tilde{P}_n}^q \big).$$

接下来，我们验证所构造的空间具有余型 q。设 $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}$ 为 $\mathbf{X}$ 中向量的任意集合，其中每个 $y^{(i)}$ 可写成如下形式

$$y^{(i)} = \big(y_n^{(i)}, \tilde{y}_n^{(i)}\big)_{n \geq n_0}, \quad y_n^{(i)}, \tilde{y}_n^{(i)} \in \mathbb{R}^n,$$

并令 $\sigma = (\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_k)$ 为均匀随机符号向量。根据 $\mathbf{X}$ 的定义，

$$\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^k \sigma_i \, y^{(i)} \Big\|_{\mathbf{X}}^q = \sum_{n \geq n_0} \Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^k \sigma_i \, y_n^{(i)} \Big\|_{P_n}^q + \mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^k \sigma_i \, \tilde{y}_n^{(i)} \Big\|_{\tilde{P}_n}^q \Big).$$

此外，根据我们对多面体 P_n 的假设，有

$$\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^k \sigma_i \, y_n^{(i)} \Big\|_{P_n}^q \geq \frac{1}{C_q^q} \sum_{i=1}^k \|y_n^{(i)}\|_{P_n}^q,$$

˜对 P_n 也有类似的不等式。由此我们得到

$$\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^k \sigma_i \, y^{(i)} \Big\|_{\mathbf{X}}^q \geq \frac{1}{C_q^q} \sum_{n \geq n_0} \Big(\sum_{i=1}^k \|y_n^{(i)}\|_{P_n}^q + \sum_{i=1}^k \|\tilde{y}_n^{(i)}\|_{\tilde{P}_n}^q \Big) = \frac{1}{C_q^q} \sum_{i=1}^k \|y^{(i)}\|_{\mathbf{X}}^q,$$

因此结论得证。

References

[1] F. Affentranger 和 R. Schneider，《正则单纯形的随机投影》，《离散与计算几何》**7** (1992)，第 3, 219 226 1149653 期，–。MR D. Alonso-Gutierrez 和 J. Prochno，论边缘分布的高斯行为与随机多胞体的平[2] 均宽度，《美国数学会会刊》 **143** 2015 2, 821 832 3283668 ( )，第 – 期。MR I. Barany，随机多胞体的[3] 内在体积和 -向量，《数学年刊》**285** (1989)，第 4 期，671–699。MR1027765[4] I. B´ar´any：《随机多胞体、凸体与逼近》。载于：A. Baddeley、I. B´ar´any、R. Schneider、W. Weil，《随机几何》（C.I.M.E. 课程，Martina Franca，2004），《数学讲义》，施普林格。

[5] Y. M. Baryshnikov 和 R. A. Vitale，正则单形与高斯样本，《离散与计算几何》**11** (1994 2, 141 147 1254086)，第 – 期。MR K. Boroczky 等，较光滑凸体中随机多胞体的平均宽度，《多元分析期刊》 **100** 2009 10, 2287 2295 2560369 ( )，第 – 期。MR J. Bourgain，论有限维齐次巴拿赫空间，载于 *Geometric aspects of functional analysis (1986/87)* 232 238, 1317, ，–，《数学讲义》，施普林格，柏林。MR0950984[8] A. Dvoretzky，关于凸体和巴拿赫空间的一些结果，载于 *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces* ，–，耶路撒冷学术出版社，耶路撒冷。MR0139079[9] **52** 1965 331 B. Efron，随机点集的凸包，《生物计量学》( )，– 343 0207004 。MR E. D. Gluskin，闵可夫斯基紧集的直径大致等于 n ，Funktsional. Anal. i Prilozhen. **15** 1981 1, 72 73 0609798 ( )，第 – 期。MR T. Godland、Z. Kabluchko、D. Zaporozhets，随机多胞体的角和，arXiv: 2007 02590 。D. Hug、G. Munsonius 和 M. Reitzner，高斯多胞体的渐近均值，Beitrage Algebra Geom. **45** 2004 2, 531 548 2093024 ( )，第 – 期。MR P. Jordan 和 J. von Neumann，关于线性度量空间中的内积，《数学年刊》(2 3, 719 36 1935 723 1503247) ( )，第 – 期。MR[14] Z. A. Kabluchko，随机单形的角与随机多胞体的面数，《数学进展》380 (2021)，论文编号 107612, 68 4205707 页。MR Z. A. Kabluchko 和 D. N. Zaporozhets，高斯多胞体的期望体积、外角与多重次序统计量，《美国数学会会刊》 **372** 2019 3, 1709 1733 3976574 ( )，第 – 期。MR Z. A. Kabluchko 和 D. N. Zaporozhets，高斯多胞体和正则球面单形的吸收概率，《应用概率进展》 **52** 2020 2, 588 616 4123647 ( )，第 – 期。MR Khatri, C. G. 关于正态分布的某些不等式及其在同时置信界中的应用。《数学统计年刊》38 (1967)，1853–1867。[18] K.-H. K ufer，随机多胞体对球的逼近，《应用概率进展》( )，第 – 期。MR[19] S. Kwapie´n，通过带向量值系数的正交级数对内积空间作同构刻画，《数学研究》 **26** 1994 4, 876 892 1303867 **44** 1972 583 595 0341039 ( )，–。MR R. Latala 等，巴拿赫–马祖尔距离与随机次高斯多胞体上的投影，《离散与计算几何》 **38** 2007 1, 29 50 2322114 ( )，第 – 期。MR A. E. Litvak 等，随机矩阵的最小奇异值与随机多胞体的几何，《数学进展》 **195** 2005 2, 491 523 2146352 ( )，第 – 期。MR P. Mankiewicz 和 N. Tomczak-Jaegermann，有限维齐次巴拿赫空间问题的一个解，《以色列数学杂志》 **75** 1991 2 3, 129 159 1164587 ( )，第 - – 期。MR B. Maurey 和 G. Pisier，独立向量值随机变量级数及巴拿赫空间的几何性质，《数学研究》 **58** 1976 1, 45 90 0443015 ( )，第 – 期。MR V. D. Milman，关于 A. Dvoretzky 凸体截面定理的一种新证明，Funkcional. Anal. i Prilo˘zen. **5** 1971 4, 28 37 0293374 ( )，第 – 期。MR J. S. Muller，随机多胞体的平均宽度，《概率论及相关领域》82 (1989)，第 1 期，33–37。MR0997430[26] M. Reitzner，随机多胞体的中心极限定理，《概率论及相关领域》133 4, 483 2005 507 2197111 ( )，第 – 期。MR[27]M. Reitzner，随机多胞体的组合结构，《数学进展》191 (2005)，第 1 期，178–208。MR2102847[28] M. Reitzner，随机多胞体，载于 *New perspectives in stochastic geometry*，45–76，牛津大学出版社，牛津。MR2654675[29] A. R´enyi 和 R. Sulanke， ¨关于随机选取点的凸包，Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **2** 1963 75 84 1963 0156262 ( )，– ( )。MR Z. ˇSidak，多元正态分布均值的矩形置信域，《美国统计学会杂志》62 (1967)，626–633。[31] 9 **1** 2008 1, 17 39 2387995 R. Schneider，随机多胞体的最新结果，《意大利数学联合会通报》( ) ( )，第 – 期。MR R. Schneider 和 W. Weil，，《概率及其应用》（纽约），施普林格，柏林， 2008 2455326 。MR S. J. Szarek，格拉斯曼流形与正交群的网，载于 *Proceedings of research workshop on Banach space theory (Iowa City, Iowa, 1981)* 169 185, ，–，爱荷华大学，爱荷华城，IA。MR0724113[34] *Handbook of convex geometry*W. Weil 和 J. A. Wieacker，随机几何，载于，*Vol. A, B,* 1391–1438，北荷兰出版社，阿姆斯特丹。MR1243013

[35] R. Vershynin, *High-dimensional probability*, 剑桥统计与概率数学丛书, 47, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2018 3837109 . MR V. H. Vu, 随机多面体的尖锐集中, 几何与泛函分析 [36] **15** (2005), no. 6, 1284–1318. MR2221249[37] V. H. Vu, 光滑凸集中的随机多面体的中心极限定理, 《数学进展》**207** 1, 221 2006 243 2264072 ( ), no. – . MRDEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF MISSOURI, COLUMBIA*Email address*: HHUANG@MISSOURI.EDUDEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, CARNEGIE MELLON UNIVERSITY*Email address*: KTIKHOMI@ANDREW.CMU.EDU